

Российская академия наук
Институт вычислительной математики

Марчук Г.И.
Избранные труды

Том 3

**Модели и методы в задачах
физики атмосферы и океана**

Москва 2018

УДК 519.6
ББК 22.19
С56

Ответственный редактор: академик Дымников В.П.

Марчук Г.И. Избранные труды: в 5 т. / Российская академия наук, Институт вычислительной математики. – М.: РАН, 2018.

Т.3.: Модели и методы в задачах физики атмосферы и океана / [отв. ред. В. П. Дымников]. – 892 с.

В настоящем томе представлены основные работы Г. И. Марчука по физике атмосферы, океана и проблемам окружающей среды. Они разделены на четыре раздела. В первом из них представлены статьи по динамике атмосферы, во втором – по динамике океана, в третьем – по взаимодействию атмосферы и океана и в четвертом – по проблемам, связанным с окружающей средой. В конце тома помещены подробные комментарии к статьям, в которых дан анализ вклада Г. И. Марчука в данную область науки.

Для специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования, аспирантов и студентов старших курсов.

ISBN 978-5-906906-30-4

© Российская академия наук,
Институт вычислительной
математики, 2018
© Марчук Г.И., 2018

Оглавление

Предисловие	7
Физика атмосферы и океана и проблема прогноза погоды.....	9
 1. ДИНАМИКА АТМОСФЕРЫ	
О динамике крупномасштабных атмосферных процессов	27
Теоретическая модель прогноза погоды	77
Теорема существования решения задачи краткосрочного прогноза погоды.....	84
Численный алгоритм решения уравнений прогноза погоды	88
Краткосрочный прогноз погоды по полным уравнениям на ограниченной территории	92
К теории биортогональных разложений полей метеорологических элементов	108
Малопараметрическая модель динамики атмосферы спектрально-разностного типа	114
Глобальная модель общей циркуляции атмосферы	133
О решении задач атмосферной оптики методом Монте-Карло.....	157
Уравнение для ценности информации с метеорологических спутников и постановка обратных задач	182
Solution of inverse problems in satellite meteorology	205

Моделирование климата и его изменений: современные проблемы	223
---	-----

2. ДИНАМИКА ОКЕАНА

О нелинейных задачах океанической циркуляции	258
О численном решении задачи Пуанкаре для океанических циркуляций	264
О методе выделения баротропной составляющей в задачах динамики океана	270
Численный метод расчета приливных движений в окраинных морях	276
Внутренние гравитационные волны в реально стратифицированном океане.....	290
О методах конечных разностей и конечных элементов в задаче глобальной ветровой циркуляции океана	306
Расчет основных гидрологических полей Черного моря	317
Об асимптотическом поведении решения линейных уравнений динамики бароклинного океана при больших временах	337
Вариационно-разностной метод решения задачи теории приливов и циркуляций в бароклинном океане.	348
Программа «Разрезы» и мониторинг Мирового океана	365
Схема решения двумерного параболического уравнения методом конечных элементов в комбинации с методом расщепления.....	376
Математическое моделирование морских течений, приливных волн и разработка численных алгоритмов	414
Splitting Numerical Technique with Application to the High Resolution Simulation of the Indian Ocean Circulation	431

A numerical method for the solution of tidal dynamics equations and the results of its application	457
Mathematical modelling of the World Ocean general circulation: numerical technique and multiple equilibria of model solutions.....	478

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

Математическая модель общей циркуляции атмосферы и океана.....	509
Основные и сопряженные уравнения динамики атмосферы и океана.....	515
Методы долгосрочного прогноза погоды на основе решения основных и сопряженных задач	552
Исследование чувствительности дискретных моделей динамики атмосферы и океана	575
Численный расчет сопряженной задачи для модели термического взаимодействия атмосферы и океана.....	588

4. ПРОБЛЕМЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Структура математических моделей в гидродинамических задачах окружающей среды.....	604
Численное моделирование микроклимата города	618
Глобальный перенос примеси в атмосфере.....	633
Распространение примесей в атмосфере с учетом конденсации	649
Aerosol formation mathematical modelling with consideration for condensation kinetics	662

Mathematical modelling of the atmospheric aerosol transfer with coagulation taken into account	682
Dynamics of mesoscale boundary atmospheric layer and impurity spreading with the photochemical transformation allowed for	698
Математическое моделирование в задачах окружающей среды	724
Математическое моделирование региональных задач окружающей среды.....	756
Численное моделирование глобального переноса стойких органических веществ в окружающей среде	780
Сопряженные уравнения и трансграничный перенос примесей	797
Формирование сульфатных аэрозолей в тропосфере и ниж- ней стратосфере	815
Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в ат- мосфере и их значение для биосферы.....	835

КОММЕНТАРИИ

К работам по динамике атмосферы (В.П. Дымников)	862
К работам по динамике океана (В. Б. Залесный, А. С. Саркисян)	867
К работам по взаимодействию атмосфера и океана (В. П. Дымников)	880
К работам по проблемам окружающей среды (А. Е. Алоян)	883

Предисловие

Работы Г. И. Марчука в области физики атмосферы, океана и окружающей среды оказали сильное влияние на развитие этой области науки, в первую очередь, на развитие центрального направления последних десятилетий – численного моделирования динамики атмосферы и океана и связанного с ним решения главных задач геофизической гидродинамики – задач прогноза погоды и изменений климата.

Результаты, полученные Г. И. Марчуком в рамках этого направления, по достоинству были оценены общественной и международной научной общественностью: достаточно сказать, что за выдающиеся достижения в этой области науки ему были присуждены премия АН СССР им. Фридмана, Государственная премия Российской Федерации, международная премия им. Карпинского, премия им. Бьеркнеса Европейского геофизического союза. В 2010 г. Г. И. Марчук был избран почетным членом Американского метеорологического общества.

В настоящем томе представлены основные работы Г. И. Марчука по физике атмосферы, океана и проблемам окружающей среды. Работы разделены на четыре раздела. В первом разделе представлены статьи по динамике атмосферы, во втором – по динамике океана, в третьем – по взаимодействию атмосферы и океана и в четвертом – по проблемам, связанным с окружающей средой.

В конце тома помещены достаточно подробные комментарии к статьям, в которых дан анализ вклада Г. И. Марчука в данную область науки. Конечно, следует иметь в виду, что в существенной степени в комментариях изложены личные точки зрения их авторов.

В начале тома помещена статья Г. И. Марчука, в которой он сформулировал и обсудил целый ряд проблем, необходимых для решения задач прогноза погоды и прогноза изменений климата. Хотя статья написана почти сорок лет назад, большинство задач, обсуждаемых автором в этой работе, являются актуальными и в настоящее время. Конечно, за прошедший период динамическая метеорология и океанология сделали существенный шаг вперед как с точки зрения понимания физических механизмов, ответственных за предсказуемость атмосферных и океанических процессов, так и с точки зрения конструирования моделей общей циркуляции атмосферы и океана. Этот процесс был сильно стимулирован бурным развитием вычислительной техники и вычислительной математики. Чтобы продемонстрировать современ-

ный уровень моделирования общей циркуляции атмосферы и океана, составители данного тома сочли необходимым поместить в его конце обзорную статью В. П. Дымникова, В. Н. Лыкосова, Е. М. Володина «Моделирование климата и его изменений: современные проблемы». Эта статья по целому ряду рассматриваемых проблем тесно переплетается с работой Г. И. Марчука, также эту статью в определенном смысле можно рассматривать как дополнительный комментарий к работам Марчука, помещенным в данном томе (*сокращенный вариант этой статьи опубликован в «Вестнике РАН», 2012, т. 82, с. 227–236*).

Перед составителями данного тома, как впрочем и других томов издания, стояла традиционная проблема выбора статей. Естественно, этот выбор был согласован с Г. И. Марчуком, и надеемся, что читатель найдет обоснование выбора в приведенных в конце тома комментариях.

Составители данного тома трудов Г. И. Марчука выражают искреннюю признательность В. А. Арутюняну за огромный труд, проделанный им при подготовке книги к печати.

Академик В. П. Дымников

ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА И ПРОБЛЕМА ПРОГНОЗА ПОГОДЫ¹

Излагаются проблемы, связанные с изучением динамики атмосферы и океана и предсказуемости полей метеорологических элементов. Рассматриваются фундаментальные вопросы физики атмосферы и океана, относящиеся к построению теории и разработке методов прогноза погоды, а также к исследованиям общей циркуляции атмосферы.

Прогноз погоды является одной из центральных проблем науки, активно влияющей на многие отрасли народного хозяйства, такие как сельское хозяйство, коммунальное хозяйство, авиация и др. Повышение качества прогноза погоды практически немедленно приводит к повышению эффективности народного хозяйства. Резервы экономики, реализуемые за счет даже небольшого повышения качества прогноза погоды, приводят к эффекту, исчисляемому в сотнях миллионов рублей в год. Поэтому в «Основных направлениях развития народного хозяйства СССР на 1976–1980 гг.», утвержденных XXV съездом Коммунистической партии Советского Союза, поставлена задача – осуществлять дальнейшую разработку методов прогнозирования погоды и стихийных бедствий. Несомненно, что интенсивное развитие исследований в области прогноза погоды создаст условия для реализации большого экономического эффекта в масштабе страны.

Вместе с тем по своему внутреннему содержанию, разнообразию способов перехода энергии из одних форм в другие, широте спектра волновых процессов, реализуемых в атмосфере, эта проблема является одной из наиболее сложных и интересных проблем естествознания. В ней фокусируются основные положения гидродинамики, законы статистической механики и физики, методы теории переноса излучения, алгоритмы вычислительной математики.

Проблема прогноза погоды тесно связана с исследованиями в области физики атмосферы и океана: результаты этих исследований используются для формулировки более полных и физически обоснованных математических моделей динамики атмосферы и океана с учетом их взаимодействия. Именно исследования в области физики атмосферы и океана создали условия для более глубокого понимания основного механизма динамики этой сложной системы и указывают путь к усовершенствованию методов прогноза погоды. Мы сейчас

¹Метеорология и гидрология 1976, № 10, с. 3–14.

переживаем время бурного развития метеорологии, когда на смену качественным синоптическим методам приходят методы гидродинамические, базирующиеся на математическом описании основных законов физики применительно к атмосферным процессам. В создании гидродинамических методов прогноза погоды видную роль сыграла советская школа метеорологов во главе с академиком Кочиным.

Краткосрочный прогноз погоды

Первая попытка расчета прогноза погоды на основе численного интегрирования уравнений гидромеханики была предпринята Ричардсоном в 1921 г. Прогноз на один день рассчитывался большим коллективом вычислителей в течение шести месяцев и оказался неудачным. Причина неудачи состояла в том, что система уравнений была очень сложна и описывала вместе с существенными факторами много несущественных деталей. Это сильно ухудшало аппроксимацию задачи. Далее, как оказалось, Ричардсон не соблюдал необходимых согласований при выборе временных шагов в зависимости от шагов по пространству. Это приводило к неустойчивому вычислительному процессу. Следует, однако, отметить, что в начале 20-х гг. XX в. теория вычислительной устойчивости еще не была открыта.

Хотя попытка Ричардсона была неудачной, но выводы, сделанные на основе его опыта, были важными для будущего. А именно: стало ясно, что для целей прогноза погоды исходные уравнения гидродинамики нужно упрощать так, чтобы они прежде всего были способны описывать основные факторы, ответственные за динамику процесса, и фильтровать несущественные для метеорологии факторы – так называемые метеорологические шумы. И далее, вычислительная схема должна обладать определенными свойствами, такими как аппроксимация, счетная устойчивость и сходимость. Тогда такой численный метод оказывается пригодным для расчета.

Эти трудности были преодолены в работе Кибеля 1940 г., где на основе специального асимптотического разложения ему удалось системе уравнений гидродинамики упростить, отфильтровав несущественные метеорологические шумы. Это была первая гидродинамическая теория, которая смогла хотя и в общих чертах, но уже объективно описать эволюцию атмосферных процессов для целей краткосрочного прогноза погоды. Можно сказать, что именно эта работа проложила путь дальнейшему развитию численных гидродинамических методов краткосрочного прогноза погоды.

В 50-х гг. XX в. создаются благоприятные условия для развития более полных и физически обоснованных схем краткосрочного прогноза погоды на основе так называемых бароклинических моделей, учитывающих связь атмосферного давления не только с плотностью воздуха (такие модели обычно называют баротропными), но и с температурой. Существенные результаты здесь были получены Кибелем, Обуховым, Булеевым, Юдиным и др. К этому времени также начинают публиковаться аналогичные зарубежные работы Чарни, Филлипса, Хинкельмана, Као и др.

Бароклинические модели прогноза, основанные на асимптотическом разложении решения по малому параметру, привели к первым оперативным схемам, внедренным в оперативную метеослужбу СССР.

В 60-х гг. XX в. появляется необходимость отойти в моделях прогноза погоды от постановок задач, основанных на разложении решения по малому параметру, и перейти к более полным уравнениям гидродинамики. Этому способствовали прежде всего накопленный опыт оперативной работы, систематический анализ численных прогнозов, выявившиеся недостатки моделей, а также прогресс в методах вычислительной математики. В это время появляются более мощные ЭВМ и универсальные и эффективные методы решения сложных задач. Все это способствовало в конечном итоге осуществлению идеи Ричардсона об интегрировании полной системы уравнений. Был разработан ряд первоклассных схем краткосрочного прогноза погоды, в создании которых принимали участие коллективы ученых Москвы, Новосибирска и Ленинграда.

В настоящее время оперативный прогноз на 24 и 36 ч дается с помощью ЭВМ по данным на ограниченной территории по области размером примерно $10\,000\text{ км} \times 8000\text{ км}$ с шагом сетки, равным 300 км, и на шести уровнях тропосферы и нижней стратосферы. Расчетный интервал времени выбирается равным 30 мин. В прогностических схемах на трое суток уже рассматривается все северное полушарие Земли с шагами по долготе 10° , широте 5° и с шестью уровнями по вертикали. Они требуют задания около 25 тыс. данных о полях ветра и температуры в атмосфере.

На указанных сетках численные методы доведены до такого качества, что дальнейшее уточнение вычислительного процесса с помощью уменьшения шагов сетки, повышения порядка аппроксимации и т. д. уже не приводит к существенному улучшению прогноза погоды. Основное уточнение можно ожидать в связи с улучшением метеоро-

логической информации, используемой в качестве начальных данных для численного решения задачи прогноза. Следующий этап в уточнении методов краткосрочного прогноза связан с более детальным учетом основных физических факторов, включенных в модель, таких как турбулентность, радиация, фазовые переходы водяного пара, теплопроводность почвы и др. Таким образом, метеорологическая информация и проблемы физики атмосферы являются теми двумя ключевыми позициями, прогресс в которых окажет непосредственное влияние на дальнейшее повышение качества краткосрочного прогноза погоды, особенно при увеличении срока его заблаговременности до одной недели.

На основе достижений в разработке численных методов краткосрочного прогноза погоды в настоящее время намечен подход к новой задаче. Речь идет о так называемом локальном прогнозе погоды, основы которого были заложены работами Дородницына и Кибеля. Схемы локального прогноза используют информацию о крупномасштабном фоновом процессе и учитывают мелкомасштабные особенности рельефа, характера подстилающей поверхности, водоемы и т. д. Они даются для областей размером $300 \text{ км} \times 300 \text{ км}$ с шагом 10 км на сроки 6, 12 и 24 ч. Локальные прогнозы позволяют описать такие особенности погоды, которые практически интересуют каждого человека: облачность, осадки, ход температуры, опасные явления и т. д. Эти прогнозы, конечно, потребуют подключения дополнительной информации мелкомасштабного характера и создания специальных методов ее обработки.

Долгосрочный прогноз погоды

Прогноз погоды на период времени свыше одной недели принято называть долгосрочным. Он имеет также свои определенные рубежи: две недели, месяц и сезон. В зависимости от заблаговременности прогноза меняются основные действующие факторы и, следовательно, основная схема расчета. Тем не менее общими для таких прогнозов являются их глобальность, большая зависимость от термического состояния континентов и влияние Мирового океана.

Проблема долгосрочного прогноза погоды, в силу своей важности, является и будет являться центральной проблемой научных исследований в течение ближайших десятилетий. Ввиду своей необычайной сложности, а именно сложности физических постановок задач, методов и средств их решения, отсутствия достаточного объема необходи-

мой метеорологической и гидрофизической информации, эту проблему по справедливости можно назвать «проблемой века». Для ее удовлетворительного решения потребуются существенное развитие ряда разделов физики атмосферы и океана, спутниковой метеорологии и создание мощной вычислительной базы.

Можно указать по крайней мере на три направления в развитии методов долгосрочного прогноза погоды: синоптический, статистический и гидродинамический.

Синоптический метод основан на качественной типизации сходных атмосферных процессов по начальному их состоянию и предыстории. При этом используется набор некоторых правил, подмеченных синоптиками на основе большого опыта оперативной работы, являющихся отражениями более глубоких закономерностей.

В настоящее время вся оперативная служба долгосрочных прогнозов погоды пока еще основывается на обычных синоптических методах.

Статистический метод в долгосрочном прогнозе погоды начал развиваться сравнительно недавно, в начале 60-х гг. XX в., и первоначально базировался на представлении полей метеоэлементов в виде рядов Фурье по сферическим функциям и временном экстраполировании коэффициентов Фурье, известных в предыдущие моменты времени. В дальнейшем в статистических методах начали широко использоваться так называемые естественные ортогональные функции – результат решения спектральной задачи для корреляционной матрицы. Порождаемая этой задачей система естественных ортогональных функций оказалась очень информативной и позволила всего небольшим числом членов ряда хорошо представлять метеорологические поля. Именно такой подход к представлению полей с последующей временной экстраполяцией коэффициентов положен в основу статистического метода долгосрочного прогноза погоды.

Переходя к изложению центрального пункта сообщения, связанного с гидродинамическими методами долгосрочного прогноза, прежде всего следует отметить важное значение работы Блиновой, опубликованной в 1943 г., в которой была сделана первая попытка сформулировать задачу долгосрочного прогноза для баротропной атмосферы на основе линеаризованного уравнения для вихря. На основе анализа уравнения вихря были найдены спектры волновых движений в атмосфере и построена первая гидродинамическая модель климата. Это направление в дальнейшем было развито Блиновой и ее учениками.

Существенное значение для формирования современных представлений о методах долгосрочного прогноза погоды имели работы американских метеорологов Смагоринского, Лейса, Минца и Лоренца по моделированию общей циркуляции атмосферы. Хотя эти работы не были направлены на прогноз погоды, они позволили сделать некоторые важные выводы о предсказуемости метеорологических элементов на основе этих схем, о колебаниях системы атмосфера – океан, о временах установления периодических процессов в атмосфере и океане и т. д. Однако попытка использования этих уравнений для целей прогноза погоды по начальным фактическим полям привела к весьма пессимистическому выводу о том, что срок предсказуемости процессов по этим схемам не превышает двух недель. Из этого многократно проверенного факта был сделан вывод о том, что на срок более двух недель прогноз погоды вряд ли возможен вообще.

Исследования советских метеорологов показали, что возможны более общие постановки проблемы гидродинамического прогноза погоды, которые в той или иной степени дадут возможность для предсказания погоды на срок до сезона. Математическая теория такого подхода основана на использовании сопряженных уравнений гидродинамики и специальным образом построенной теории возмущений. Эта теория разработана в ВЦ СО АН СССР. Принципиальная концепция, которая положена в основу формулировки задачи о долгосрочном прогнозе погоды, состоит в следующем.

Важнейшим механизмом, ответственным за формирование аномалий погоды на фоне сезонного климатического режима атмосферы, является планетарная облачность, которая создает условия для неравномерного прогревания континентов и Мирового океана.

Неравномерно прогретые области континентов и океана изменяют гидродинамический ход атмосферных процессов и вызывают более или менее существенные отклонения погоды от климата. Этот процесс осложняется еще и тем, что неравномерно прогретые воды Мирового океана в результате циркуляции транспортируются течениями в новые, иногда весьма отдаленные, географические районы планеты и там отдают свое тепло атмосфере, вызывая в ней на первый взгляд неожиданные изменения погоды.

В этом сложном процессе превращения лучистой энергии Солнца в кинетическую энергию атмосферных движений прослеживаются многочисленные прямые и обратные связи, которые в конечном итоге ответственны за долгопериодные изменения погодных условий. Эти

связи нелинейные, но именно это является важнейшим фактором поддержания относительной устойчивости атмосферных процессов, реализуемых в форме колебательных движений.

Такие нелинейные колебательные движения, наложенные на периодический сезонный ход, были обнаружены синоптиками на основе анализа фактического материала наблюдений. Они также были обнаружены исследователями в численных экспериментах на моделях по общей циркуляции атмосферы и океана.

Наконец, такие движения атмосферы с учетом облачности и теплопередачи Мирового океана в рамках простой линейной модели были найдены Мониным и Гаврилиным, теоретическим путем установившими период колебания системы: этот период для типичных условий оказался равным нескольким месяцам.

Таким образом, на основе синоптического анализа, численного моделирования общей циркуляции атмосферы и океана и анализа дисперсионных соотношений линеаризированных моделей циркуляций к настоящему времени можно считать установленным главный механизм, ответственный за долговременные отклонения погоды от климатической нормы. Этот механизм основан на взаимодействии атмосферы с океаном и подстилающей поверхностью континентов с учетом динамики планетарных облачных систем.

В общих чертах процесс формирования долгосрочных аномалий в погодных условиях можно себе представить следующим образом. Над районами Мирового океана формируются облачные системы, которые ответственны за поток тепла в его поверхностные слои. Если облачность меньше климатической нормы, то она пропускает солнечной радиации больше, поэтому поверхностный слой воды нагревается интенсивнее.

Часть аккумулированного поверхностным слоем воды тепла излучается в форме длинноволновой радиации, подогревая атмосферу. Другая часть тепла с помощью вертикального турбулентного обмена переносится в нижние слои океана до глубин в несколько сотен метров. Если аномально низкая облачность над данной частью Мирового океана устанавливается на длительный срок (от месяца до сезона), то глубинное прогревание океана в этом районе оказывается весьма существенным (порядка одного или нескольких десятых градуса).

Прогретые воды течениями переносятся на север Атлантики и Тихого океана и достигают таких широт, где в поверхностном слое океана под влиянием низких температур воздуха образуется зона верти-

кальной неустойчивости, которая способствует возникновению мощных конвективных неупорядоченных движений, выносящих запас тепла из глубинных слоев в атмосферу. Область интенсивного теплообмена между океаном и атмосферой приходится в Атлантическом океане примерно на акваторию около острова Исландия и в Тихом океане – на акваторию Алеутских островов. В Южном полушарии она располагается вблизи Антарктиды.

Тепло океана, выделенное в атмосферу, прогревает воздух данного региона. Вследствие соседства с полярным холодным воздухом в этих областях создаются большие температурные контрасты, которые приводят к образованию мощных циклонов, являющихся формой разрешения горизонтальной неустойчивости воздушных масс. Такие циклоны увлекаются на восток мощным планетарным течением умеренных широт, транспортируя порции тепла на континенты и создавая на них зоны потепления. Если учесть скорость течений в Атлантическом и Тихом океанах и удаление зоны активного прогрева поверхностных субтропических вод от северных критических областей активного теплообмена, то оказывается, что это время примерно равно сезону. Это значит, что существенные температурные аномалии в океане окажут влияние на погоду континентов примерно через сезон.

Аналогичным образом можно показать, что аномально большая облачность над океаном в конечном итоге приводит к похолоданию различных регионов континентов.

Мы в данной схеме абстрагировались от рассмотрения теплопередачи в системе атмосфера – континент. В ряде случаев сильный прогрев континентов прямой солнечной радиацией и последующее их выхолаживание также приводят к существенным температурным контрастам и преобразованиям динамики атмосферных процессов с возникновением существенных погодных аномалий. Однако время действия этого фактора, как правило, не превышает двух недель. Поэтому проблема исследования взаимодействия атмосферы и континентов тесным образом связана с прогнозом погоды до месяца вперед.

Физика атмосферы и прогноз погоды

Прежде чем переходить к обсуждению наиболее важных проблем физики атмосферы, решение которых окажет существенное влияние на методы прогноза погоды, напомним основные особенности механизма формирования атмосферных процессов.

Первая особенность атмосферных (а также океанических) движений состоит в том, что гидродинамические процессы в этих системах происходят на вращающейся Земле. Массы воздуха, обычно перемещающиеся в сторону, противоположную барическому градиенту (от области с высоким давлением к областям с низким), на вращающейся Земле под действием силы Кориолиса движутся не поперек, а примерно вдоль изобар – линий равного давления. Такое движение принято называть геострофическим.

Отклонения движения масс воздуха от этих квазиравновесных траекторий – изобар весьма малы, но именно они-то и ответственны за эволюцию метеорологических полей. Поэтому первая трудность моделирования динамики атмосферы заключается в том, что при описании поля течений в атмосфере действующие на динамику факторы весьма малы и находятся в результате исключения больших величин – компонентов, связанных с геострофическим ветром.

Вторая особенность состоит в том, что среднее за год примерно одинаковое давление у поверхности Земли (на уровне моря) становится все более различным от уровня к уровню тропосферы, так что на одних и тех же высотах давление на экваторе оказывается выше, чем на полюсах, и в результате создается градиент давления. Поскольку изобары в этом случае приблизительно совпадают с кругами широт, то в умеренных широтах возникает планетарный геострофический ветер, по величине пропорциональный разности давления, усиливающийся с высотой примерно линейно и достигающий максимума на уровне тропопаузы. Этот ветер обычно называют западно-восточным переносом атмосферы. В среднем по тропосфере он равен 10–15 м/с. Западно-восточный перенос играет очень важную роль в развитии атмосферных процессов, увлекая за собой среднемасштабные (порядка 1000 км) возмущения и существенно влияя на перемещение крупномасштабных планетарных возмущений. Такие возмущения силой инерции отклоняются к западу и, таким образом, движутся против планетарного потока. Если учесть, что скорость западно-восточного переноса меняется в зависимости от энергетического состояния атмосферы, а возмущения типа циклонов и антициклонов

непрерывно эволюционируют, то становится ясной исключительная трудность в прогнозе местоположения возмущения, ответственного за погоду в данном районе.

Третья особенность атмосферы связана с ярко выраженным турбулентным характером происходящих в ней процессов. Турбулентные вихри различных масштабов (от размеров циклона до микроскопических молей) постоянно возникают в атмосфере при потере устойчивости основных движений. Оторвавшись от своего основного потока, турбулентный вихрь становится носителем определенных запасов кинетической и внутренней энергии. Имея значительную свободу в перемещении в потоке, обусловленную вновь приобретенной гидродинамической устойчивостью, такой вихрь мигрирует в системе, взаимодействуя с основным потоком и другими вихревыми образованиями. В результате сложных взаимодействий вихрь теряет устойчивость и распадается на более мелкие вихревые образования, которые некоторое время также оказываются устойчивыми. Этот процесс продолжается до тех пор, пока размер вихрей не окажется столь малым, что на него начнет действовать сила молекулярной вязкости. Под действием вязкости вихрь диссипирует, а его кинетическая энергия идет на дополнительное нагревание атмосферы. Таким образом, мы здесь имеем дело с турбулентным каскадом непрерывно уменьшающихся в размерах вихрей.

Однако наряду с такой естественной иерархией турбулентного обмена в атмосфере действует и другой важный механизм эволюции турбулентности, связанный с укрупнением масштаба квазидвумерных вихрей, или, как иногда говорят, макротурбулентных пульсаций. Такой процесс возникает начиная с вихрей не меньше определенного размера. Этот процесс возникает в среде, где уже сформирован ансамбль вихрей. Гидродинамически взаимодействуя между собой, при случайно благоприятных условиях мелкие вихри перестраиваются в устойчивое вихревое образование более крупного масштаба. Этот процесс может продолжаться и дальше с появлением еще более крупных вихревых образований. Так возникает каскад укрупняющихся турбулентных пульсаций.

Реальные атмосферные движения много сложнее, поскольку на фоне осредненного течения в них одновременно происходит турбулентный обмен, реализующий обе цепочки каскадного процесса. Важность понимания механизма турбулентного обмена для атмосферы состоит в том, что именно благодаря турбулентности осуществляется взаимо-

действие атмосферы с океаном и почвой континентов – этих основных посредников передачи энергии Солнца атмосферным процессом. Поэтому математические описания турбулентного обмена и правильное включение этого механизма в уравнения гидротермодинамики имеют большое значение для разработки методов прогноза погоды.

Большую роль в развитии теории турбулентности применительно к атмосферным процессам, и особенно в условиях однородной турбулентности, сыграли работы Колмогорова, Обухова, Тейлора, Бэтчелора, Мони́на и др. На основе этих исследований были найдены пути различных параметризаций турбулентного обмена в пограничных слоях атмосферы – областях наиболее интенсивного вертикального обмена энергией.

Четвертая особенность связана с механизмом, поддерживающим тепловой режим атмосферы. Хотя источник тепла в атмосфере один – это Солнце, но путей, с помощью которых солнечная радиация переходит в тепловую энергию, несколько. Об одном из них уже говорилось при рассмотрении диссипации кинетической энергии турбулентных пульсаций. Более существенной для формирования термического режима атмосферы является энергия прямой солнечной радиации, поглощаемая поверхностным слоем Мирового океана и континентов. Количество таким образом поглощенной радиации в основном зависит от облачности атмосферы и альбедо подстилающей поверхности. Облака почти полностью отражают солнечную радиацию, а открытый от облаков Мировой океан почти целиком ее поглощает. Количество поглощенной солнечной радиации существенно зависит от характера подстилающей поверхности. Мы не учли еще такие важные факторы, как слой озона в стратосфере, углекислый газ и аэрозоли в тропосфере, которые влияют на прохождение прямой солнечной радиации в атмосфере. Хотя мы располагаем этими сведениями для осредненного климатического состояния атмосферы, однако в реальной обстановке отклонения этих величин от климатической нормы оказываются столь существенными, что они могут повлиять на коренную перестройку метеорологической ситуации. Поэтому несмотря на то что механизм переноса коротковолновой радиации хорошо изучен, мы не располагаем достаточными сведениями о фактическом состоянии слоя озона, плотности атмосферного аэрозоля и др., без учета которых неизбежны большие ошибки в прогнозах. Для решения этих вопросов необходимо создать прецизионную аппаратуру и разработать оперативные методы исследований полей радиации в атмосфере. Важная работа

в этом плане уже проводится в рамках комплексного энергетического эксперимента под руководством Кондратьева.

Другая часть этой сложной проблемы связана с переносом длинноволнового (теплого) излучения в атмосфере. Поверхности океана и континентов, нагретые Солнцем, излучают длинноволновую радиацию, которая частично поглощается водяным паром, озоном и углекислым газом в атмосфере, нагревая ее, и частично уходит в мировое пространство. Если на пути длинноволновой радиации находится облако, то радиация поглощается в его нижней части, подогревая облако, и затем эта часть облака начинает переизлучать радиацию на Землю. Создается так называемый парниковый эффект.

Наконец, одним из важных направлений физики атмосферы и прогноза погоды является проблема облачности. Если слоистообразная облачность в настоящее время поддается определенному описанию на основе уравнений динамики атмосферы с учетом фазовых превращений водяного пара, то кучевая облачность пока не может быть описана с точностью, необходимой для долгосрочного прогноза погоды, хотя ее роль в динамике атмосферы очень существенна. В настоящее время ведутся усиленные поиски методов параметрического описания эволюции кучевой облачности через характеристики неустойчиво стратифицированной атмосферы. Расчет облачности по заданным характеристикам состояния атмосферы представляет собой очень трудную задачу, поскольку здесь приходится иметь дело с нелинейной динамикой и термодинамикой системы, при сложной структуре турбулентности, с кинетическими процессами формирования водяных капель и кристаллов льда, распределенных по размерам, тепловыделением при фазовых переходах воды и др.

Солнечно-земные связи и прогноз погоды

В заключение этого раздела следует несколько слов сказать о солнечно-земных связях и влиянии их на физические процессы в атмосфере. Тепловой режим атмосферы очень чувствителен к солнечной постоянной. Некоторое время тому назад считалось, что в периоды повышения активности Солнца, коррелируемые с образованием пятен, астрономическая солнечная постоянная увеличивается на 1–2%. Такие изменения, как показали эксперименты по численному моделированию общей циркуляции атмосферы, могут привести к повышению температуры атмосферы до 2–3 °С, и это было бы очень существенным для динамики атмосферы.

Однако более тщательные измерения вариаций солнечной постоянной и анализ результатов произведенных в последнее время исследований показали, что предполагаемые вариации оказались сильно завышенными. Речь может идти об изменениях этой величины в десятые или даже сотые доли процента. Такие вариации не могут оказать существенного прямого влияния на перестройку циркуляции в атмосфере. Что касается заряженных частиц, проникающих в верхние слои атмосферы в периоды повышения солнечной активности, то их энергетическое воздействие еще меньше, чем от вариации солнечной постоянной. Таким образом, в настоящее время мы не располагаем убедительными фактами о существенном влиянии вариаций солнечной активности на погоду.

Однако поскольку процессы динамики атмосферы слабо устойчивы и очень чувствительны к малым энергетическим возмущениям, может оказаться, что связь, аналогичная спусковому механизму, все же существует.

В частности, одна такая возможность связана с существенным повышением в период вспышек на Солнце интенсивности ультрафиолетового излучения, каталитическое действие которого способствует ослаблению озонового слоя в стратосфере и в конечном итоге прохождению прямой солнечной радиации в тропосферу. В настоящее время производится количественная оценка этого влияния, которая позволит сделать более обоснованный вывод о роли вариаций солнечной активности на динамику атмосферных процессов.

Физика океана и прогноз погоды

Океан, покрывающий более чем на 70% поверхность земного шара, является сложной системой, в которой постоянно возникают и исчезают циркуляции различного масштаба, формируются мощные планетарные течения и противотечения, происходит перенос тепла и солей из одних районов в другие. И все эти процессы, взаимно адаптирующиеся на основе законов гидротермодинамики, протекают в условиях постоянной связи океана с атмосферой при непрерывном их взаимодействии.

Прогретые в тропических и субтропических широтах воды формируются в течения, транспортирующие приобретенное от Солнца тепло в полярные широты планеты. После выброса тепла в атмосферу охлажденные воды снова устремляются к экватору, чтобы начать новый

термодинамический цикл гигантской тепловой машины, которой является система атмосфера – океан. Этот термодинамический процесс реализуется с помощью сложного набора разнообразных движений, допускаемых законами физики: от мелкомасштабных и короткопериодных турбулентных пульсаций и внутренних гравитационных волн до планетарных колебаний уровня поверхности океана.

Типичная структура Мирового океана в зоне субтропических и умеренных широт может быть схематически описана следующим образом. Прежде всего, у поверхности океана формируется однородный слой воды, в котором осуществляется интенсивное перемешивание вследствие ветрового волнения свободной поверхности. В зависимости от балльности волнения толщина этого слоя может колебаться в интервале от нескольких метров до нескольких десятков метров. Такой слой принято называть поверхностным слоем трения, и он является своеобразной диафрагмой для обмена энергией между атмосферой и океаном: при спокойном состоянии океана обмен идет очень слабо, а при штормовых процессах обмен усиливается в десятки и даже сотни раз. Кстати, следует отметить, что в результате штормов из океана в атмосферу ежегодно поступает около 20% всего тепла, поступающего из океана в атмосферу, что уже свидетельствует о важности этого механизма передачи энергии.

Ниже слоя трения располагается наиболее важный с точки зрения проблемы взаимодействия атмосферы и океана бароклинный слой воды толщиной до полутора километров в экваториальных и умеренных широтах и резко сходящий на нет в северных и южных критических широтах – зонах мощной конвекции и неустойчиво стратифицированных вод. В этом слое океана температура воды понижается с глубиной почти линейно, поэтому он обычно именуется слоем термоклина. Слой термоклина образуется вследствие неравномерного притока тепла к поверхности Мирового океана и одновременного действия горизонтального и вертикального турбулентного обмена. Именно в слое термоклина аккумулируются и переносятся течениями запасы тепла, которые после поступления в атмосферу способны оказать влияние на существенную перестройку атмосферных процессов.

Ниже слоя термоклина океан снова становится однородным и баротропным. Здесь горизонтальные течения оказываются уже медленными и гидродинамически устойчивыми. Они, за исключением придонного слоя трения, не меняются с глубиной и, как правило, являются

противотечениями более интенсивных, но менее мощных бароклинических течений.

На формирование течений большое влияние оказывает отклоняющая сила вращения Земли, которая мощные планетарные течения прижимает к восточным берегам континентов. В силу законов Бернулли и сохранения массы это приводит к интенсификации прибрежных течений и формированию мощных струйных течений – Гольфстрима в Атлантике и Куроисио в Тихом океане. Эти течения являются важнейшим механизмом передачи тепла из экваториальной зоны в полярную. Ввиду большого расхода воды Гольфстримом в нижней его части формируется интенсивное противотечение, которое также транспортирует холодные воды в южные широты. Течение Куроисио менее интенсивное, поскольку оно разбивается островами Японии на ряд мелких струйных течений, но оно также играет большую роль в планетарном термодинамическом цикле.

Наконец, особое значение для динамики системы атмосфера – океан имеют экваториальные восточно-западные течения, образующиеся под действием пассатов. Эти течения в Тихом и Атлантическом океанах имеют характер мощных струйных потоков с полями глубинных противотечений. Природа этих струйных течений отлична от Гольфстрима и Куроисио. Такие течения, энергетически поддерживаемые пассатами и увлекаемые ими, образуются на границах раздела гигантских вихрей – северных и южных циркуляций Мирового океана. Эти течения, встречаясь вблизи экватора, образуют своеобразный пограничный слой с интенсификацией восточных течений. Несмотря на маломощность пассатных циркуляций океана, они, как показал Бьеркнес, играют большую роль в формировании планетарных особенностей циркуляций. В частности, было установлено, что при уменьшении интенсивности пассатов в Тихом океане наблюдается более сильный прогрев поверхностных экваториальных вод и повышение температуры воздуха в тропической области. Создается большая разность приземных температур (а следовательно, давлений на высотах) между экватором и полюсом. В результате происходит интенсификация планетарных атмосферных течений в умеренных широтах над акваторией Тихого океана. В соответствии с законом сохранения полной кинетической энергии, который приближенно справедлив для атмосферы, это сопровождается одновременным уменьшением интенсивности атмосферных течений над Атлантикой. Таким образом, под влиянием аномалий в пассатной циркуляции происходит существен-

ное изменение циркуляции атмосферы. А это значит, что изучение циркуляции океана и атмосферы в зоне тропических широт является одной из важных задач в выяснении механизма планетарных циркуляций. Именно по этой причине Всемирная метеорологическая организация в качестве первого этапа международной программы глобальных исследований атмосферы осуществила в 1974 г. так называемый тропический эксперимент, целью которого было всестороннее изучение атмосферы и океана и области экватора и субтропиков. Наблюдения в эксперименте проводились всеми существующими в настоящее время средствами, начиная с «кораблей погоды» и кончая метеорологическими спутниками.

Не менее важное значение для изучения крупномасштабных циркуляций в атмосфере имеют полярные области нашей планеты со своими особенностями течений в океане, динамикой ледяного покрова, теплообменом с воздухом и др. Особое значение при этом имеет термический режим Арктики и Антарктики, который наряду с экваториальной областью ответствен за интенсивность планетарных течений умеренных широт и их устойчивость.

Программа экспериментального изучения атмосферы и океана на кораблях погоды, осуществленная учреждениями Академии наук и Гидрометслужбы СССР в зоне тропических и арктических широт, и проведенные в последние годы Академией наук широкие экспедиционные работы под руководством академика Бреховских в области умеренных широт дали ценнейший материал для построения теории и математических моделей динамики атмосферы и океана.

Проблема метеорологической информации

В настоящее время метеорологическая информация оказывается одним из решающих факторов для коренного улучшения методов прогноза погоды. Оперативная аэрологическая информация ежедневно поступает только из 800 пунктов, из которых 700 расположены в Северном полушарии. Сеть станций крайне неравномерна: она достаточно густа в Европе и Северной Америке и очень редка на других континентах. Почти полностью отсутствует аэрологическая информация о Мировом океане. Это значит, что более 2/3 поверхности Земли не освещено необходимой метеорологической информацией. Между тем качество прогнозов, особенно долгосрочных, зависит от состояния всей атмосферы и Мирового океана. Поэтому никакие, даже самые полные и физически обоснованные схемы прогноза не могут

в настоящее время существенно повысить качество прогноза без коренного улучшения сведений о состоянии атмосферы и океана. Более того, за последние годы в связи с прогрессом в области численных методов прогноза погоды требования к метеорологической информации резко возросли.

Радикальное решение этих вопросов мы надеемся получить с помощью метеорологических спутников, которые уже сейчас поставляют важные сведения об облачных системах в атмосфере, особо опасных явлениях погоды и др., набор которых и их точность непрерывно возрастают.

Вопрос о точности измерения параметров атмосферы при помощи спутников имеет фундаментальное значение. Особое значение имеет программа развития новых высокоинформативных приборов, регистрирующих спектральные характеристики приходящей от атмосферы к спутнику радиации и методы решения обратных задач по восстановлению метеорологических параметров атмосферы.

Новый крупный шаг в решении проблемы метеорологической информации будет связан с организацией в ближайшие 5–10 лет глобальных метеорологических наблюдений с помощью системы спутников, которая будет включать 3–4 геостационарных спутника, с большой точностью регистрирующих облачность и скорости ветра, и 3–4 спутника с приемниками инфракрасного излучения и излучения в микроволновом радиодиапазоне.

Задача получения достаточной для гидродинамических моделей информации настолько важна для развития физики атмосферы, теории климата и прогноза погоды, что Всемирная метеорологическая организация приняла решение о проведении в 1978 г. большой программы глобальных исследований атмосферы. В осуществлении этой программы Советский Союз принимает самое активное участие. Выполнение программы даст ценнейший материал, который позволит проверить модели общей циркуляции атмосферы и прогноза погоды. Эти сведения также помогут исследователям в планировании развития более глубоких гидродинамических теорий.

XXV съезд КПСС поставил проблему прогноза погоды и стихийных бедствий в ряд важнейших проблем науки. Несомненно, что прогноз погоды в ближайшие годы станет одной из тех важных проблем науки, в решении которой примут активное участие ученые Академии наук СССР, Гидрометслужбы СССР и других ведомств. Только на основе концентрации сил коллективов ученых и материальных ре-

сурсов можно надеяться на успешное решение этой важнейшей для народного хозяйства проблемы.



ДИНАМИКА АТМОСФЕРЫ

О ДИНАМИКЕ КРУПНОМАСШТАБНЫХ АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ²

Введение

Наиболее полное представление о крупномасштабных атмосферных процессах, определяющих характер погоды над обширными территориями, можно получить только путем учета всех основных факторов, действующих в реальной бароклинической атмосфере.

При изучении крупномасштабных атмосферных процессов появляется необходимость построения таких математических теорий, которые бы по возможности точно отображали характер и эволюцию реальных полей метеорологических элементов. Математические построения, основанные на использовании законов гидротермодинамики применительно к атмосферным условиям, принципиально позволяют получить соответствующую систему нелинейных уравнений для определения интересующих нас метеорологических элементов. Поэтому в вопросе прогноза полей метеорологических элементов основной задачей теоретической метеорологии является решение полной системы нелинейных уравнений гидротермодинамики.

Попытка получения прогноза погоды теоретическим путем на основе исследования системы уравнений гидротермодинамики была впервые сделана Ричардсоном [9] в 1922 г. Однако Ричардсон не получил удовлетворительных результатов ввиду того, что он методически неправильно подошел к решению поставленной задачи. Дело в том, что в качестве исходных данных Ричардсон брал начальное поле ветра

²Труды института физики атмосферы АН СССР, 1958, № 2, с. 66–104. Совместно с Н. И. Булеевым.

и на основе решения системы уравнений надеялся получить эволюцию поля атмосферных течений во времени. Поскольку же начальное поле скоростей, вообще говоря, всегда содержит многообразие возмущений всевозможных масштабов, то наряду с эволюцией крупномасштабных возмущений, представляющих метеорологический интерес, Ричардсон должен был рассчитать и эволюцию всевозможных мелких возмущений (звуковых, гравитационных и т. д.), метеорологически незначимых. Описание мелких возмущений требует использования соответственно мелких единиц масштаба и малых интервалов времени. Принятые же Ричардсоном масштабы длины и времени были значительно большими, нежели того требовало условие корректности задачи, и поэтому единственный «прогноз», рассчитанный Ричардсоном, не оправдался.

Первое практически применимое решение системы уравнений для атмосферных процессов было получено И. А. Кибелем [2] в 1940 г. Он исходил из допущения, что крупномасштабные атмосферные процессы являются квазигеострофическими. Это позволило И. А. Кибелю взять в качестве исходных данных не начальное поле ветра, а начальное поле давления и температуры и поставить задачу — расчет изменений поля давления и температуры во времени.

Однако в работе И. А. Кибеля не были полностью исчерпаны возможности квазигеострофической модели; так, определение производной температуры во времени $\frac{\partial T}{\partial t}$ производилось при учете только горизонтального переноса масс, а в изменении давления $\frac{\partial p}{\partial t}$ не учитывался фактор конвергенции и дивергенции воздушных масс в атмосфере.

В дальнейших работах метеорологов школы Фридмана – Кочина система уравнения гидротермодинамики использовалась более эффективно, а именно: в качестве отправного уравнения рассматривалось уравнение для вихря скорости, связывающее полное изменение вихря с дивергенцией воздушных масс в горизонтальной плоскости.

В 1941 г. М. Е. Швец [6] получил выражение для вертикальной скорости в виде интеграла по высоте от индивидуальной производной вихря скорости.

В 1943 г. Е. Н. Блиновой [1] удалось ценой линеаризации получить прогностические уравнения для давления p и температуры T на некотором «среднем» уровне атмосферы с учетом сферичности земной поверхности. При этом Е. Н. Блинова исходила из условия сохранения вихря скорости частиц, находящихся на «среднем уровне», и предположения о том, что изменения температуры в атмосфере обусловлены

лишь горизонтальным переносом температурно-неоднородных масс. Полученную таким образом систему линейных уравнений Е. Н. Блинова проинтегрировала при весьма общих предположениях относительно характера начальных полей метеорологических элементов.

Иначе смотрели некоторые зарубежные метеорологи на возможность использования уравнений гидродинамики для прогноза погоды.

Н. Эртель [8], анализируя полученное им уравнение³

$$-\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = \frac{1}{l\rho} (p, \Delta p),$$

и исходя при этом из характера области зависимости решения $\frac{\partial p}{\partial t}$ от поля функции $(p, \Delta p)$, пришел к методологически неверному выводу о невозможности предвычисления будущей карты давления.

Ошибочность такого взгляда ясно следовала из результатов работы А. М. Обухова [3], появившейся в 1949 г., в которой автор при рассмотрении баротропной модели атмосферы получил более совершенное уравнение:

$$-\frac{1}{L_1^2} \frac{\partial p}{\partial t} - \Delta \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{l\rho} (p, \Delta p),$$

где $L_1 = \frac{\sqrt{gH_0}}{l}$, причем H_0 – высота однородной атмосферы, и корректное решение этого уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \int_0^\infty \frac{1}{l\rho} (p, \Delta p) K_0(r) r dr,$$

где $r = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{L_1}$, а $K_0(r)$ – функция Макдональда нулевого порядка.

Н. И. Булеев в 1950 г. получил уравнение для изменения давления в бароклинной атмосфере при условии линейного падения температуры с высотой. Уравнение для изменения давления на «среднем уровне» тропосферы при этом было получено в следующем виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - k_1 \Delta \frac{\partial p}{\partial t} = k_2 (p, \Delta p) + k_3 (\bar{T}, \Delta \bar{T}),$$

где \bar{T} – средняя температура тропосферы, а k_1, k_2, k_3 – некоторые постоянные.

³Здесь и в дальнейшем приняты обозначения, использованные в разделе 1 настоящей работы.

В этой же работе была получена и формула для расчета вертикальной скорости на различных уровнях атмосферы:

$$g\rho w = -a_1(z)\Delta(\bar{T}, p) - a_2(z)[(\bar{T}, \Delta p) + (p, \Delta\bar{T})],$$

где p – давление на «среднем уровне» атмосферы, $a_1(z)$, $a_2(z)$ – коэффициенты, зависящие от высоты.

Баротропная модель атмосферы, а также простейшая бароклиническая модель рассматривались в работе Чарнея [7]. Автор использует уравнение для вихря в геострофическом приближении и уравнение притока тепла без учета вертикальных токов. В результате Чарней приходит к уравнению Пуассона для производной давления на различных уровнях. Интегрирование полученного уравнения в баротропном случае производилось методом конечных разностей при помощи электронных машин. Для интегрирования уравнения Чарней был вынужден дополнительно задавать искусственные граничные условия – значения давления и лапласиана давления как функций времени на границе рассматриваемой области.

Исследованию бароклинической модели атмосферы была посвящена работа И. А. Кибеля (1953 г.). Автор исходит здесь из уравнения вихря в геострофическом приближении и уравнения притока тепла без учета вертикальных токов. Полученное для искомой функции $\frac{\partial z}{\partial t}$ уравнение Пуассона И. А. Кибель интегрирует на поверхностях $p = \text{const}$ и в результате получает решение в виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} F(r, \varphi, p) \ln \frac{r_1}{r} r dr d\varphi + \frac{\overline{\partial z}}{\partial t},$$

где $F(r, \varphi, p)$ – известная функция полей метеорологических элементов во всей толще атмосферы; $\frac{\overline{\partial z}}{\partial t}$ – среднее значение искомой величины на уровне p по окружности радиуса r_1 . Величина $\frac{\overline{\partial z}}{\partial t}$ при достаточно большом r_1 (порядка 1000 км) является практически малой и может быть из рассмотрения исключена. Вынося, далее, среднее значение функции $F(r, \varphi, p)$ из-под знака интеграла и интегрируя функцию влияния $\ln \frac{r_1}{r}$, И. А. Кибель приходит к прогностической формуле

$$\frac{\partial z}{\partial t} = m \bar{F}(r, \varphi, p),$$

где $m = \frac{r_1^2}{4}$, причем ради простоты считается, что функция $\bar{F}(r, \varphi, p)$ равна $F(r, \varphi, p)$ для исследуемой точки.

В настоящей статье авторы ставили целью получение общих уравнений для изменений давления и температуры, а также уравнения для вертикальных токов с учетом всех основных факторов бароклинной атмосферы. Новым по сравнению с предыдущими работами здесь является наиболее полный учет динамических факторов в изменении температуры.

В результате интегрирования полученных дифференциальных уравнений авторы пришли к решениям, представленным в виде пространственных интегралов от определенных выражений, зависящих от распределения полей давления и температуры в пространстве, с соответствующими функциями влияния.

1. Постановка задачи

В целях исследования динамики изменений давления и температуры и образования вертикальных движений в бароклинной атмосфере мы использовали систему уравнений гидротермодинамики применительно к атмосферным процессам большого масштаба. Особенностью этой системы, отличающей ее от обычных уравнений гидродинамики, является наличие в уравнениях движения отклоняющей силы вращения Земли.

Локальное рассмотрение пространственных областей с горизонтальными размерами порядка лишь нескольких тысяч километров позволяет нам стилизовать земную поверхность в пределах рассматриваемой области как плоскость и пользоваться в исходных уравнениях прямоугольной системой координат.

В работе исключаются из рассмотрения области, расположенные в непосредственной близости от экватора ($\varphi = 0-30^\circ$), ибо для этих областей принципиально меняется характер движений.

Исходная система уравнений гидротермодинамики берется в следующем виде:

уравнения движения

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (1.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial v}{\partial z}; \quad (1.2)$$

уравнение статики

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho; \quad (1.3)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0; \quad (1.4)$$

уравнение притока тепла

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{\varepsilon}{c_p}; \quad (1.5)$$

уравнение состояния

$$p = \rho RT. \quad (1.6)$$

В уравнениях (1.1)–(1.6) приняты следующие обозначения: u , v , w – составляющие вектора скорости \vec{V} по осям координат; p – давление; ρ – плотность; T – температура воздуха; $l = 2\omega \cos \Theta$, причем ω – угловая скорость вращения земли, а Θ – дополнение до широты места; μ – коэффициент турбулентного перемешивания; g – ускорение силы тяжести; R – газовая постоянная; ε – приток тепла к единице массы, обусловленный турбулентностью, поглощением радиации, излучением и переходом воды, содержащейся в атмосфере, из одного фазового состояния в другое; c_p – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении; γ_a – адиабатический температурный градиент.

Для полной определенности задачи необходимо еще задать граничные условия и начальные данные.

В качестве граничных условий возьмем обращение в нуль вертикальной скорости у земной поверхности

$$w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad (1.7)$$

и условие свободной поверхности на верхней границе атмосферы

$$\frac{dp}{dt} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Начальными данными будут служить поля давления и температуры при $t = 0$: $p(x, y, z)$ и $T(x, y, z)$.

В дальнейшем удобно перейти к системе координат x' , y' , p , t' , в которой давление p взято в качестве одной из независимых переменных, а оси x' , y' располагаются на изобарических поверхностях. Высота изобарических поверхностей z будет теперь рассматриваться как функция координат x' , y' , p и времени t' .

Переход от первоначальной системы координат x, y, z, t к новой x', y', p, t' осуществляется при помощи следующих преобразований:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p}, & \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial p}, \\ \frac{\partial}{\partial p} &= -\frac{1}{g\rho} \frac{\partial}{\partial z}, & \frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial}{\partial p}, \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

из которых непосредственно следует, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\rho \frac{\partial z}{\partial x'}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = g\rho \frac{\partial z}{\partial y'}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = g\rho \frac{\partial z}{\partial t'}. \quad (1.10)$$

В новой системе координат индивидуальная производная по времени от какого-либо элемента имеет вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t'} + u \frac{\partial}{\partial x'} + v \frac{\partial}{\partial y'} + w \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{dp}{dt} \frac{\partial}{\partial p}. \quad (1.11)$$

Совершенно ясно отсюда, что в системе координат x', y', p, t' роль вертикальной скорости будет играть величина $\tau = \frac{dp}{dt}$, которая представляет смещение частицы воздуха относительно изобарических поверхностей. Переход от w к τ осуществляется при помощи соотношения

$$\tau = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} - g\rho w,$$

или

$$w = -\frac{1}{g\rho} \tau + \frac{\partial z}{\partial t'} + u \frac{\partial z}{\partial x'} + v \frac{\partial z}{\partial y'}. \quad (1.12)$$

Уравнения (1.1) и (1.3) в новой системе координат принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x'} + v \frac{\partial u}{\partial y'} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} = -g \frac{\partial z}{\partial x'} + lv + g^2 \frac{\partial}{\partial p} \rho \mu \frac{\partial u}{\partial p}, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t'} + u \frac{\partial v}{\partial x'} + v \frac{\partial v}{\partial y'} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} = -g \frac{\partial z}{\partial y'} - lu + g^2 \frac{\partial}{\partial p} \rho \mu \frac{\partial v}{\partial p}, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{g\rho}. \quad (1.15)$$

Уравнение неразрывности (1.4) в системе координат x', y', p, t' может быть приведено к весьма простому виду. Для этой цели воспользуемся уравнением статики (1.3) и соотношениями (1.12) и (1.9). Тогда, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right), \quad (s = x, y, t),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w}{\partial y} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \rho \frac{\partial \tau}{\partial p}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{g} \left(u \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \\ &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{1}{g} \left(u \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \\ &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} \right) - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

получаем из (1.4)

$$\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0. \quad (1.16)$$

Уравнение притока тепла (1.5) с учетом новых переменных запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t'} + u \frac{\partial T}{\partial x'} + v \frac{\partial T}{\partial y'} = \frac{\gamma_a - \gamma}{g\rho} \tau + \frac{\varepsilon}{c_p}, \quad (1.17)$$

где

$$\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}.$$

Наконец, граничные условия (1.7) и (1.8) в новых переменных запишем следующим образом:

$$\tau = 0 \quad \text{при} \quad p = 0, \quad (1.18)$$

$$\tau = g\rho_0 \frac{\partial z_0}{\partial t'} \quad \text{при} \quad p = p_0. \quad (1.19)$$

Легко видеть, что выбранная нами система координат позволила записать уравнения гидротермодинамики атмосферы в том же виде, что и уравнения для несжимаемой жидкости.

Теперь, когда задача о нахождении метеорологических элементов поставлена полностью, приступим к выполнению некоторых преобразований, имеющих целью получение уравнений, пригодных для извлечения физических следствий.

Для этой цели продифференцируем уравнение (1.13) по y' , уравнение (1.14) – по x' и из второго уравнения вычтем первое. При этом будем полагать, что $\rho\mu$ мало меняется по горизонтали. Тогда получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right) + u \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right) + \\
& + v \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right) + \\
& + \tau \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right) + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial y'} = -l \left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} \right) - \\
& - u \frac{\partial l}{\partial x'} - v \frac{\partial l}{\partial y'} + g^2 \frac{\partial}{\partial p} \rho \mu \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} \right). \quad (1.20)
\end{aligned}$$

Слагаемые типа $\frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial x'}$ вообще малы по сравнению с другими членами уравнения, поэтому их можно отбросить.

Введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial y'} = \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} = \operatorname{div}_p \vec{V}.$$

С учетом новых обозначений уравнение (1.20) перепишется так:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial t'} + u \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial x'} + v \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial y'} - g^2 \frac{\partial}{\partial p} \rho \mu \frac{\partial \Omega}{\partial p} = \\
& = -(\Omega + l) \operatorname{div}_p \vec{V} - \tau \frac{\partial \Omega}{\partial p}. \quad (1.21)
\end{aligned}$$

При помощи уравнения неразрывности (1.16) исключим из (1.21) $\operatorname{div}_p \vec{V}$. Тогда получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial t'} + u \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial x'} + v \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial y'} - g^2 \frac{\partial}{\partial p} \rho \mu \frac{\partial \Omega}{\partial p} = \\
& = (\Omega + l) \frac{\partial \tau}{\partial p} - \tau \frac{\partial \Omega}{\partial p}. \quad (1.22)
\end{aligned}$$

Поскольку величина Ω обычно мала по сравнению с l , а относительные изменения $(\Omega + l)$ с высотой малы по сравнению с относительными изменениями τ по высоте, то уравнение (1.22) можно несколько упростить

$$\frac{\partial (\Omega + l)}{\partial t'} + u \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial x'} + v \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial y'} - g^2 \frac{\partial}{\partial p} \rho \mu \frac{\partial \Omega}{\partial p} = l \frac{\partial \tau}{\partial p}. \quad (1.22')$$

Ради простоты изложения рассмотрим сначала динамику атмосферных движений без учета сил трения. К учету последних мы вернемся позже.

Кроме того, в целях дальнейшего упрощения уравнения (1.22') будем полагать, что ось x' направлена на восток, а ось y' – на север. Тогда будут иметь место следующие соотношения:

$$\frac{\partial l}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial y'} = \frac{2\omega \sin \theta}{a_0} = \beta$$

(здесь a_0 – радиус земного шара). Параметр β в дальнейшем всюду будем считать постоянным.

С учетом всех этих предположений уравнение (1.22') принимает теперь следующий вид:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t'} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y'} + \beta v = l \frac{\partial \tau}{\partial p}. \quad (1.23)$$

Перепишем теперь вместе наши исходные уравнения и граничные условия:

$$\frac{du}{dt'} = -g \frac{\partial z}{\partial x'} + lv, \quad (1.24)$$

$$\frac{dv}{dt'} = -g \frac{\partial z}{\partial y'} - lu, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t'} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y'} + \beta v = l \frac{\partial \tau}{\partial p}, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t'} + u \frac{\partial T}{\partial x'} + v \frac{\partial T}{\partial y'} = \frac{\gamma_a - \gamma}{g\rho} \tau + \frac{\varepsilon}{c_p}, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{g\rho}, \quad (1.28)$$

$$p = \rho RT, \quad (1.29)$$

$$\tau = 0 \quad \text{при} \quad p = 0, \quad (1.30)$$

$$\tau = g\rho_0 \frac{\partial z_0}{\partial t'} \quad \text{при} \quad p = p_0. \quad (1.31)$$

При рассмотрении атмосферных движений, для которых характерные размеры по горизонтали имеют порядок 1000 км, а характерные горизонтальные скорости имеют порядок 10 м/с, анализ уравнений

(1.24) и (1.25) показывает, что эти движения можно считать квази-геострофическими, т. е.

$$\left. \begin{aligned} u &= U + u^*, \\ v &= V + v^*, \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

где

$$U = -\frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial y'}, \quad V = \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial x'} \quad (1.33)$$

– составляющие геострофического ветра, а u^* , v^* – малые дополнительные поправки.

Анализ выражения для вихря

$$\Omega = \frac{g}{l} \Delta z + \frac{\partial v^*}{\partial x'} - \frac{\partial u^*}{\partial y'},$$

где

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y'^2},$$

показывает, что величина $\frac{g}{l} \Delta z$, т. е. геострофическое приближение для вихря, будет также содержать главную часть значения вихря.

Используя теперь геострофическое приближение для горизонтальных составляющих скорости u и v в уравнениях (1.26) и (1.27) и исключая ρ из (1.28) с помощью (1.29), получим уравнения

$$\frac{\partial \Delta z}{\partial t'} + \frac{g}{l} (z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{l^2}{g} \frac{\partial \tau}{\partial p}, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = \frac{g}{l} (T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p} + \frac{R(\gamma_a - \gamma)}{g} \frac{T}{p} \tau, \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{RT}{g p}, \quad (1.36)$$

$$(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x'} \frac{\partial B}{\partial y'} - \frac{\partial A}{\partial y'} \frac{\partial B}{\partial x'},$$

которые вместе с граничными условиями (1.30) и (1.31) и начальными данными достаточны для определения будущих полей давления, температуры и вертикальных токов.

Нахождение общего решения нелинейной системы дифференциальных уравнений (1.34)–(1.36) пока представляет непреодолимые трудности. Мы поставили перед собой задачу о нахождении лишь первых производных $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$, а также функции τ по заданному распределению полей давления и температуры.

2. Уравнение для изменения давления

Запишем систему уравнений (1.34)–(1.36) в следующем виде⁴:

$$\frac{\partial \Delta z}{\partial t} + \frac{g}{l}(z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{l^2}{Pg} \frac{\partial \tau}{\partial \zeta}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{g}{l}(T, z) - \frac{\varepsilon}{c_p} = \frac{m^2 l^2}{PR} \frac{\tau}{\zeta}, \quad (2.2)$$

$$T = -\frac{R}{g} \zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad (2.3)$$

где $\zeta = \frac{p}{P}$, причем P – среднее давление по земной поверхности, принимаемое равным 1000 мб, и

$$m^2 = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{gl^2}.$$

Будем полагать, что параметр m^2 изменяется по высоте незначительно по сравнению с относительными изменениями по высоте вертикальной скорости τ .

Исключим из уравнения (2.2) производную температуры $\frac{\partial T}{\partial t}$ при помощи уравнения статики. Тогда получим

$$-\frac{g}{l} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) - \frac{g}{l}(T, z) - \frac{\varepsilon}{c_p} = \frac{m^2 l^2}{PR} \frac{\tau}{\zeta}. \quad (2.4)$$

Обе части этого уравнения умножим на ζ и затем продифференцируем по ζ . Тогда будем иметь

$$-\frac{g}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \left[\frac{g}{l}(T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p} \right] = \frac{m^2 l^2}{PR} \frac{\partial \tau}{\partial \zeta}. \quad (2.5)$$

⁴Индекс (') при координатах x, y, t здесь и в дальнейшем опускаем.

Исключая теперь из уравнений (2.1) и (2.5) производную $\frac{\partial \tau}{\partial \zeta}$, в результате получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + m^2 \Delta \right) \frac{\partial z}{\partial t} = f_1(x, y, \zeta), \quad (2.6)$$

где

$$f_1(x, y, \zeta) = -m^2 \left[\frac{g}{l}(z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] - \frac{R}{g} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \left[\frac{g}{l}(T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p} \right]. \quad (2.7)$$

В цилиндрической системе координат (r, φ, ζ) , где $r = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{m}$, φ – полярный угол и ζ – приведенная высота, уравнение (2.6) перепишется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial z}{\partial t} = f_1(r, \varphi, \zeta). \quad (2.8)$$

Для полной определенности задачи уравнение (2.8) следует дополнить граничными условиями.

В качестве первого граничного условия примем соотношение, непосредственно вытекающее из уравнения притока тепла (2.2) на уровне поверхности 1000 мб ($\zeta = 1$) при использовании условия (1.31):

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{g}{l}(T_0, z_0) + \frac{\varepsilon_0}{c_p} + (\gamma_a - \gamma) \frac{\partial z_0}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Принимая во внимание, что $T_0 = -\left(\frac{g}{R} \zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=1}$, приведем (2.9) к следующему виду:

$$\left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + \alpha \right) \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{\zeta=1} = -A(r, \varphi, 1), \quad (2.10)$$

где

$$A(r, \varphi, 1) = \frac{R}{g} \left[\frac{g}{l}(T_0, z_0) + \frac{\varepsilon_0}{c_p} \right], \quad (2.11)$$

$$\alpha = \frac{R(\gamma_a - \gamma)}{g} \approx 0, 1. \quad (2.12)$$

Второе граничное условие получим из уравнения притока тепла для верхней границы атмосферы, отнесенного к единице объема воздуха:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[c_p \rho \frac{g}{l}(T, z) + \varepsilon' + \frac{c_p(\gamma_a - \gamma)}{g} \tau \right], \quad (2.13)$$

где ε' – приток тепла к единице объема.

На основании (1.30) мы имеем

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\frac{c_p (\gamma_a - \gamma)}{g} \tau \right] = 0.$$

Кроме того, количество тепла ε' , притекающее к единице объема, в верхних слоях атмосферы пренебрежимо мало. Поэтому

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \varepsilon' = 0.$$

Наконец, вследствие того, что

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \rho u = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \rho v = 0,$$

а производные температуры $\frac{\partial T}{\partial x}$ и $\frac{\partial T}{\partial y}$ на изобарических поверхностях для исследуемых крупномасштабных движений ограничены, то

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[c_p \rho \frac{g}{l} (T, z) \right] = 0.$$

Таким образом, имеет место соотношение

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Условие (2.14) с учетом (2.3) можно записать в следующем удобном виде:

$$\zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{\zeta \rightarrow 0} = 0. \quad (2.15)$$

Таким образом, задача о нахождении первых производных по времени от высот изобарических поверхностей свелась к интегрированию неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (2.8) при краевых условиях (2.10) и (2.15).

Переходим к решению задачи (2.8), (2.10), (2.15). Предположим, что функции $f_1(r, \varphi, \zeta)$ и $A(r, \varphi, 1)$ можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} f_1(r, \varphi, \zeta) &= \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} F_n(\rho, \zeta) J_n(r\rho) \rho d\rho, \\ A(r, \varphi, 1) &= \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} G_n(\rho) J_n(r\rho) \rho d\rho, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} d\varphi \int_0^\infty f_1(r', \varphi, \zeta) J_n(\rho r') r' dr', \\ G_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} d\varphi \int_0^\infty A(r', \varphi, 1) J_n(\rho r') r' dr'. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Здесь $J_n(x)$ – функция Бесселя n -го порядка, а символ Re означает, что рассматриваются лишь вещественные части соответствующих выражений.

Будем искать решение задачи в виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \text{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^\infty S_n(\rho, \zeta) J_n(r\rho) \rho d\rho. \quad (2.18)$$

Подставим (2.18) и (2.16) в уравнение (2.8) и в граничные условия (2.10) и (2.15), соберем члены, содержащие произведения $e^{in\varphi} J_n(r\rho)$ с одинаковыми n и приравняем их нулю. Пользуясь при этом соотношением

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} J_n(\rho r) - \frac{n^2}{r^2} J_n(\rho r) = -\rho^2 J_n(\rho r),$$

в результате получим следующее уравнение и граничные условия для новой неизвестной функции $S_n(\rho, \zeta)$:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial S_n}{\partial \zeta} - \rho^2 S_n = F_n(\rho, \zeta), \quad (2.19)$$

$$\left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + \alpha \right) S_n \Big|_{\zeta=1} = -G_n(\rho), \quad (2.20)$$

$$\zeta^2 \frac{\partial S_n}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0. \quad (2.21)$$

Решение уравнения (2.19) составит из общего решения однородного уравнения

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 S_n}{\partial \zeta^2} + 2\zeta \frac{\partial S_n}{\partial \zeta} - \rho^2 S_n = 0 \quad (2.22)$$

и частного решения неоднородного уравнения (2.19).

Общее решение однородного уравнения (2.22) имеет вид

$$S_n^0(\rho, \zeta) = C_{n1}\zeta^{\nu_1} + C_{n2}\zeta^{\nu_2}, \quad (2.23)$$

где

$$\nu_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \rho^2}, \quad \nu_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \rho^2}, \quad (2.24)$$

а C_{n1} и C_{n2} – произвольные постоянные, зависящие от ρ .

Частное решение $S_n^*(\rho, \zeta)$ неоднородного уравнения (2.19) найдем методом вариации произвольных постоянных.

Пусть

$$S_n^*(\rho, \zeta) = D_{n1}(\rho, \zeta)\zeta^{\nu_1} + D_{n2}(\rho, \zeta)\zeta^{\nu_2}. \quad (2.25)$$

Как известно, функции D_{n1} и D_{n2} определяются из следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} D'_{n1}\zeta^{\nu_1} + D'_{n2}\zeta^{\nu_2} &= 0, \\ \nu_1 D'_{n1}\zeta^{\nu_1-1} + \nu_2 D'_{n2}\zeta^{\nu_2-1} &= \frac{F_n}{\zeta^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

где обозначено $D'_{ni} = \frac{\partial D_{ni}}{\partial \zeta}$.

В результате решения системы (2.26) получим

$$D'_{n1} = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} F_n \zeta^{\nu_2}, \quad D'_{n2} = -\frac{1}{\nu_1 - \nu_2} F_n \zeta^{\nu_1}. \quad (2.27)$$

Интегрируем (2.27) в пределах от нуля до ζ . Отбрасывая произвольные постоянные интегрирования как несущественные, получим

$$\begin{aligned} D_{n1}(\rho, \zeta) &= \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \int_0^\zeta F_n(\rho, \eta) \eta^{\nu_2} d\eta, \\ D_{n2}(\rho, \zeta) &= -\frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \int_0^\zeta F_n(\rho, \eta) \eta^{\nu_1} d\eta. \end{aligned}$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$S_n^* = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \int_0^\zeta F_n(\rho, \eta) [\zeta^{\nu_1} \eta^{\nu_2} - \zeta^{\nu_2} \eta^{\nu_1}] d\eta. \quad (2.28)$$

Таким образом, получим искомое общее решение уравнения (2.19):

$$S_n(\rho, \eta) = C_{n1}\zeta^{\nu_1} + C_{n2}\zeta^{\nu_2} + \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \int_0^\zeta F_n(\rho, \eta) [\zeta^{\nu_1}\eta^{\nu_2} - \zeta^{\nu_2}\eta^{\nu_1}] d\eta. \quad (2.29)$$

C_{n1} и C_{n2} найдем из граничных условий (2.20) и (2.21). Из условия (2.21) следует, что

$$C_{n2} = 0. \quad (2.30)$$

Значение C_{n1} определим из условия (2.20):

$$\begin{aligned} \nu_1 C_{n1} + \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \int_0^1 F_n(\rho, \eta) [\nu_1 \eta^{\nu_2} - \nu_2 \eta^{\nu_1}] d\eta + \alpha C_{n1} + \\ + \frac{\alpha}{\nu_1 - \nu_2} \int_0^1 F_n(\rho, \eta) [\eta^{\nu_2} - \eta^{\nu_1}] d\eta = -G_n(\rho), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} C_{n1} = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \int_0^1 F_n(\rho, \eta) [\eta^{\nu_1} - \eta^{\nu_2}] d\eta - \\ - \frac{1}{\alpha + \nu_1} \int_0^1 F_n(\rho, \eta) \eta^{\nu_1} d\eta - \frac{G_n(\rho)}{\alpha + \nu_1}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Подставляя (2.30) и (2.31) в (2.29), получим

$$\begin{aligned} S_n(\rho, \eta) = -\frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \int_0^1 F_n(\rho, \eta) [\delta_1 \zeta^{\nu_2} \eta^{\nu_1} + \delta_2 \zeta^{\nu_1} \eta^{\nu_2} - (\zeta \eta)^{\nu_1}] d\eta - \\ - \frac{1}{\alpha + \nu_1} \int_0^1 F_n(\rho, \eta) \zeta^{\nu_1} \eta^{\nu_1} d\eta - \frac{C_n(\rho)}{\alpha + \nu_1} \zeta^{\nu_1}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где

$$\delta_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } \eta \leq \zeta, \\ 0 & \text{при } \eta > \zeta, \end{cases} \quad \delta_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta \leq \zeta, \\ 1 & \text{при } \eta > \zeta. \end{cases}$$

Подставим теперь (2.32) в (2.18). Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} = & -\operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \times \\ & \times \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\mu} \int_0^1 F_n(\rho, \eta) \frac{1}{\sqrt{\zeta\eta}} \left[\delta_1 \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^{\mu} + \delta_2 \left(\frac{\zeta}{\eta} \right)^{\mu} - (\zeta\eta)^{\mu} \right] d\eta + \right. \\ & + \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2} + \mu} \int_0^1 F_n(\rho, \eta) \frac{1}{\sqrt{\zeta\eta}} (\zeta\eta)^{\mu} d\eta - \\ & \left. - \frac{G_n(\rho)}{\alpha - \frac{1}{2} + \mu} \frac{\zeta^{\mu}}{\sqrt{\zeta}} \right\} J_n(r\rho) \rho d\rho, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где $\mu = \sqrt{\frac{1}{4} + \rho^2}$.

Далее, в (2.33) подставим значения $F_n(\rho, \eta)$ и $G_n(\rho)$ из (2.17) и изменим порядок интегрирования. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} = & -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-in\psi} \left\{ \int_0^1 f_1(r', \psi, \eta) M_1^{(n)}(r, \zeta, r', \eta) d\eta + \right. \\ & \left. + A(r', \psi, 1) M^{*(n)}(r, \zeta, r') \right\} r' d\psi dr', \end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$\begin{aligned} M_1^{(n)}(r, \zeta, r', \eta) = & \frac{1}{2\sqrt{\zeta\eta}} \times \\ & \times \int_0^{\infty} \left[\delta_1 \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^{\mu} + \delta_2 \left(\frac{\zeta}{\eta} \right)^{\mu} - (\zeta\eta)^{\mu} \right] \frac{J_n(r\rho) J_n(r'\rho)}{\mu} \rho d\rho + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\zeta\eta}} \int_0^{\infty} (\zeta\eta)^{\mu} \frac{J_n(r\rho) J_n(r'\rho)}{\alpha - \frac{1}{2} + \mu} \rho d\rho, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$M^{*(n)}(r, \zeta, r') = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_0^{\infty} \zeta^{\mu} \frac{J_n(r\rho) J_n(r'\rho)}{\alpha - \frac{1}{2} + \mu} \rho d\rho. \quad (2.36)$$

Если за точки исследования принять вертикаль, проходящую через начало координат ($r = 0$)⁵, то, принимая во внимание, что $J_n(0) = 0$ при $n \neq 0$, а $J_0(0) = 1$, мы будем иметь

$$M_1^{(n)} = 0 \quad \text{и} \quad M^{*(n)} = 0$$

для всех значений $n \neq 0$. Отличными от нуля окажутся лишь функции $M_1^{(0)}$ и $M^{*(0)}$.

Таким образом, при $r = 0$ сумма (2.34) превращается в одно слагаемое:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{r=0} = & - \int_0^\infty \int_0^1 F_1(r', \eta) M_1(\zeta, r', \eta) r' d\eta dr' - \\ & - \int_0^\infty A(r', 1) M^*(\zeta, r') r' dr', \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1(r', \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f_1(r', \psi, \eta) d\psi, \\ A(r', 1) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty A(r', \psi, 1) d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

$$M^*(x, r) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty x^\mu \frac{J_0(r' \rho)}{\alpha - \frac{1}{2} + \mu} \rho d\rho, \quad (2.39)$$

$$M_1(\zeta, r', \eta) = M^*(\zeta \eta, r') + M_3(\zeta, r', \eta),$$

$$\begin{aligned} & M_3(\zeta, r', \eta) = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{\zeta \eta}} \int_0^\infty \left[\delta_1 \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^\mu + \delta_2 \left(\frac{\zeta}{\eta} \right)^\mu - (\zeta \eta)^\mu \right] \frac{J_0(r' \rho)}{\mu} \rho d\rho. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Из решения (2.37) следует, что изменение давления в точках, расположенных на какой-либо вертикали, определяется средними значениями определенных функций от полей давления и температуры по

⁵Мы всегда можем совместить вертикальную ось координат с исследуемой вертикалью.

окружностям, расположенным в изобарических поверхностях, с центрами на исследуемой вертикали.

Этот результат мы могли бы получить, пользуясь более простым математическим приемом. А именно: интегрируем уравнение (2.8) по φ от нуля до 2π , находим решение для производной $\frac{\partial z}{\partial t}$, осредненной по окружности радиуса r , и полагаем затем в полученном решении $r = 0$.

Этим приемом мы воспользуемся в дальнейшем при получении решения для $\frac{\partial T}{\partial t}$ и τ .

Обратим теперь внимание на то обстоятельство, что согласно (2.7) «термические факторы» $\frac{g}{l}(T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p}$ входят в решение (2.37) весьма сложным образом, так как

$$f_1(r', \psi, \eta) = -B(r', \psi, \eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} \eta A(r', \psi, \eta),$$

где

$$\begin{aligned} B(r', \psi, \eta) &= m^2 \left[\frac{g}{l}(z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right], \\ A(r', \psi, \eta) &= \frac{R}{g} \left[\frac{g}{l}(T, z) + \beta \frac{\varepsilon}{c_p} \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

В целях упрощения решения (2.37) найдем функцию влияния, относящуюся непосредственно к $A(r', \eta)$. Для этого подставим в (2.37) вместо $F_1(r', \eta)$ выражение $-\frac{\partial}{\partial \eta} \eta A(r', \eta)$ и произведем интегрирование по частям. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \eta} \eta A(r', \eta) M_1(\zeta, r', \eta) d\eta - A(r', 1) M^*(\zeta, r') = \\ &= \eta A(r', \eta) M_1(\zeta, r', \eta) \Big|_0^1 - \int_0^1 A(r', \eta) \eta \frac{\partial}{\partial \eta} M_1(\zeta, r', \eta) d\eta - \\ &- A(r', 1) M^*(\zeta, r') = - \int_0^1 A(r', \eta) \eta \frac{\partial}{\partial \eta} M_1(\zeta, r', \eta) d\eta = \\ &= \int_0^1 A(r', \eta) M_2(\zeta, r', \eta) d\eta, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где

$$\begin{aligned}
 M_2(\zeta, r', \eta) &= -\eta \frac{\partial}{\partial \eta} M_1 = N(\zeta, r', \eta) + \\
 &+ \frac{1}{2} M_3(\zeta, r', \eta) + \alpha M^*(\zeta \eta, r'), \\
 N(\zeta, r', \eta) &= \frac{1}{2\sqrt{\zeta \eta}} \left[\delta_2 \left(\frac{\zeta}{\eta} \right)^\mu - \right. \\
 &\left. - \delta_1 \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^\mu - (\zeta \eta)^\mu \right] J_0(r' \rho) \rho d\rho.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Принимая во внимание (2.41) и (2.42), решение (2.37) запишем окончательно в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} m^2 \left[\frac{g}{l}(z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] M_1(\zeta, r, \eta) r d\varphi dr d\eta + \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{R}{g} \left[\frac{g}{l}(T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p} \right] M_2(\zeta, r, \eta) r d\varphi dr d\eta.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Функции влияния $M_1(\zeta, r, \eta)$ и $M_2(\zeta, r, \eta)$ характеризуют область зависимости решения от полей метеорологических элементов в окружающем пространстве.

Для вычисления функций M^* , M_1 и M_2 удобно произвести в (2.39), (2.41) и (2.43) некоторые преобразования, т. е. представим величины $(\zeta \eta)^\mu$, $\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^\mu$ и $\left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^\mu$ в виде показательных функций типа e^{-x} :

$$(\zeta \eta)^\mu = e^{-\mu \ln \frac{1}{\zeta \eta}}, \quad \left(\frac{\eta}{\zeta}\right)^\mu = e^{-\mu \ln \frac{\zeta}{\eta}}, \quad \left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^\mu = e^{-\mu \ln \frac{\eta}{\zeta}}.$$

При выполнении неравенств

$$\zeta \eta \leq 1, \quad \frac{\eta}{\zeta} \leq 1, \quad \frac{\zeta}{\eta} \leq 1$$

соответственно функции $\ln \frac{1}{\zeta \eta}$, $\ln \frac{\zeta}{\eta}$ и $\ln \frac{\eta}{\zeta}$ будут всегда положительны.

В результате функция $M_3(\zeta, r, \eta)$ преобразуется в алгебраическую сумму трех интегралов типа [4]

$$\sigma(x, r) = \int_0^\infty e^{-\mu \ln \frac{1}{x}} \frac{J_0(r\rho)}{\mu} \rho d\rho = \frac{e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\ln^2 \frac{1}{x} + r^2}}}{\sqrt{\ln^2 \frac{1}{x} + r^2}}, \tag{2.45}$$

где $\mu = \sqrt{\frac{1}{4} + \rho^2}$, а x в данном случае принимает значения $\zeta\eta$, $\frac{\eta}{\zeta}$, $\frac{\zeta}{\eta}$.

С учетом обозначений (2.45) функция $M_3(\zeta, r, \eta)$ запишется в виде

$$M_3(\zeta, r, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\zeta\eta}} \left[\delta_1 \sigma \left(\frac{\eta}{\zeta}, r \right) + \delta_2 \sigma \left(\frac{\zeta}{\eta}, r \right) - \sigma(\zeta\eta, r) \right]. \quad (2.46)$$

Для вычисления $M^*(x, r)$ воспользуемся преобразованием

$$\int_0^\infty x^{\mu-\frac{1}{2}} \frac{J_0(r\rho)}{\alpha - \frac{1}{2} + \mu} \rho d\rho = x^{-\alpha} \int_0^x \lambda^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \int_0^\infty \lambda^\mu \frac{J_0(r\rho)}{\mu} \rho d\rho \right\} d\lambda.$$

Принимая во внимание (2.45), получаем

$$\begin{aligned} M^*(x, r) &= x^{-\alpha} \int_0^x \lambda^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{\partial \sigma(\lambda, r)}{\partial \lambda} d\lambda = \\ &= \frac{\sigma(x, r)}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) x^{-\alpha} \int_0^x \lambda^{\alpha-\frac{3}{2}} \sigma(\lambda, r) d\lambda. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Введем обозначение

$$\frac{\sigma(x, r)}{\sqrt{x}} = U(x, r). \quad (2.48)$$

В результате функцию $M_1(\zeta, r, \eta)$ можно представить в виде следующего выражения:

$$\begin{aligned} M_1(\zeta, r, \eta) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\delta_1}{\zeta} U \left(\frac{\eta}{\zeta}, r \right) + \frac{\delta_2}{\eta} U \left(\frac{\zeta}{\eta}, r \right) + U(\zeta\eta, r) \right] + \\ &+ \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) (\zeta\eta)^{-\alpha} \int_0^{\zeta\eta} x^{\alpha-1} U(x, r) dx, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где ζ – уровень, для которого определяется $\frac{\partial z}{\partial t}$, а r, η – переменные интегрирования.

Для вычисления функции $N(\zeta, r, \eta)$ воспользуемся преобразованием

$$\int_0^\infty x^{\mu-\frac{1}{2}} J_0(r\rho) \rho d\rho = \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty x^\mu \frac{J_0(r\rho)}{\mu} \rho d\rho \quad (2.50)$$

и затем соотношениями (2.45) и (2.48). Тогда $N(\zeta, r, \eta)$ сведется к сумме трех интегралов типа

$$I(x, r) = \int_0^{\infty} x^{\mu-\frac{1}{2}} J_0(r\rho) \rho d\rho =$$

$$\sqrt{x} \frac{\partial \sigma(x, r)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\ln \frac{1}{x} \left(2 + \sqrt{\ln^2 \frac{1}{x} + r^2} \right)}{\ln^2 \frac{1}{x} + r^2} U(x, r). \quad (2.51)$$

Принимая во внимание (2.46), (2.48) и (2.51), функцию M_2 можно записать теперь в следующем виде:

$$M_2(\zeta, r, \eta) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta_2}{\eta} I \left(\frac{\zeta}{\eta}, r \right) - \frac{\delta_1}{\zeta} I \left(\frac{\eta}{\zeta}, r \right) - I(\zeta\eta, r) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{4} \left\{ \frac{\delta_1}{\zeta} U \left(\frac{\eta}{\zeta}, r \right) + \frac{\delta_2}{\eta} U \left(\frac{\zeta}{\eta}, r \right) - U(\zeta\eta, r) \right\} + \alpha M^*(\zeta\eta, r). \quad (2.52)$$

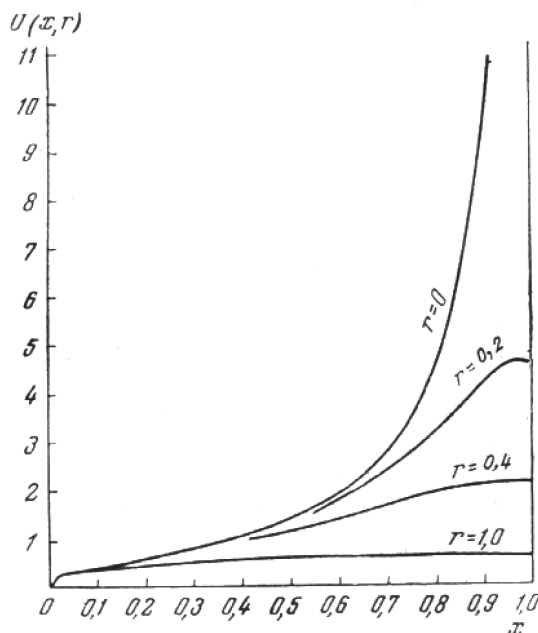


Рис. 1. График функции $U(x, r)$ при различных r

Заметим, в частности, что при $\zeta = 1$ функции влияния M_1 и M_2 имеют простой вид:

$$M_1(1, r, \eta) = M^*(\eta, r), \quad (2.53)$$

$$M_2(1, r, \eta) = -I(\eta, r) + \alpha M^*(\eta, r). \quad (2.54)$$

Графики функций $U(x, r)$, $I(x, r)$, $M^*(x, r)$ и сечения вертикальной плоскостью полей функций $M_1(\zeta, r, \eta)$ и $M_2(\zeta, r, \eta)$ для различных ζ представлены на рис. 1–12.

Проанализируем поведение этих функций при различных значениях аргументов x , r , η .

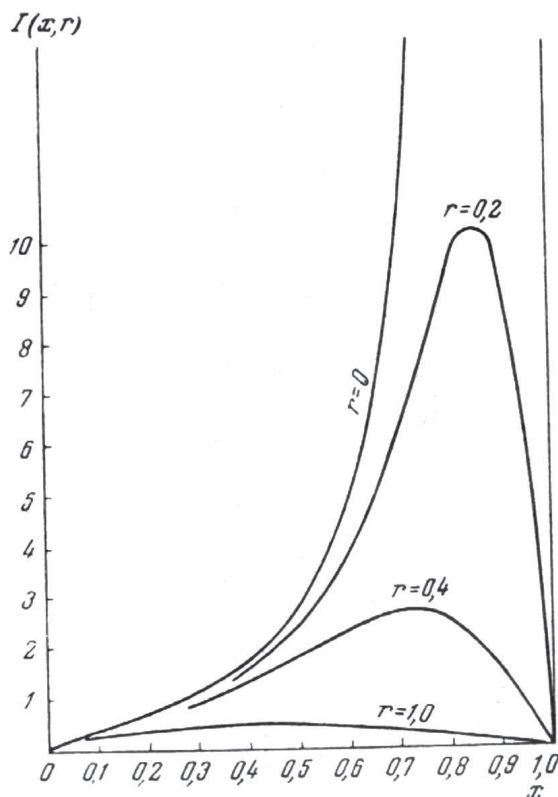


Рис. 2. График функции $I(x, r)$ при различных r

Функция $U(x, r)$ (рис. 1) при $x = 1$ имеет вид $U(1, r) = \frac{1}{r}e^{-\frac{r}{2}}$; при $x = 0$ составляет $U(0, r) = 0$, причем при малых x функция стремится к нулю как $\frac{1}{\ln \frac{1}{x}}$. При $r = 0$ $U(x, 0) = \frac{1}{\ln \frac{1}{x}}$, при возрастании

r и фиксированном значении x функция $U(x, r)$ монотонно убывает и при $r \rightarrow \infty$ стремится к нулю как $\frac{1}{r}e^{-\frac{r}{2}}$. Функция имеет особенность в точке $(x = 1, r = 0)$.

Функция $I(x, r)$ (рис. 2) при $x = 1$ и $r \neq 0$ равна нулю; при $x = 0$ имеет вид $I(0, r) = 0$, причем при малых x функция стремится к нулю как $\frac{1}{2 \ln \frac{1}{x}}$. При $r = 0$ $I(x, 0) = \frac{2 + \ln \frac{1}{x}}{2 \ln^2 \frac{1}{x}}$, при возрастании r и фиксированном значении x функция $I(x, r)$ монотонно убывает и при $r \rightarrow \infty$ стремится к нулю как $\frac{1}{2r^2}e^{-\frac{r}{2}}$. Функция имеет особенность в точке $(x = 1, r = 0)$.

Функция $M^*(x, r)$ (рис. 3) по своим особенностям сходна с $U(x, r)$. Значения $M^*(x, r)$ в 1,5–2 раза превышают значения $U(x, r)$.

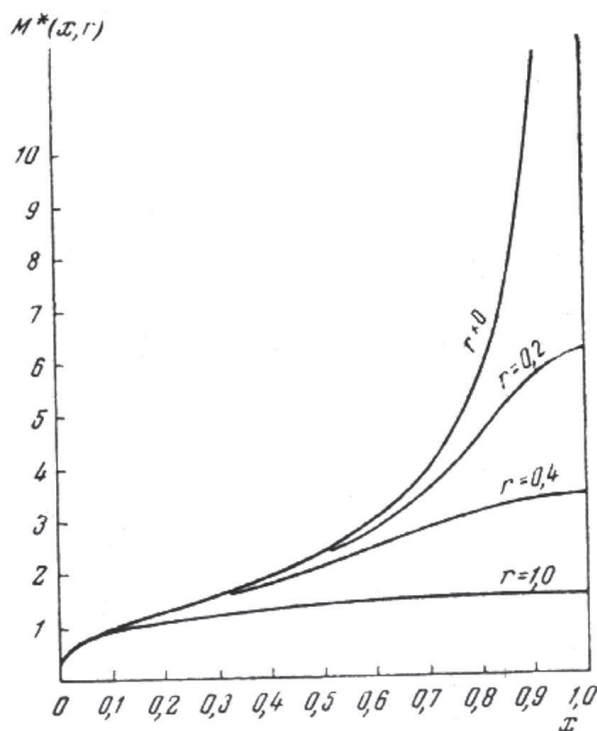


Рис. 3. График функции $M^*(x, r)$ при различных r

При $x = 0$ $M^*(0, r) = 0$, при $r \rightarrow \infty$ $M^*(x, r)$ затухает как $\frac{1}{r}e^{-\frac{r}{2}}$ (рис. 4). Стремление функции к нулю при $x \rightarrow 0$ происходит по закону $\frac{x}{\ln \frac{1}{x}}$.

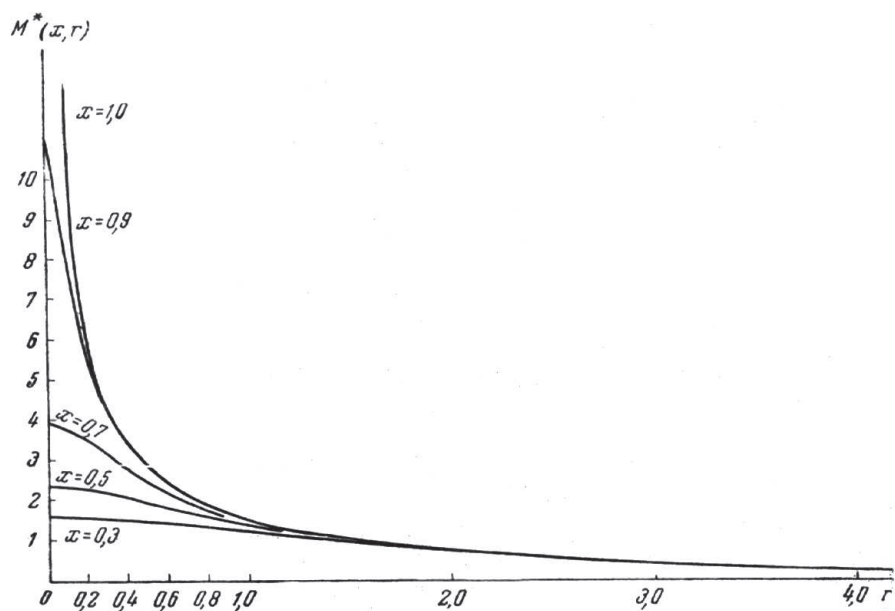


Рис. 4. График функции $M^*(x, r)$ при различных r

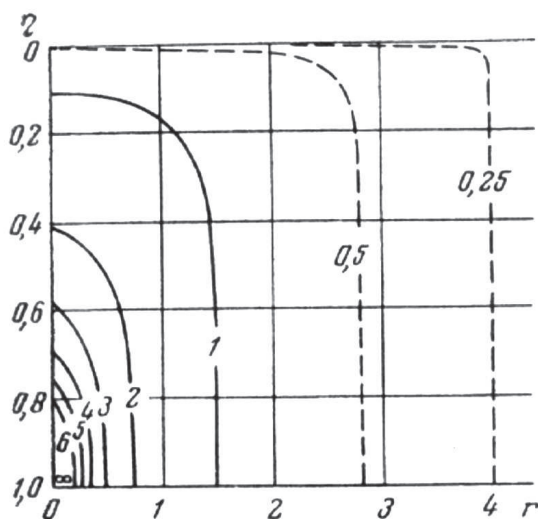


Рис. 5. Поле функции $M_1(\zeta, r, \eta)$ при различных $\zeta = 1, 0$

Функция $M_1(1, r, \eta)$ (рис. 5) описывает интегральное действие «динамических факторов» $\frac{q}{l}(z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x}$ на изменение давления в точке у земной поверхности. Относительной длине $r = 1$ соответствует

действительное расстояние $R = \sqrt{m^2} \approx 750$ км. Следует отметить широкое распространение области действия динамических факторов в горизонтальном направлении. Для большей наглядности и с целью анализа затухания действия динамических факторов с возрастанием r приведем график функции влияния $rM_1(1, r, \eta)$, описывающей веса средних значений динамических факторов $\frac{q}{l}(z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x}$ по окружности радиуса r (рис. 6). Как мы видим, затухание функции rM_1 с возрастанием r происходит чрезвычайно медленно. При $r \rightarrow \infty$ $rM_1(1, r, \eta)$ убывает как $e^{-\frac{r}{2}}$.

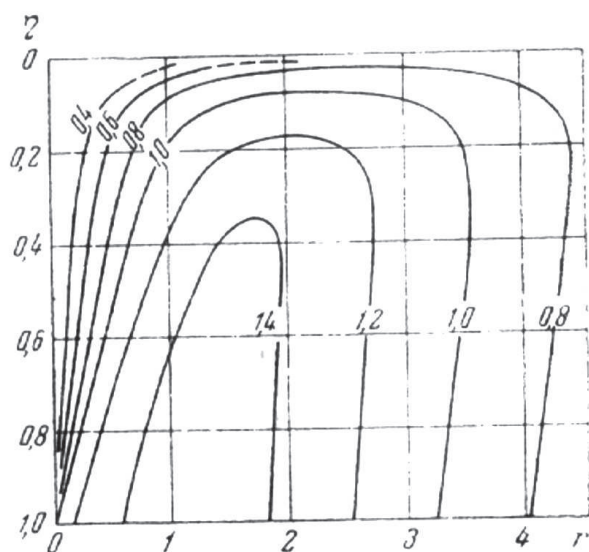


Рис. 6. Поле функции $rM_1(1, r, \eta)$

Однако практически область действия динамических факторов на изменение давления у земли будет все же ограничиваться радиусом R порядка 2000 км, ибо средние значения выражений $\frac{q}{l}(z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x}$ по окружностям радиуса 2000–3000 км и более в действительности становятся малыми.

Ослабление действия на изменение давления у земли динамических факторов, располагающихся в верхних слоях атмосферы, более наглядно видно из рис. 6. Так, при равномерном распределении динамических факторов на высоте их действие с поверхности 300 мб, ограниченной радиусом $r = 1$, уменьшается почти вдвое по сравнению с действием этих факторов с поверхности 900 мб, ограниченной тем же радиусом.

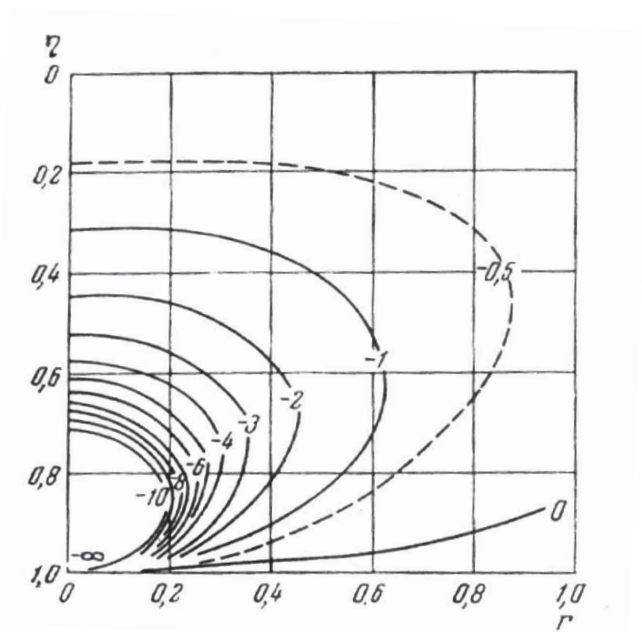


Рис. 7. Поле функции $M_2(\zeta, r, \eta)$ при $\zeta = 1, 0$

Функция $M_2(1, r, \eta)$ (рис. 7) дает представление о действии термических факторов $\frac{q}{l}(T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p}$, точнее выражаясь, о действии локального притока тепла в атмосфере, на изменение давления у земли. Отрицательные значения функции $M_2(1, r, \eta)$ в окружающей области атмосферы показывают, что локальный приток тепла на любом уровне атмосферы в этой области вызывает у земли падение давления, а отдача тепла – рост давления.

Область действия термических факторов является более ограниченной по сравнению с областью действия динамических факторов. Действительно, максимальное значение функции $M_2(1, r, \eta)$ на вертикали при $r = 1$ в двадцать с лишним раз меньше максимального значения $M_2(1, r, \eta)$ на вертикали при $r = 0, 2$, в то время как функция влияния $M_1(1, r, \eta)$ убывает при этом примерно только в 4 раза.

Различие в областях действия термических и динамических факторов видно из асимптотического поведения функций $M_2(1, r, \eta)$ и $M_1(1, r, \eta)$.

Функция $I(\eta, r)$, являющаяся главной частью функции $M_2(1, r, \eta)$, при больших значениях r стремится к нулю как $\frac{1}{r^2}e^{-\frac{r}{2}}$, а $M_1(1, r, \eta)$ при этом ведет себя как $\frac{1}{r}e^{-\frac{r}{2}}$.

Приведем также функцию $rM_2(1, r, \eta)$, описывающую суммарное действие термических факторов, расположенных по окружности радиуса r , на изменение давления у земли. Анализ функции $rM_2(1, r, \eta)$ показывает, что влияние на изменение давления у земли термических факторов, располагающихся в верхних слоях атмосферы, вообще говоря, мало. Поскольку средние значения термических факторов $\frac{q}{l}(T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p}$ по окружности r при достаточно больших r могут оставаться значительными только в случае крупных термобарических возмущений в атмосфере, то на основании графика, изображенного на рис. 8, можно утверждать, что относительно значительное влияние термических факторов верхних слоев атмосферы на изменение давления у земли может иметь место только в случае существования крупных термобарических возмущений.

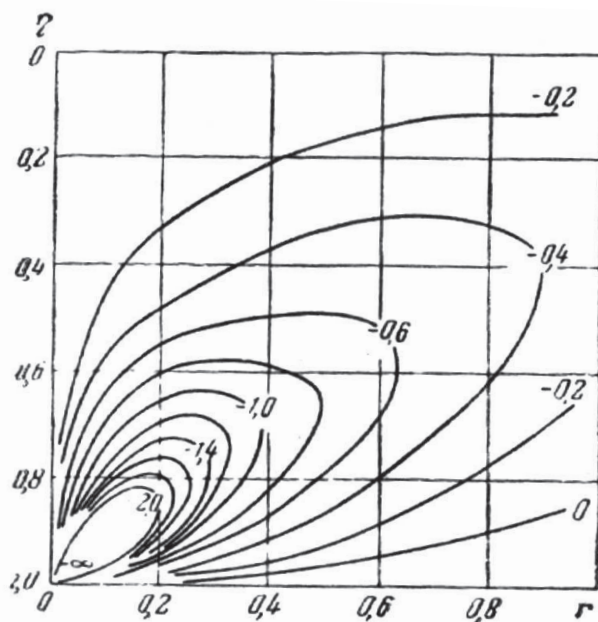


Рис. 8. Поле функции $rM_2(1, r, \eta)$

Рассмотрим теперь свойства функций влияния $M_1(\zeta, r, \eta)$ и $M_2(\zeta, r, \eta)$ при $\zeta < 1$, т. е. действие указанных выше динамических и термических факторов на изменение давления на некотором уровне над земной поверхностью.

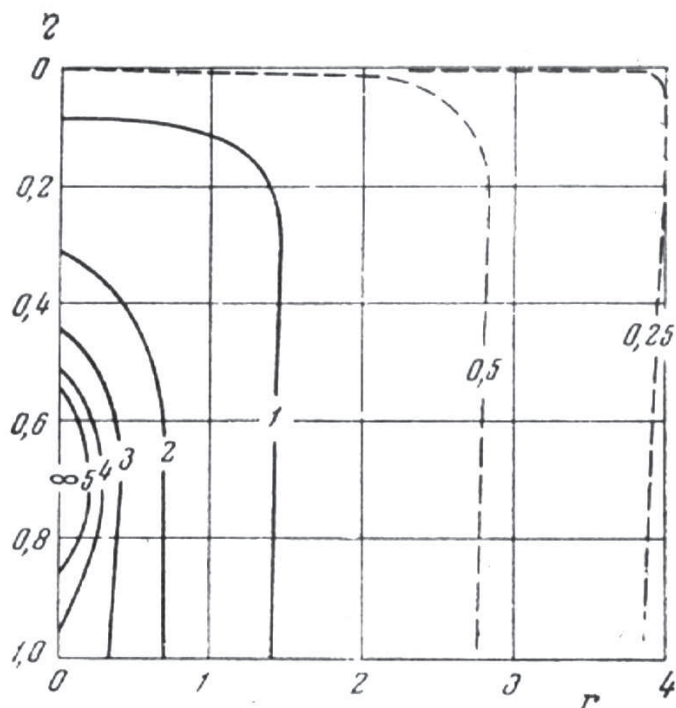


Рис. 9. Поле функции $M_1(\zeta, r, \eta)$ при $\zeta = 0,7$

На рис. 9 и 10 изображены функции $M_1(0,7, r, \eta)$ и $M_1(0,5, r, \eta)$. Принципиально они не отличаются от подобной им функции для $\zeta = 1$, рассмотренной выше. Разница заключается лишь в том, что область максимальных значений функции сместилась здесь соответственно к уровням $\zeta = 0,7$ и $\zeta = 0,5$, т. е. к уровням исследуемых точек.

Совершенно иной характер имеет функция $M_2(\zeta, r, \eta)$ при $\zeta < 1$ по сравнению с $M_2(1, r, \eta)$. На рис. 11 и 12 изображены функции $M_2(0,7, r, \eta)$ и $M_2(0,5, r, \eta)$. Мы видим, что локальный приток тепла в верхней части атмосферы относительно уровня ζ вызывает на уровне ζ падение давления, а приток тепла в нижней части атмосферы по отношению к уровню ζ вызывает на этом уровне рост давления. Отдача тепла на различных уровнях атмосферы вызывает соответственно обратное действие.

На некотором уровне ζ^* влияния термических факторов из выше- и нижерасположенных слоев на изменение давления будут взаимно компенсироваться, так что на этом уровне изменения давления будут обусловлены только динамическими факторами.

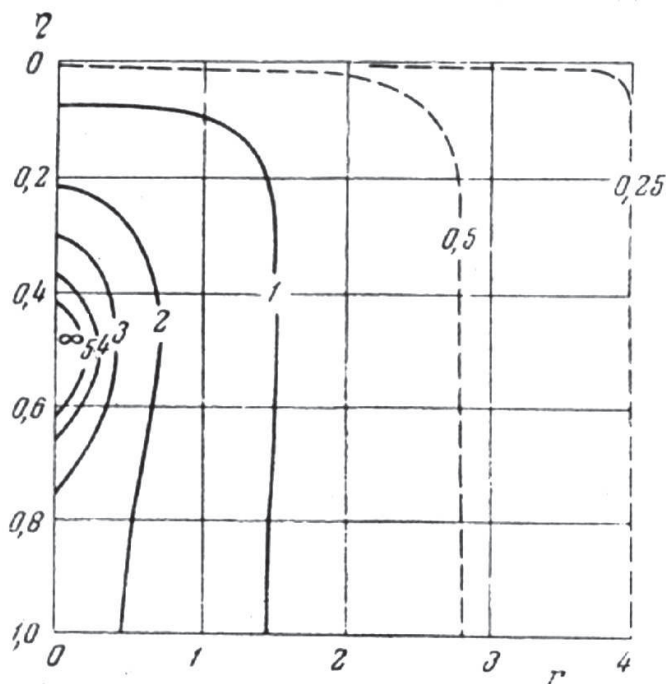


Рис. 10. Поле функции $M_1(\zeta, r, \eta)$ при $\zeta = 0,5$

Этот уровень мы будем называть «средним уровнем» атмосферы.

Существование такого уровня было показано теоретически еще в работе И. А. Кибеля [2]. Поле изобар на данном уровне, как показал И. А. Кибель в этой работе, в первом приближении определяет движение наземных барических и термических возмущений. Эмпирически же существование ведущего потока было показано ранее работами С. И. Троицкого [5].

Функция $M_2(\zeta, r, \eta)$ позволяет в каждой конкретной синоптической ситуации определить положение такого «среднего уровня». Вообще говоря, этот уровень не будет постоянным как на больших пространствах, так и во времени, ибо в каждом конкретном случае положении его будет определяться распределением притока тепла $E = c_p \frac{q}{l}(T, z) + \varepsilon$ в атмосфере по высоте и по горизонтали.

Если допустить, что локальный приток тепла E постоянен по вертикали во всей толще атмосферы, то в этом случае средний уровень будет расположен где-то между поверхностями 700 и 500 мб.

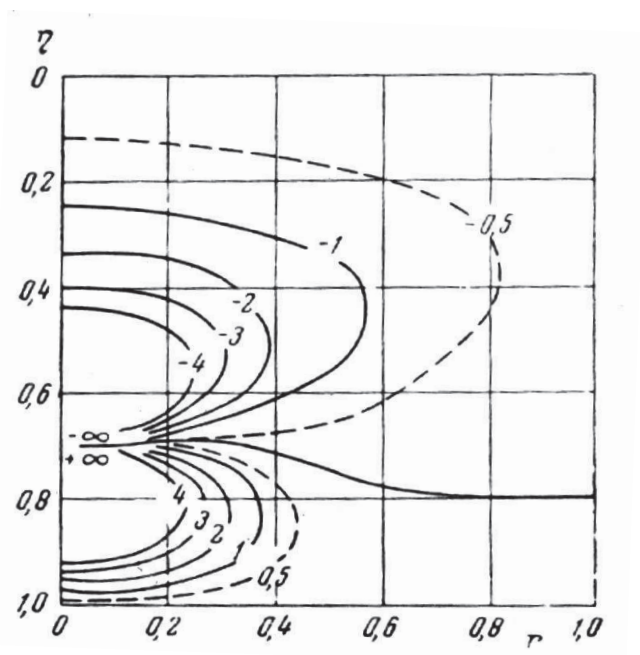


Рис. 11. Поле функции $M_2(\zeta, r, \eta)$ при $\zeta = 0,7$

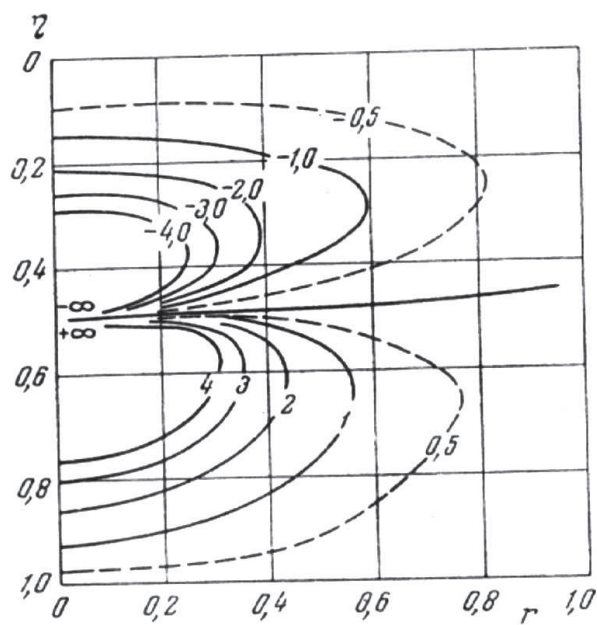


Рис. 12. Поле функции $M_2(\zeta, r, \eta)$ при $\zeta = 0,5$

Положение среднего уровня, в частности, будет зависеть от размеров термических и барических возмущений в атмосфере. Из того факта, что с возрастанием r отрицательные значения функции $rM_2(\zeta, r, \eta)$ в области $\eta < \zeta$ затухают относительно медленнее, чем положительные в области $\eta > \zeta$, следует, что при равном относительном распределении притока тепла $E(r, \varphi, \eta)$ по вертикали в случае крупных термобарических возмущений «средний уровень» будет находиться выше, чем в случае мелких возмущений.

При $\zeta \rightarrow 0$ решение (2.44) для $\frac{\partial z}{\partial t}$ преобразуется в следующее выражение:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{\zeta=0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} m^2 \left[\frac{g}{l}(z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right]_{\zeta=0} \frac{U(1, r)}{2} r d\varphi dr + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{R}{g} \left[\frac{g}{l}(T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p} \right]_{\zeta=0} \frac{U'(1, r)}{4} r d\varphi dr, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где

$$U'(1, r) = U(1, r) - 2I(1, r),$$

т. е.

$$U'(1, r) = \begin{cases} U(1, r) & \text{при } r > 0, \\ 0 & \text{при } r = 0. \end{cases} \quad (2.56)$$

Наряду с тем, что функции влияния $M_1(\zeta, r, \eta)$ и $M_2(\zeta, r, \eta)$ характеризуют область зависимости исследуемой величины – в точке от окружающего распределения полей метеорологических элементов, по принципу обратимости их можно также интерпретировать следующим образом.

Пусть в некоторую точку пространства (x, y, ζ) помещен единичный точечный «источник метеорологической субстанции»

$$B = m^2 \left[\frac{g}{l}(z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] \quad \text{или} \quad A = \frac{R}{g} \left[\frac{g}{l}(T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p} \right].$$

Тогда соответственно функция $M_1(\eta, r, \zeta)$ или $M_2(\eta, r, \zeta)$ будет описывать изменение давления в окружающем пространстве, вызванное действием этого источника. Единичный положительный точечный источник динамической субстанции B , расположенный на уровне ζ , вызывает в окружающей области на всех уровнях атмосферы рост давления, описываемый пространственной функцией $M_1(\eta, r, \zeta)$. Нетрудно заметить, что функция $M_1(\eta, r, \zeta)$ тождественна $M_1(\zeta, r, \eta)$.

Единичный положительный «термический источник A », расположенный на уровне ζ , вызывает согласно функции $M_2(\eta, r, \zeta)$ падение давления в верхней части атмосферы относительно уровня ζ и рост давления в нижней части атмосферы. Отрицательные точечные источники указанных выше динамических и термических субстанций вызывают соответственно обратное действие.

Такая интерпретация функции влияния дает наглядное представление о радиусе действия существующих в атмосфере термобарических возмущений на изменения давления в окружающих их областях.

Аналогичную интерпретацию соответственно будут иметь и решения для $\frac{\partial T}{\partial t}$ и τ , которые будут изложены в последующих параграфах.

3. Уравнение для изменения температуры

Уравнение для изменения температуры на различных уровнях атмосферы мы получим путем исключения из системы уравнений (2.1)–(2.3) вертикальной скорости τ и производной $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Для этой цели продифференцируем (2.1) по ζ . Получим

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\Delta \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g}{l} (z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] = \frac{l^2}{Pg} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2}. \quad (3.1)$$

Уравнение статики (2.3) дает нам

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\Delta \frac{\partial z}{\partial t} \right) = -\frac{R}{g} \frac{1}{\zeta} \Delta \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g}{l} (z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] = -\frac{R}{g} \frac{1}{\zeta} \left[\frac{g}{l} (T, \Delta z) + \frac{g}{l} (z, \Delta T) + \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right]. \quad (3.3)$$

Подставим (3.2) и (3.3) в (3.1). Получим

$$-\frac{1}{\zeta} \Delta \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\zeta} \left[\frac{g}{l} (T, \Delta z) + \frac{g}{l} (z, \Delta T) + \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \frac{l^2}{PR} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2}. \quad (3.4)$$

Для исключения $\frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2}$ из (3.4) разрешим уравнение (2.2) относительно τ и продифференцируем его дважды по ζ , принимая при этом, как и ранее, параметр m^2 мало меняющимся по высоте. Будем иметь

$$\left(\zeta \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial T}{\partial t} - \left(\zeta \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \times \\ \times \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p} \right] = \frac{m^2 l^2}{PR} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2}. \quad (3.5)$$

Умножая теперь (3.4) на m^2 и вычитая его из (3.5), в результате получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + m^2 \Delta \right) \frac{\partial T}{\partial t} = f_2(x, y, \zeta), \quad (3.6)$$

где

$$f_2(x, y, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p} \right] - \\ - m^2 \left[\frac{g}{l} (T, \Delta z) + \frac{g}{l} (z, \Delta T) + \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right]. \quad (3.7)$$

В качестве граничных условий для уравнения (3.6) возьмем следующие (см. условия (2.9) и (2.14)):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{\zeta=1} &= Q_0(x, y), \\ \zeta \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{\zeta=0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

где

$$Q_0(x, y) = \frac{g}{l} (T_0, z_0) + \frac{\varepsilon_0}{c_p}. \quad (3.9)$$

При этом член $(\gamma_a - \gamma) \frac{\partial z_0}{\partial t}$, входящий в $Q_0(x, y)$, исключен из рассмотрения как имеющий более высокий порядок малости⁶.

Ввиду того, что уравнение (3.6) имеет структуру, аналогичную со структурой уравнения (2.6) для $\frac{\partial z}{\partial t}$, то решение для $\frac{\partial T}{\partial t}$, так же как и для $\frac{\partial z}{\partial t}$, будет определяться средними значениями определенных функций по окружностям с центром в исследуемой точке. Поэтому при решении уравнения (3.6) мы применим более простой математический прием, о возможности использования которого уже было сказано в предыдущем параграфе.

⁶Отбрасывание члена $(\gamma_a - \gamma) \frac{\partial z_0}{\partial t}$, входящего в $Q(x, y)$, не принципиально. Его можно и сохранить, ибо $\frac{\partial z_0}{\partial t}$ можно определить по формуле (2.44) предыдущего параграфа.

Запишем уравнение (3.6) в цилиндрической системе координат (r, φ, ζ) , где $r = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{m}$, φ – полярный угол, $\zeta = \frac{p}{P}$ – приведенная высота, и проинтегрируем затем это уравнение по φ от нуля до 2π . В результате получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = f_2(r, \zeta), \quad (3.10)$$

где

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\partial t} d\varphi, \quad f_2(r, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(r, \varphi, \zeta) d\varphi \quad (3.11)$$

– соответственно осредненные значения $\frac{\partial T}{\partial t}$ и f_2 по окружностям радиуса r .

Граничные условия (3.8) переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \right|_{\zeta=1} &= Q_0(r), \\ \zeta \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \right|_{\zeta=0} &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Решение для $\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$ будем искать в виде интеграла Фурье – Бесселя:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \int_0^\infty S(\rho, \zeta) J_0(r\rho) \rho d\rho. \quad (3.13)$$

Будем полагать, что функции $f_2(r, \zeta)$ и $Q_0(r)$ можно представить в виде интегралов Фурье – Бесселя:

$$\left. \begin{aligned} f_2(r, \zeta) &= \int_0^\infty J_0(r\rho) \rho d\rho \int_0^\infty f_2(r', \zeta) J_0(\rho r') r' dr', \\ Q_0(r) &= \int_0^\infty J_0(r\rho) \rho d\rho \int_0^\infty Q_0(r') J_0(\rho r') r' dr'. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Подставляя (3.13) и (3.14) в уравнение (3.10) и граничные условия (3.12) и используя при этом известное соотношение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial J_0(\rho r)}{\partial r} \right\} = -\rho^2 J_0(\rho r),$$

мы приходим к следующему уравнению и граничным условиям для $S(\rho, \zeta)$:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial S}{\partial \zeta} - \rho^2 S = F_2(\rho, \zeta), \quad (3.15)$$

$$\left. \begin{aligned} S(\rho, 0) &= G_2(\rho), \\ \zeta S|_{\zeta=0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_2(\rho, \zeta) &= \int_0^\infty f_2(r', \zeta) J_0(\rho r') r' dr', \\ G_2(\rho) &= \int_0^\infty Q_0(r') J_0(\rho r') r' dr'. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Ввиду того, что уравнение (3.15) по структуре аналогично рассмотренному в предыдущем параграфе уравнению (2.19), общее решение уравнения (3.15) будет иметь вид, аналогичный (2.29):

$$\begin{aligned} S(\rho, \zeta) &= C_1 \zeta^{\nu_1} + C_2 \zeta^{\nu_2} + \\ &+ \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \int_0^\zeta F_2(\rho, \eta) [\zeta^{\nu_1} \eta^{\nu_2} - \zeta^{\nu_2} \eta^{\nu_1}] d\eta, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где

$$\nu_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \rho^2}, \quad \nu_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \rho^2}.$$

Определяя произвольные постоянные C_1 и C_2 из граничных условий (3.16), получим

$$\begin{aligned} S(\rho, \zeta) &= -\frac{1}{2\mu} \int_0^1 F_2(\rho, \eta) \frac{1}{\sqrt{\eta \zeta}} \left[\delta_1 \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^\mu + \right. \\ &\left. \delta_2 \left(\frac{\zeta}{\eta} \right)^\mu - (\zeta \eta)^\mu \right] d\eta + G(\rho) \zeta^{\mu - \frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{4} + \rho^2}.$$

Подставим (3.19) в (3.13) и заменим $F_2(\rho, \eta)$ и $G(\rho)$ по формулам (3.17). Переставляя, далее, порядок интегрирования, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = & - \int_0^1 \int_0^\infty f_2(r', \eta) \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\eta\zeta}} \int_0^\infty \left[\delta_1 \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^\mu + \right. \right. \\ & + \left. \delta_2 \left(\frac{\zeta}{\eta} \right)^\mu - (\zeta\eta)^\mu \right] \frac{J_0(r\rho)J_0(r'\rho)}{\mu} \Big\} r' dr' d\eta + \\ & + \int_0^\infty Q_0(r') \left\{ \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_0^\infty \zeta^\mu J_0(r\rho)J_0(r'\rho)\rho d\rho \right\} r' dr'. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Полагая теперь в (3.20) $r = 0$, в результате получим решение для $\frac{\partial T}{\partial t}$ в точках, расположенных на различных уровнях ζ , по вертикальной координатной оси:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = & - \int_0^1 \int_0^\infty f_2(r', \eta) M_3(\zeta, r', \eta) r' dr' d\eta + \\ & + \int_0^\infty Q_0(r') I(\zeta, r') r' dr', \end{aligned} \quad (3.21)$$

где

$$M_3(\zeta, r', \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\zeta\eta}} \int_0^\infty \left[\delta_1 \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^\mu + \delta_2 \left(\frac{\zeta}{\eta} \right)^\mu - (\zeta\eta)^\mu \right] \frac{J_0(r'\rho)}{\mu} \rho d\rho \quad (3.22)$$

и

$$I(\zeta, r') = \int_0^\infty \zeta^{\mu-\frac{1}{2}} J_0(r'\rho) \rho d\rho \quad (3.23)$$

– введенные уже ранее функции.

Подставляя в (3.21) $f_2(r', \eta)$ из (3.11) и (3.7) и производя вертикальное интегрирование термического фактора $\frac{q}{l}(T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p}$ по частям, запишем решение (3.21) для $\frac{\partial T}{\partial t}$ окончательно в виде⁷

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{g}{R} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right).$$

⁷Производную $\frac{\partial T}{\partial t}$ можно получить непосредственно из решения (2.37) для $\frac{\partial z}{\partial t}$ путем дифференцирования его по ζ и использовании затем в соотношении.

Тогда мы будем иметь

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} Q_0(r, \varphi) G_1(\zeta, r) r d\varphi dr + \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \varphi, \eta) G_2(\zeta, r, \eta) r d\varphi dr d\eta, \\
 f(r, \varphi, \eta) &= \frac{gm^2}{R} \left[\frac{g}{l} (z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p} \right], \\
 G_2(\zeta, r, \eta) &= -\zeta \frac{\partial M_1}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta_1}{\zeta} I \left(\frac{\eta}{\zeta}, r \right) - \frac{\delta_2}{\eta} I \left(\frac{\zeta}{\eta}, r \right) + I(\zeta \eta, r) \right\} + \\
 &+ \frac{1}{2} M_3(\zeta, r, \eta) + \alpha M^*(\zeta \eta, r), \\
 G_1(\zeta, r) &= \zeta \frac{\partial M^*(\zeta, r)}{\partial \zeta} = I(\zeta, r) - \alpha M^*(\zeta, r). \\
 \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[\frac{g}{l} (T_0, z_0) + \frac{\varepsilon_0}{c_p} \right] I(\zeta, r) r d\varphi dr + \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p} \right] M_4(\zeta, r, \eta) r d\varphi dr d\eta + \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} m^2 \left[\frac{g}{l} (T, \Delta z) + \frac{g}{l} (z, \Delta T) + \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right] \times \\
 &\times M_3(\zeta, r, \eta) r d\varphi dr d\eta, \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

где

$$M_4(\zeta, r, \eta) = \eta \frac{\partial M_3}{\partial \eta}.$$

Функции влияния M_3 и M_4 выразим через функции типа $U(x, r)$ и $I(x, r)$, введенные в предыдущем параграфе:

$$\left. \begin{aligned}
 M_3(\zeta, r, \eta) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\delta_1}{\zeta} U \left(\frac{\eta}{\zeta}, r \right) + \frac{\delta_2}{\eta} U \left(\frac{\zeta}{\eta}, r \right) - U(\zeta \eta, r) \right], \\
 M_4(\zeta, r, \eta) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta_1}{\zeta} I \left(\frac{\eta}{\zeta}, r \right) - \frac{\delta_2}{\eta} I \left(\frac{\zeta}{\eta}, r \right) - I(\zeta \eta, r) \right\} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} M_3(\zeta, r, \eta).
 \end{aligned} \right\} \tag{3.25}$$

Функция $I(\zeta, r)$ и сечения вертикальной плоскостью полей функций $M_4(\zeta, r, \eta)$ и $M_3(\zeta, r, \eta)$ для некоторых значений ζ представлены на рис. 13–17.

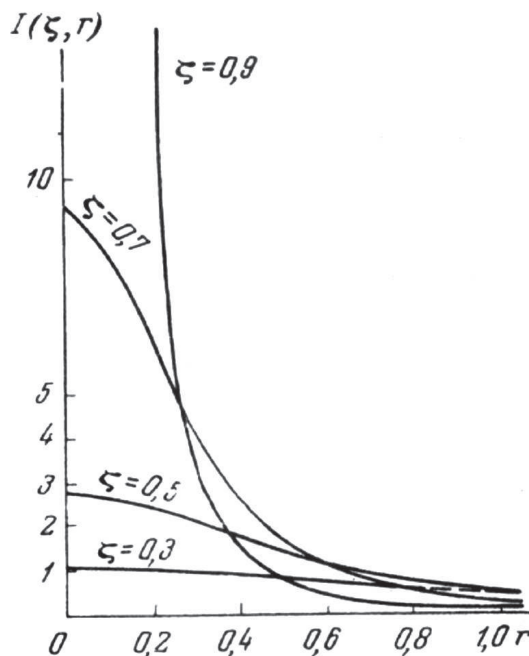


Рис. 13. График функции $I(\zeta, r)$ для различных ζ

Из анализа значений функции $I(\zeta, r)$ (рис. 13) следует, что первый член в правой части (3.24) монотонно затухает с высотой (с убыванием ζ).

Функция $M_4(\zeta, r, \eta)$ (рис. 14, 15) служит для учета неравномерности распределения локального притока тепла по вертикали. Первые два интеграла в правой части (3.24) в целом описывают влияние локального притока тепла, распределенного по всей атмосфере, на изменение температуры в фиксированной точке.

Функция $M_4(\zeta, r, \eta)$ аналитически состоит из двух частей:

$$M_4(\zeta, r, \eta) = X(\zeta, r, \eta) - \frac{1}{2}M_3(\zeta, r, \eta), \quad (3.26)$$

где

$$X(\zeta, r, \eta) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta_1}{\zeta} I\left(\frac{\eta}{\zeta}, r\right) - \frac{\delta_2}{\eta} I\left(\frac{\zeta}{\eta}, r\right) - I(\zeta\eta, r) \right\}. \quad (3.27)$$

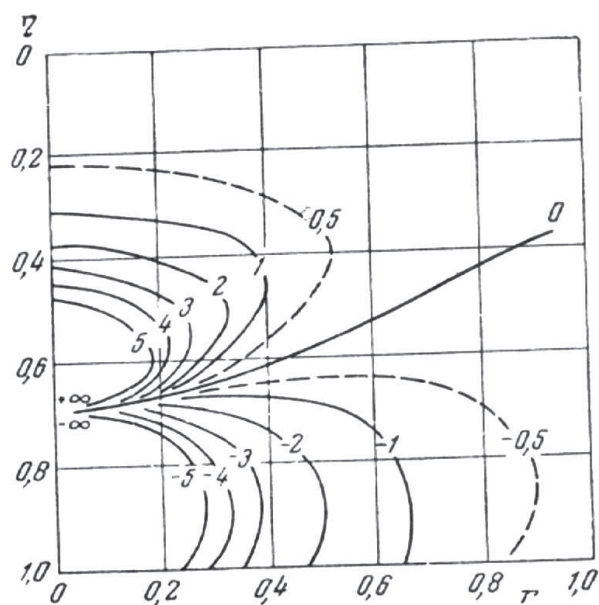


Рис. 14. Поле функции $M_4(\zeta, r, \eta)$ при $\zeta = 0,7$

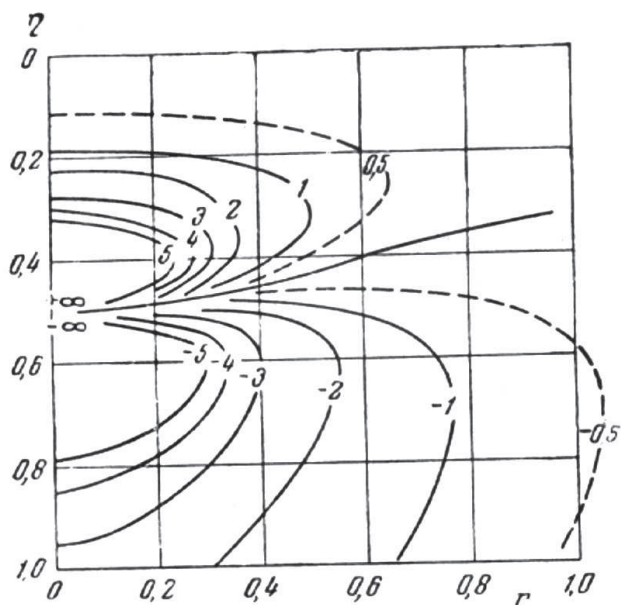


Рис. 15. Поле функции $M_4(\zeta, r, \eta)$ при $\zeta = 0,5$

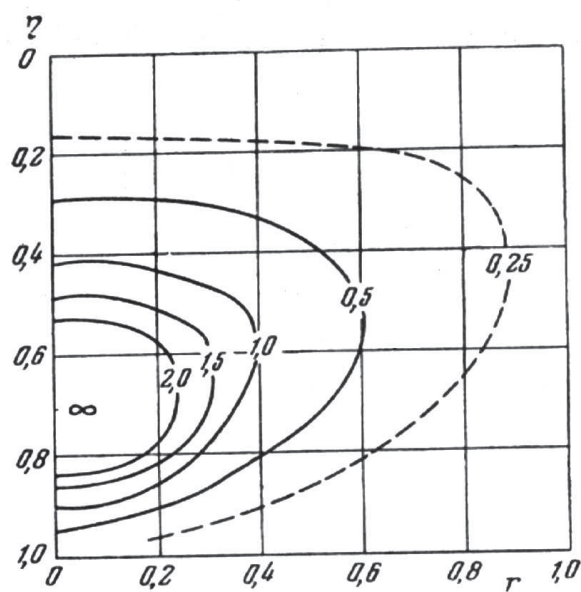


Рис. 16. Поле функции $M_3(\zeta, r, \eta)$ при $\zeta = 0,7$

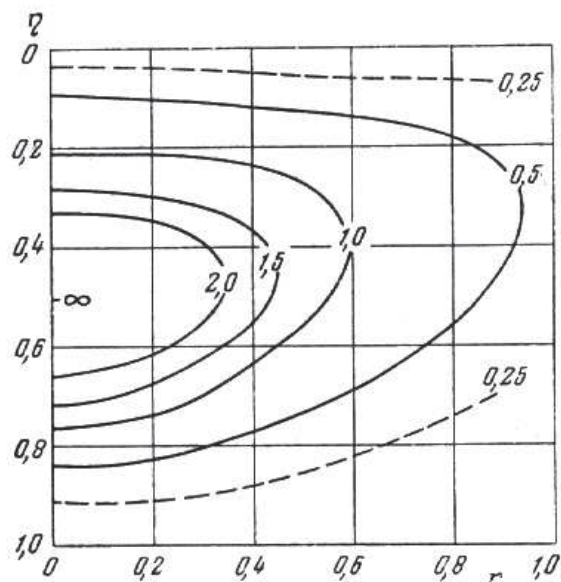


Рис. 17. Поле функции $M_3(\zeta, r, \eta)$ при $\zeta = 0,5$

В окрестности радиуса $r \approx 0,5$ главную часть значений $M_4(\zeta, r, \eta)$ составляет $X(\zeta, r, \eta)$, а $\frac{1}{2}M_3(\zeta, r, \eta)$ здесь является относительно ма-

лой. При больших значениях r ($r \geq 1$) относительные веса обоих слагаемых, входящих в $M_4(\zeta, r, \eta)$, выравниваются, но при этом уже каждое из слагаемых становится практически малым.

Функция $M_3(\zeta, r, \eta)$ (рис. 16, 17) дает представление об области действия динамических факторов $m_2 \left[\frac{g}{l}(T, \Delta z) + \frac{g}{l}(z, \Delta T) + \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right]$ на изменение температуры в точке на уровне ζ . Эта функция имеет максимальные значения в непосредственной окрестности исследуемой точки и затухает по мере возрастания r , а также в направлении верхней и нижней границ атмосферы. При $\eta = 0$ и $\eta = 1$ $M_3(\zeta, r, \eta) = 0$, если только $\zeta \neq 0$.

При больших значениях r , как нетрудно показать, функция $M_3(\zeta, r, \eta)$ имеет асимптотическое представление $\frac{1}{r^2} e^{-r}$. По мере возрастания r область максимальных значений функции $M_3(\zeta, r, \eta)$ относительно уровня ζ смещается вверх.

Из анализа свойств функции $M_3(\zeta, r, \eta)$ следует, что изменение температуры на каком-либо уровне ζ , описываемое последним членом в (3.24), в большей мере определяется динамическими факторами прилегающих к уровню ζ слоев атмосферы, причем динамические факторы верхней части атмосферы относительно уровня ζ имеют больший вес, чем подобные факторы нижней части атмосферы.

Рассмотрим теперь, как решение для $\frac{\partial T}{\partial t}$ описывает изменение температуры на верхней границе атмосферы.

При $\zeta \rightarrow 0$ функция $I(\zeta, r) \rightarrow 0$, $M_4(\zeta, r, \eta)$ превращается в $\frac{\delta_1}{2\zeta} \left[I(1, r) - \frac{1}{2} U(1, r) \right]$, а $M_3(\zeta, r, \eta)$ – в $\frac{\delta_1}{2\zeta} U(1, r)$. Тогда решение (3.24) при $\zeta \rightarrow 0$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\zeta=0} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{g}{l}(T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p} \right]_{\zeta=0} \frac{U'(1, r)}{4} r d\varphi dr + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} m^2 \left[\frac{g}{l}(T, \Delta z) + \frac{g}{l}(z, \Delta T) + \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{\zeta=0} \frac{U(1, r)}{2} r d\varphi dr, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где аналогично (2.56)

$$U'(1, r) = \begin{cases} U(1, r) & \text{при } r > 0, \\ 0 & \text{при } r = 0. \end{cases}$$

Вспомним теперь соотношение (3.3):

$$\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g}{l}(z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] = -\frac{R}{g} \left[\frac{g}{l}(T, \Delta z) + \frac{g}{l}(z, \Delta T) + \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right].$$

Если полагать, что⁸

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left\{ \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g}{l} (z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] \right\} = 0, \quad (3.29)$$

то

$$\left[\frac{g}{l} (T, \Delta z) + \frac{g}{l} (z, \Delta T) + \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{\zeta=0} = 0. \quad (3.30)$$

Из (3.30) следует, что производные $\frac{\partial T}{\partial x}$ и $\frac{\partial T}{\partial y}$ на верхней границе атмосферы равны нулю, т. е. на поверхности $\zeta = \text{const}$ при $\zeta \rightarrow 0$ температура постоянна. Это означает, что и

$$(T, z)_{\zeta=0} = 0. \quad (3.31)$$

Положим, далее, что при $\zeta \rightarrow 0$

$$\zeta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0. \quad (3.32)$$

При выполнении условий (3.30)–(3.32) из (3.28) следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{\zeta=0} = 0. \quad (3.33)$$

4. Уравнение для вертикальной скорости

Вертикальные движения являются составной частью механизма крупномасштабной циркуляции атмосферы. При помощи вертикальных токов осуществляется перераспределение масс воздуха, кинетической, потенциальной и внутренней энергии с одних уровней атмосферы на другие. Поэтому при изучении атмосферных процессов рассмотрение вертикальных движений должно производиться с надлежащей тщательностью.

Наряду с этим вертикальные движения в атмосфере представляют и самостоятельный интерес, ибо они служат главным фактором в процессе образования облачности и осадков.

Для получения уравнения, описывающего вертикальные движения τ в атмосфере, необходимо исключить из системы (2.1) и (2.3) производные $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{\partial T}{\partial t}$.

⁸ Допущение (3.29) равносильно допущению, что кинетическая энергия единицы массы $\frac{V^2}{2}$ не возрастает с высотой быстрее чем $\frac{1}{\zeta}$.

Для этой цели продифференцируем уравнение (2.1) по ζ . Получим

$$\frac{l^2}{Pg} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\Delta \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g}{l} (z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right]. \quad (4.1)$$

Уравнение статики (2.3) дает нам соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\Delta \frac{\partial z}{\partial t} \right) = -\frac{R}{g} \frac{1}{\zeta} \Delta \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g}{l} (z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] = -\frac{R}{g} \frac{1}{\zeta} \left[\frac{g}{l} (T, \Delta z) + \frac{g}{l} (z, \Delta T) + \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right]. \quad (4.3)$$

Подставим (4.2) и (4.3) в (4.1). Тогда будем иметь

$$\frac{l^2}{PR} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2} = -\frac{1}{\zeta} \Delta \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\zeta} \left[\frac{g}{l} (T, \Delta z) + \frac{g}{l} (z, \Delta T) + \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right]. \quad (4.4)$$

Исключая из (4.4) производную $\frac{\partial T}{\partial t}$ при помощи уравнения притока тепла (2.2), получим

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2} + \frac{R^2}{gl^2} \Delta [T (\gamma_a - \gamma) \tau] = \zeta f_3(x, y, \zeta), \quad (4.5)$$

где

$$f_3(x, y, \zeta) = -P \frac{R}{l^2} \left\{ \frac{g}{l} \Delta (T, z) + \frac{\Delta \varepsilon}{c_p} + \right. \\ \left. + \frac{g}{l} (T, \Delta z) + \frac{g}{l} (z, \Delta T) + \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right\}. \quad (4.6)$$

Будем полагать, что изменения величины $T(\gamma_a - \gamma)$ как по горизонтали, так и по вертикали малы по сравнению с относительными изменениями вертикальной скорости τ . Тогда уравнение (4.5) можно записать в виде

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2} + m^2 \Delta \tau = \zeta f_3(x, y, \zeta), \quad (4.7)$$

где m^2 – введенный уже ранее параметр.

Граничные условия для уравнения (4.7) будут следующие:

$$\left. \begin{aligned} \tau|_{\zeta=0} &= 0, \\ \tau|_{\zeta=1} &= \tau_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

где τ_0 – величина малая.

Перейдем к применявшейся уже ранее цилиндрической системе координат r, φ, ζ .

В этой системе координат уравнение (4.7) примет вид

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \varphi^2} = \zeta f_3(r, \varphi, \zeta). \quad (4.9)$$

Интегрируя это уравнение по φ от нуля до 2π , получим в результате для функции $\bar{\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau d\varphi$ следующее уравнение:

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial r} = \zeta F_3(r, \zeta), \quad (4.10)$$

где

$$F_3(r, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_3(r, \varphi, \zeta) d\varphi. \quad (4.11)$$

Граничными условиями для уравнения (4.10) будут

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}|_{\zeta=0} &= 0, \\ \bar{\tau}|_{\zeta=1} &= \bar{\tau}_0(r). \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Решение уравнения (4.10) будем искать в виде

$$\bar{\tau}(r, \zeta) = \int_0^\infty S(\rho, \zeta) J_0(r\rho) \rho d\rho. \quad (4.13)$$

Как и ранее, будем полагать, что функции $F_3(r, \zeta)$ и $\bar{\tau}_0(r)$ можно представить в виде интегралов Фурье – Бесселя:

$$\left. \begin{aligned} F_3(r, \zeta) &= \int_0^\infty J_0(r\rho) \rho d\rho \int_0^\infty F_3(r', \zeta) J_0(\rho r') r' dr', \\ \bar{\tau}_0(r) &= \int_0^\infty J_0(r\rho) \rho d\rho \int_0^\infty \bar{\tau}_0(r') J_0(\rho r') r' dr'. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Подставляя (4.13) и (4.14) в (4.10) и (4.12), аналогично предыдущему получим следующее дифференциальное уравнение и граничные условия для новой неизвестной функции $S(\rho, \zeta)$:

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 S}{\partial \zeta^2} - \rho^2 S = \zeta F_3(\rho, \zeta), \quad (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} S|_{\zeta=0} &= 0, \\ S|_{\zeta=1} &= G_3(\rho), \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_3(\rho, \zeta) &= \int_0^\infty F_3(r', \zeta) J_0(\rho r') r' dr', \\ G_3(\rho) &= \int_0^\infty \bar{\tau}_0(r') J_0(\rho r') r' dr'. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Общее решение уравнения (4.15) имеет вид

$$\begin{aligned} S(\rho, \zeta) &= C_1 \zeta^{\frac{1}{2}+\mu} + C_2 \zeta^{\frac{1}{2}-\mu} + \\ &+ \frac{1}{2\mu} \int_0^\zeta F_3(\rho, \eta) \sqrt{\frac{\zeta}{\eta}} \left[\left(\frac{\zeta}{\eta} \right)^\mu - \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^\mu \right] d\eta, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где, как и ранее,

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{4} + \rho^2}.$$

C_1 и C_2 выберем с таким расчетом, чтобы решение (4.18) удовлетворяло граничным условиям (4.16). В результате получим:

$$\begin{aligned} S(\rho, \zeta) &= -\frac{1}{2\mu} \int_0^1 \left(F_3(\rho, \eta) \sqrt{\frac{\zeta}{\eta}} - \left[\delta_1 \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^\mu + \right. \right. \\ &\left. \left. + \delta_2 \left(\frac{\zeta}{\eta} \right)^\mu - (\zeta \eta)^\mu \right] \right) d\eta + G_3(\rho) \zeta^{\frac{1}{2}+\mu}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Вспоминая, что $F_3(\rho, \zeta)$ и $G_3(\rho)$ имеют интегральные представления (4.17), подставим их в (4.19). Далее, полученное выражение подставим в (4.13), переставим порядок интегрирования и положим $r = 0$.

Тогда будем иметь

$$\tau(\zeta) = - \int_0^1 \int_0^\infty F_3(r', \eta) \zeta M_3(\zeta, r', \eta) r' dr' d\eta +$$

$$\int_0^{\infty} \tau_0(r') \zeta I(\zeta, r') r' dr', \quad (4.20)$$

где $M_3(\zeta, r', \eta)$ и $I(\zeta, r')$ – введенные уже ранее функции (3.22) и (3.23).

Заменяя в (4.20) $F_3(r, \eta)$ и $\tau_0(r)$ по формулам (4.11) и (4.12), а затем используя (4.6), запишем решение (4.20) окончательно в виде

$$\begin{aligned} \tau(\zeta) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} P \frac{R}{l^2} \left\{ \frac{g}{l} [\Delta(T, z) + (T, \Delta z) + (z, \Delta T)] + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta \varepsilon}{c_p} + \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right\} \zeta M_3(\zeta, r, \eta) r d\varphi dr d\eta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} g \rho_0 \frac{\partial z_0}{\partial t} \zeta I(\zeta, r) r d\varphi dr. \end{aligned} \quad (4.21)$$

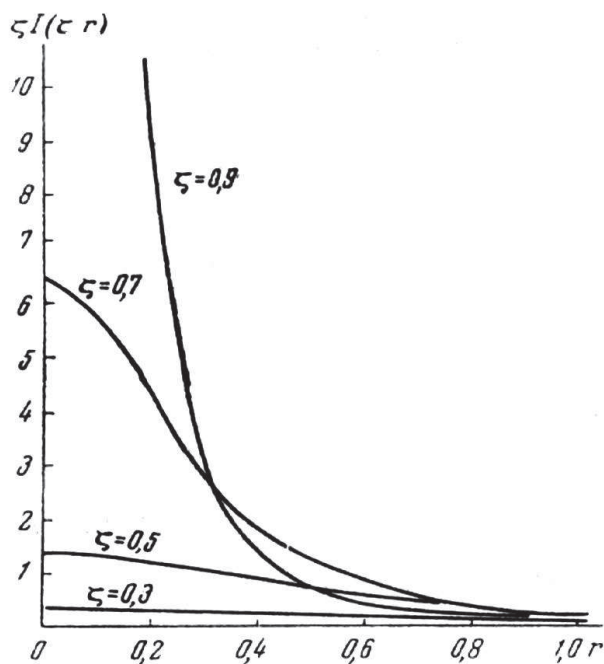


Рис. 18. График функции $\zeta I(\zeta, r)$ для различных ζ

График функции $\zeta I(\zeta, r)$ при различных ζ (рис. 18) показывает, что второй член в правой части (4.21) быстро затухает с высотой.

Принимая во внимание, что $\tau_0 = g\rho_0 \frac{\partial z_0}{\partial t}$ обычно не превышает 10 мб/12 ч, вторым слагаемым в (4.21) можно свободно пренебречь.

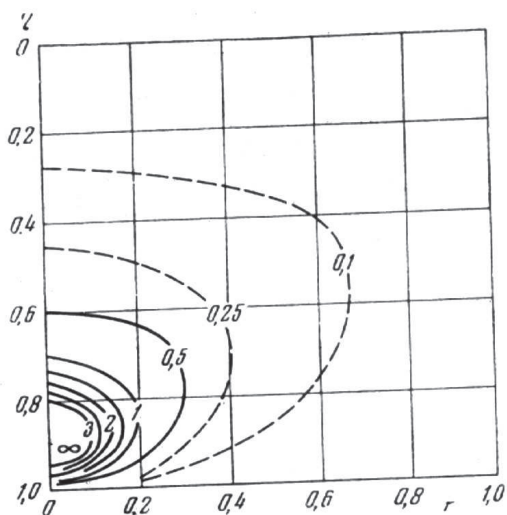


Рис. 19. Поле функции $\zeta M_3(\zeta, r, \eta)$ при $\zeta = 0,9$

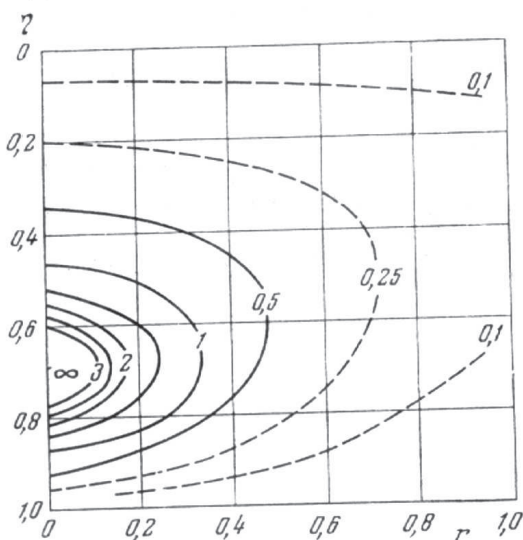


Рис. 20 Поле функции $\zeta M_3(\zeta, r, \eta)$ при $\zeta = 0,7$

Поля функций $\zeta M_3(\zeta, r, \eta)$ для различных ζ представлены на рис. 19 и 20.

Свойства функции $M_3(\zeta, r, \eta)$ указывают на то, что в образовании вертикальных движений в средней тропосфере решающую роль играют динамические процессы в средней и верхней частях тропосферы, т. е. вертикальные движения на уровне 3–5 км определяются главным образом особенностями полей давления, температуры и притока тепла ε на уровнях 3–8 км.

Формула (4.21) показывает, что в очагах притока тепла в атмосфере члены типа $\Delta \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p} \right]$ всегда будут давать восходящие движения, а в очагах отдачи тепла – нисходящие движения. Благодаря этому часть притока тепла, поступающего в какую-либо значительную область атмосферы, будет переноситься вертикальными токами в вышележащие слои атмосферы, а отдача тепла, наоборот, будет частично компенсироваться переносом тепла вертикальными токами из вышележащих слоев.

Это указывает на важную роль вертикальных движений в атмосфере в перераспределении тепловой энергии.

Фактор $\beta \frac{\partial T}{\partial x}$ в решении для τ , появляющийся в результате учета в исходных уравнениях изменения параметра Кориолиса с широтой, будет существенным только при наличии в атмосфере крупных термических возмущений. В восточной части термического гребня этот фактор будет давать восходящую составляющую вертикальной скорости, а в западной части гребня – нисходящую.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блинова Е. Н. Гидродинамическая теория волн давления, температурных волн и центров действия атмосферы // ДАН СССР. 1943. Т. 39. № 7.
2. Кибель И. А. Приложение к метеорологии уравнений механики бароклинной жидкости // Известия АН СССР. Серия: География и геофизика. 1940. № 5.
3. Обухов А. М. К вопросу о геострофическом ветре // Известия АН СССР. Серия: География и геофизика. 1949. № 4.
4. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
5. Троицкий С. И. Определитель аэросиноптических признаков предсказания погоды. 1933.

6. Шве́ц М. Е. Определение вертикальных скоростей в движущейся массе при помощи уравнений гидромеханики // Известия АН СССР. Серия: География и геофизика. 1941. № 4-5.

7. Charney J. G., Fjørtoft R., von Neumann J. Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation. Tellus. 1950. V. 2, No. 4.

8. Ertel H. Über neue atmosphärische Bewegungsgleichungen. Meteorologische Zeitschrift. 1941. Bd. 58. H. 3.

9. Richardson L. Weather Prediction by Numerical Process. Cambridge, 1922.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОГНОЗА ПОГОДЫ⁹

В большинстве работ по прогнозу погоды в основу положена адиабатическая модель атмосферы в квазигеострофическом приближении [1–4]. В последние годы наметилось вполне определенное направление исследований в области прогноза полей метеорологических элементов с использованием полной системы уравнений [5–7]. Настоящая работа посвящена рассмотрению теоретической модели атмосферных процессов, учитывающей большое число разнообразных физических факторов, имеющих существенное значение для формирования погоды, поэтому она более полно отражает главные особенности эволюции полей метеорологических элементов в трехмерной бароклинной атмосфере.

Будем считать, что Земля плоская и связана с системой координат (x, y, p, t) . Распространение результатов на случай сферической Земли тривиально. Пусть u, v, τ – компоненты вектора скорости; H – высота изобарических поверхностей; T – температура; q_1, q_2, q_3 – удельные влажности газообразной, жидкой и твердой фазы; J_ν – интенсивность радиации с частотой ν . Тогда система уравнений атмосферных процессов принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) u - lv &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial p} \lambda p^2 \frac{\partial u}{\partial p} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) v + lu &= -\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial p} \lambda p^2 \frac{\partial v}{\partial p} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) T - \frac{\gamma_a}{g} R T \frac{\tau}{p} &= \frac{\epsilon}{c_p} + \frac{\partial}{\partial p} \lambda_T p^2 \frac{\partial T}{\partial p} + \mu_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

⁹ Доклады Академии наук СССР, 1964, т. 155, № 5, с. 1062–1065.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0, \quad T = -\frac{p}{R} \frac{\partial H}{\partial p}; \\ \frac{\partial q_1}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) q_1 - \sum_j \alpha_{j1} q_1 &= \frac{\partial}{\partial p} \lambda_q p^2 \frac{\partial q_1}{\partial p} + \mu_q \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) q_2 - \sum_j \alpha_{j2} q_2 &= \frac{\partial}{\partial p} \lambda_q p^2 \frac{\partial q_2}{\partial p} + \\ &+ \mu_q \left(\frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial y^2} \right) - \delta_2 q_2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_3}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) q_3 - \sum_j \alpha_{j3} q_3 &= \frac{\partial}{\partial p} \lambda_q p^2 \frac{\partial q_3}{\partial p} + \\ &+ \mu_q \left(\frac{\partial^2 q_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_3}{\partial y^2} \right) - \delta_3 q_3; \\ \mu \frac{\partial J_\nu}{\partial z} + \alpha_\nu J_\nu &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-1}^1 d\mu' J_\nu g_\nu(\mu_0) + \alpha_c \eta_\nu(T); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\epsilon = \epsilon_w + \epsilon_J,$$

$$\epsilon_w = (L_{12}\alpha_{12} + L_{13}\alpha_{13}) q_1 - (L_{21}\alpha_{21}q_2 + L_{31}\alpha_{31}q_3), \quad (4)$$

$$\epsilon_J = \int_0^\infty d\nu \alpha_{c\nu} \left(\int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 d\mu J_\nu - \eta_\nu \right),$$

где $\eta_\nu(T)$ определяется формулой Планка, а L_{ij} – скрытая теплота переходов влаги из одних форм в другие. В формулах (1)–(3), кроме того, использованы следующие обозначения: α_{ij} – коэффициенты, учитывающие возможные переходы влаги из одного состояния в другие, причем они связаны соотношениями $\sum_j \alpha_{ij} = 0$ ($i = 1, 2, 3$);

δ_1, δ_2 – коэффициенты, характеризующие выпадение влаги в виде дождя и снега. Следует отметить, что некоторые из указанных коэффициентов вполне однозначно определяются из законов термодинамики влажно-адиабатических процессов, другие – из обработки результатов статистических наблюдений. Коэффициенты уравнений переноса радиации $\alpha = \alpha_s + \alpha_c$ определяются через удельные влажности q_1, q_2, q_3 и усредненные характеристики поглощающей и рассеивающей среды. Обозначения других физических величин в системе уравнений атмосферных процессов общеизвестны.

При постановке граничных условий на поверхности Земли $p = p_0$ будем исходить из следующих физических предпосылок, а именно: на поверхности Земли имеет место «условие прилипания» для компонентов вектора скорости u, v . Относительно величины τ будем предполагать, что она задана условием адиабатического расширения воздуха и с учетом обтекания орографических препятствий и неоднородностей. Поток тепла из почвы будем считать равным нулю. Это условие соответствует естественному предположению о быстрой адаптации температуры почвы к температуре приземного слоя воздуха.

В работе сделано также предположение о том, что относительная влажность воздуха у поверхности Земли считается известной на все время прогноза. Такое условие заменяет соотношение водного баланса системы Земля – атмосфера. Далее будем предполагать, что коротковолновая и длинноволновая радиации с заданным альбедо a_ν диффузно отражаются от земной поверхности с учетом трансформации радиации и собственного излучения подстилающей поверхности с сохранением полного потока приходящей к поверхности Земли и уходящей радиации. Что касается морей и океанов, то на их поверхности собственное излучение уже будет определено температурой поверхностного слоя воды, которая предполагается известной функцией координат.

Таким образом, условия на уровне подстилающей поверхности Земли запишутся в виде

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \tau = \tau_0, \quad q_1 = \overline{f q_1}(T), \quad \lambda_T p^2 \frac{\partial T}{\partial p} = 0,$$

$$J_\nu = \frac{a_\nu}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^0 J_\nu \mu d\mu + B \eta_\nu(T), \quad (\mu > 0), \quad (5)$$

$$B = \left(\int_0^\infty \eta_\nu d\nu \right)^{-1} \int_0^\infty d\nu (1 - a_\nu \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^0 J_{n\nu} \mu d\mu,$$

где $\overline{q_1}(T)$ – максимальная удельная влажность. Следует, однако, отметить, что на море $B = 1$, $T = T_0$, где T_0 – заданная температура поверхностного слоя воды.

Переходим теперь к граничным условиям на верхней границе атмосферы при $p = 0$. Будем предполагать, что турбулентные потоки

количества движения, тепла и водяного пара на верхней границе атмосферы равны нулю. Одновременно предполагаются равными нулю удельные влажности для жидкой и твердой фаз влаги, а также что единственным источником радиации является Солнце, излучающее коротковолновую радиацию, и приходящий в атмосферу поток длинноволновой радиации равен нулю. В результате приходим к следующим условиям:

$$\lambda p^2 \frac{\partial u}{\partial p} = 0, \quad \lambda p^2 \frac{\partial v}{\partial p} = 0, \quad \lambda_T p^2 \frac{\partial T}{\partial p} = 0,$$

$$\tau = 0, \quad \lambda_q p^2 \frac{\partial q_1}{\partial p} = 0, \quad q_2 = q_3 = 0, \quad (6)$$

$$J_\nu = \frac{S_\nu}{2\pi} \delta(\mu - \mu_\odot) (\mu < 0),$$

где S_ν – спектр солнечной радиации, а μ_\odot – высота Солнца.

В качестве начальных данных возьмем функции H , u , v , q_i ($i = 1, 2, 3$). Таким образом, задача поставлена полностью.

Переходим к численному решению задачи прогноза полей метеорологических элементов. Решение задачи будем производить с помощью специальным образом определенного метода расщепления многомерных операторов на последовательность одномерных [8–15]. В настоящей работе будет дано дальнейшее развитие идей метода расщепления применительно к задаче прогноза погоды.

Введем в рассмотрение интервал времени $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ и систему уравнений динамики атмосферных процессов аппроксимируем системой одномерных разностных уравнений. С этой целью полный интервал Δt разобьем на четыре равных интервала, на каждом из которых определим соответствующие одномерные уравнения.

Так, на первом интервале будем иметь

$$\frac{u^{j+1/4} - u^j}{\Delta t} + u^j \frac{\partial u^{j+1/4}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u^{j+1/4}}{\partial x^2},$$

$$\frac{v^{j+1/4} - v^j}{\Delta t} + u^j \frac{\partial v^{j+1/4}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v^{j+1/4}}{\partial x^2}, \quad (7)$$

$$\frac{T^{j+1/4} - T^j}{\Delta t} + u^j \frac{\partial T^{j+1/4}}{\partial x} = \mu_T \frac{\partial^2 T^{j+1/4}}{\partial x^2};$$

на втором интервале

$$\begin{aligned}
 \frac{u^{j+2/4} - u^{j+1/4}}{\Delta t} + v^j \frac{\partial u^{j+2/4}}{\partial y} &= \mu \frac{\partial^2 u^{j+2/4}}{\partial y^2}, \\
 \frac{v^{j+2/4} - v^{j+1/4}}{\Delta t} + v^j \frac{\partial v^{j+2/4}}{\partial y} &= \mu \frac{\partial^2 v^{j+2/4}}{\partial y^2}, \\
 \frac{T^{j+2/4} - T^{j+1/4}}{\Delta t} + v^j \frac{\partial T^{j+2/4}}{\partial y} &= \mu_T \frac{\partial^2 T^{j+2/4}}{\partial y^2};
 \end{aligned} \tag{8}$$

на третьем интервале

$$\begin{aligned}
 \frac{u^{j+3/4} - u^{j+2/4}}{\Delta t} + \tau^j \frac{\partial u^{j+3/4}}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} \lambda p^2 \frac{\partial u^{j+3/4}}{\partial p}, \\
 \frac{v^{j+3/4} - v^{j+2/4}}{\Delta t} + \tau^j \frac{\partial v^{j+3/4}}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} \lambda p^2 \frac{\partial v^{j+3/4}}{\partial p}, \\
 \frac{T^{j+3/4} - T^{j+2/4}}{\Delta t} &= \frac{\partial}{\partial p} \lambda_T p^2 \frac{\partial T^{j+3/4}}{\partial p}
 \end{aligned} \tag{9}$$

и, наконец, на последнем интервале

$$\begin{aligned}
 \frac{u^{j+1} - u^{j+3/4}}{\Delta t} - l v^{j+1} &= -\frac{\partial H^{j+1}}{\partial x}, \\
 \frac{v^{j+1} - v^{j+3/4}}{\Delta t} + l u^{j+1} &= -\frac{\partial H^{j+1}}{\partial y}, \\
 \frac{T^{j+1} - T^{j+3/4}}{\Delta t} - \frac{\gamma_a - \gamma}{9} R T^j \frac{\tau^{j+1}}{p} &= \frac{\epsilon^j}{c_p}, \\
 \frac{\partial u^{j+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{j+1}}{\partial y} + \frac{\partial \tau^{j+1}}{\partial p} &= 0, \\
 T^{j+1} &= -\frac{p}{R} \frac{\partial H^{j+1}}{\partial p}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

К системе уравнений (7)–(10) необходимо присоединить соответствующие граничные условия.

Системы уравнений (7)–(9) позволяют последовательно получить решения, удовлетворяющие граничным условиям. Однако особую трудность представляет получение решения системы уравнений (10), поскольку в качестве неизвестной функции здесь выступает H^{j+1} . С помощью последовательного исключения функции u^{j+1} , v^{j+1} , T^{j+1} и τ^{j+1} можно прийти к уравнению для функции H^{j+1} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{m^2} \frac{\partial H^{j+1}}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \left(\frac{\partial^2 H^{j+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H^{j+1}}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \alpha_x \frac{\partial H^{j+1}}{\partial y} - \alpha_y \frac{\partial H^{j+1}}{\partial x} \right) = -f^{j+1}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} f^{j+1} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{pR}{m^2} \left(T^{j+3/4} + \alpha \frac{\epsilon^j}{c_p l} \right) - \\ \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \left[\left(u^{j+3/4} + \alpha v^{j+3/4} \right)_x + \left(v^{j+3/4} - \alpha u^{j+3/4} \right)_y \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$m^2 = \frac{\gamma_a - \gamma}{l^2 g} R^2 T^j. \quad (13)$$

Анализ уравнения (11) показывает, что правая часть является известной функцией координат, которая определяется решением систем уравнений (7)–(9).

Переходим теперь к решению уравнений для переноса влажности. Аналогично предыдущему эта система может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{q_i^{j+1/4} - q_i^j}{\Delta t} + u^j \frac{\partial q_i^{j+1/4}}{\partial x} &= \mu_q \frac{\partial^2 q_i^{j+1/4}}{\partial x^2}, \\ \frac{q_i^{j+2/4} - q_i^{j+1/4}}{\Delta t} + v^j \frac{\partial q_i^{j+2/4}}{\partial y} &= \mu_q \frac{\partial^2 q_i^{j+2/4}}{\partial y^2}, \\ \frac{q_i^{j+3/4} - q_i^{j+2/4}}{\Delta t} + \tau^j \frac{\partial q_i^{j+3/4}}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} \lambda_q p^2 \frac{\partial q_i^{j+3/4}}{\partial p}, \\ \frac{q_i^{j+1} - q_i^{j+3/4}}{\Delta t} - \sum_k \alpha_{ki} q_k^{j+1} &= -\delta_i q_i^{j+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $i = 1, 2, 3$ соответственно. Заметим, что четвертое уравнение системы (14) представляет собой систему трех линейных алгебраических уравнений.

Системы одномерных уравнений решаются с помощью конечно-разностных методов. Для этого все производные заменяются соответствующими центральными разностями. В результате приходим к трехточечным разностным схемам, которые эффективно решаются с помощью метода факторизации [16, 17].

Уравнение (11) может быть решено релаксационным методом в сочетании с методом расщепления. Можно доказать, что построенная

система разностных уравнений аппроксимирует исходные дифференциальные уравнения с точностью до величин первого порядка малости по $\alpha = l\Delta t$ и что она устойчива в счетном отношении. Уравнения переноса радиации решаются в P_2 – приближении метода сферических гармоник [16].

Таким образом, задача о прогнозе полей метеорологических элементов распадается на последовательность элементарных алгоритмов, эффективно реализуемых на вычислительных машинах.

В заключение отметим, что если горизонтальный турбулентный обмен отсутствует, то сформулированные уравнения по-прежнему решаются с помощью метода факторизации. При этом для корректной постановки условий на границе области (x, y) следует принять значения функций в точках, где вектор скорости направлен внутрь области определения решения, а также условие, являющееся следствием двухточечного аналога соответствующего разностного уравнения системы для точек, в которых вектор скорости направлен вне области определения решения. Это второе соотношение будет являться естественным граничным условием, которое дает замыкание алгоритма соответствующей задачи. Следует, однако, отметить, что применение метода факторизации к решению уравнений при отсутствии турбулентного обмена требует выполнения условий Куранта. Для задач прогноза погоды, как известно, это условие не является существенным ограничением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. М., 1957.
2. Булеев Н. И., Марчук Г. И. Тр. Инст. физики атмосферы АН СССР. 1958. № 2.
3. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. 1963.
4. Блинова Е. Н. ДАН. 1956. Т. 110, № 6.
5. Булеев Н. И., Марчук Г. И. Сб. Вопр. динамической метеорологии. М., 1960.
6. Phillips N. Rev. Geophys. 1963. V. 1, 2.
7. Charney J. Tellus. 1955. No. 7.
8. Peaceman D., Rachford H. J. Soc. Ind. and Appl. Math. 1955. V. 3, No. 1.
9. Douglas V., Rachford H. Trans. Am. Math. Soc. 1956. V. 82, No. 2.
10. Яненко Н.Н. ДАН. 1959. Т. 125, № 6.

11. Багриновский К.-А., Годунов С. К. ДАН. 1957. Т. 115, № 3.
12. Анучина Н. И., Яненко Н. Н. ДАН. 1959. Т. 128, № 6.
13. Яненко Н. Н. ДАН. 1960. Т. 134, № 5.
14. Самарский А. А. Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 1962. Т. 2, № 5.
15. Самарский А. А., Андреев В. Б. Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3, № 6.
16. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М., 1961.
17. Годунов С. К., Рябенький В. С. Введение в теорию разностных схем. М., 1962.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ¹⁰

В работах [1, 2] метод дробных шагов (метод расщепления, метод слабой аппроксимации) использовался для исследования корректности задачи Коши для линейной системы дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Данная заметка посвящена доказательству существования гладкого решения смешанной задачи для одной квазилинейной системы уравнений. Эта задача является в некотором смысле (задача рассматривается в неограниченной по x, y области) модельной по отношению к задаче, используемой для краткосрочного прогноза погоды [3].

Задача А. Требуется определить функции u, v, H независимых переменных x, y, p, t , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - lv + \frac{\partial H}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + lu + \frac{\partial H}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial H}{\partial p} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

при $t > 0$, $0 < p_0 < p < P$, граничным условиям

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial H}{\partial p} = 0 & \text{при } p = p_0, \\ p \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial H}{\partial p} + \alpha \frac{\partial H}{\partial t} = 0 & \text{при } p = P \end{cases} \quad (2)$$

¹⁰ Доклады Академии наук СССР, 1966, т. 170, № 5, с. 1006–1008. Совместно с Г. В. Демидовым.

и начальным условиям

$$\begin{aligned} u(x, y, p, 0) &= u_0(x, y, p), \\ v(x, y, p, 0) &= v_0(x, y, p), \\ H(x, y, p, 0) &= H_0(x, y, p). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь l – гладкая функция x, y ; μ – гладкая функция p , причем $0 < \mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$; $p_0, P, \alpha, \mu_0, \mu_1$ – постоянные.

Пусть $\vec{U}(t) = (u, v, H, \partial H / \partial p)$, $D_t = \{S_t \times (p_0, P)\}$; S_t – сечение в пространстве (x, y, t) плоскостью $t = \text{const}$ конуса с основанием S_0 и образующими, наклоненными в сторону возрастания t под углом $\gamma = \arctg(\kappa + 1)$, где

$$\kappa = C + V_0, \quad V_0 = \max_S \sqrt{u_0^2 + v_0^2},$$

$$C = \max \left\{ \sqrt{4\mu_1}, \sqrt{2\mu(P)/\alpha} \right\}.$$

Пусть $W_2^{m, k_0}(D_t)$ – множество функций, имеющих обобщенные производные, принадлежащие $L_2(D_t)$, до порядка m , причем дифференцирование по p не превышает порядка k_0 .

Определение. Мы определим норму $U(t)$ в W_2^{m, k_0} следующим образом:

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{W_2^{m, k_0}}^2 &= \int_{S_t} \left\{ \sum_{m_1=0}^m \sum_{n+r=m_1} \left(\int_{p_0}^P \left[\left(\frac{\partial^{m_1} u}{\partial x^n \partial y^r} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial^{m_1} v}{\partial x^n \partial y^r} \right)^2 + \frac{p^2}{\mu} \left(\frac{\partial^{m_1+1} H}{\partial x^n \partial y^r \partial p} \right)^2 \right] dp + \frac{\alpha P}{\mu(P)} \left(\frac{\partial^{m_1} H(P)}{\partial x^n \partial y^r} \right)^2 \Bigg) + \\ &+ \sum_{m_1=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq k_0 \\ n+r+k=m_1}} \int_{p_0}^P \left[\left(\frac{\partial^{m_1} u}{\partial x^n \partial y^r \partial p^k} \right)^2 + \right. \\ &\left. \left. + \left(\frac{\partial^{m_1+1} H}{\partial x^n \partial y^r \partial p^{k+1}} \right)^2 \right] dp \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Теорема. Если $l \in W_2^m(S_0)$, $\mu \in W_2^{k_0}(p_0, P)$, $\vec{U}(0) \in W_2^{m,k_0}(D_0)$ при $m \geq 3$, $k_0 \geq 2$, то существует $\delta > 0$, зависящее от $\|\vec{U}(0)\|_{W_2^{m,k_0}}$, такое, что при $0 < t < \delta$ задача А имеет решение $\vec{U}(t) \in W_2^{m,k_0}(D_t)$.

Единственность решения задачи А в условиях теоремы доказана в работе [4]. Там же доказано существование решения задачи А в классе аналитических по x, y, t функций, допускающих равномерные по p мажоранты. Методом аналитической аппроксимации в работе [5] было доказано существование гладкого решения задачи А. В данной работе мы доказываем теорему другим методом. Этот метод был предложен в работах [3, 6, 8] для численного решения задачи краткосрочного прогноза погоды.

Решение $\vec{U}(t)$ задачи А строится как предел решений $\vec{U}_\tau(t)$ задач A_τ при τ , стремящемся к нулю. Задача A_τ «слабо аппроксимирует» задачу А и состоит в последовательном решении смешанной задачи A' для системы (1') и смешанной задачи A'' для системы (1'').

Задача A_τ . Вектор-функция $\vec{U}_\tau(t)$ непрерывна по t ; $\vec{U}_\tau(0) = \vec{U}(0)$; при $2(n-1)\tau < t \leq (2n-1)\tau$ (n — натуральное) удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\tau}{\partial t} + 2 \frac{\partial H_\tau}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v_\tau}{\partial t} + 2 \frac{\partial H_\tau}{\partial y} &= 0, \\ 2 \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial x} + \frac{\partial v_\tau}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\mu} \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial p \partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (1')$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial p \partial t} &= 0 \quad \text{при } p = p_0, \\ p \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial p \partial t} + \alpha \frac{\partial H_\tau}{\partial t} &= 0 \quad \text{при } p = P; \end{aligned} \quad (2')$$

при $(2n-1)\tau < t \leq 2n\tau$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\tau}{\partial t} + a_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial x} + b_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial y} - 2lv_\tau &= 0, \\ \frac{\partial v_\tau}{\partial t} + a_\tau \frac{\partial v_\tau}{\partial x} + b_\tau \frac{\partial v_\tau}{\partial y} + 2lu_\tau &= 0, \end{aligned} \quad (1'')$$

$$\frac{\partial^2 H_\tau}{\partial t \partial p} + a_\tau \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial x \partial p} + b_\tau \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial y \partial p} = 0$$

и граничному условию

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad p = P, \quad (2'')$$

где

$$a_\tau \equiv 2u_t((2n-1)\tau), \quad b_\tau \equiv 2v_t((2n-1)\tau).$$

Решение задачи A_τ сводится к последовательному решению двух весьма простых задач A' и A'' (задачу A' можно, например, решить методом Фурье). Опираясь на теорему вложения С. Л. Соболева [7], можно показать, что обе эти задачи являются равномерно корректными в смысле определения [1] в $W_2^{m,k_0}(D_t)$.

Запас гладкости ($m \geq 3, k_0 \geq 2$) обеспечивает компактность множества $\{\vec{U}_\tau(t)\}$ при t меньше некоторого δ , определяемого начальными данными, и существование предельной вектор-функции $\vec{U}(t) \in W_2^{m,k_0}(D_t)$, являющейся пределом $\vec{U}_{\tau_k}(t)$ при $\tau_k \rightarrow 0$. Если подставить $\vec{U}_\tau(t)$ в уравнения системы (1) и граничные условия (2), то они будут удовлетворяться с точностью до правых частей, слабо аппроксимирующих нуль. Отсюда следует, что $\vec{U}(t)$ является решением задачи A , а также, в силу единственности решения задачи A , следует, что $\vec{U}^\tau(t)$ сходится к $\vec{U}(t)$ при τ , стремящемся к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яненко Н. Н., Демидов Г. В. ДАН. 1966. Т. 167, № 6. С. 1242.
2. Демидов Г. В., Яненко Н. Н. Тр. Симпозиума по прикладн. и вычислительн. матем. Новосибирск, 1965.
3. Марчук Г. И., Курбаткин Г. П. и др. Известия АН СССР. Серия: Геофизика. 1964. № 12.
4. Демидов Г. В. ДАН. 1966. Т. 166, № 4. С. 771.
5. Демидов Г. В. Исследование корректности одной задачи метеорологии : диссертация. Новосибирск, 1966.
6. Марчук Г. И. Численные методы решения задач прогноза погоды и теории климата. Ч. I. Новосибирск, 1965.
7. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа и математической физике. Новосибирск, 1962.

8. Marchuk G. I. A New Approach to the Numerical Solution of Differential Equations of Atmospheric Processes. Technical Note. Geneva, 1965. No. 66.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПРОГНОЗА ПОГОДЫ¹¹

В работе [1] сформулирована теоретическая модель прогноза погоды и разработан принципиальный алгоритм решения системы уравнений динамики атмосферных процессов на основе метода расщепления многомерных операторов на последовательность одномерных. В результате задача прогноза полей метеорологических элементов сводится к последовательному решению следующих задач:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (u^{j+1/4} - u^j) + u^j u_x^{j+1/4} - \mu u_{xx}^{j+1/4} = 0, \\ \frac{1}{\Delta t} (v^{j+1/4} - v^j) + u^j v_x^{j+1/4} - \mu v_{xx}^{j+1/4} = 0, \\ \frac{1}{\Delta t} (T^{j+1/4} - T^j) + u^j T_x^{j+1/4} - \mu_T T_{xx}^{j+1/4} = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (u^{j+2/4} - u^{j+1/4}) + v^j u_y^{j+2/4} - \mu u_{yy}^{j+2/4} = 0, \\ \frac{1}{\Delta t} (v^{j+2/4} - v^{j+1/4}) + v^j v_y^{j+2/4} - \mu v_{yy}^{j+2/4} = 0, \\ \frac{1}{\Delta t} (T^{j+2/4} - T^{j+1/4}) + v^j T_y^{j+2/4} - \mu_T T_{yy}^{j+2/4} = 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (u^{j+3/4} - u^{j+2/4}) + \tau^j u_p^{j+3/4} - \left(\lambda p^2 u_p^{j+3/4} \right)_p = 0, \\ \frac{1}{\Delta t} (v^{j+3/4} - v^{j+2/4}) + \tau^j v_p^{j+3/4} - \left(\lambda p^2 v_p^{j+3/4} \right)_p = 0, \\ \frac{1}{\Delta t} (T^{j+3/4} - T^{j+2/4}) - \left(\lambda_T p^2 T_p^{j+3/4} \right)_p = 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (u^{j+1} - u^{j+3/4}) - l v^{j+1} = -H_x^{j+1}, \\ \frac{1}{\Delta t} (v^{j+1} - v^{j+3/4}) + l u^{j+1} = -H_y^{j+1}, \\ \frac{1}{\Delta t} (T^{j+1} - T^{j+3/4}) - \frac{\gamma_a - \gamma}{g} R T \frac{\tau^{j+1}}{p} = 0, \\ u_x^{j+1} + v_y^{j+1} + \tau_p^{j+1} = 0, \\ T^{j+1} = \frac{p}{R} H^{j+1}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь ради простоты предположено, что неадиабатические притоки тепла равны нулю.

¹¹ Доклады Академии наук СССР, 1964, т. 156, № 2, с. 308–311.

Анализ систем уравнений (1)–(4) показывает, что первые три системы не удовлетворяют ни уравнению неразрывности, ни соотношению квазистатичности. Однако указанным соотношениям удовлетворяют решения на линиях t_i , t_{i+1} и т. д. Функции с дробными индексами имеют вспомогательное значение при решении общей задачи и не могут, вообще говоря, иметь самостоятельного интереса при интерпретации результатов.

Граничными условиями для систем уравнений (1)–(4) могут быть поставлены следующие. На боковой поверхности заданы значения функций u , v , T , H для всех моментов времени. На поверхности Земли ($p = p_0$) $\tau = \tau_0$, на верхней границе атмосферы $\tau = 0$. В качестве начальных данных принимаются $u(x, y, p, 0)$, $v(x, y, p, 0)$, $T(x, y, p, 0)$.

Переходим к конечно-разностной (по x , y) формулировке задачи. С этой целью каждое уравнение системы (1), (2) запишем в виде

$$\varphi_k + r_k(\varphi_{k+1} - \varphi_{k-1}) - \nu(\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1}) = f_k, \quad (5)$$

где $r_k = \frac{\sigma_k \psi_k^j}{2} \frac{\Delta t}{h}$, $\nu = \mu \frac{\Delta t}{h^2}$, $\sigma_k \psi_k^j = \frac{1}{2}(\psi_{k+1}^j + \psi_{k-1}^j)$, $h = \Delta x + \Delta y$.

Отметим, что оператор σ_k играет значительную роль в построении эффективной конечно-разностной системы уравнений. Это связано с тем фактом, что имеет место точная формула

$$\nabla_k(\varphi\psi) = \sigma_k\varphi\nabla_k\psi + \sigma_k\psi\nabla_k\varphi, \quad \nabla_k\psi = \psi_{k+1} - \psi_{k-1}, \quad (6)$$

которая позволяет осуществлять различные преобразования системы разностных уравнений с сохранением их дивергентной структуры. Для нерасщепленных уравнений в разностной форме сформулированное утверждение является строгим; для расщепленной системы сохранение дивергентной структуры разностных уравнений оказывается приближенным, однако с хорошей степенью точности.

Трехточечное разностное уравнение (5) запишем в виде

$$a_k\varphi_{k+1} + b_k\varphi_k - c_k\varphi_{k-1} = f_k, \quad (7)$$

где $a_k = r_k - \nu$, $b_k = 1 - 2\nu$, $c_k = r_k + \nu$.

Решение разностного уравнения (7) с граничным условием

$$\varphi_0 = A, \quad \varphi_n = B \quad (8)$$

ищется с помощью метода факторизации:

$$\beta_{k+1} = -\frac{a_k}{b_k + c_k\beta_k},$$

$$z_{k+1} = \frac{c_k z_k + f_k}{b_k + c_k \beta_k}, \quad (9)$$

$$\varphi_k = \beta_{k+1} \varphi_{k+1} + z_{k+1}.$$

В наиболее неблагоприятном случае для счета, когда турбулентный обмен отсутствует, формулы (9) оказываются эффективными для реализации решения при выполнении условия Куранта

$$\sigma_k \psi^j \frac{\Delta t}{h} \leq 1.$$

Данное условие для задач прогноза погоды не является серьезным ограничением.

При рассмотрении системы уравнений (4) приходится иметь дело с неравномерной сеткой точек по координате p . Это вызвано спецификой атмосферных процессов в планетарном слое. Построение разностных схем повышенной точности на неравномерных сетках может быть проведено по алгоритму, сформулированному в работе [4]. В результате снова приходим к трехточечным разностным уравнениям (7) с условием (8).

Переходим теперь к наиболее трудному вопросу – решению системы уравнений (4) при соответствующих граничных условиях. Как показано в работе [1], система уравнений (4) сводится к одному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{m^2} \frac{\partial H^{j+1}}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} (H_{xx}^{j+1} + H_{yy}^{j+1} + \\ + \alpha_x H_y^{j+1} - \alpha_y H_x^{j+1} = -f^{j+1}), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$f^{j+1} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{pR}{m^2} T^{j+3/4} - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \left[(u + \alpha v)_x^{j+3/4} + (v - \alpha u)_y^{j+3/4} \right], \quad (11)$$

при условии

$$\begin{cases} p \frac{\partial H^{j+1}}{\partial p} - \frac{\gamma_a - \gamma}{9} R H^{j+1} = C^j, & p = p_0, \\ p \frac{\partial H^{j+1}}{\partial p} = 0, & p = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь H и T – соответственно отклонение высоты изобарической поверхности и температуры от нормальных (климатических) значений; C^j – известная функция координат (x, y, t_j) . Обозначения других величин имеются в работе [1].

Для решения задачи (10)–(12) сформулируем следующий экономичный релаксационный метод, основанный на методе расщепления (см. [1]).

Введем в рассмотрение новую переменную ξ и уравнение (10) преобразуем в следующее:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{m^2} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} (H_{xx} + H_{yy} + \alpha_x H_y - \alpha_y H_x) + f \quad (13)$$

при условиях

$$\begin{cases} p \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\gamma_a - \gamma}{9} R H = C, & p = p_0, \\ p \frac{\partial H}{\partial p} = 0, & p = 0, \end{cases} \quad (14)$$

где $H = H(x, y, p, \xi)$, $H^{j+1} = H(x, y, p, \infty)$.

Выберем произвольный интервал $\Delta \xi = \xi_{n+1} - \xi_n$, в пределах которого проведем расщепление задачи (13), (14):

$$\begin{aligned} \frac{H_{n+1/3} - H_n}{\Delta \xi} &= \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} (H_{xx} - \alpha_y H_x)_{n+1/3}, \\ \frac{H_{n+2/3} - H_{n+1/3}}{\Delta \xi} &= \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} (H_{yy} + \alpha_x H_y)_{n+2/3}, \\ \frac{H_{n+1} - H_{n+2/3}}{\Delta \xi} &= \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{m^2} \frac{\partial H_{n+1}}{\partial p} + f. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (15) вместе с соответствующими граничными условиями записываются в конечно-разностном виде по переменным (x, y, p) , подобно тому как было указано выше. Трехточечные разностные уравнения решаются с помощью метода факторизации.

Особого внимания заслуживает вопрос о выборе параметра релаксации $1/\Delta \xi$. В связи со спецификой задачи (13), (14) удастся сформулировать быстро сходящийся процесс.

Параметр релаксации выберем из условия

$$\frac{1}{\Delta \xi} = \frac{1}{1 + \alpha^2} \frac{4}{h^2}. \quad (16)$$

При таком выборе итерационный процесс сходится практически с оптимальной быстротой. Если, далее, в качестве нулевого приближения принять экстраполированное значение H^{j+1} , т. е.

$$H_0 = H^j + \Delta H^j,$$

где $\Delta H^j = H - H^{j-1}$, то практически необходимая для расчетов точность достигается уже при осуществлении 1–2 итераций. Таким образом, приходим к одной из разновидностей полуитерационных схем.

После того как функции H^{j-1} найдены, значения компонентов вектора скорости определяются формулами

$$\begin{cases} u^{j+1} = \frac{1}{1+\alpha^2} (u + \alpha v)^{j+3/4} - \frac{\Delta t}{1+\alpha^2} (H_x + \alpha H_y)^{j+1}, \\ v^{j+1} = \frac{1}{1+\alpha^2} (v - \alpha u)^{j+3/4} - \frac{\Delta t}{1+\alpha^2} (H_y - \alpha H_x)^{j+1}. \end{cases} \quad (17)$$

Таким образом, задача о прогнозе погоды представлена в виде последовательности элементарных алгоритмов, эффективно реализуемых на ЭВМ. Следует отметить, что дальнейшее усложнение математической постановки задачи полностью сохраняет сформулированный общий алгоритм, к которому лишь аддитивно добавляются новые элементарные алгоритмы, сводящиеся к решению простейших задач линейной алгебры.

В заключение отметим, что теоретическое обоснование сформулированного метода расщепления уравнений динамики атмосферных процессов оказалось возможным при замене исходной нелинейной задачи соответствующей линейной задачей с постоянными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. ДАН. 1964. Т. 155, № 5.
2. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. – М., 1961.
3. Годунов С. К., Рябенький В. С. Введение в теорию разностных схем. 1962.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Вычислит, матем. и матем. физ. 1962. Т. 2, № 5.

КРАТКОСРОЧНЫЙ ПРОГНОЗ ПОГОДЫ ПО ПОЛНЫМ УРАВНЕНИЯМ НА ОГРАНИЧЕННОЙ ТЕРРИТОРИИ¹²

Описан численный алгоритм пятиуровневой негеострофической схемы краткосрочного прогноза погоды, использующий методы расщепления и биортогонализации. Приведены результаты численных экспериментов.

¹²Изв. АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана, 1967, т. 3, № 11, с. 1166–1178. Совместно с Г. Р. Контаревым, Г. С. Ривиным.

Решению полной системы уравнений гидродинамики в целях краткосрочного прогноза погоды посвящено значительное число работ как в нашей, так и в зарубежной литературе. Это объясняется тем, что проблема решения полных уравнений в настоящее время является центральной в области численных методов прогноза погоды. В Гидрометеоцентре СССР был выполнен ряд теоретических исследований в этом направлении и предложены алгоритмы. Эти исследования завершились созданием оперативных схем краткосрочного прогноза погоды на основе полной системы уравнений ([1, 2] и др.). В настоящей статье изложен метод решения полных уравнений гидродинамики, основанный на расщеплении сложных операторов задачи на простейшие. Этот метод на протяжении ряда лет развивался в ВЦ СО АН СССР. Основные идеи метода изложены в работах [3–5] и др. Методы расщепления позволили дать эффективный алгоритм решения задачи краткосрочного прогноза погоды в адиабатическом и квазистатическом приближениях и довести теоретические исследования до оперативных схем, внедренных в работу Западно-Сибирского УГМС. В статье дается принципиальное описание алгоритма, а также анализ результатов испытаний.

1. Постановка задачи

Рассматривается бароклиническая адиабатическая модель атмосферы, описываемая в системе координат (x, y, p) следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + lv &= -gz_x, \\ v_t + uv_x + vv_y - lu &= -gz_y, \\ T_t + uT_x + vT_y - \frac{\gamma_a - \gamma}{gp} \frac{RT^*}{p} \tau &= 0, \\ u_x + v_y + \tau_p &= 0, T = -g \frac{p}{R} z_p, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u, v, τ – соответственно компоненты вектора скорости относительно осей x, y, p ; l – параметр Кориолиса; p – давление; T – температура; z – отклонение высоты изобарической поверхности от стандартного значения; γ и T^* – стандартные значения температурного градиента ($\gamma = -T_z$) и температуры соответственно.

В качестве граничных условий по вертикали выберем следующие:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad p = P; \quad pz_p = 0 \quad \text{при} \quad p = 0, \quad (1.2)$$

где w – вертикальная компонента вектора скорости в системе координат (x, y, z) ; P – давление на уровне моря.

На боковых границах интегрирования полагаем

$$u_t = v_t = z_t = 0. \quad (1.3)$$

2. Метод решения уравнений модели

Расщепление

Нахождение решения системы (1.1) в момент времени $t + \Delta t$ по известному решению в момент времени t производится в два этапа. На первом этапе решается система, описывающая перенос метеорологических полей по траекториям частиц:

$$\vec{\varphi}_t + u\vec{\varphi}_x + v\vec{\varphi}_y = 0. \quad (2.1)$$

Здесь вектор $\vec{\varphi}$ имеет вид

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ T \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

На втором этапе решается система, описывающая адаптацию метеорологических полей:

$$\begin{aligned} u_t + lv &= -gz_x, & v_t - lu &= -gz_y, \\ T_t - \frac{\gamma_a - \gamma}{gp} RT^* \tau &= 0, \\ u_x + v_y + \tau_p &= 0, & T &= -\frac{gp}{R} z_p. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для решения системы (2.1) используется метод предиктор-корректор, а для решения системы (2.3) – метод биортогонализации [3, 4, 6, 7].

Решение уравнений переноса

Метод предиктор-корректор состоит в том, что для решения системы (2.1) используется устойчивая разностная схема первого порядка точности для нахождения решения при $t = t_n + (\Delta t/2)$, а затем получается решение для $t = t_n + \Delta t$ с помощью дивергентной схемы с центральными разностями, имеющей второй порядок точности.

Пусть $\vec{\varphi}_{k,m,j}^n$ есть значение функции $\vec{\varphi}(x, y, p, t)$ в узлах сетки, где n – номер шага по времени. Обозначим h – шаг по пространственным переменным; Δp_j – шаг по вертикали; Δt – шаг по времени.

Кроме того, будем рассматривать следующие операторы:

$$\begin{aligned}\Delta_{+k}\vec{\varphi}_{k,m,j}^n &= \vec{\varphi}_{k+1,m,j}^n - \vec{\varphi}_{k,m,j}^n, \\ \Delta_{-k}\vec{\varphi}_{k,m,j}^n &= \vec{\varphi}_{k,m,j}^n - \vec{\varphi}_{k-1,m,j}^n.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Аналогичный смысл имеют операторы Δ_{+m} , Δ_{-m} , Δ_{+j} , Δ_{-j} , Δ_{+n} , Δ_{-n} .

Используя введенные обозначения, выпишем разностную схему предиктора для системы (2.1):

$$\frac{\vec{\varphi}^{n+1/8} - \vec{\varphi}^n}{\Delta t/2} + u^n \frac{\Delta_k \vec{\varphi}^{n+1/8}}{h} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\vec{\varphi}^{n+1/4} - \vec{\varphi}^{n+1/8}}{\Delta t/2} + v^n \frac{\Delta_m \vec{\varphi}^{n+1/4}}{h} = 0, \quad (2.6)$$

причем оператор Δ_k имеет вид

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta_{-k} & \text{при } u^n \geq 0, \\ \Delta_{+k} & \text{при } u^n < 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Аналогичный смысл имеет оператор Δ_m . Кроме того, в (2.5) и (2.6) мы для простоты записи опустили индексы по пространственным переменным. В дальнейшем будем опускать тот индекс по пространственным переменным, который совпадает соответственно с k , m , j . Для решения (2.5) и (2.6) используется метод факторизации [3].

Разностная схема корректора имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\vec{\varphi}^{n+1/2} - \vec{\varphi}^n}{\Delta t} &+ \frac{(\Delta_{+k} + \Delta_{-k})(u^{n+1/4}\vec{\varphi}^{n+1/4})}{2h} + \\ &+ \frac{(\Delta_{+m} + \Delta_{-m})(v^{n+1/4}\vec{\varphi}^{n+1/4})}{2h} = 0.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Вывод уравнения для высоты изобарической поверхности

Систему (2.2) запишем в следующем виде:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t} + lv^{n+1} = -gz_x^{n+1}, \quad (2.9)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\Delta t} - l u^{n+1} = -g z_y^{n+1}, \quad (2.10)$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+1/2}}{\Delta t} - \frac{\gamma_a - \gamma}{gp} R T^* \tau^{n+1} = 0, \quad (2.11)$$

$$u_x^{n+1} + v_y^{n+1} + \tau_p^{n+1} = 0, \quad (2.12)$$

$$T^{n+1} = -\frac{gp}{R} z_p^{n+1}. \quad (2.13)$$

Из этих пяти уравнений с пятью неизвестными u^{n+1} , v^{n+1} , τ^{n+1} , T^{n+1} , z^{n+1} получим одно уравнение с одним неизвестным z^{n+1} . Для этого из уравнений (2.9) и (2.10) выразим u^{n+1} и v^{n+1} через z^{n+1} , а затем, заменив в (2.11) T^{n+1} на z^{n+1} с помощью (2.13), из (2.11) выразим τ^{n+1} через z^{n+1} . Подставив полученные выражения в уравнение неразрывности (2.12), получим уравнение для z^{n+1} .

Приведем сразу необходимые промежуточные и конечный результаты:

$$u^{n+1} = \frac{1}{1 + \alpha^2} [u^{n+1/2} - g \Delta t z_x^{n+1} - \alpha (u^{n+1/2} - g \Delta t z_y^{n+1})], \quad (2.14)$$

$$v^{n+1} = \frac{1}{1 + \alpha^2} [v^{n+1/2} - g \Delta t z_y^{n+1} + \alpha (u^{n+1/2} - g \Delta t z_x^{n+1})], \quad (2.15)$$

$$\tau^{n+1} = -\frac{g}{(\gamma_a - \gamma) \Delta t R^2 T^*} \left[p^2 z_p^{n+1} + p \frac{R}{g} T^{n+1/2} \right], \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p^2}{\chi} \frac{\partial z^{n+1}}{\partial p} \right) + m^2 h^2 [z_{xx}^{n+1} + z_{yy}^{n+1} + \beta z_x^{n+1}] = \\ & = - \left\{ \frac{R}{g} \left(\frac{p T^{n+1/2}}{\chi} \right)_p - 2 \bar{m}^2 h [u_x^{n+1/2} + v_y^{n+1/2} + \right. \\ & \quad \left. + \alpha (u_y^{n+1/2} - v_x^{n+1/2}) + \beta u^{n+1/2}] \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

При этом были использованы следующие обозначения: $\alpha = l \Delta t$, $\beta = \alpha_y$, $\chi = T^*/T_1^*$ (T_1^* – значение температуры на уровне моря для стандартной атмосферы),

$$m^2 = \frac{(\gamma_a - \gamma) T_1^* R^2 \Delta t^2}{g (1 + \alpha^2) h^2}, \quad \bar{m}^2 = \frac{(\gamma_a - \gamma) T_1^* R^2 \Delta t}{2g^2 (1 + \alpha^2) h} = \frac{m^2 h}{2g \Delta t}.$$

Отметим, что при выводе (2.17) предполагалось, что α – линейная функция y . Если обозначим

$$L_p = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p^2}{\chi} \frac{\partial}{\partial p} \right), \quad (2.18)$$

$$L_{xy} = m^2 h^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right], \quad (2.19)$$

$$f = \left\{ \frac{R}{g} \left(\frac{p T^{n+1/2}}{\chi} \right)_p - 2\bar{m}^2 h \left[u_x^{n+1/2} + v_y^{n+1/2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha \left(u_y^{n+1/2} - v_x^{n+1/2} \right) + \beta u^{n+1/2} \right] \right\} + L_p z^n + L_{xy} z^n, \quad (2.20)$$

$$\delta z^{n+1} = z^{n+1} - z^n, \quad (2.21)$$

то уравнение (2.17) принимает вид

$$(L_p + L_{xy}) \delta z^{n+1} = -f. \quad (2.22)$$

Уравнение (2.22) аппроксимируется с помощью следующей разностной схемы:

$$H_j \delta z_{j-1}^{n+1} - C_j \delta z_j^{n+1} + B_j \delta z_{j+1}^{n+1} + m^2 \left[\delta z_{k+1}^{n+1} + \delta z_{k-1}^{n+1} + \delta z_{m+1}^{n+1} + \delta z_{m-1}^{n+1} - \right. \\ \left. - 4\delta z^{n+1} + \frac{\beta h}{2} (\Delta_{+k} + \Delta_{-k}) \delta z^{n+1} \right] = - \left\{ \bar{H}_j T_{j-1/2}^{n+1/2} - \bar{B}_j T_{j+1/2}^{n+1/2} - \right. \\ \left. - \bar{m}^2 \left[(\Delta_{+k} + \Delta_{-k}) u^{n+1/2} + (\Delta_{+m} + \Delta_{-m}) v^{n+1/2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha \left((\Delta_{+m} + \Delta_{-m}) u^{n+1/2} - (\Delta_{+k} + \Delta_{-k}) v^{n+1/2} \right) + 2\beta h u^{n+1/2} \right] + \right. \\ \left. + H_j z_{j-1}^n - C_j z_j^n + B_j z_{j+1}^n + m^2 \left[z_{k+1}^n + z_{k-1}^n + z_{m+1}^n + z_{m-1}^n - 4z^n + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\beta h}{2} (\Delta_{+k} + \Delta_{-k}) z^n \right] \right\}. \quad (2.23)$$

Используемые в (2.23) обозначения таковы:

$$\begin{aligned}
 H_j &= \frac{2p_{j-1/2}^2}{\chi_{j-1/2} (\Delta p_j + \Delta p_{j+1}) \Delta p_j}, \\
 \overline{H}_j &= \frac{2Rp_{j-1/2}}{g\chi_{j-1/2} (\Delta p_j + \Delta p_{j+1})}, \\
 B_j &= \frac{2p_{j+1/2}^2}{\chi_{j+1/2} (\Delta p_j + \Delta p_{j+1}) \Delta p_{j+1}}, \\
 \overline{B}_j &= \frac{2Rp_{j+1/2}}{g\chi_{j+1/2} (\Delta p_j + \Delta p_{j+1})}, \\
 C_j &= H_j + B_j.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Символически уравнение (2.23) можно записать так:

$$(L_p^{(h)} + L_{xy}^{(h)}) \delta z^{n+1} = -f^{(h)}, \tag{2.23^{(h)}}$$

где $L_p^{(h)}$, $L_{xy}^{(h)}$ и $f^{(h)}$ аппроксимируют соответственно L_p , L_{xy} и f . Вид разностных операторов легко усмотреть из (2.23).

Вывод граничных условий

а. Нижняя граница. Согласно (1.2), на нижней границе мы полагаем $w = 0$, поэтому из соотношения

$$\tau = \frac{gp}{RT} (z_t + uz_x + vz_y - w) \tag{2.25}$$

следует, что при $p = P$

$$\tau = \frac{gp}{RT} (z_t + uz_x + vz_y). \tag{2.26}$$

Подставляя (2.26) в (2.11), получим при $p = P$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+1/2}}{\Delta t} - (\gamma_a - \gamma) (z_t + uz_x + vz_y) = 0 \tag{2.27}$$

или, исключая T^{n+1} из этого соотношения с помощью уравнения статики (2.13) и проделав несложные преобразования, получаем, что при $p = P$ имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
& -pz_p^{n+1} - \frac{(\gamma_a - \gamma) R}{g} z^{n+1} = \\
& = -T^{n+1/2} + \frac{(\gamma_a - \gamma) R}{g} [z^n - \Delta t (uz_x + vz_y)]. \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Соотношение (2.28) аппроксимируем с помощью разностной схемы, предполагая, что $T_{k,m,1}^{n+1/2} = T_{k,m,2-1/2}^{n+1/2}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{p_1 (z_{k,m,0}^{n+1} - z_{k,m,2}^{n+1})}{\Delta p_1 + \Delta p_2} + \frac{(\gamma_a - \gamma_1) R}{g} z_{k,m,1}^{n+1} = \\
& = -T_{k,m,2-1/2}^{n+1/2} - \frac{(\gamma_a - \gamma_1) R}{g} \left[z_{k,m,1}^n - \frac{\Delta t}{2h} \left(u_{k,m,1} (\Delta_{+k} + \Delta_{-k}) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + v_{k,m,1} (\Delta_{+m} + \Delta_{-m}) \right) z_{k,m,1}^n \right]. \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Теперь запишем (2.23) для поверхности земли и объединим его с (2.29). Тогда получим соотношение для $p = P$:

$$-\tilde{C}_1 z_{k,m,1}^{n+1} + \tilde{B}_1 z_{k,m,2}^{n+1} + L_{xy}^{(h)} z_{k,m,1}^{n+1} = -f_{k,m,1}^{(h)}, \quad (2.30)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_1 &= C_1 + \frac{H_1 (\Delta p_1 + \Delta p_2) (\gamma_a - \gamma_1)}{P g} R, \\
B_1 &= C_1, \quad L_{xy}^{(h)} \sim L_{xy} \quad (2.31)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
f_{k,m,1}^{(h)} &= -\frac{R \Delta p_2 C_1}{g p_{2-1/2}} T_{k,m,2-1/2}^{n+1/2} - \bar{m}^2 \left[(\Delta_{+k} + \Delta_{-k}) u_{k,m,1}^{n+1/2} + \right. \\
&+ (\Delta_{+m} + \Delta_{-m}) v_{k,m,1}^{n+1/2} + \alpha \left((\gamma_{+m} + \gamma_{-m}) u_{k,m,1}^{n+1} - (\Delta_{+k} + \Delta_{-k}) v_{k,m,1}^{n+1/2} \right) + \\
&+ 2\beta h u_{k,m,1}^{n+1/2} \left. \right] - \frac{\tilde{C}_1 - C_1}{h} \left(u_{k,m,1}^{n+1/2} \Delta_k + v_{k,m,1}^{n+1/2} \Delta_m \right) z_{k,m,1}^n + \\
&+ (L_{xy}^{(h)} + C_1 \Delta_{+j}) z_{k,m,1}^n.
\end{aligned}$$

б. Верхняя граница. При $p = p_6 = 200$ мб ставим условие, согласно (1.2),

$$pz_p = 0.$$

Отсюда, используя уравнение статики и (2.23) для $p = 300$ мб, получаем

$$H_5 \delta z_{k,m,4}^{n+1} - \tilde{C}_5 \delta z_{k,m,5}^{n+1} + L_{xy}^{(h)} \delta z_{k,m,5}^{n+1} = -f_{k,m,5}^{(h)}, \quad (2.32)$$

где $\tilde{C}_5 = H_5$.

Таким образом, для нахождения δz^{n+1} надо решить следующую систему (здесь и в дальнейшем для простоты записи опущены индексы k, m при $\delta z, f, \varphi$):

$$\begin{aligned} & -\tilde{C}_1 \delta z_1^{n+1} + \tilde{B}_1 \delta z_2^{n+1} + L_{xy}^{(h)} \delta z_1^{n+1} = \\ & -f_1^{(h)}, H_j \delta z_{j-1}^{n+1} - C_j \delta z_j^{n+1} + B_j \delta z_{j+1}^{n+1} + L_{xy}^{(h)} \delta z_j^{n+1} = -f_j^{(h)}, \quad (j = 2, 3, 4), \\ & H_5 \delta z_4^{n+1} - \tilde{C}_5 \delta z_5^{n+1} + L_{xy}^{(h)} \delta z_5^{n+1} = -f_5^{(h)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Эту же систему запишем в следующем виде:

$$(\Lambda_p + L_{xy}^{(h)}) \delta \vec{z} = -\vec{f}^{(h)}, \quad (2.34)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_p &= \begin{vmatrix} -\tilde{C}_1 & \tilde{B}_1 & 0 & 0 & 0 \\ H_2 & -C_2 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & H_3 & -C_3 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & H_4 & -C_4 & B_4 \\ 0 & 0 & 0 & H_5 & -\tilde{C}_5 \end{vmatrix}, \\ \delta \vec{z} &= \begin{vmatrix} \delta z_1^{n+1} \\ \delta z_2^{n+1} \\ \delta z_3^{n+1} \\ \delta z_4^{n+1} \\ \delta z_5^{n+1} \end{vmatrix}, \quad \vec{f}^{(h)} = \begin{vmatrix} f_1^{(h)} \\ f_2^{(h)} \\ f_3^{(h)} \\ f_4^{(h)} \\ f_5^{(h)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Решение уравнения для δz

Раньше мы говорили, что для этой цели применяется метод биортогонализации. Он состоит в следующем.

Так как матрица Λ_p – якобиева, то все ее собственные значения являются вещественными и простыми [8]. Кроме того, матрица Λ_p неразложима с диагональным преобладанием, следовательно, все ее собственные числа отличны от нуля, и, наконец, в силу отрицательности диагональных элементов следует, что все собственные числа

являются отрицательными числами [9]¹³. Поэтому для такой матрицы Λ_p можно выбрать [10] полные системы собственных векторов $\{\vec{\psi}_i\}$ и $\{\vec{\psi}_i^*\}$ соответственно для матриц Λ_p и Λ_p' (штрих означает операцию транспонирования) так, чтобы они были биортонормированы, т. е.

$$(\vec{\psi}_i, \vec{\psi}_j^*) = \delta_{i,j}, \quad (2.36)$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

В силу полноты системы векторов представим

$$\delta\vec{z} = \sum_{i=1}^5 \varphi_i \vec{\psi}_i, \quad (2.37)$$

где φ_i – контравариантные координаты $\delta\vec{z}$ относительно $\{\psi_i\}$, тогда

$$\Lambda_p \sum_{i=1}^5 \varphi_i \vec{\psi}_i + L_{xy}^{(h)} \sum_{i=1}^5 \varphi_i \vec{\psi}_i = -\vec{f}^{(h)}. \quad (2.38)$$

Умножим левую и правую части уравнения (2.38) на $\vec{\psi}_i^*$ и получим, используя (2.36), следующее уравнение для нахождения φ_i :

$$\lambda_i \varphi_i + L_{xy}^{(h)} \varphi_i = (\vec{\psi}_i^*, \vec{f}^{(h)}). \quad (2.39)$$

Для решения уравнения (2.39) применяется метод Янга – Франкеля [9,11].

Найдя φ_i из (2.39), с помощью (2.37) находим δz .

Расчет u^{n+1} , v^{n+1} , T^{n+1}

Зная δz^{n+1} , с помощью (2.21) находим z^{n+1} , а затем из (2.9) и (2.10) находим u^{n+1} и v^{n+1} , используя (2.14) и (2.15). Наконец, с помощью уравнения статики (2.13) находим температуру T^{n+1} .

¹³Иное доказательство отрицательности собственных чисел матриц вида (2.35) приводится в [12].

3. Численные эксперименты

Численные эксперименты с описанной схемой проводились на прямоугольной сетке 22×26 с шагом $h = 300$ км. В качестве исходных данных брались значения высот изобарических поверхностей z на уровнях 1000, 850, 700, 500 и 300 мб, полученные в результате субъективного или объективного анализа.

С субъективным анализом, выполненным И. В. Бутом, были посчитаны прогнозы с 30 на 31.VIII.1963 г. и с 22 на 23.VIII.1964 г. С объективным анализом было посчитано четыре прогноза: 17–18, 19–20, 20–21 и 23–24.II.1967 г. Объективный анализ проводился с помощью схемы, разработанной В. В. Быковым и Г. П. Курбаткиным [13].

На данной сетке и на этих пяти уровнях на каждом шагу по времени, равном 1 часу, рассчитывались z , u , v и T . Для этих же случаев были вычислены значения z по квазигеострофической схеме [14]. Сравнение и оценка прогнозов проводились с помощью программы оценок успешности прогноза поля z , составленной Т. П. Романенко.

Эта программа производит сравнение фактических и прогностических тенденций полей z . При этом отбрасывается по пять строк с севера и с юга и по пять столбцов с запада и с востока области. Результаты приведены в таблицах 1 и 2, где δ и r – соответственно средние относительная погрешность и коэффициент корреляции для всех точек указанной области, а δ' и r' – то же для точек, в которых фактическая тенденция превышает 4 дм на поверхностях 1000, 850 и 700 мб, 8 дм – на поверхности 500 мб и 12 дм – на поверхности 300 мб.

На рисунках 1–4 приводятся карты фактических изогипс, полученных в результате субъективного анализа на 22 и 23.VIII.1964 г. для уровня 700 мб, а также прогнозы по квазигеострофической и негеострофической схемам. Значения $\lambda_i (i = 1, \dots, 5)$ находились с помощью метода Штурма с точностью $\varepsilon = 10^{-9}$. По найденным значениям λ_i с помощью приема, указанного в [15], были получены $\vec{\psi}_i^*$ и $\vec{\psi}_i$. На рисунках 5, 6 показаны их графики. Для проверки точности полученных значений оценивалось выполнение соотношения биортогональности. Оно выполняется с абсолютной погрешностью, равной 10^{-8} .

Таблица 1. Оценки для прогнозов, использующих субъективный анализ

Дата	Поверхность, мб	1000	850	700	500	300
	Схема	δ				
22–23.VIII.1964 г.	Геострофическая	1,07	0,95	0,93	0,86	1,41
	Негеострофическая	0,72	0,69	0,77	0,83	0,72
30–31.VIII.1963 г.	Геострофическая	0,94	0,99	0,99	0,97	1,04
	Негеострофическая	0,87	0,94	0,89	0,83	0,91
Дата	Поверхность, мб	1000	850	700	500	300
	Схема	r				
22–23.VIII.1964 г.	Геострофическая	0,33	0,33	0,39	0,51	0,01
	Негеострофическая	0,64	0,67	0,58	0,64	0,69
30–31.VIII.1963 г.	Геострофическая	0,33	0,21	0,21	0,28	0,39
	Негеострофическая	0,46	0,43	0,43	0,61	0,65

Дата	Поверхность, мб	1000	850	700	500	300
	Схема	δ'				
22–23.VIII.1964 г.	Геострофическая	0,79	0,86	0,81	0,71	1,67
	Негеострофическая	0,37	0,33	0,51	0,57	0,54
30–31.VIII.1963 г.	Геострофическая	0,77	0,91	0,92	0,88	0,86
	Негеострофическая	0,63	0,68	0,76	0,59	0,61
Дата	Поверхность, мб	1000	850	700	500	300
	Схема	r'				
22–23.VIII.1964 г.	Геострофическая	0,48	0,49	0,65	0,66	0,04
	Негеострофическая	0,87	0,90	0,83	0,58	0,78
30–31.VIII.1963 г.	Геострофическая	0,60	0,41	0,29	0,38	0,48
	Негеострофическая	0,80	0,70	0,55	0,82	0,74

Таблица 2. Средние по четырем дням оценки прогнозов, использующих объективный анализ

Поверхность, мб	Схема	δ	δ'	r	r'
1000	Квазигеострофическая	1,23	0,89	0,41	0,55
	Негеострофическая	0,63	0,54	0,69	0,80
850	Квазигеострофическая	1,10	0,90	0,35	0,49
	Негеострофическая	0,60	0,50	0,71	0,83
700	Квазигеострофическая	0,98	0,85	0,38	0,55
	Негеострофическая	0,62	0,48	0,74	0,84
500	Квазигеострофическая	0,83	0,79	0,57	0,70
	Негеострофическая	0,62	0,52	0,79	0,87
300	Квазигеострофическая	0,99	0,99	0,16	0,16
	Негеострофическая	0,61	0,54	0,78	0,83

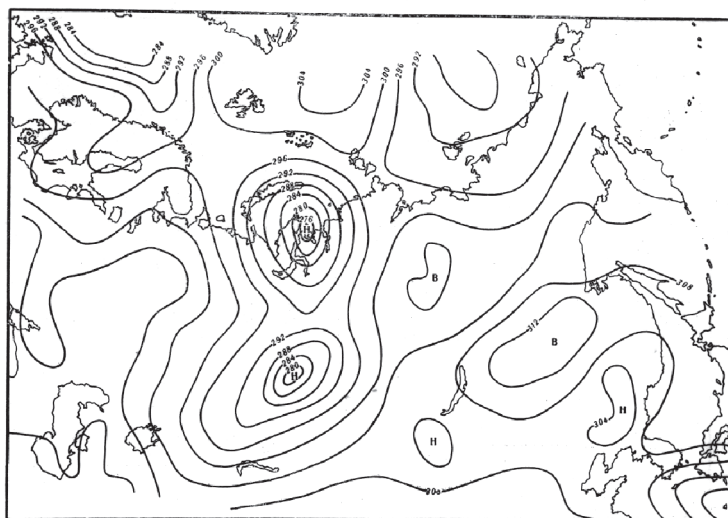


Рис. 1. Карта АТ 700 3 часа, 22.VIII.1964 г.

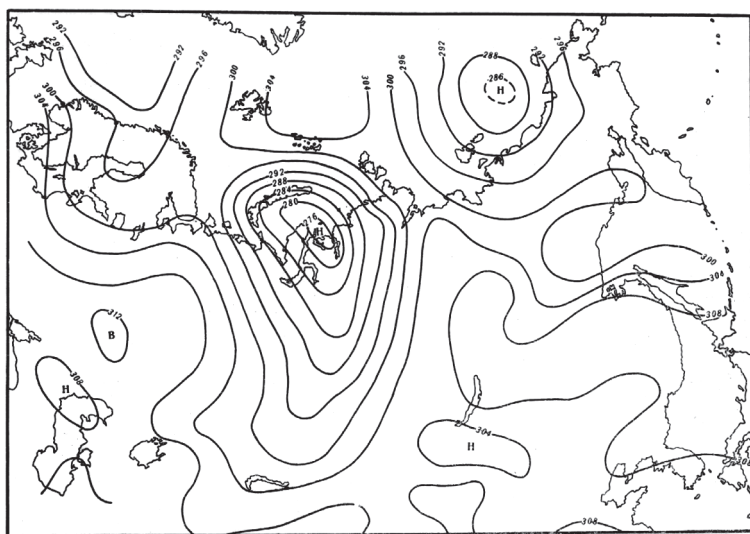


Рис. 2. Карта АТ 700 3 часа, 23.VIII.1964 г.

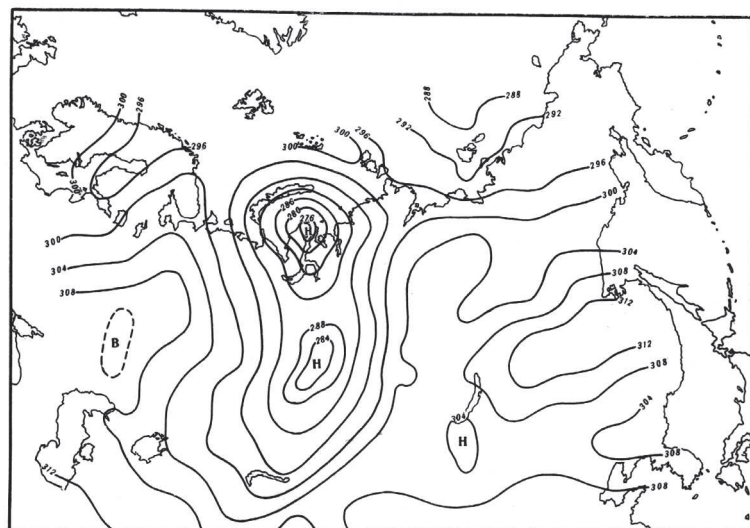


Рис. 3. Карта АТ 700 3 часа, 23.VIII.1964 г.
Квазигеострофический прогноз

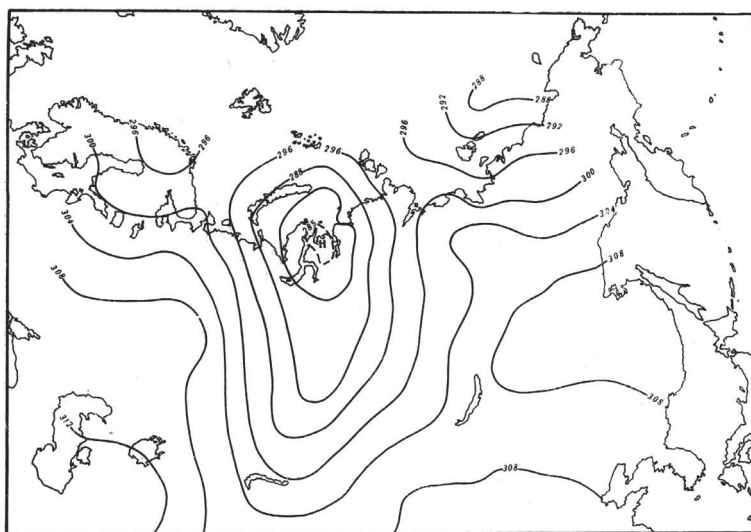


Рис. 4. Карта АТ 700 3 часа, 23.VIII.1964 г.
Негеострофический прогноз

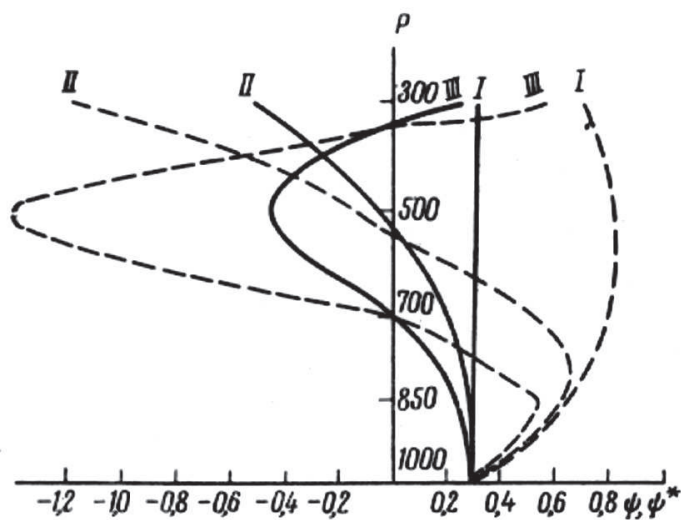


Рис. 5. Графики трех первых функций ψ_i (сплошные линии) и ψ_i^* (пунктир)

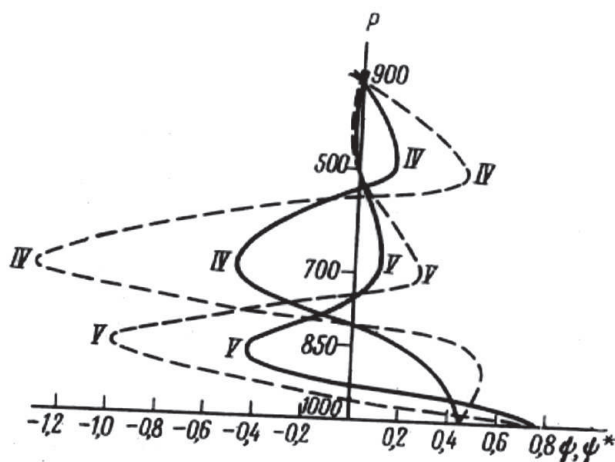


Рис. 6. Графики четвертой и пятой функций ψ_i (сплошные линии) и ψ_i^* (пунктир)

Авторы признательны за ценное обсуждение И. В. Буту, Л. Н. Гутману, Г. П. Курбаткину, А. С. Марченко, В. В. Пененко, Е. Е. Каленковичу, В. Ф. Киму, Т. П. Романенко, С. Я. Шульману, М. Г. Петровой, А. Е. Чехлан.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бортников С. А. О некоторых результатах оперативного краткосрочного прогноза геопотенциала по полным уравнениям для двухуровневой атмосферы // Тр. ММЦ, вып. 14. 1966.
2. Кадышников В. М. Опыт оперативных прогнозов по трехуровневой гидродинамической модели // Тр. ММЦ, вып. 14. 1966.
3. Марчук Г. И. Численные методы решения задач прогноза погоды и теории климата. Новосибирск, 1965.
4. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды // Гидрометеоиздат. 1967.
5. Марчук Г. И. Теоретическая модель прогноза погоды // ДАН СССР. Т. 155, № 5. 1964.
6. Немчинов С. В. О решении уравнения прогноза атмосферного поля давления // Тр. Токийск. симн. по числ. методам прогноза погоды. Гидрометеоиздат, 1967.
7. Гаврилин Б. Л. Об описании вертикальной структуры синоптических процессов // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. Т. 1, № 1. 1965.

8. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, 1963.
9. Varga R. S. *Matrix Iterative Analyses*. New Jersey : Prentice-Hall, 1962.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехиздат, 1953.
11. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ. 1963.
12. Немчинов С. В. О решении уравнения прогноза поля атмосферного давления // Известия АН СССР. Серия: Геофизика. 1959. № 12.
13. Быков В. В., Курбаткин Г. П. Опыт объективного анализа аэрологических данных // Известия АН СССР. Серия: Геофизика. 1961. № 2.
14. Марчук Г. И., Курбаткин Г. П., Бут И. В., Панчук В. И., Каленкович Е. Е. Оперативная квазигеострофическая схема краткосрочного прогноза погоды для пяти уровней атмосферы // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. Т. 1, № 2. 1965.
15. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы, ядра и малые колебания механических систем. 1950.

К ТЕОРИИ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПОЛЕЙ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ¹⁴

В последние годы в литературе широко дискутируются вопросы представления полей метеорологических элементов по собственным функциям корреляционной матрицы гидродинамических элементов и использованию этих функций для целей прогноза погоды. Основа такого подхода заложена в работах [1–3]. Наряду с этим имели место попытки построения системы собственных функций непосредственно на основе анализа структуры операторов задач динамической метеорологии [4–7]. Такой подход привел к биортогональной системе функций, хорошо описывающей вертикальную структуру метеорологических полей. В настоящей работе на основе анализа структуры уравнений динамики атмосферных процессов разработаны принципы построения биортогональной системы собственных функций в трехмерном евклидовом пространстве и обсуждены вопросы их использования для целей прогноза погоды. Ради простоты предположим, что

¹⁴ Доклады Академии наук СССР, 1968, т. 179, № 4, с. 832–835.

область определения решения уравнений гидродинамики совпадает с прямоугольным параллелепипедом D в системе координат x, y, z , где плоскость $z = 0$ совпадает с уровнем моря, а $z = h$ – с уровнем тропопавзы. Предположим, что на уровне моря и на уровне тропопавзы вертикальные токи равны нулю. Имея в виду обобщение результатов для сферы, предположим, что на остальных гранях параллелепипеда выполняются условия периодичности решения. Относительно параметра Кориолиса предположим, что он является линейной функцией y . Будем считать, что дневная поверхность Земли покрыта материками и океанами, а основным состоянием атмосферы является климат, на фоне которого развиваются существенно нестационарные процессы, определяющиеся начальными условиями задачи. Основная задача состоит в отыскании полной системы собственных функций для атмосферных процессов планетарного масштаба, элементы которой являются носителями большой содержательной информации о длительно действующих факторах, таких как неоднородность в теплоотдаче поверхности Земли за счет материков и океанов, климатическое поле ветра, температуры и давления и крупномасштабная турбулентность. Для этой цели воспользуемся линеаризованной системой уравнений гидротермодинамики атмосферных процессов около климатического состояния. Сведения о климате считаются известными. Климатические значения гидродинамических элементов будем считать квазистационарными для изучаемого периода и обозначим чертой сверху. Тогда система уравнений гидродинамики может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + Ku - lv &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} + \Pi u - (\text{grad } \bar{u}, \mathbf{u}), \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + Kv + lu &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y} + \Pi v - (\text{grad } \bar{v}, \mathbf{u}), \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + Kw + g \frac{\rho}{\bar{\rho}} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z} + \Pi w - (\text{grad } \bar{w}, \mathbf{u}), \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \bar{\rho} \mathbf{u} &= 0, \\
 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + K\vartheta + \gamma_a w &= \Pi \vartheta - (\text{grad } \bar{\vartheta}, \mathbf{u}), \\
 \frac{p}{\bar{p}} &= \frac{T}{\bar{T}} + \frac{\rho}{\bar{\rho}}, \quad \vartheta = T - \frac{\gamma_a}{g\bar{\rho}} p,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где u, v, w, p, ρ и T – отклонения соответствующих величин от их климатического значения, а операторы K и Π определены соотношениями

$$K\varphi = \bar{u}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\Pi\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \mu\Delta\varphi.$$

К системе уравнений (1) присоединим однородные граничные условия

$$\begin{cases} u = 0, v = 0, w = 0, \nu\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \nu\frac{\partial\vartheta}{\partial z} = \alpha\vartheta & \text{при } z = 0, \\ \nu\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \nu\frac{\partial v}{\partial z} = 0, w = 0, \nu\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \nu\frac{\partial\vartheta}{\partial z} = 0 & \text{при } z = h, \end{cases} \quad (2)$$

где α – заданный коэффициент теплопередачи.

Из двух последних уравнений системы (1) найдем

$$\frac{p}{\bar{p}} = \frac{1}{1 - \kappa} \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} + \frac{\vartheta}{\bar{T}} \right),$$

$$\frac{T}{\bar{T}} = \frac{1}{1 - \kappa} \left(\kappa \frac{\rho}{\bar{\rho}} + \frac{\vartheta}{\bar{T}} \right), \quad (3)$$

$$\kappa = \frac{\gamma_a R}{g}.$$

Исключим далее функции p/\bar{p} и T/\bar{T} из системы уравнений (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + Ku - lv &= -\frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{T}\rho + \bar{\rho}\vartheta) + \Pi u - (\text{grad } \bar{u}, \mathbf{u}), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + Kv + lu &= \frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{T}\rho + \bar{\rho}\vartheta) + \Pi v - (\text{grad } \bar{v}, \mathbf{u}), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + Kw + g\frac{\rho}{\bar{\rho}} &= -\frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{T}\rho + \bar{\rho}\vartheta) + \Pi w - (\text{grad } \bar{w}, \mathbf{u}), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + K\vartheta + (\gamma_a - \gamma)w &= \Pi\vartheta - (\text{grad } \bar{\vartheta}, \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\sigma = \frac{R}{1 - \kappa}$.

Введем в рассмотрение вектор-функцию $\vec{\varphi}$ с компонентами u, v, w, ρ, ϑ и оператор

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} K + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \Pi & \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - l & \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} & \frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{T} \cdot) & \frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} \cdot) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + l & K + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \Pi & \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} & \frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial y}(\bar{T} \cdot) & \frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho} \cdot) \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} & K + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \Pi & \frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z}(\bar{T} \cdot) + \frac{g}{\bar{\rho}} & \frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\rho} \cdot) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho} \cdot) & \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho} \cdot) & \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\rho} \cdot) & 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z} + \gamma_a & 0 & K - \Pi \end{array} \right\|.$$

Заметим, что здесь $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_i}$ – заданные функции, а точка в скобках означает, что дифференциальные операторы действуют на произведение функций. Предположим, что вектор-функция $\vec{\varphi}$ принадлежит гильбертову пространству R , элементы которого удовлетворяют граничным условиям (2) и требованию периодичности на остальных гранях параллелепипеда.

Компоненты вектор-функции $\vec{\varphi}$ обозначим φ_j ($j = 1, 2, \dots, 5$), сопряженные функции $\vec{\varphi}^*$, элементы которых своими компонентами имеют функции u^*, v^*, w^*, ρ^* и ϑ^* , удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{cases} u^* = 0, v^* = 0, w^* = 0, \nu \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0, \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = \alpha \vartheta^* & \text{при } z = 0, \\ \nu \frac{\partial u^*}{\partial z} = 0, \nu \frac{\partial v^*}{\partial z} = 0, w^* = 0, \nu \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0, \nu \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = 0 & \text{при } z = h. \end{cases} \quad (5)$$

Вектор-функции $\vec{\varphi}^*$ будем предполагать комплексными, компоненты вектор-функции $\vec{\varphi}^*$ обозначим φ_j^* ($j = 1, 2, \dots, 5$). Определим скалярное произведение функций $\vec{\varphi}$ и $\vec{\varphi}^*$ в виде

$$(\vec{\varphi}^*, \vec{\varphi}) = \sum_j \iiint_D \varphi_j^* \bar{\varphi}_j dD, \quad (6)$$

где чертой сверху обозначена комплексно сопряженная величина. Наряду с оператором A введен в рассмотрение сопряженный оператор A^* , определяемый тождеством Лагранжа

$$(\vec{\varphi}^*, A\vec{\varphi}) = (A^*\vec{\varphi}^*, \vec{\varphi}), \quad (7)$$

где $\vec{\varphi} \in R$, а $\vec{\varphi}^* \in R^*$. В результате преобразований приходим к оператору A^* :

$$A^* = \begin{vmatrix} -K^* + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \Pi & \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + l & \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} & -\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - l & -K^* + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \Pi & \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} & -\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} & -K^* + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - \Pi & -\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z} + \gamma_a \\ -\sigma \bar{T} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \right) & -\sigma \bar{T} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \right) & -K^* + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \right) + \frac{g}{p} & 0 & 0 \\ -\sigma \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \right) & -\sigma \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \right) & \sigma \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \right) & 0 & -K^* - \Pi \end{vmatrix},$$

где введено обозначение оператора K^* :

$$K^* = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} \cdot) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v} \cdot) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{w} \cdot).$$

Рассмотрим теперь спектральные проблемы для операторов A и A^* :

$$A\vec{\psi} = \lambda\vec{\psi}, \quad A^*\vec{\psi}^* = \bar{\lambda}\vec{\psi}^*, \quad (8)$$

где $\bar{\lambda}$ – комплексно сопряженное число по отношению к λ .

Предположим, что однородные задачи (8) определяют две полные системы собственных функций $\{\vec{\psi}_n\}$ и $\{\vec{\psi}_m^*\}$ и соответствующие им собственные значения $\{\lambda_n\}$, $\{\bar{\lambda}_n\}$. Нетрудно убедиться, что собственные функции $\vec{\psi}_n$ и $\vec{\psi}_m^*$ биортогональны. Если эти функции подходящим образом пронормировать, то будем иметь

$$(\vec{\psi}_n, \vec{\psi}_m^*) = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (9)$$

Вследствие предположенной полноты систем функций возможно представление любой функции $\vec{\varphi} \in R$ в виде ряда

$$\vec{\varphi} = \sum_n \varphi_n \vec{\psi}_n, \quad (10)$$

где φ_n – коэффициенты Фурье, определяемые соотношением

$$\varphi_n = (\vec{\varphi}, \vec{\psi}_n^*). \quad (11)$$

Обладая набором собственных функций, мы можем подойти к решению задачи прогноза погоды на основе динамико-статистического метода. В самом деле, разлагая поля метеорологических элементов

по системе собственных функций $\vec{\psi}_n$ в различные моменты времени, предшествующие прогностическому сроку, приходим к задаче временного экстраполирования случайных процессов. При этом случайными числами временного ряда являются сами коэффициенты Фурье разложения вектор-функции $\vec{\varphi}$ в ряд по $\vec{\psi}_n$.

Можно надеяться, что, обладая большой информационной способностью, уже несколько первых собственных функций $\vec{\psi}_n$ и $\vec{\psi}_m^*$ позволят достаточно хорошо описать эволюцию крупномасштабных процессов. Таким образом, основной проблемой в данном направлении исследований является решение спектральных задач (8), которые в компонентном представлении имеют вид

$$\begin{aligned}
 Ku + (\text{grad } \bar{u}, \mathbf{u}) - \Pi u - lv + \frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{T} \rho}{\partial x} + \frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} \vartheta}{\partial x} &= \lambda u, \\
 Kv + (\text{grad } \bar{v}, \mathbf{u}) - \Pi v + lu + \frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{T} \rho}{\partial y} + \frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} \vartheta}{\partial y} &= \lambda v, \\
 Kw + (\text{grad } \bar{w}, \mathbf{u}) - \Pi w + \frac{g}{\bar{\rho}} \rho + \frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{T} \rho}{\partial z} + \frac{\sigma}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} \vartheta}{\partial z} &= \lambda w, \\
 \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} &= \lambda \rho, \\
 K\vartheta + (\text{grad } \vartheta, \mathbf{u}) - \Pi \vartheta + \gamma_a w &= \lambda \vartheta
 \end{aligned} \tag{12}$$

в случае системы основных уравнений и

$$\begin{aligned}
 -K^* u^* + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \mathbf{u}^* \right) - \Pi u^* + lv^* - \bar{\rho} \frac{\partial \rho^*}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} \vartheta^* &= \bar{\lambda} u^*, \\
 -K^* v^* + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \mathbf{u}^* \right) - \Pi v^* - lu^* - \bar{\rho} \frac{\partial \rho^*}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y} \vartheta^* &= \bar{\lambda} v^*, \\
 -K^* w^* + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \mathbf{u}^* \right) - \Pi w^* - \bar{\rho} \frac{\partial \rho^*}{\partial z} + \left(\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z} + \gamma_a \right) \vartheta^* &= \bar{\lambda} w^*, \\
 -\sigma \bar{T} \text{div} \frac{\mathbf{u}^*}{\bar{\rho}} + \frac{g}{\bar{\rho}} w^* &= \bar{\lambda} \rho^*, \\
 -K^* \vartheta^* - \Pi \vartheta^* - \sigma \bar{\rho} \text{div} \frac{\mathbf{u}^*}{\bar{\rho}} &= \lambda \vartheta^*,
 \end{aligned} \tag{13}$$

где $\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}\mathbf{i} + \bar{v}\mathbf{j} + \bar{w}\mathbf{k}$, в случае сопряженных уравнений. Граничные условия для системы основных уравнений даны в форме (2), а для системы сопряженных уравнений – в форме (5).

Естественно, что рассмотренный алгоритм допускает различные упрощения в постановке задачи, например, принятие условия квазистатичности, пренебрежение вертикальным компонентом ускорения и т. д. Решение систем основных и сопряженных уравнений следует искать в разностном виде, сводя спектральные задачи для дифференциальных операторов к задачам линейной алгебры с использованием решения полной проблемы собственных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багров Н. А. Тр. Центральн. инст. прогнозов. 1959. Т. 74.
2. Обухов А. М. Известия АН СССР. Серия: Геофизика. 1960. Т. 3.
3. Юдин И. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Л., 1963.
4. Руховец Л. В. Тр. Центральн. инст. прогнозов. 1960. Т. 106.
5. Немчинов С. В. Известия АН СССР. Серия: Геофизика. 1959. Т. 12.
6. Гаврилин Б. Л. Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1965. Т. 1.
7. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Л., 1967.

МАЛОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ СПЕКТРАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО ТИПА¹⁵

Рассматривается малопараметрическая модель динамики атмосферы спектрально-разностного типа. Для построения модели используются приближенные собственные функции линеаризованного оператора гидротермодинамики, рассчитанные с помощью метода Галеркина в подпространстве, образованном базисом естественных ортогональных функций. Переход от полной модели к малопараметрической позволяет провести анализ характерных масштабов атмосферных процессов, описываемых моделью в данном при-

¹⁵Метеорология и гидрология, 1978, № 11, с. 5–19. Совместно с В. В. Пененко, А. В. Протасовым.

ближении, и сформулировать экономичные алгоритмы оптимизации и идентификации входных параметров по фактической информации.

Рассматривается малопараметрическая модель прогноза погоды спектрально-разностного типа. Модель основана на применении статистических и гидродинамических методов, а также методов теории оптимизации для решения задач прогноза полей метеозлементов. При этом в качестве исходной рассматривается модель динамики атмосферы с использованием гидротермодинамических полных уравнений в изобарической системе координат на сфере, приведенных к эволюционному виду. Оператор гидротермодинамики линеаризуется относительно некоторого основного состояния, зависящего только от пространственных переменных, и для полученного линеаризованного оператора решается приближенная частичная спектральная проблема Галеркина в подпространстве, образованном базисом естественных ортогональных функций. Затем решение эволюционной задачи представляется в виде конечного ряда по приближенным собственным функциям линеаризованного оператора и записывается система уравнений для коэффициентов Фурье.

Информативность исходной системы функций естественного ортогонального базиса при переходе к приближенным собственным функциям линеаризованного оператора сохраняется, а прогностические уравнения приобретают наиболее простой вид. Это позволяет провести анализ характерных временных масштабов атмосферных процессов, описываемых моделью в данном приближении, и сформулировать задачи оптимизации и идентификации параметров модели по фактической информации.

Итак, рассмотрим систему полных уравнений гидротермодинамики в следующем виде [6, 10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} u \vec{u} + lv + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{a} uv + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial H_s}{\partial \psi} + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \int_{\xi}^1 \frac{RT}{\xi} d\xi - \\ - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\chi_1}{P^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \mu_1 \left[\Delta u - \frac{u}{a^2 \sin^2 \theta} + \frac{2 \cos \theta}{a^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v}{\partial \psi} \right] = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div} v \vec{u} - lu - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{a} u^2 + \frac{1}{a} \frac{\partial H_s}{\partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\xi}^1 \frac{RT}{\xi} d\xi - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\chi_1}{\bar{P}^2} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \mu_1 \left[\Delta v - \frac{v}{a^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{a^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] = 0, \\
& \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} T \vec{u} - \frac{\gamma_a - \gamma}{g \xi} R \bar{T} \omega - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\chi_2}{\bar{P}^2} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \mu_2 \Delta T = \epsilon_C, \\
& \frac{\partial H_S}{\partial t} - \frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial (gZ - H_S)}{\partial \psi} - \frac{v}{a} \frac{\partial (gZ - H_S)}{\partial \theta} - K \Delta H_S - \\
& \quad - \omega R \bar{T} = 0 \text{ при } \xi = 1,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{u} = (u, v, w)$ – вектор скорости в системе координат (ψ, θ, ξ) ; ψ – долгота, отсчитываемая от Гринвичского меридиана к востоку; θ – дополнение до широты; $\xi = \frac{p}{\bar{P}}$; p – давление; \bar{P} – стандартное давление на уровне моря; T – отклонение температуры от ее стандартного значения \bar{T} ; R – газовая постоянная; $\chi_i = \nu_i \left(\frac{g \bar{p}}{R \bar{T}} \right)^2$, $\nu_i (i = 1, 2)$ – коэффициенты вертикального турбулентного обмена; $\mu_i (i = 1, 2)$ – коэффициенты горизонтального турбулентного обмена; γ_a – сухоадиабатический градиент температуры; γ – температурный градиент стандартной атмосферы; a – радиус Земли; l – параметр Кориолиса; g – ускорение свободного падения; $Z = Z(\psi, \theta)$ – функция, описывающая рельеф Земли; K – параметр, учитывающий трение в турбулентном пограничном слое на нижней границе атмосферы; ϵ_C – приток тепла; H_S – геопотенциал изобарической поверхности $p = \bar{P}$; $\omega(\psi, \theta, \xi) = - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial \sin \theta v}{\partial \theta} \right) d\xi$ – аналог вертикальной скорости в системе координат (ψ, θ, ξ) ; $\xi_0 = \frac{p_0}{\bar{P}}$; p_0 – давление на верхней границе атмосферы.

Систему уравнений (1) будем решать в области

$$D = \{0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad \xi_0 \leq \xi \leq 1\}$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}
& \omega = 0, \quad \frac{\chi_1}{\bar{P}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\chi_1}{\bar{P}} \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\chi_2}{\bar{P}} \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_0, \\
& \frac{\chi_1}{\bar{P}} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\alpha_1 u, \quad \frac{\chi_1}{\bar{P}} \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\alpha_2 v, \quad \frac{\chi_2}{\bar{P}} \frac{\partial T}{\partial \xi} = -\alpha_3 (T - T_n), \\
& \quad \text{при } \xi = 1,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha_i = \alpha_i(\psi, \theta)$, $(i = 1, 2, 3)$ – функции, характеризующие условия взаимодействия атмосферы с подстилающей поверхностью; T_n – температура подстилающей поверхности.

Кроме того, предполагается условие периодичности всех функций и коэффициентов по переменной ψ с периодом 2π , а на экваторе, т. е. при $\theta = \pi/2$, предполагаем условия

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad v = 0.$$

Заметим, что в общем случае коэффициенты α_i , ($i = 1, 2, 3$) в граничных условиях (2) зависят от искомым функции системы уравнений (1).

Запишем задачу (1)–(2) в операторном виде:

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta} + A(\vec{\varphi})\vec{\varphi} = \vec{f}, \quad (3)$$

где $A(\vec{\varphi})$ – оператор, однозначно определенный системой уравнений (1) и граничными условиями (2), а $\vec{\varphi}(u, v, T, H_S)$ – вектор-функция из класса функций, удовлетворяющих граничным условиям (2). При этом будем считать, что функции T и H_S однозначны в точке полюса ($\theta = 0$), а компоненты u и v вектора скорости образуют в точке $\theta = 0$ однопараметрическую группу вращения

$$u = U_{\Pi} \cos \psi - V_{\Pi} \sin \psi, \quad v = V_{\Pi} \cos \psi + U_{\Pi} \sin \psi.$$

Это позволяет исключить особенность уравнений в точке $\theta = 0$ переходом к стереографической проекции [11].

Предположим, что класс вектор-функций $\vec{\varphi}$ состоит из достаточно гладких вектор-функций и принадлежит к вещественному гильбертову пространству со скалярным произведением

$$\begin{aligned} (\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2) = & \int_D \int \int (u_1 u_2 + v_1 v_2 + \sigma_1 T_1 T_2) a^2 \sin \theta d\theta d\psi d\xi + \\ & + \sigma_2 \int_{D_S} \int H_{S_1} H_{S_2} a^2 \sin \theta d\theta d\psi, \end{aligned} \quad (4)$$

где D_S – поверхность полусферы, а σ_1 и σ_2 – коэффициенты, учитывающие различия в размерностях функций u , v , T и H_S .

Аппроксимацию задачи (1)–(2) выберем с применением интегроинтерполяционного метода баланса на основе определения обобщенного решения. Общие принципы построения конечно-разностных уравнений рассматриваемого нами вида достаточно подробно описаны в работах [3, 6, 12], поэтому мы не будем выписывать конкретный вид

разностного оператора A^h , аппроксимируемого соответствующий интегро-дифференциальный оператор в задаче (3), а сразу запишем ее дискретный аналог в векторно-матричной форме

$$\frac{d\vec{\varphi}^h}{dt} + A^h(\vec{\varphi}^h)\vec{\varphi}^h = \vec{F}^h. \quad (5)$$

Предположим, что все неоднородности граничных условий учтены в (5) правой частью \vec{F} , и для удобства изложения далее будем опускать индекс h .

Сеточную вектор-функцию $\vec{\varphi}$ в (5) представим в виде

$$\vec{\varphi} = \vec{\bar{\varphi}} + \vec{\varphi}',$$

где $\vec{\bar{\varphi}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{T}, \tilde{H}_S)$ будем называть функцией, описывающей основное состояние атмосферы, а $\vec{\varphi}' = (u', v', T', H'_S)$ – отклонением метео-элементов от основного состояния.

С использованием гипотезы о малости отклонений в окрестности функции основного состояния линеаризируем дифференциально-разностную задачу (5) относительно вектора $\vec{\varphi}$. Для этого рассмотрим определение дифференциала Гато для нелинейных операторов в линейных нормированных пространствах [4]:

$$B(\vec{\bar{\varphi}})\vec{\varphi}' = \frac{d}{d\epsilon} [A(\vec{\bar{\varphi}} + \epsilon\vec{\varphi}')(\vec{\bar{\varphi}} + \epsilon\vec{\varphi}')] \Big|_{\epsilon=0}. \quad (6)$$

С учетом (6) перепишем задачу (5) в виде

$$\frac{d\vec{\varphi}'}{dt} + B(\vec{\bar{\varphi}})\vec{\varphi}' + G(\vec{\varphi}')\vec{\varphi}' = \vec{Q}, \quad \vec{\varphi}' = \vec{g} \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (7)$$

где $\vec{Q} = \vec{F} - A(\vec{\bar{\varphi}})\vec{\bar{\varphi}}$, $G(\vec{\bar{\varphi}})$ – нелинейный оператор, полученный из соотношения

$$G(\vec{\varphi}')\vec{\varphi}' = A(\vec{\varphi})\vec{\varphi} - B(\vec{\bar{\varphi}})\vec{\varphi}' - A(\vec{\bar{\varphi}})\vec{\bar{\varphi}},$$

а \vec{g} – известная вектор-функция, определенная по начальным значениям полей метеоэлементов. Задачу (7) будем рассматривать в пространстве вещественных векторов R_N размерности N со скалярным произведением

$$(\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2)_{D_R} = (D_R\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2),$$

являющимся разностным аналогом (4). Здесь $(,)$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве вещественных векторов, а D_R – весовая матрица с неотрицательными элементами. Размерность N этого пространства определяется количеством точек используемой разностной сетки и числом векторных компонентов в вектор-функции $\vec{\varphi}$.

Если мы имеем информативный базис естественных ортогональных вектор-функций $\{\vec{\Omega}_i\}$, $(i = \overline{1, m})$, полученный на основе методов факторного анализа по информации о полях метеоэлементов в предыдущие относительно начала прогноза моменты времени [7, 9, 16, 18, 19], причем

$$(\vec{\Omega}_i, \vec{\Omega}_k)_{D_R} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k, \end{cases} \quad (8)$$

то, следуя методу Галеркина [8], решение задачи (7) формально запишем в виде ряда

$$\vec{\varphi}' = \sum_{k=1}^m \Phi_k(t) \vec{\Omega}_k, \quad \vec{g} = \sum_{k=1}^m g_k \vec{\Omega}_k, \quad (9)$$

где

$$\Phi_k(t) = (\vec{\varphi}', \vec{\Omega}_k)_{D_R}, \quad g_k = (\vec{g}, \vec{\Omega}_k)_{D_R}.$$

Под термином информативности будем понимать свойство базиса, при котором имеется возможность небольшим числом членов соответствующего ряда Фурье с достаточной точностью представить функции, описывающие исследуемые процессы.

Подставив (9) в (7) и результат скалярно умножив на $\vec{\Omega}_k$, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_k}{dt} + \sum_{i=1}^m c_{ki} \Phi_i &= \beta_k(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m) + q_k, \\ \Phi_k &= g_k \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} c_{ki} &= (B\vec{\Omega}_i, \vec{\Omega}_k)_{D_R}, \quad q_k = (\vec{Q}, \vec{\Omega}_k)_{D_R}, \\ \beta_k(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m) &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(G(\vec{\Omega}_i) \vec{\Omega}_j, \vec{\Omega}_k \right)_{D_R} \Phi_i \Phi_j. \end{aligned}$$

Систему уравнений (10) перепишем в векторно-матричной форме

$$\frac{d\vec{\Phi}}{dt} + C\vec{\Phi} = \vec{\beta} + \vec{q}, \quad \vec{\Phi} = \vec{\tilde{g}} \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (11)$$

где

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi_m \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}, \quad \vec{\tilde{g}} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{mm} \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что матрица C в (11) является матрицей простой структуры [1, 14, 15], представим ее в виде

$$C = W\Lambda W^{-1},$$

где

$$\Lambda = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} \chi_1 & \eta_1 \\ -\eta_1 & \chi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \chi_3 & \eta_3 \\ -\eta_3 & \chi_3 \end{pmatrix}, \dots, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} \chi_L & \eta_L \\ -\eta_L & \chi_L \end{pmatrix}, \lambda_{L+2}, \lambda_{L+3}, \dots, \lambda_m \right\}$$

– квазидиагональная матрица собственных значений, в которой каждой паре комплексно сопряженных собственных чисел $\lambda_k = \chi_k + i\eta_k$, $\lambda_{k+1} = \chi_k - i\eta_k$, $k = 1, 3, 5, \dots, L$, матрицы C соответствует квадратный вещественный блок $\begin{pmatrix} \chi_k & \eta_k \\ -\eta_k & \chi_k \end{pmatrix}$ размерности два, а столбцы матрицы W и строки матрицы W^{-1} составлены из нормированных векторов матрицы C соответственно. Пусть

$$W = \begin{pmatrix} w_1^1 & w_2^1 & \cdot & \cdot & \cdot & w_m^1 \\ w_1^2 & w_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & w_m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1^m & w_2^m & \cdot & \cdot & \cdot & w_m^m \end{pmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^{*1} & w_1^{*2} & \cdot & \cdot & \cdot & w_1^{*m} \\ w_2^{*1} & w_2^{*2} & \cdot & \cdot & \cdot & w_2^{*m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_m^{*1} & w_m^{*2} & \cdot & \cdot & \cdot & w_m^{*m} \end{pmatrix}.$$

Определив векторы

$$\vec{\Psi}_i = \sum_{k=1}^m w_i^k \vec{\Omega}_k, \quad \vec{\Psi}_i^* = \sum_{k=1}^m w_i^{*k} \vec{\Omega}_k, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (12)$$

и представив решение $\vec{\varphi}'$ задачи (7) в виде ряда Фурье $\vec{\varphi}' = \sum_{k=1}^m \tilde{\Phi}_k \vec{\Psi}_k$, будем иметь вместо (11) следующую задачу:

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dt} + \Lambda \tilde{\Phi} = \tilde{\beta} + \tilde{z}, \quad \tilde{\Phi} = \tilde{\gamma} \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (13)$$

где

$$\tilde{\Phi} = \begin{Bmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\Phi}_m \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\beta} = \begin{Bmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_m \end{Bmatrix}, \quad \tilde{z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{Bmatrix}$$

и

$$\tilde{\Phi}_k = \left(\vec{\varphi}', \vec{\Psi}_k^* \right)_{D_R}, \quad \tilde{\beta}_k = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(G(\vec{\Psi}_i) \vec{\Psi}_j, \vec{\Psi}_k^* \right)_{D_R} \tilde{\Phi}_i \tilde{\Phi}_j, \\ z_k = \left(\vec{Q}, \vec{\Psi}_k^* \right)_{D_R}, \quad \tilde{\gamma}_k = \left(\vec{g}, \vec{\Psi}_k^* \right)_{D_R}, \quad (k = \overline{1, m}). \quad (14)$$

Таким образом, метод Галеркина в рассматриваемой форме позволяет найти биортогональные базисы $\{\vec{\Psi}_k\}$, $\{\vec{\Psi}_k^*\}$ приближенных собственных функций оператора B , с использованием которых система уравнений для соответствующих коэффициентов Фурье имеет наиболее простой вид (13). По существу, данный подход является одной из практических реализаций общей идеи решения спектральной проблемы, сформулированной в работе [5] для линеаризованных операторов гидротермодинамики в целях построения экономичных малопараметрических спектральных моделей для описания динамики атмосферных процессов.

Решив систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье $\tilde{\Phi}_k$ ($k = \overline{1, m}$), решение исходной задачи (5) получим по формуле

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi} + \sum_{k=1}^m \tilde{\Phi}_k \vec{\Psi}_k. \quad (15)$$

Для решения системы уравнений (13) мы воспользуемся одной из численных схем, которая позволяет учесть аналитически ее линейную часть.

Итак, рассмотрим отдельно два случая:

1. Случай вещественного собственного числа λ_k ($k \geq L+2$). Решение уравнения

$$\frac{d\tilde{\Phi}_k}{dt} + \lambda_k \tilde{\Phi}_k = \tilde{\beta}_k + z_k \quad (16)$$

для любого момента времени $t \in [t_{j-1}, t_j]$ ($t_0 = 0$) может быть записано в интегральной форме Вольтера

$$\tilde{\Phi}_k(t) = e^{-\lambda_k(t-t_{j-1})} \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} (\tilde{\beta}_k + z_k) e^{\lambda_k(t-t_{j-1})} dt + \tilde{\Phi}_k(t_{j-1}) \right]. \quad (17)$$

Предполагая интервал времени $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ достаточно малым, а функции z_k , β_k слабо меняющимися в этом интервале, аппроксимируем интеграл в соотношении (17) приближенной квадратурной формулой

$$\tilde{\Phi}_k(t_j) = \frac{1 - e^{-\lambda_k \Delta t}}{\lambda_k} (\tilde{\beta}_k(t_{j-1}) + z_k) + \tilde{\Phi}_k(t_{j-1}) e^{-\lambda_k \Delta t}, \quad (18)$$

где коэффициент $\tilde{\beta}_k(t_{j-1})$ получен с помощью формулы (14) по известным значениям коэффициентов $\tilde{\Phi}_k(t_{j-1})$ в момент времени t_{j-1} .

2. В случае комплексного собственного числа λ_k ($k = 1, 3, 5, \dots, L$) мы имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\Phi}_k}{dt} + \chi_k \tilde{\Phi}_k + \eta_k \tilde{\Phi}_{k+1} &= \beta_k + z_k, \\ \frac{d\tilde{\Phi}_{k+1}}{dt} + \chi_k \tilde{\Phi}_{k+1} - \eta_k \tilde{\Phi}_k &= \beta_{k+1} + z_{k+1}, \end{aligned} \quad (19)$$

решение которой в момент времени t_j определяется по следующим приближенным формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_k(t_j) &= \frac{\zeta_1 \eta_k - \zeta_2 \chi_k}{\chi_k^2 + \eta_k^2} - \\ &- \frac{e^{-\chi_k \Delta t} [(\zeta_1 \chi_k - \zeta_2 \eta_k) \cos(\eta_k \Delta t) - (\zeta_1 \eta_k + \zeta_2 \chi_k) \sin(\eta_k \Delta t)]}{\chi_k^2 + \eta_k^2} + \end{aligned}$$

$$+ e^{-\chi_k \Delta t} \left[\tilde{\Phi}_k(t_{j-1}) \cos(\eta_k \Delta t) - \tilde{\Phi}_{k+1}(t_{j-1}) \sin(\eta_k \Delta t) \right],$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{k+1}(t_j) = & \frac{\zeta_1 \eta_k + \zeta_2 \chi_k -}{\chi_k^2 + \eta_k^2} - \\ & - \frac{e^{-\chi_k \Delta t} [(\zeta_1 \chi_k - \zeta_2 \eta_k) \sin(\eta_k \Delta t) + (\zeta_1 \eta_k + \zeta_2 \chi_k) \cos(\eta_k \Delta t)]}{\chi_k^2 + \eta_k^2} + \\ & + e^{-\chi_k \Delta t} \left[\tilde{\Phi}_{k+1}(t_{j-1}) \cos(\eta_k \Delta t) + \tilde{\Phi}_k(t_{j-1}) \sin(\eta_k \Delta t) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где $\zeta_1 = \tilde{\beta}_k(t_{j-1}) + z_k$, $\zeta_2 = \tilde{\beta}_{k+1}(t_{j-1}) + z_{k+1}$.

При вычислении значений квадратичных форм $\tilde{\beta}_k(t_{j-1})$ ($k = \overline{1, m}$) от коэффициентов Фурье $\tilde{\Phi}_i(t_{j-1})$ ($i = \overline{1, m}$) в формулах (18), (20) можно либо заранее найти коэффициенты матрицы нелинейных взаимодействий $A_{kij} = \left(G(\vec{\Psi}_i) \vec{\Psi}_j, \vec{\Psi}_k^* \right)_{D_R}$ и воспользоваться формулой из (14), либо на каждом шаге по времени восстанавливать решение $\vec{\varphi}'(t_{j-1}) = \sum_{k=1}^m \tilde{\Phi}_k(t_{j-1}) \vec{\varphi}_k$ и находить искомые значения как соответствующие коэффициенты Фурье, т. е. $\tilde{\beta}_k(t_{j-1}) = (G(\vec{\varphi}'(t_{j-1})) \vec{\varphi}'(t_{j-1}), \vec{\Psi}_k^*)_{D_R}$.

Выбор того или иного способа диктуется конкретными требованиями задачи и экономичностью вычислений, в частности, если мы хотим многократно использовать данную модель, не изменяя базисных функций, то целесообразно использовать в расчетах коэффициенты матрицы нелинейных взаимодействий.

При решении практических задач динамики атмосферы и задач прогноза погоды начальные данные и правая часть задаются с некоторой погрешностью. Кроме того, существует погрешность самой модели. В связи с этим возникает задача идентификации параметров модели по фактической информации, полученной в моменты времени, предшествующие прогнозу. Для решения этой задачи целесообразно воспользоваться методами теории оптимизации и осуществлять выбор параметров модели, исходя из условия минимизации функционала, определяющего отклонение между измеренными и вычисленными с помощью модели значениями прогнозируемых величин. Общие методы решения задач оптимизации достаточно подробно описаны в работах [8, 13, 17]. Приложения этих методов к задачам математического моделирования атмосферных процессов рассматривались в [2, 11]. Использование малопараметрической модели существенно

упрощает проблему уточнения ее входных параметров в соответствии с заданным критерием. Действительно, решение $\widetilde{\Phi}(t)$ задачи (13) зависит от вектора входных параметров $\vec{Y} = \{\Phi_k(t_0), z_k\}$ ($k = \overline{1, m}$), т. е. $\widetilde{\Phi}(t) = \tilde{\Phi}(t, \vec{Y})$. Пусть на интервале времени $[-\hat{t}_0, 0]$, предшествующем сроку прогноза $t_0 = 0$, заданы значения коэффициентов $\Phi_{u_k}(t_q)$ ($k = \overline{1, m}$; $t_q \in [-\hat{t}_0, 0]$; $0 < \hat{t}_0 < \infty$, которые получены в результате разложения экспериментальной метеоинформации в ряд Фурье по приближенным собственным функциям оператора B , и вектор правой части \vec{z} не зависит от времени.

Рассмотрим функционал

$$J_0(\tilde{\Phi}) = \frac{1}{2} \sum_{-\hat{t}_0}^0 \left(\tilde{\Phi}_k(t) - \Phi_{u_k}(t) \right)^2 \delta(t - t_q) \omega_k(t) dt, \quad t_q \in [-\hat{t}_0, 0], \quad (21)$$

где $\delta(t - t_q)$ – дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точках $t_q \in [-\hat{t}_0, 0]$; $\omega_k(t)$ – неотрицательные весовые функции, удовлетворяющие условию нормировки

$$\sum_{k=1}^m \int_{-\hat{t}_0}^0 \omega_k(t) \delta(t - t_q) dt = 1, \quad t_q \in [-\hat{t}_0, 0].$$

Поиск минимума функционала (21) при ограничениях (13) будем называть задачей определения оптимального вектора входных параметров $\vec{Y}_c = \{\tilde{\Phi}_k(-t_0), z_k\}$ ($k = \overline{1, m}$). Тогда искомый вектор параметров \vec{Y} найдем с помощью системы уравнений (18), (20) с начальными данными \vec{Y}_c . В соответствии с методом множителей Лагранжа рассмотрим функционал

$$J(\tilde{\Phi}, \vec{Y}, \vec{b}^*) = J_0(\tilde{\Phi}) + \left(\frac{d\tilde{\Phi}}{dt} + \Lambda \tilde{\Phi} - \tilde{\beta} - \vec{z}, \vec{b}^* \right), \quad (22)$$

где

$$\vec{b}^* = \left\| \begin{array}{c} \vec{b}_1^*(t) \\ \vec{b}_2^*(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{b}_m^*(t) \end{array} \right\|$$

– вектор множителей Лагранжа, а (\cdot, \cdot) – скалярное произведение, определяемое формулой

$$(\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \sum_{k=1}^m \int_{-\hat{t}_0}^0 b_{1_k}(t) \cdot b_{2_k}(t) dt$$

для любых векторов с достаточно гладкими компонентами

$$\vec{b}_i = \begin{pmatrix} b_{i_1}(t) \\ b_{i_2}(t) \\ \vdots \\ b_{i_m}(t) \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2).$$

Теперь если выбрать множители Лагранжа из решения сопряженной задачи

$$-\frac{d\vec{b}^*}{dt} + \Lambda^T \vec{b}^* - G^*(\vec{b}^*) + \vec{F}^* = 0, \quad b_k^*(0) = 0, \quad (k = \overline{1, m}), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \{G^*(\vec{b}^*)\}_i &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m (A_{kij} + A_{kji}) \tilde{\Phi}_j b_k^*, \\ \{\tilde{F}^*\}_i &= (\tilde{\Phi}_i - \tilde{\Phi}_{u_i}) \delta(t - t_q) \omega_i(t), \end{aligned}$$

$i = \overline{1, m}$, то градиент функционала J_0 при условии (13) в направлении вектора \vec{Y}_c определяется по формуле

$$\text{grad}_{\vec{Y}_c} J_0 = \begin{pmatrix} \vec{b}^*(-\hat{t}_0) \\ 0 \\ \int_{-\hat{t}_0}^0 b^*(t) dt \\ -\hat{t}_0 \end{pmatrix},$$

и мы можем построить итерационный процесс для нахождения оптимального значения вектора входных параметров \vec{Y}_c :

$$\vec{Y}_c^{n+1} = \vec{Y}_c^n - \tau^n \text{grad}_{\vec{Y}_c} J_0, \quad (24)$$

где $\tau^n > 0$ – итерационный параметр, выбираемый численно из условия ближайшего локального минимума функционала J_0 в окрестности

нуля на векторах исходных данных, представленных однопараметрическим семейством векторов (24).

Естественно, сходимость итерационного процесса зависит от начального приближения \vec{Y}_c^0 . Это является следствием нелинейности ограничений (13). Мы выбираем начальное приближение из решения задачи на минимум функционала J_0 при линейных ограничениях, т. е. когда коэффициенты $\tilde{\beta}_k$ ($k = \overline{1, m}$) равны нулю. В этом случае имеют место явные формулы для решения $\vec{\Phi}$ и задача сводится к задаче на безусловный экстремум.

Таким образом, алгоритм численной реализации следующий:

1. Начиная с некоторого приближения вектора \vec{Y}_c^0 , получаем решение задачи (13) на интервале времени $[-\hat{t}_0, 0]$ по формулам (18), (20).
2. Используя решение задачи (13), находим решение сопряженной задачи (23) по формулам, аналогичным (18), (20).
3. Определяя градиент функционала J_0 , решаем задачу о нахождении оптимального значения τ^n в окрестности нуля из условия локального минимума функционала J_0 на векторах вида (24).
4. Следующее приближение вектора \vec{Y}_c^{n+1} , начальных данных и правой части получаем по формуле (24).

Описанный процесс повторяется до сходимости.

Рассмотрим теперь вопрос о выборе интервала времени $[-\hat{t}_0, 0]$, на котором задана априорная информация для задачи оптимизации спектральной модели прогноза погоды. Естественно, что длина этого интервала должна быть достаточной для того, чтобы правильно определить тенденцию в поведении во времени коэффициентов разложения в ряд Фурье по приближенным собственным функциям линеаризованного оператора исходной модели (1). Поскольку линеаризованная задача в рамках спектрально-разностной модели (13) распадается на ряд независимых задач для коэффициентов Фурье, а соответствующие собственные числа определяют их временной масштаб изменения, то нетрудно видеть, что длина интервала «настройки» должна зависеть от номера коэффициента Фурье, а точнее – от периода колебаний соответствующей приближенной собственной функции.

Предполагая, что линейная часть модели описывает некоторый средний в окрестности ситуации основного состояния временной ход, изменения коэффициентов Фурье, а нелинейные взаимодействия накладывают на этот фон возмущения, мы видим, что длина интервала «настройки» $[-\hat{t}_{0,i}, 0]$ для коэффициента Фурье с номером i должна быть,

по-видимому, не менее четверти периода колебаний соответствующей собственной функции.

С другой стороны, информативность базиса приближенных собственных функций зависит от статистической выборки, по которой был построен исходный базис естественных ортогональных функций. Таким образом, верхняя граница длины интервала «настройки» линейной модели является длиной временного интервала, в пределах которого имеет место достаточная информативность соответствующего базиса естественных ортогональных функций, например, месяц, сезон и т. д.

В случае, когда период колебаний превышает длину интервала информативности базиса или приближенной собственной функции соответствует вещественное собственное число, в рамках линейной модели разумнее полагать соответствующие коэффициенты не зависящими от времени.

С включением нелинейных взаимодействий мы рассматриваем задачу оптимизации, в отличие от линеаризованной модели, одновременно для всех коэффициентов Фурье разложения (15). В этом случае мы выбираем интервал «настройки» равным максимальному из интервалов соответствующей линейной задачи оптимизации.

В качестве примера приведем результат экспериментального 6-суточного прогноза. При этом для построения многомерных функций естественного ортогонального базиса, который использовался для расчета приближенных собственных функции линеаризованного оператора, были выбраны данные о полях геопотенциала в узлах географической сетки Северного полушария с разрешением $5^\circ \times 10^\circ$ на семи стандартных изобарических поверхностях: 1000, 850, 700, 500, 300, 200, 100 мб за декабрь и начало января 1964–1969 гг. Всего для построения базиса использовалось 160 метеоситуаций. Недостающие данные о полях компонентов вектора скорости и температуры были получены на этой же сетке с помощью геострофических формул и уравнения статики соответственно. В силу возможностей ЭВМ БЭСМ-6, на которой проводились расчеты, в естественный ортогональный базис включена 31 многомерная функция. Линеаризация оператора осуществлялась относительно первой функции естественного ортогонального базиса, взятой с весом, равным среднему значению коэффициентов Фурье для всех метеоситуаций за декабрь, рассчитанных для этой функции. Численный прогноз с помощью предложенной модели был выполнен для метеоситуаций с 11 по 16 декабря 1964 г., не во-

шедших в исходную совокупность для построения естественного ортогонального базиса. На рис. 1 изображен временной ход коэффициентов разложения в ряд Фурье по приближенным собственным функциям, собственные числа и периоды колебаний которых представлены в таблице 1. На оси t момент времени, равный нулю, соответствует началу прогноза (10 декабря 1964 г.). Пунктирными линиями изображено поведение во времени соответствующих коэффициентов, рассчитанных по линеаризованной модели с оптимизацией по реальным данным за семь предыдущих суток (4–10 декабря 1964 г.). Нетрудно видеть, что при выполнении условия на длину интервала «настройки» мы получаем достаточно хорошее согласование между коэффициентами Фурье, рассчитанными по реальным данным (1) и с помощью прогностической модели. Эффект включения нелинейных взаимодействий иллюстрируется на том же рис. 1, где сплошными линиями изображен временной ход коэффициентов Фурье, рассчитанных с помощью нелинейной спектрально-разностной модели с оптимизацией. Существенное улучшение в поведении наблюдалось в основном для коэффициентов Фурье, соответствующих низкочастотной части спектра. Это указывает на то, что в нашей модели изменения в длиннопериодной части спектра вызываются в значительной мере передачей энергии из короткопериодной части спектра [2].

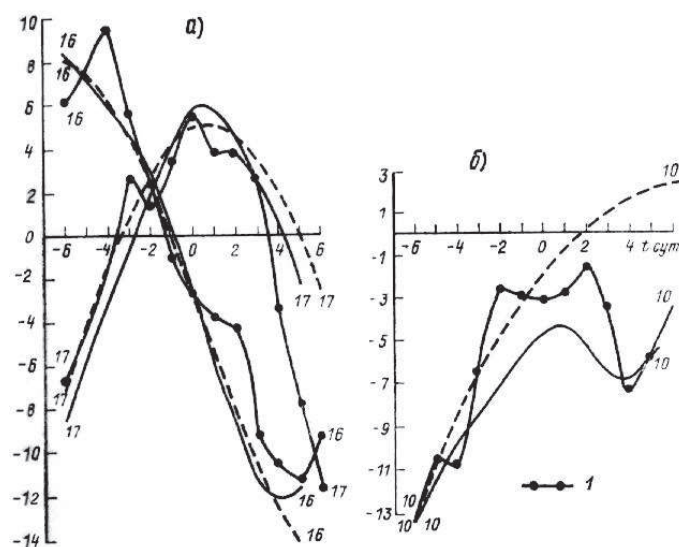


Рис. 1.

Таблица 1. Приближенные собственные значения λ_k и периоды колебаний T_k (сутки) для линеаризованного оператора гидротермодинамики

k	$\text{Re}(\lambda_k)$	$\text{Im}(\lambda_k)$	T_k
1	0,327 262	0,0	–
2	0,103 062	0,397 596	231,037
3	0,103 062	–0,397 596	231,037
4	0,679 794	0,158 517	579,492
5	0,679 794	–0,158 517	579,492
6	–0,566 956	–0,656 688	139,883
7	–0,566 956	0,656 688	139,883
8	1,262 660	0,0	–
9	0,749 819	–1,236 19	74,308
10	0,749 819	1,236 19	74,308
11	1,467 81	–1,305 51	70,362
12	1,467 81	1,305 51	70,362
13	2,022 83	–0,990 666	92,724
14	2,022 83	0,990 666	92,724
15	2,496 73	0,0	–
16	0,174 703	2,633 999	34,874
17	0,174703	–2,633 999	34,874
18	2,68016	0,555 374	165,401
19	2,68016	–0,555 374	165,401
20	–0,896225	2,8951	31,729
21	–0,896225	–2,8951	31,729
22	0,921526	–3,767 87	24,38
23	0,921526	3,767 87	24,38
24	–1,05850	–5,177 27	17,774
25	–1,05850	5,177 27	17,774
26	–0,85	–5,7068	16,096
27	–0,85	5,7068	16,096
28	–0,878	7,751 46	11,851
29	–0,878	–7,751 46	11,851
30	–2,098	7,576 628	12,124
31	–2,098	–7,576 628	12,124

Таблица 2. Оценка прогноза на 6 сут по линейной спектрально-разностной модели с оптимизацией (r – коэффициент корреляции, ϵ – относительная средняя ошибка, числитель – по всем отклонениям, знаменатель – по «большим» отклонениям).

Исходные данные за 10 декабря 1964 г.

Сутки	100 мб		200 мб		300 мб		500 мб	
	r	ϵ	r	ϵ	r	ϵ	r	ϵ
1	0,64	0,75	0,62	0,78	0,75	0,82	0,50	0,87
	0,76	0,50	0,78	0,60	0,70	0,66	0,64	0,67
2	0,52	0,82	0,57	0,76	0,58	0,76	0,55	0,83
	0,55	0,62	0,62	0,66	0,66	0,66	0,64	0,69
3	0,49	0,83	0,54	0,82	0,54	0,84	0,54	0,84
	0,57	0,66	0,62	0,66	0,61	0,69	0,60	0,69
4	0,49	0,89	0,57	0,84	0,59	0,82	0,61	0,82
	0,58	0,63	0,66	0,62	0,66	0,63	0,66	0,66
5	0,50	0,85	0,58	0,84	0,60	0,84	0,61	0,82
	0,54	0,68	0,64	0,65	0,67	0,65	0,65	0,69
6	0,52	0,90	0,57	0,88	0,56	0,87	0,57	0,88
	0,60	0,64	0,64	0,68	0,60	0,73	0,60	0,73

Сутки	700 мб		850 мб		1000 мб	
	r	ϵ	r	ϵ	r	ϵ
1	0,53	0,85	0,53	0,84	0,55	0,86
	0,61	0,70	0,64	0,70	0,65	0,70
2	0,50	0,89	0,47	0,90	0,48	0,91
	0,57	0,75	0,55	0,77	0,55	0,76
3	0,53	0,86	0,50	0,91	0,47	0,94
	0,58	0,75	0,56	0,77	0,53	0,78
4	0,61	0,82	0,57	0,84	0,51	0,90
	0,64	0,72	0,62	0,71	0,56	0,76
5	0,63	0,82	0,60	0,86	0,53	0,96
	0,66	0,70	0,63	0,72	0,57	0,79
6	0,61	0,86	0,61	0,88	0,56	0,96
	0,64	0,71	0,66	0,67	0,66	0,67

Примечание. «Большими» считаются отклонения поля геопотенциала $\Delta H \geq 4, 4, 4, 8, 12, 12, 12$ дам для изобарических поверхностей $p = 1000, 850, 700, 500, 300, 200$ и 100 мб соответственно.

Для восстановления прогностического поля по рассчитанным с помощью линеаризованной модели коэффициентам Фурье рассматривались только те приближенные собственные функции, четверть периода колебаний которых была менее семи суток (см. табл. 1). Поскольку

для оптимизации коэффициентов Фурье длиннопериодной части спектра длина интервала «настройки» (7 сут) оказалась недостаточной (см. рис. 1б), то вклад остальных приближенных собственных функций был оставлен неизменным, т. е. равным вкладу в момент времени 10 декабря 1964 г. Оценки прогноза поля геопотенциала на срок до 6 суток приведены в таблице 2, а соответствующие прогностические (б) и реальные (а) поля геопотенциала, которые иллюстрируют качество прогноза по линеаризованной спектрально-разностной модели, изображены на рис. 2.

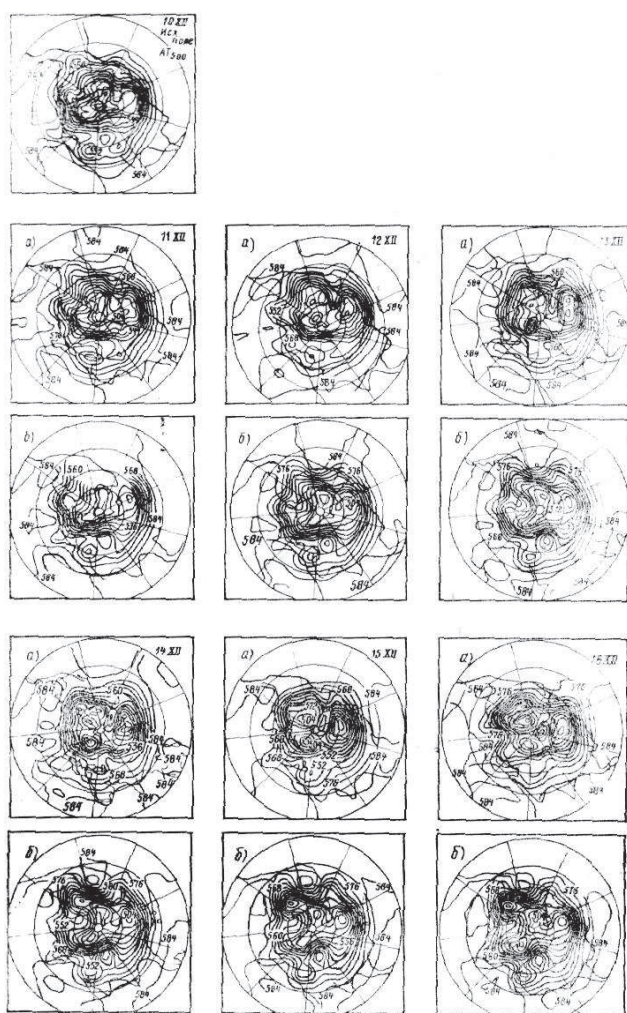


Рис. 2.

Анализ результатов серии методических экспериментов показал, что даже с небольшим числом базисных функций ($m = 31$) модель правильно отражает основные черты атмосферных процессов и может быть использована для решения практических задач динамики атмосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
2. Курбаткин Г. П., Синяев В. Н. Изучение влияния нелинейных взаимодействий на поведение ультрадлинных волн // В кн. Численные методы решения задач прогноза погоды и общей циркуляции атмосферы. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР. 1970. С. 227–251.
3. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 519 с.
5. Марчук Г. И. К теории биортогональных разложений полей метеоэлементов // Доклады АН СССР. 1968. Т. 79, № 4. С. 832–835.
6. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 303 с.
7. Мещерская А. В., Руховец Л. В., Юдин М. И., Яковлева Н. И. Естественные составляющие метеорологических полей. Л.: Гидрометеоиздат, 1970. 199 с.
8. Моисеев Н. П. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
9. Обухов А. М. О статистически ортогональных разложениях эмпирических функций // Известия АН СССР. Серия: Геофизика. 1960. № 3. С. 432–439.
10. Пененко В. В. Спектральные задачи гидротермодинамики и биортогональные разложения полей метеоэлементов // В кн.: Труды симпозиума по разностным и спектральным методам решения задач динамики атмосферы и океана (1973). Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР. 1974. С. 68–97.
11. Пененко В. В. Вычислительные аспекты моделирования динамики атмосферных процессов и оценки влияния различных факторов на динамику атмосферы // В кн.: Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1975. С. 61–77.

12. Пененко В. В. Энергетически сбалансированные дискретные модели динамики атмосферных процессов // Метеорология и гидрология. 1977. № 10. С. 3–20.
13. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1971. 376 с.
14. Уилкнисон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.
15. Фаддеев Д. К, Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматиздат, 1963. 734 с.
16. Харман Г. Современный факторный анализ. М.: Статистика, 1972. 485 с.
17. Эйкхофф П. Основы идентификации системы. Оценивание параметров. М.: Мир, 1975. 683 с.
18. Hotelling H. Analysis of a Complex of Statistical Variables into Principal Components. JEP, 1933. V. 24. Pp. 417–441, 498–520.
19. Pearson K. On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space. Phil. Mag., 1901. V. 6. Pp. 559–572.

ГЛОБАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ¹⁶

Формулируется модель общей циркуляции атмосферы. Исходные уравнения гидротермодинамики, записанные в сферической системе координат (в качестве вертикальной координаты используется σ -координата Филлипса), приводятся к симметризованному полудивергентному виду. Коротко излагаются методы параметризации процессов подсеточных масштабов. В основу метода решения системы положен метод расщепления. Приводятся результаты численного эксперимента по моделированию среднеянварской циркуляции атмосферы при заданных среднеянварских температурах на поверхности океана и склонению Солнца.

Рассматриваемая в настоящей работе модель общей циркуляции атмосферы является реализацией части программы построения модели

¹⁶Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана, 1979, № 5, с. 467–483. Совместно с В. П. Дымниковым, В. Н. Лыковым, В. Я. Галиным, И. М. Бобылевой, В. Л. Перовым.

совместной циркуляции атмосферы и океана, изложенной в [1]. Наряду с использованием уже имеющегося в литературе богатого опыта (мы не будем проводить сравнительного анализа моделей циркуляции атмосферы, разработанных к настоящему времени, поскольку на эту тему существуют достаточно подробные обзоры, например, в [2]) при конструировании данной модели сделан ряд существенно новых предложений, касающихся в первую очередь построения и решения разностных аналогов дифференциальных уравнений, в основу которых положено условие сохранения свойств исходных операторов. Среди этих свойств особое место занимает свойство кососимметричности, поскольку именно кососимметрический характер операторов позволяет дать теоретическое обоснование всего вычислительного процесса на основе нетрудно устанавливаемого свойства сохранения квадратичных норм.

Методологической основой решения разностных уравнений служит метод расщепления, теоретическое обоснование которого удастся провести последовательно для всех этапов его применения.

В работе дается краткое описание модели, принципов построения вычислительных алгоритмов и комплекса программ, реализующих модель. В качестве примера приводятся некоторые результаты численного эксперимента по моделированию среднеянварской циркуляции атмосферы при заданной температуре на поверхности океана.

1. Уравнение гидродинамики

Принимая в качестве вертикальной координаты давление, нормированное к его значению на поверхности Земли, и используя квазистатическое приближение, запишем уравнения гидротермодинамики в сферической системе координат

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} - \left(l + \frac{u}{a}tg\varphi\right)v + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \frac{RT}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda}\right) &= \frac{F_u}{\pi}, \\
 \frac{dv}{dt} + \left(l + \frac{u}{a}tg\varphi\right)u + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{RT}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi}\right) &= \frac{F_v}{\pi}, \\
 \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial \pi u}{\partial \lambda} + \frac{\partial \pi v \cos \varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \pi \dot{\sigma} &= 0, \\
 \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{c_p \sigma} \left[\pi \dot{\sigma} + \sigma \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi}\right)\right] &= \frac{F_T}{\pi} + \frac{\epsilon}{\pi},
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{F_q}{\pi} - \frac{C - E}{\pi},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{RT}{\sigma},$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

Здесь t – время; λ – долгота; φ – широта; $\sigma = p/\pi$ (p – давление, π – его значение на поверхности Земли) – вертикальная координата; u , v , w – составляющие скорости ветра по λ , φ и σ соответственно; $\Phi = gz$ (g – ускорение силы тяжести, z – высота над уровнем моря) – геопотенциал постоянной σ -поверхности; T – абсолютная температура; q – удельная влажность; $l = 2\Omega \sin \varphi$ (Ω – угловая скорость вращения Земли) – параметр Кориолиса; a – радиус Земли; R – газовая постоянная воздуха; c_p – теплоемкость воздуха при постоянном давлении; F_u/π , F_v/π – скорости изменения количества движения, вызываемые напряжениями Рейнольдса; F_T/π , F_q/π – скорости изменения температуры и удельной влажности, обусловленные мелкомасштабной диффузией; ϵ – неадиабатические притоки тепла ($\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_\Phi$; ϵ_r – радиационный, ϵ_Φ – фазовый притоки тепла); C – член, описывающий процесс конденсации; E – испарение. В качестве краевых условий для (1.1) по λ предполагается периодичность решения. Подстилающая поверхность как твердое тело одновременно является σ -координатной поверхностью ($\sigma = 1$). Соответствующее кинематическое условие записывается в виде

$$\dot{\sigma} = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = 1. \quad (1.2)$$

Аналогичное условие ставится на верхней границе атмосферы ($p = 0$):

$$\dot{\sigma} = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = 0. \quad (1.3)$$

При $\sigma = 1$ кроме условия (1.2) задается также распределение геопотенциала

$$\Phi = gz_s = \Phi_s \quad \text{при} \quad \sigma = 1, \quad (1.4)$$

где z_s – превышение земной поверхности над уровнем моря.

2. Симметризация уравнений гидротермодинамики

Исходную систему (1.1) с помощью функции $\sqrt{\pi}$ приведем к симметризованному виду. Главной целью такой симметризации является

возможность построения достаточно простых конструкций для получения абсолютно устойчивых разностных схем решения многомерных уравнений переноса субстанций вдоль траекторий, а также конечно-разностных аналогов интегральных законов сохранения. Система симметризованных уравнений имеет вид [3]

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \sqrt{\pi} u}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{1}{2} u \frac{\partial \sqrt{\pi}}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} u \cdot u}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} v \cos \varphi \frac{\partial \sqrt{\pi} u}{\partial \varphi} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} v \cos \varphi u}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial \sqrt{\pi} u}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\sigma} \sqrt{\pi} u}{\partial \sigma} - \left(l + \frac{u}{a} t g \varphi \right) \sqrt{\pi} v + \\
 & + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\sqrt{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \frac{RT}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] = \frac{F_u}{\sqrt{\pi}}, \\
 & \frac{\partial \sqrt{\pi} v}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{1}{2} u \frac{\partial \sqrt{\pi} v}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} u v}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} v \cos \varphi \frac{\partial \sqrt{\pi} v}{\partial \varphi} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} v v \cos \varphi}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{2} \dot{\sigma} \frac{\partial \sqrt{\pi} v}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\sigma} \sqrt{\pi} v}{\partial \sigma} + \left(l + \frac{u}{a} t g \varphi \right) \sqrt{\pi} u + \\
 & + \frac{1}{a} \left[\sqrt{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{RT}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] = \frac{F_v}{\sqrt{\pi}}, \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \sqrt{\pi} T}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{1}{2} u \frac{\partial \sqrt{\pi} T}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} u T}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} v \cos \varphi \frac{\partial \sqrt{\pi} T}{\partial \varphi} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} T v \cos \varphi}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{2} \dot{\sigma} \frac{\partial \sqrt{\pi} T}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\sigma} \sqrt{\pi} T}{\partial \sigma} - \\
 & - \frac{RT}{c_p \sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right) - \frac{RT \pi \dot{\sigma}}{c_p \sqrt{\pi} \sigma} = \frac{F_T}{\sqrt{\pi}} + \frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}}, \\
 & \frac{\partial \sqrt{\pi} q}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{1}{2} u \frac{\partial \sqrt{\pi} q}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} u q}{\partial \lambda} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} v \cos \varphi \frac{\partial \sqrt{\pi} q}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} v \cos \varphi q}{\partial \varphi} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \dot{\sigma} \frac{\partial \sqrt{\pi} q}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\sigma} \sqrt{\pi} q}{\partial \sigma} = \frac{F_q}{\sqrt{\pi}} - \frac{C - E}{\sqrt{\pi}}, \\
 & \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = - \frac{RT}{\sigma}.
 \end{aligned}$$

3. Параметризация процессов подсеточных масштабов

1. *Взаимодействие атмосферы с подстилающей поверхностью.* Для расчета вектора касательного напряжения трения и потоков тепла и влаги на поверхности Земли (τ_s , H_s и E_s соответственно) используются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_s &= -\rho_h |\vec{V}_h| \vec{V}_h C_u, \\ H_s &= -c_p \rho_h |\vec{V}_h| (T_h - T_s) C_\theta, \\ E_s &= -r \rho_h |\vec{V}_h| (q_h - q_{\max}(\pi, T_s)) C_\theta,\end{aligned}\tag{3.1}$$

где ρ – плотность воздуха; \vec{V} – горизонтальный вектор скорости ветра; q_{\max} – насыщающее значение удельной влажности; r – относительная влажность; C_u , C_θ – коэффициенты трения и теплообмена. Индекс h указывает, что соответствующие величины относятся к верхней границе приземного подслоя постоянных потоков; индексом s отмечены функции, определенные при $\sigma = 1$. Значение \vec{V}_h получено линейной экстраполяцией вектора скорости \vec{V} по двум ближайшим к поверхности Земли расчетным уровням с ограничением $|\vec{V}_h| \geq 1$ м/с; величина $\rho_h = \rho_s = \pi/RT$. Коэффициенты C_u и C_θ выбираются следующим образом. В случае нейтральной или устойчивой стратификации ($\Delta T = T_h - T_s \geq 0$), $C_u = C_u^*$, $C_\theta = C_\theta^*$:

над сушей и ледяным покровом

$$C_u^* = 0,002(1 + 3z_s/\delta), \quad C_\theta^* = C_u^*;\tag{3.2}$$

над океаном

$$\begin{aligned}C_u^* &= \begin{cases} 0,5 \times 10^{-3} \sqrt{|\vec{V}_h|} & \text{при } |\vec{V}_h| \leq 15 \text{ м/с,} \\ 2,6 \times 10^{-3} & \text{при } |\vec{V}_h| > 15 \text{ м/с,} \end{cases} \\ C_\theta^* &= C_u^* \times \begin{cases} 1/1,2 & \text{при } |\vec{V}_h| < 5 \text{ м/с,} \\ 1 & \text{при } 5 \text{ м/с} \leq |\vec{V}_h| \leq 10 \text{ м/с,} \\ 1/0,7 & \text{при } |\vec{V}_h| > 10 \text{ м/с.} \end{cases}\end{aligned}\tag{3.3}$$

При неустойчивости стратификации ($\Delta T < 0$)

$$C_u = C_u^* f(\Delta T, |\vec{V}_h|), \quad C_\theta = C_\theta^* f(\Delta T, |\vec{V}_h|),\tag{3.3}$$

где $f(\Delta T, |\vec{V}_h|) = 1 + \sqrt{-\Delta T/|\vec{V}_h|^2}$.

В выражении (3.2) параметр δ имеет размерность длины. Для расчета температуры T_h и удельной влажности q_h используется предположение, что поток псевдопотенциальной температуры $\Theta = \left(T + \frac{L}{c_p} q\right) \left(\frac{1000 \text{ мбар}}{p}\right)^{R/C_p}$ из приземного подслоя равен ее потоку вне этого слоя:

$$-\rho_h |\vec{V}_h| (\Theta_h - \Theta_s) C_\Theta = -\rho_h K \frac{\Theta_* - \Theta_h}{z_* - z_h} \quad (3.4)$$

и соотношение $q_h = r q_{\max}(T_h)$.

В (3.4) K – коэффициент вертикальной диффузии (предполагается, что $K = \alpha |\vec{V}_h|$, $\alpha \sim 1$ м); Θ_* – значение псевдопотенциальной температуры на ближайшем к поверхности Земли расчетном уровне; z_* – высота этого уровня; z_h и Θ_h – высота приземного подслоя и значение θ на этом уровне (значение z_h выбирается равным 70 м).

Температура поверхности океана в данной работе считается известной функцией широты и долготы.

Расчет температуры поверхности суши и ледяного покрова производится с помощью уравнения теплового баланса

$$H_s + L E_s + \sigma_{SB} T_s^4 + B_s = (1 - \alpha_s) S_g + F_g, \quad (3.5)$$

где L – скрытая теплота испарения; σ_{SB} – постоянная Стефана – Больцмана; α_s – альбеда подстилающей поверхности; S_g, F_g – суммарные нисходящие потоки солнечной радиации и длинноволнового излучения на поверхности Земли. Для суши предполагается $B_s = 0$; в случае морских льдов поток B_s рассчитывается по формуле $B_s = \lambda (T_s - T_H) / H$, где H – толщина льда, λ – коэффициент его теплопроводности и T_H – температура замерзания морской воды. В модели принято $\lambda = 0,005$ кал/см²·с·град, $H = 3$ м, $T_H = 273,2^\circ$. Величина α_s задается в виде (с ограничением $\alpha_s \leq 0,6$):

$$\alpha_s = \begin{cases} 0,1 & \text{для поверхности океана,} \\ 0,2 + 0,4S & \text{для поверхности суши,} \\ 0,6 & \text{для ледяного покрова.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Здесь S – водноэквивалентная высота снежного покрова. В случае, если рассчитанная из (3.5) температура подстилающей поверхности T_s в областях, покрытых льдом или снегом, оказывается больше, чем

температура плавления $T_M = 273,2^\circ$, полагается $T_s = T_M$ и вычисляется скорость плавления снега (и льда):

$$M_{sN} = \begin{cases} E_x/L_M, & \text{если } E_x > 0, \\ 0, & \text{если } E_x \leq 0, \end{cases}$$

$$E_x = [(1 - \alpha_s) S_g + F_g - \sigma_{SB} T_s^4 - L E_s - H_s]_{T=T_M}, \quad (3.7)$$

где L_M – скрытая теплота плавления.

Для расчета высоты снежного покрова используется уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \delta_{sN} - E_s, \quad (3.8)$$

где δ_{sN} – скорость выпадения снега.

Относительная влажность воздуха r принята равной 1 над океаном и областями, покрытыми снегом или льдом. В остальных районах земного шара величина r определяется по формуле

$$r = \begin{cases} W/W_{кр} & \text{при } W \leq W_{кр}, \\ 1 & \text{при } W > W_{кр}, \end{cases} \quad (3.9)$$

где W – влажность почвенного слоя от поверхности до глубины 1 м; $W_{кр} = 0.75W_{п}$, $W_{п}$ – влагоемкость почвы. В настоящей модели $W_{п} = 15$ см. Если выпавшее количество осадков превышает $W_{п}$, то предполагается, что избыток влаги перетекает в другие области суши либо в океан:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \delta - E_s, \quad \text{при } W < W_{п},$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad \text{при } W = W_{п}, \quad \delta > E_{s,max}, \quad (3.10)$$

где δ – интенсивность осадков; $E_{s,max}$ – поток влаги в условиях насыщения. При этом влагосодержание снега считается равным нулю, и для расчета влажности почвы под снежным покровом используются соотношения

$$\frac{\partial W}{\partial t} = M_{sN} + \delta, \quad \text{при } W < W_{п},$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad \text{при } W = W_{п}. \quad (3.11)$$

2. *Параметризация балла неконвективной облачности, сухой и «влажной» конвекции.* Для расчета балла неконвективной облачности в модели используются линейные соотношения между баллом и относительной влажностью [1] $c = \alpha r + \beta$.

Алгоритмы параметризации сухой и влажной конвекции состоят в следующем: сухая конвекция возникает, если

$$\frac{T_{k+1} - T_k}{p_{k+1} - p_k} > \gamma_a \frac{RT_{k+1/2}}{gp_{k+1/2}}, \quad (3.12)$$

где $T_{k+1/2} = 1/2(T_k + T_{k+1})$; γ_a – сухоадиабатический градиент; k – номер уровня.

Уравнения согласования имеют вид

$$\frac{\tilde{T}_{k+1} - \tilde{T}_k}{p_{k+1} - p_k} = \frac{\gamma_a R \tilde{T}_{k+1/2}}{gp_{k+1/2}}, \quad \left(\tilde{T}_{k+1} - T_{k+1} \right) + \left(\tilde{T}_k - T_k \right) = 0. \quad (3.13)$$

Условие влажной конвекции выглядит следующим образом:

$$\frac{T_{k+1} - T_k}{p_{k+1} - p_k} > \frac{\gamma_c R T_{k+1/2}}{gp_{k+1/2}}, \quad r_k > r_{кр}, \quad r_{k+1} > r_{кр}. \quad (3.14)$$

Здесь

$$r_k = \frac{q_k}{q_{\max}(T_k)}, \quad r_{кр} = 0,7,$$

$$\gamma_c = \gamma_a \frac{1 - r}{1 - r_{кр}} + \gamma_{ва} \frac{r - r_{кр}}{1 - r_{кр}},$$

где $r = 1/2(r_k + r_{k+1})$, $\gamma_{ва}$ – влажноадиабатический градиент. Уравнения согласования имеют вид

$$\tilde{q}_{k+1} - q_{k+1} + \tilde{q}_k - q_k + m = 0,$$

$$\tilde{T}_{k+1} - T_{k+1} + \tilde{T}_k - T_k - L/c_p m = 0,$$

$$\tilde{q}_k = r_{кр} q_{\max}(\tilde{T}_k), \quad \tilde{q}_{k+1} = r_{кр} q_{\max}(\tilde{T}_{k+1}), \quad (3.15)$$

$$\frac{\tilde{T}_{k+1} - \tilde{T}_k}{p_{k+1} - p_k} = \gamma_c \frac{R \tilde{T}_{k+1/2}}{gp_{k+1/2}}.$$

Здесь тильдой обозначены согласованные величины; m – полное количество сконденсированной влаги.

3. *Крупномасштабная конденсация.* Процесс крупномасштабной конденсации описывается системой уравнений

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -(C - E), \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{L}{c_p} (C - E), \quad (3.16)$$

при решении которой используются следующие предположения:

- а) процессом испарения в облаках можно пренебречь;
- б) вся сконденсированная влага выпадает на поверхность Земли (океана);
- с) удельная влажность в облаках равна насыщающей удельной влажности ($q = q_{\max}$);
- д) при расчете возникающее облако заполняет всю ячейку интегрирования. Разностный аналог задачи записывается в виде

$$\frac{L}{c_p} (q^{n+1} - q^n) = (T^{n+1} - T^n), \quad (3.17)$$

$q^{n+1} = q_{\max}(T^{n+1})$ (n – номер шага по времени).

Решение (3.17) ищется методом итераций.

4. *Мелкомасштабная диффузия.* Скорости изменения момента количества движения, температуры и влажности, обусловленные мелкомасштабной диффузией, состоят из двух частей $F = F^H + F^v$, где индексы H и v означают вклад горизонтальной диффузии и вертикального перемешивания соответственно. Член F^v описан в первом пункте этого раздела.

Горизонтальная турбулентная мелкомасштабная диффузия не должна изменять суммарный угловой момент системы. Это накладывает определенные требования на конечно-разностные аппроксимации этих членов. Построение разностных аналогов диффузионных членов, удовлетворяющих условиям диссипативности и сохранения глобального углового момента нетрудно провести, если эти члены представить в следующем виде:

$$F_u = \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \pi K_H \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \pi K_H \cos^3 \varphi \frac{\partial \frac{u}{\cos \varphi}}{\partial \varphi} \right], \quad (3.18)$$

$$F_s = \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \pi K_H \frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \pi K_H \cos \varphi \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \quad (3.19)$$

где $S = v, T, q$; K_H – коэффициент диффузии, выбранный согласно [4].

5. *Радиация.* Длинноволновое выхолаживание атмосферных слоев рассчитывается по известным формулам черного приближения

$$F_p^\uparrow = B_p + \int_{B_p}^{B_g} \tau(u_p^* - u^*) dB + (B_{gr} - B_g) \tau(u_p^*),$$

$$F_p^\downarrow = B_p - \int_{B_1}^{B_p} \tau(u^* - u_p^*) dB - (B_1 - B_c) \tau(u_1^* - u_p^*), \quad (3.20)$$

где B_p – излучение абсолютно черного тела; τ – интегральная функция пропускания; u_p^* – эффективное содержание поглощающих газов от подстилающей поверхности до уровня p ; B_{gr} , B_g введены для обозначения излучений подстилающей поверхности и атмосферы над ней с учетом возможного скачка температуры; B_c , B_1 играют аналогичную роль для нисходящего излучения на верхней границе атмосферы.

Вычисление интегралов типа $\int_{B_p}^{B_g} \tau(u_p^* - u^*) dB$ в слоях, не примыкающих к уровню p , ведется по обычным формулам трапеций, а в слое наиболее сильного изменения подынтегральной функции (одной из границ такого слоя всегда является уровень p) используется метод Гаусса по трем узлам. При этом масса поглощающего вещества u_p^* рассчитывается в предположении, что удельная влажность меняется линейно в слоях (p_{k-1}, p_k) .

В коротковолновой области спектра расчет потоков ведется отдельно для облачной и безоблачной атмосферы. В области длин волн, меньших 0,9 мкм, в безоблачной атмосфере учитывается поглощение озоном и рэлеевское рассеяние [5]. В случае облачного неба рассматривается поглощение озоном в надоблачной атмосфере, рассеяние в облаках и пренебрегается рэлеевским рассеянием. В области длин волн, больших 0,9 мкм, используется методика Катаяма [6]. Кроме того, в модели содержится алгоритм метода удвоения слоев из [5].

4. Численная реализация модели

Используется сеточная область определения функций, в которой по вертикальной переменной аналог вертикальной скорости σ сдвинут на полшага относительно всех других искомых функций. Горизонтальная сетка построена таким образом, чтобы компоненты вектора скорости

u, v были сдвинуты на полшага по φ и λ относительно остальных искомым функций (при этом узел сетки для u, v не является полюсной точкой) (рис. 1).

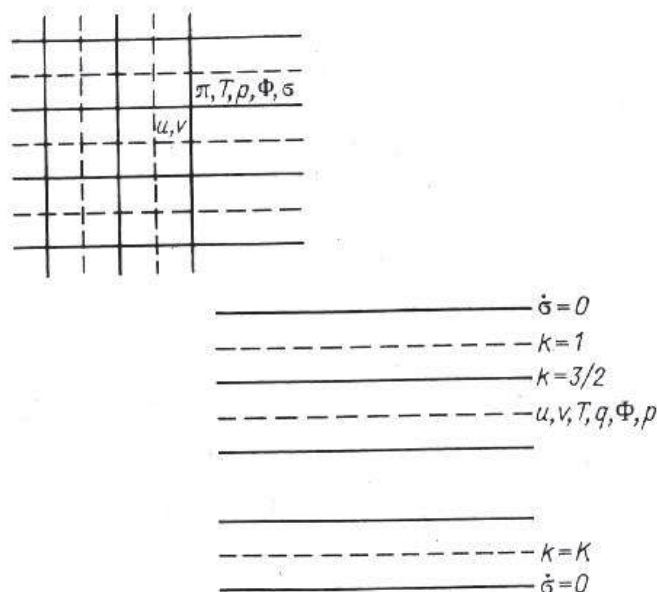


Рис. 1. Сеточная область

1. *Решение уравнений переноса.* В основу решения системы (1.1) положен метод расщепления. На каждом шаге по времени отдельно рассматриваются решение уравнений переноса и адаптация. Обозначив через ψ любую компоненту вектора $(\sqrt{\pi}u, \sqrt{\pi}v, \sqrt{\pi}T, \sqrt{\pi}q)$ и приняв $\tilde{v} = v \cos \varphi$, перепишем уравнение переноса для ψ в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{1}{2} u \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi u}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \tilde{v} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{v} \psi}{\partial \varphi} \right) + \\ + \frac{1}{2} \dot{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В (4.1) сохраняется величина (ψ, ψ) , равная $\int_0^1 \int_G \psi^2 dG d\sigma$, т. е. пространственный оператор в (4.1) кососимметричен. Более того, проведенная симметризация даст кососимметричную форму и для одномерных уравнений. Таким образом, метод покомпонентного расщепления

в этом случае является естественным. Применяя для (4.1) метод покомпонентного расщепления и схему Кранка – Николсон для каждого одномерного уравнения переноса, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\psi^{n+1/6} - \psi^n}{\Delta t} + A_1 \frac{\psi^{n+1/6} + \psi^n}{2} &= 0, \\ \frac{\psi^{n+2/6} - \psi^{n+1/6}}{\Delta t} + A_2 \frac{\psi^{n+2/6} + \psi^{n+1/6}}{2} &= 0, \\ \frac{\psi^{n+3/6} - \psi^{n+2/6}}{\Delta t} + A_3 \frac{\psi^{n+3/6} + \psi^{n+2/6}}{2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где A_1, A_2, A_3 – разностные аналоги операторов переноса по λ, ψ, σ соответственно, обладающие свойством кососимметричности; $(A_i \varphi, \varphi) = 0$, где скалярное произведение в конечномерном пространстве определяется следующим образом:

$$(\varphi, \psi) = \sum_i \sum_j \sum_k \varphi_{ijk} \psi_{ijk} \cos \varphi_j \Delta \sigma_k \Delta \lambda \Delta \varphi,$$

где $\Delta \lambda, \Delta \varphi, \Delta \sigma_k$ – параметры конечно-разностной сетки.

Построение разностных аналогов симметризованных операторов переноса не представляет труда [7], свойство кососимметричности A_i автоматически дает соотношение

$$(\psi^{n+3/6}, \psi^{n+3/6}) = (\psi^n, \psi^n).$$

Перенос по λ (вдоль кругов широты) осуществляется методом циклической прогонки и идентичен для всех искомым функций (отличие заключается лишь в определении «переносящих» скоростей). Алгоритм переноса вдоль σ также идентичен для всех искомым функций (скалярная прогонка). Более сложна реализация переноса по φ (вдоль меридианов). В настоящей версии модели используется метод образования циклически замкнутых кругов из меридианов, сдвинутых друг относительно друга на 180° . При этом компоненты векторных величин при переходе через полюс изменяют знак на обратный, скалярные величины остаются с тем же самым знаком. Поскольку полюсная точка не является точкой определения u и v , то проблемы переноса вдоль таких замкнутых кругов компонентом вектора скорости не возникает (перенос осуществляется циклической прогонкой), при этом кососимметрический вид оператора гарантирует сохранение квадратичных величин.

2. *Решение уравнений адаптации.* Система уравнений гидротермодинамики атмосферы на этапе согласования имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\pi} u - \left(l - \frac{1}{mm'} \frac{\partial m}{\partial y} u \right) \sqrt{\pi} v + \frac{\sqrt{\pi}}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{RT}{m\sqrt{\pi}} \frac{\partial \pi}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\pi} v + \left(l - \frac{1}{mm'} \frac{\partial m}{\partial y} u \right) \sqrt{\pi} u + \frac{\sqrt{\pi}}{m'} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{RT}{m'\sqrt{\pi}} \frac{\partial \pi}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\pi} T - \frac{RT}{c_p \sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{u}{m} \frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{v}{m'} \frac{\partial \pi}{\partial y} \right) - \frac{RT}{c_p \sqrt{\pi} \sigma} \pi \dot{\sigma} &= 0, \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\frac{RT}{\sigma}, \\
 \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{1}{mm'} \left(\frac{\partial}{\partial x} m' \pi u + \frac{\partial}{\partial y} m \pi v \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \pi \dot{\sigma} &= 0, \\
 m = a \cos \varphi \Delta \lambda, \quad m' = a \Delta \varphi, \quad x = \lambda / \Delta \lambda, \quad y = \varphi / \Delta \varphi.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Для аппроксимации этих уравнений по пространству используется схема второго порядка точности, по времени – схема Кранка – Николсон. Полученная конечно-разностная система сводится к двум уравнениям относительно температуры и давления, которые решаются итерационным методом Ричардсона. Для ускорения сходимости итерационного процесса в полярных областях производится фильтрация коротких волн в градиентах давления, геопотенциала и зональной скорости.

3. *Программное обеспечение.* Алгоритмы, представленные для численного моделирования общей циркуляции атмосферы, реализованы как комплекс программ на языке ФОРТРАН для ЭВМ БЭСМ-6. Весь комплекс хранится в виде библиотеки на магнитных носителях. Комплекс состоит из подпрограмм различного уровня. К первому уровню относятся программы, реализующие наиболее элементарные алгоритмы, такие как методы скалярной и циклической прогонок, быстрое преобразование Фурье на 5° и 10° сетках, расчет функции пропускания для радиационных притоков, формулы Магнуса для насыщающего значения удельной влажности и т. п. Подпрограммы 1-го уровня используются в программах 2-го уровня, которые имеют блочный характер. Каждый блок представляет собой замкнутый модуль, входные и выходные параметры которого согласованы с остальными блоками. Обмен между блоками происходит через общую оперативную

(COMMON-блоки) и внешнюю память. К числу программ 2-го уровня относятся модули:

1) расчета переноса по траекториям скалярных величин (температура и удельная влажность);

2) расчета переноса по траекториям векторных величин (скорость ветра);

3) адаптации метеорологических полей, в котором происходит согласование полей геопотенциала и давления с полем ветра;

4) «радиация», в котором производится расчет балла неконвективной облачности, радиационных притоков тепла от длинноволновой и коротковолновой части спектра излучения, а также потоков длинноволнового и коротковолнового излучения к поверхности Земли;

5) «облачность, осадки, фазовые притоки», предназначенный для расчета конвективных и крупномасштабных осадков, а также фазовых притоков тепла;

6) «пограничный слой атмосферы», который осуществляет расчет гидрологического цикла суши (толщина снежного покрова, влагозапас почвы и т. п.) и параметризацию потоков тепла и влаги и касательного напряжения трения от суши и океана для свободной атмосферы;

7) «мелкомасштабная диффузия», который реализует расчет турбулентных процессов подсеточных масштабов;

8) «фильтр», использующий процедуру быстрого преобразования Фурье, предназначен для отфильтровывания короткопериодных возмущений в полярных областях.

Наконец, к третьему уровню относится управляющая программа, в которой происходит настройка модели на число уровней, ввод внешних параметров (например, широтного хода склонения Солнца, температуры поверхности океана и т. п.), ввод параметров сетки и т. д.

В управляющей программе окончательно собирается модель: вызываются подпрограммы 2-го уровня, осуществляется их взаимодействие, выводится в процессе счета необходимая информация, происходит запись массивов информации на магнитные ленты или диски для дальнейшего продолжения счета или для обработки.

5. Численный эксперимент

В этом разделе приводятся некоторые результаты численного эксперимента по моделированию среднеянварской атмосферы при заданных среднеянварских температуре океана и склонению Солнца. Экс-

перимент проводился на модели с тремя основными уровнями по координате σ : $\sigma_1 = 1/6$, $\sigma_2 = 1/2$, $\sigma_3 = 5/6$, что при отсутствии гор приблизительно соответствует изобарическим поверхностям $p_1 \sim 150$ мбар, $p_2 \sim 500$ мбар, $p_3 \sim 850$ мбар. Шаги по горизонтальным координатам были приняты равными: $\Delta\lambda = 10^\circ$, $\Delta\varphi = 6^\circ$, шаг по времени ~ 40 мин. Задавалось также климатическое распределение морских и континентальных льдов, Φ_s принималось равным нулю. Начальное состояние атмосферы, с которого начиналось интегрирование, характеризовалось следующими значениями метеорологических величин:

$$u(0, \lambda, \varphi, \sigma) = v(0, \lambda, \varphi, \sigma) = 0,$$

$$T(0, \lambda, \varphi, \sigma) = T(\sigma) = 287 + 60^\circ(\sigma - 1),$$

$$q(0, \lambda, \varphi, \sigma) = 0, 8q_{\max}(T(\sigma)),$$

$$\pi(0, \lambda, \varphi) = \text{const} = 1018 \text{ мбар}.$$

Счет проводился до 131 суток, среднемесячные значения получались осреднением за период 100–131 сутки.

1. Глобальные характеристики. В модели вычислялись глобально осредненные значения кинетической и доступной потенциальной энергий K и A и их зональные и вихревые компоненты K_z , A_z , K_E , A_E , следуя работе [8]. В таблице 1 приведены данные расчетов и соответствующие величины для реальной атмосферы [8]. Видно, что уровень вихревой энергии (как кинетической, так и доступной потенциальной) недостаточно высок, что главным образом объясняется невысоким пространственным разрешением модели. На рис. 2 приведено спектральное распределение зональной (сплошная линия) и меридиональной (пунктир) составляющих кинетической энергии для различных уровней. Положение максимума меридиональной составляющей кинетической энергии в модели говорит о том, что волновые числа наиболее неустойчивых мод в модели получаются близкими к реальным. Это объясняется тем, что в средних широтах, где происходит основная генерация бароклинных вихрей, пространственный шаг сетки составляет величину ~ 500 км, что вполне достаточно для корректного описания начального этапа развития наиболее неустойчивых волн [9]. В таблице 2 приведены эффективные волновые числа, рассчитанные для каждого уровня модели, и средние по уровням по формуле

$$\bar{n} = \int n dE(n) / \int dE(n),$$

где $E(n)$ – спектральное распределение кинетической энергии. Волновые числа рассчитывались как для зональной \bar{n}_u , так и для меридиональной \bar{n}_v компонент энергии. Из таблицы 2 видно, что имеется общая тенденция увеличения характерной длины волны с высотой, что согласуется с теорией.

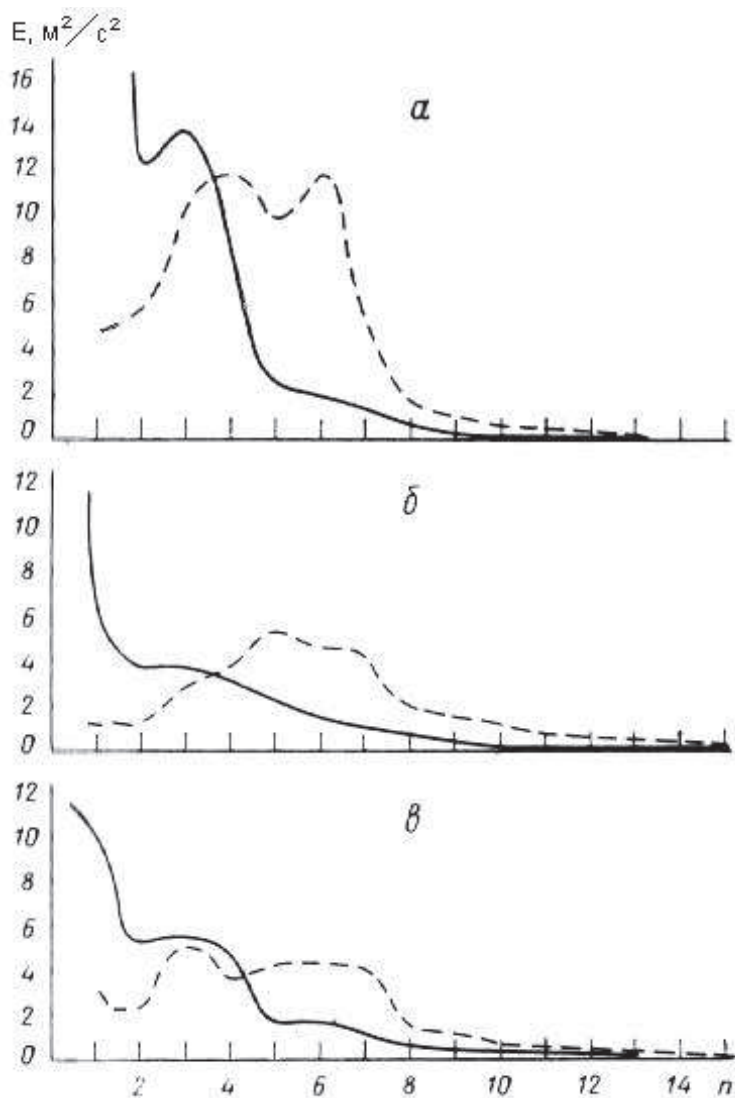


Рис. 2. Спектральное распределение зональной (сплошная линия) и меридиональной (пунктирная линия) составляющих энергии:
а – уровень 150 мбар; б – 500 мбар; в – 850 мбар

Таблица 1

Данные	K_z	K_E	K	A_z	A_E	A
Эксперимент	11,7	2,5	14,2	40	2,8	42,8
Оорта, 1964	8	7	15	40	15	55

Таблица 2

Эксперимент	150 мбар	500 мбар	850 мбар	Среднее по уровням
\bar{n}_u	2,32	3,38	3,34	3,01
\bar{n}_v	4,60	6,22	5,51	5,44

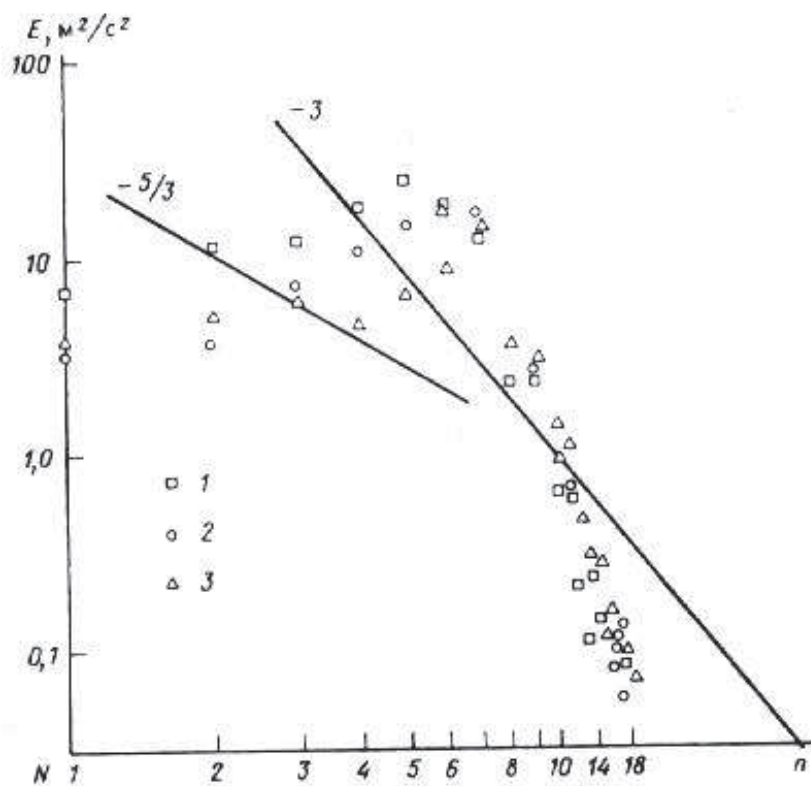


Рис. 3. Спектральное распределение вихревой кинетической энергии на 45° ; 1 – уровень 150 мбар; 2 – 500 мбар; 3 – 850 мбар

На рис. 3 представлено спектральное распределение вихревой кинетической энергии на 45° северной широты. В диапазоне волновых чисел от 9 до 12 это распределение достаточно близко к «закону-3». Как известно, спектр энергии реальных атмосферных движений в инерционном масштабе волновых чисел также имеет тенденцию к этому закону. Отметим также, что в области волновых чисел, больших 12, поведение спектра описывается степенной функцией с показателем, большим 3. В работе [10] показано, что с увеличением разрешения модели эта часть спектра также имеет тенденцию приближаться к «закону-3».

2. Зонально осредненные характеристики. На рис. 4 приведены зонально осредненные распределения температуры и влажности. Для сравнения с реальными данными [11] по Северному полушарию на рис. 5 даны графики зонально осредненных температуры и влажности на трех изобарических поверхностях – 500, 850 и 1000 мбар. В целом распределения температуры и влажности весьма близки к реальным.

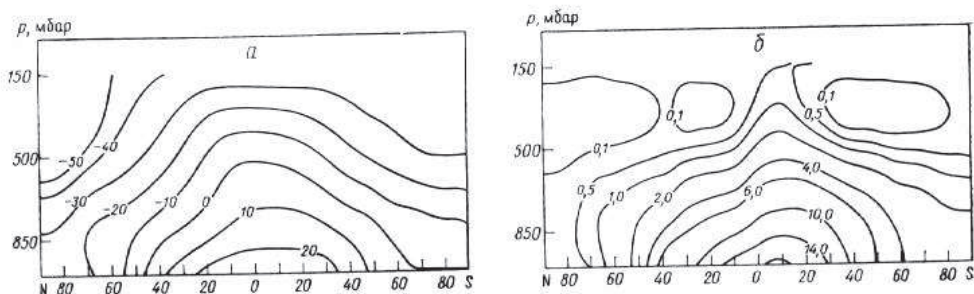


Рис. 4. Широтно-высотное зонально осредненное распределение температуры (а) и влажности (б)

Рис. 6а показывает зонально осредненное поле зональной скорости. Характерной особенностью распределения является наличие ярко выраженного максимума в субтропической зоне Северного полушария. Аналогичный максимум зональной скорости в Южном полушарии проявляется слабее. Следует отметить также и смещение оси максимальных зональных ветров в сторону экватора. На рис. 6б приведено распределение зонально осредненной меридиональной скорости. Нетрудно видеть, что модель воспроизводит такие черты реальной атмосферы, как ячейки Гадлея и Феррела.

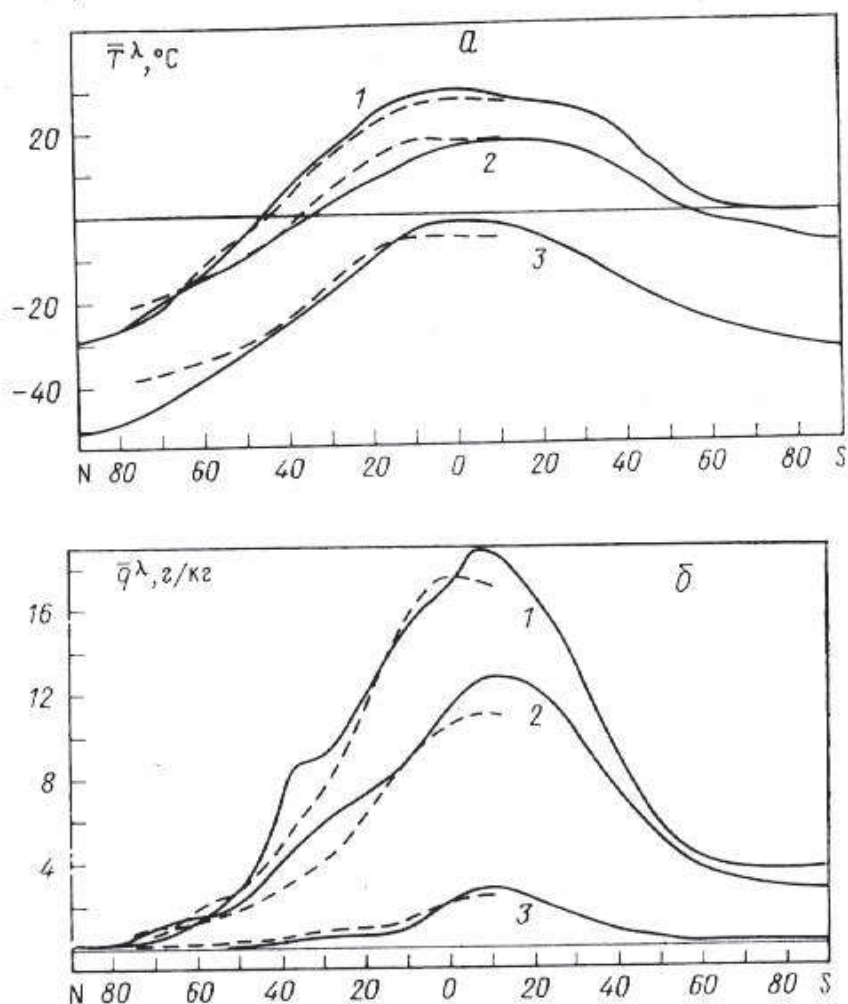


Рис. 5. Зависимость от широты зонально осредненной температуры (а) и влажности (б) (сплошная линия – эксперимент, пунктирная – реальные данные): 1 – уровень 1000 мбар; 2 – 850 мбар; 3 – 500 мбар

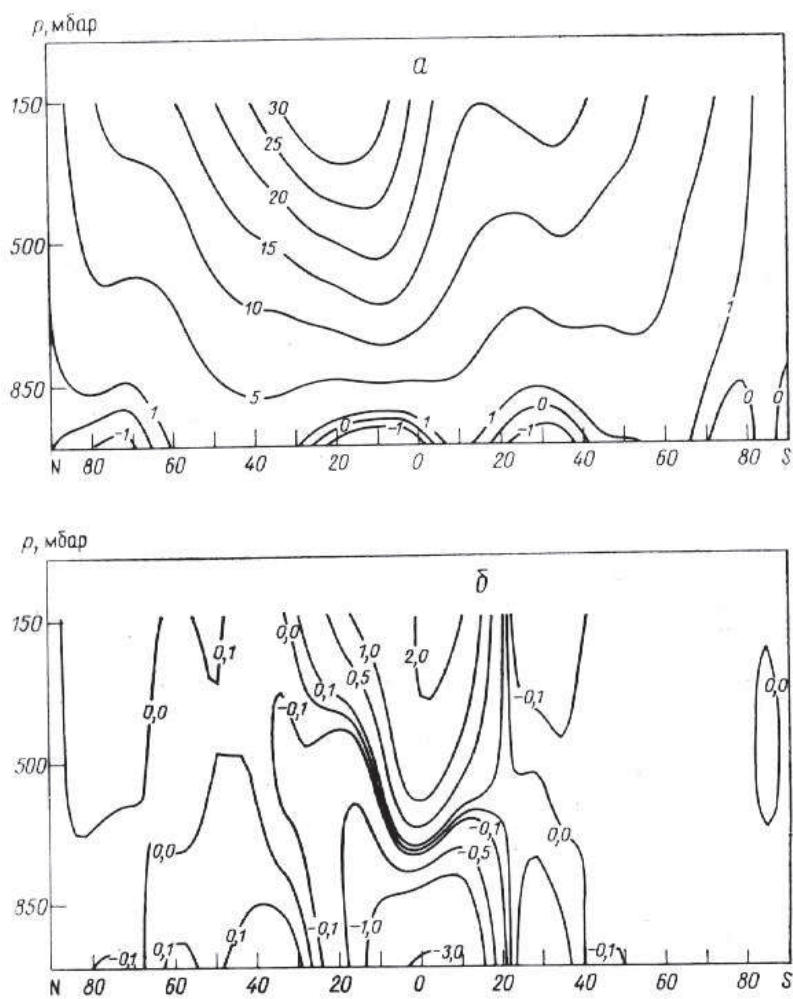


Рис. 6. Широтно-высотное зонально осредненное распределение зональной (а) и меридиональной (б) скорости

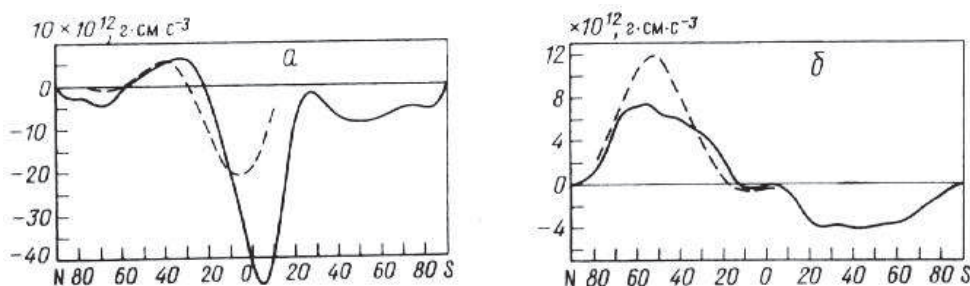


Рис. 7. Меридиональный перенос тепла за счет зонально осредненной меридиональной циркуляции (а) и вихревых движений (б) (сплошная линия – эксперимент, пунктир – реальные данные)

На рис. 7 приведены распределения модельного и реального вертикально проинтегрированного меридионального переноса тепла средней циркуляцией $(c_v/g) \sum_k \bar{\pi}^\lambda \hat{T} \hat{V} \Delta \sigma_k$ и вихревыми движениями $(c_v/g) \sum_k \overline{\pi T' V'^\lambda} \Delta \sigma_k$. Соответствующие распределения для полей влажности приведены на рис. 8.

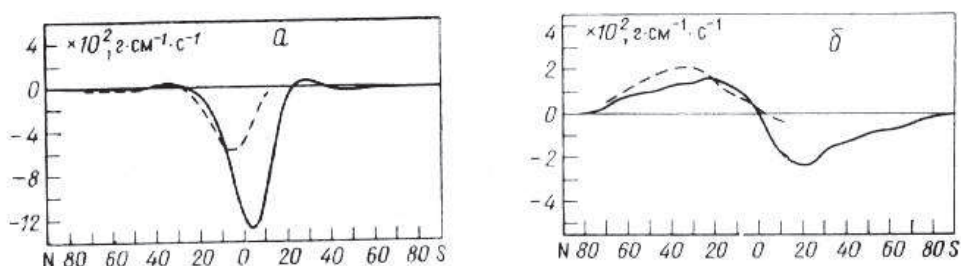


Рис. 8. Меридиональный перенос влаги за счет зонально осредненной меридиональной циркуляции (а) и вихревых движений (б).

Обозначения см. рис. 7

Па рис. 9 приведен меридиональный перенос углового момента к полюсу за счет зонально осредненной меридиональной циркуляции $-(1/g) \sum_k \bar{\pi}^\lambda \hat{u} \hat{v} a \cos \varphi \Delta \sigma_k$ и за счет вихревых движений $-(1/g) \sum_k \overline{\pi u' v'^\lambda} a \cos \varphi \Delta \sigma_k$. (Здесь для любой величины A величина \bar{A}^λ означает среднее по кругу широты, $\hat{A} = \pi \bar{A}^\lambda / \bar{\pi}^\lambda$, $A = \hat{A} + A'$.)

Приведенные графики показывают, что недостаточно высокий уровень вихревой кинетической энергии снижает вихревой перенос углового момента, тепла и влаги, в то время как перенос за счет средней циркуляции в среднем завышен.

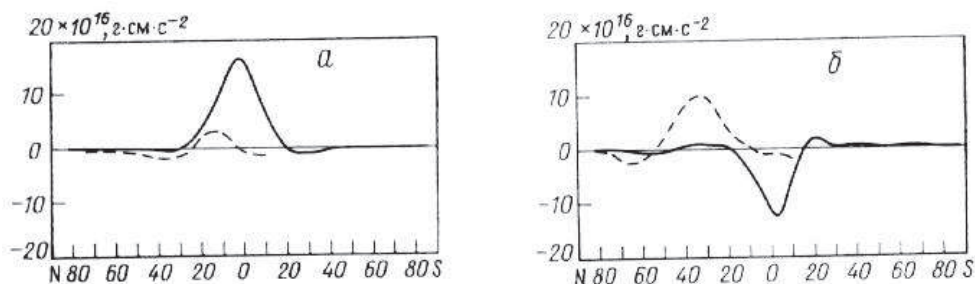


Рис. 9. Меридиональный перенос углового момента за счет зонально осредненной меридиональной циркуляции (а) и вихревых движений (б). Обозначения см. рис. 7

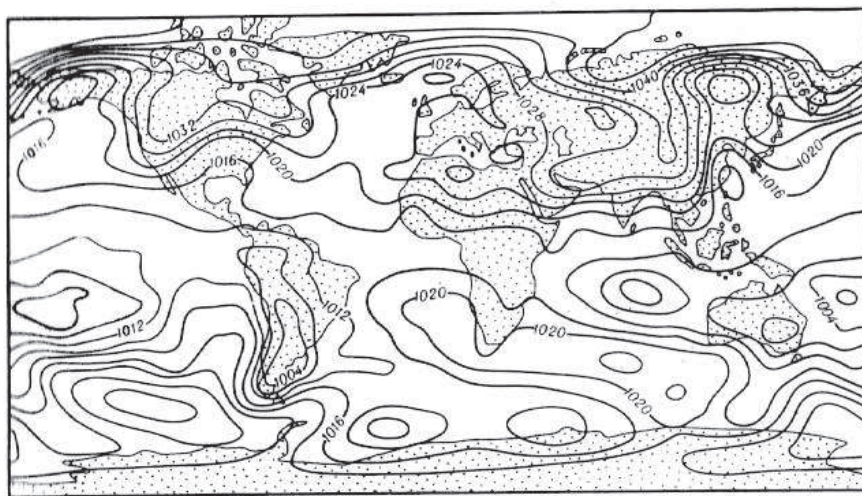


Рис. 10. Приземное давление p_s , мбар (эксперимент)

3. *Поля метеорологических величин.* В качестве примера рассчитанных полей метеоэлементов приведем поле приземного давления (рис. 10) и поле осадков (рис. 11). Соответствующие фактические карты [12] приведены на рис. 12 и 13 соответственно. Можно отметить, что модель в целом удовлетворительно описывает стационарные

ультрадлинные волны. Смещение Сибирского антициклона на север и отсутствие серии характерных циклонов вблизи Антарктиды, по-видимому, объясняются отсутствием в данном эксперименте орографии. Подробный анализ энергетического и гидрологического циклов будет сделан в отдельной работе.

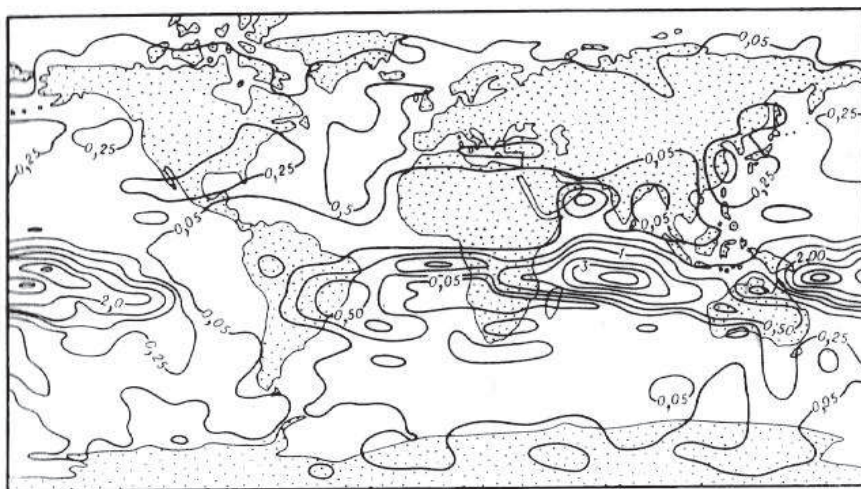


Рис. 11. Поле осадков, см/день (эксперимент)

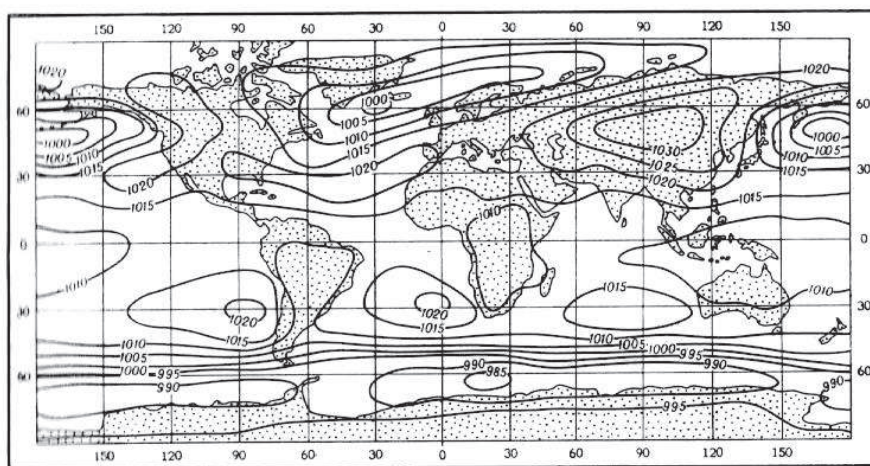


Рис. 12. Фактическое приземное давление

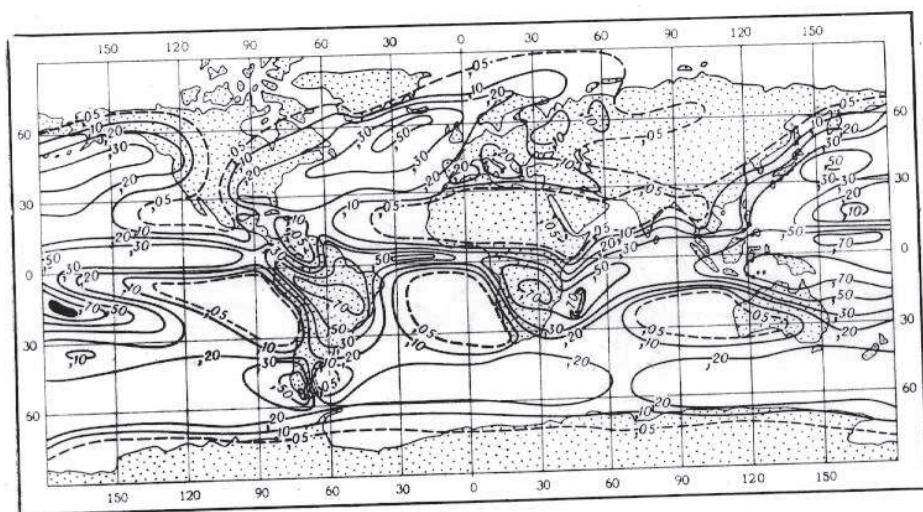


Рис. 13. Фактическое поле осадков

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И., Дымников В. П., Лыкосов П. И., Галин П. Я., Бобылева И. М., Перов В. Л., Залесный В. Б. Гидродинамическая модель общей циркуляции атмосферы и океана (методы реализации). Новосибирск, 1975. 213 с.
2. Modeling for the first GARP Global Experiment. GARP publ. ser. GaRP, 1974. No. 14. 250 p.
3. Марчук Г. И., Дымников В. П., Лыкосов В. Н., Галин В. Я., Бобылева И. М., Перов В. Л. Гидродинамическая модель общей циркуляции атмосферы. Ч. 1. Препринт ВЦ СО АН СССР, 1977. № 66. 39 с.
4. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations: 1 // The basic experiment, Monthly Weather Rev. 1965. V. 91, No. 3, Pp. 99–104.
5. Lasic A. A., Hansen J. E. Parameterization for the absorption of solar radiation in the Earth's atmosphere // J. Atmos. Sci. 1974. V. 31. Pp. 118–133.
6. Katayama A. A simplified scheme for computing radiative transfer in the troposphere. Numerical Simulation of Weather and Climate. Technical Report. 1972. No. 6.

7. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Наука, 1973. 352 с.
8. Лоренц Э. Природа и теория общей циркуляции атмосферы. Гидрометеоиздат, 1970. 259 с.
9. Дымников В. П. О численном моделировании бароклинной неустойчивости // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 14, № 3. С. 243–250.
10. Development and use of the NCAR GCM. NCAR-TN/STR-101, 1975. 177 p.
11. Oort A. H., Rasmusson E. M. Atmospheric circulation statistics. NOAA professional paper, 1971. V. 5. 323 p.
12. January and July simulation experiments with the 2.5° latitude-longitude version of the NCAR general circulation model. NCAR/TN-123+STR, 1977. 61 p.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ АТМОСФЕРНОЙ ОПТИКИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО¹⁷

Развит весьма общий алгоритм решения задач атмосферной оптики методом Монте-Карло. В качестве иллюстрации рассмотрены два типа задач.

I. Постановка задач атмосферной оптики

1. О математической формулировке задач теории переноса излучения в атмосфере

В настоящее время известен большой цикл исследований, посвященных переносу коротковолновой радиации видимой части спектра в атмосфере Земли. Интерес к этим исследованиям непрерывно возрастает, поскольку все большее значение приобретают исследование и интерпретация уходящей из атмосферы радиации, измеряемой с помощью метеорологических спутников и космических кораблей.

¹⁷Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана, 1967, № 3, с. 258–273. Совместно с Г. А. Михайловым.

На первом этапе теоретических исследований этой проблемы внимание в основном концентрировалось на рассмотрении плоской модели (например, [1, 2, 10]). В этом случае математическая формулировка задачи оказывалась относительно простой, что позволило получить ряд интересных результатов, которые явились несомненным вкладом в теорию атмосферной оптики. В [1] предложен подход к постановке и решению обратных задач метеорологии, основанный на использовании ценности информации с метеорологических спутников. Естественно, что самой важной и интересной обратной задачей оптики является проблема восстановления метеорологических элементов (плотности, температуры, поля ветра и т. д.) по данным наблюдения уходящей радиации. Полное решение этой задачи требует, однако, большой и качественно разнообразной информации о поле излучения в различных диапазонах длин волн. В настоящее время уже имеются попытки постановки и решения обратных задач на основе исследования поля длинноволновой радиации. Такие постановки привели к ряду алгоритмов расчета поля температуры в атмосфере [3–5]. Что же касается интерпретации коротковолновой части спектра в связи с постановкой и решением обратных задач, то здесь имеется ряд существенных трудностей, связанных в первую очередь со сложностью математической постановки задачи. В самом деле, если при исследовании длинноволновой радиации в безоблачной атмосфере рассеянным излучением можно пренебречь, то при исследовании коротковолновой радиации процесс рассеяния является основным фактором формирования поля радиации. Это значит, что при постановке и решении прямых и обратных задач атмосферной оптики необходимо иметь дело непосредственно с уравнением переноса, учитывающим многократное рассеяние излучения. Трудности постановки и решения задач атмосферной оптики еще более возрастают при рассмотрении переноса коротковолновой радиации в сферической атмосфере. К настоящему времени в этом направлении имеется ряд предложений, высказанных Г. Б. Розенбергом, В. В. Соболевым и И. Н. Мининым [6–8]. Авторы [7] специальным приемом выделяют нерассеянную и однократно рассеянную части излучения. Оставшуюся часть многократного излучения они описывают суммарно, используя для этой цели известные диффузионные приближения.

В последнее время опубликованы результаты наблюдений над полем уходящей коротковолновой радиации с космических кораблей в области сумеречных явлений [9]. В работе [9] была сделана по-

пытка решения обратной задачи атмосферной оптики по определению плотности «нестандартного» высотного аэрозоля, обнаруженного в эксперименте на космическом корабле «Восток-6». При этом авторы использовали для интерпретации теорию однократного рассеяния. В результате обработки данных было получено распределение аэрозоля по высоте атмосферы. Принятая авторами модель, разумеется, имеет ограниченные возможности и позволяет решать задачи только при значительном удалении корабля от линии терминатора. В этом случае однократно рассеянное излучение с хорошей точностью представляет поле излучения.

Важность задач атмосферной оптики в сферической атмосфере, в которой метеорологические элементы изменяются по высоте атмосферы, связана с необходимостью разработки методов решения прямых и обратных задач спутниковой метеорологии. Авторы данной работы стремились при постановке и решении задачи учесть большое число различных физических факторов, ответственных за формирование поля коротковолновой радиации в атмосфере, и в связи с этим использовать такой математический аппарат, который мог бы при необходимости давать результаты большой точности. Таким математическим аппаратом явился метод Монте-Карло, исследования с помощью которого в настоящее время получают все большее распространение, поскольку этот метод позволяет осуществлять математическое моделирование физических процессов сравнительно простыми алгоритмами. Усовершенствованные вычислительные машины обеспечивают реальную возможность проведения такого моделирования с весьма малой статистической погрешностью. Кроме того, различные усовершенствования метода Монте-Карло позволяют существенно уменьшить дисперсию расчетных оценок. Следует подчеркнуть, что метод Монте-Карло позволяет решать задачи атмосферной оптики в случае привлечения новых физических факторов. Так, например, в настоящей работе авторы использовали модель, в которой поверхность Земли однородна с фиксированным альбедо. Путем несложных изменений алгоритма метод позволяет находить решения аналогичных задач в случае альбедо, зависящего от координат точек земной поверхности.

Таким образом, методом Монте-Карло можно решать задачи теорий переноса излучения для максимально детализированной модели атмосферы, что выгодно отличает этот метод от других известных

численных методов, которые эффективны лишь для весьма упрощенных моделей.

В данной работе развит весьма общий алгоритм решения задач атмосферной оптики, который проиллюстрирован на примере рассмотрения двух типов задач.

Задача A_1 . На «внешнюю» поверхность атмосферы – сферу радиуса $R = R_2 > R_1$ падает параллельный поток коротковолнового монохроматического излучения некоторой длины волны λ в направлении, обратном направлению оси x (рис. 1). Здесь $R_1 = 6371$ км – радиус Земли. Пусть задана сфера $R = R_3 > R_1$; предположим, что в точке O' пересечения фотоном этой сферы построена «местная» система координат x', y', z' (рис. 2). Ось x' пересекает ось x и составляет с ней угол $\vartheta_0 \leq \pi/2$; ось z' ортогональна к поверхности сферы. Обозначим γ – угол между осью x и осью z' ; ϑ – угол между направлением Ω фотона и осью z' ; φ – угол между проекцией Ω на касательную плоскость и осью x' . Требуется оценить распределение потока излучения через сферу $R = R_3$ по углам γ , ϑ и φ .

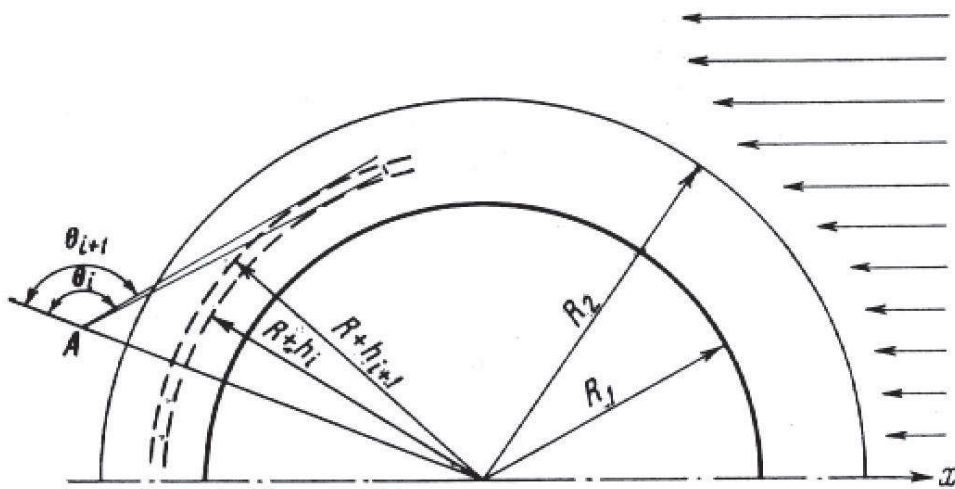


Рис. 1. Геометрическая схема наблюдения солнечного излучения на спутнике

Задача A_2 . Пусть в точке A с координатами $x = x^* < 0$, $y = y^* = 0$, $z = z^* > 0$ расположен спутник. На внешнюю поверхность атмосферы падает коротковолновый поток солнечного излучения. Рассмотр-

рим интенсивность излучения, приходящего на спутник с высоты h , $0 \leq h \leq R_2 - R_1$, т. е. под углом $\theta(h)$, который составляет касательная к сфере $R = R_1 + h$ с осью z' (см. рис. 1). Требуется оценить распределение интенсивности излучения (т. е. яркости) в плоскости $\varphi = \varphi_0$ (например, $\varphi = 0$) по h и λ . Если распределение потока получено экспериментально (см. [9]), то в некоторых случаях, выбрав подходящим образом функционалы I_{ψ_k} , можно решить в указанной в [1] постановке обратную задачу, например, относительно плотности некоторой атмосферной субстанции, рассеивающей и поглощающей излучение. Применение метода Монте-Карло для оценки производных функционалов по искомым параметрам описано в § 8 раздела II.

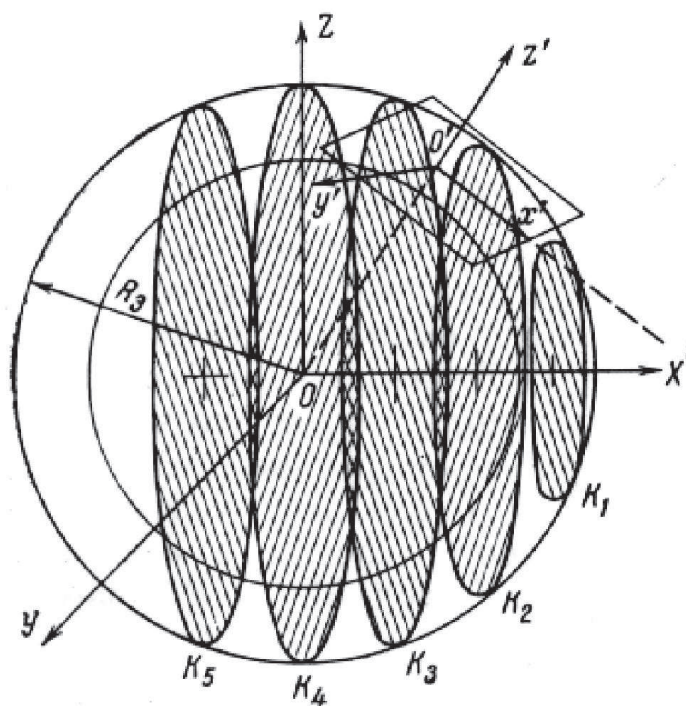


Рис. 2. Система координат для решения задачи A_1

Заметим, что, имея оценку спектра приходящего излучения, можно приближенно воспроизвести цветную картину сумеречного ореола Земли, наблюдаемую на спутниках.

2. Форма задания модели атмосферы

Модель атмосферы для решения поставленных в предыдущем параграфе задач переноса коротковолнового излучения определяется заданием:

а) эффективных сечений $\sigma_i(h)$ различных типов рассеяния и поглощения фотонов; полное сечение $\sigma(h) = \sum_i \sigma_i(h)$ и оптическая толщина слоя $h_i \leq h < h_{i+1}$ равна

$$\tau(h_i, h_{i+1}) = \int_{h_i}^{h_{i+1}} \sigma(h) dh;$$

б) индикатрис рассеяния различных типов; мы будем использовать индикатрисы $f_i(x)$, x – косинус угла рассеяния, нормированные условием

$$\int_{-1}^{+1} f_i(x) dz = 1;$$

в) альбедо земной поверхности.

Для универсальности и простоты вычислительного алгоритма предполагаем, что функции $\sigma_i(h)$ ступенчатые, т. е. атмосфера разбита на слои с постоянными сечениями. Для $h > R_2$ было положено $\sigma(h) = 0$. Составленная на ЭВМ М-20 программа допускает задание 128 произвольных слоев. Предполагается также, что возможны три типа рассеяния (см. [10–12]):

молекулярное, с индикатрисой

$$f_M(x) = \frac{3}{8} (1 + x^2), \quad -1 \leq x \leq +1;$$

аэрозольное типа a («стандартный» аэрозоль);

аэрозольное типа α («нестандартный» аэрозоль).

Аэрозольные индикатрисы задаются таблицами. Альбедо земной поверхности может быть задано по закону Ламберта $p(\mu) = 2\mu$, $0 \leq \mu \leq 1$ (μ – косинус угла отражения) или таблицей. Фотон отражается с вероятностью p_α .

II. Метод Монте-Карло в применении к задачам переноса излучения в атмосфере

1. О решении задач теории переноса путем моделирования соответствующей цепи Маркова на ЭВМ

Процесс переноса излучения по своей физической сущности представляет собой однородную цепь Маркова, реализациями которой являются траектории частиц в фазовом пространстве $X = R \times V$ координат $\vec{r} \in R$ скоростей $\vec{v} \in V$. В качестве i -го «состояния» цепи будем рассматривать точку $x_i \in X$, в которой находится частица непосредственно перед i -м столкновением. Пусть задано распределение частиц источника с плотностью $f(x)$. Полагаем, что начальные столкновения распределены по $f(x)$ и не меняют положения частиц в фазовом пространстве. Для «замкнутости» пространства «состояний» к фазовому пространству X необходимо присоединить «поглощающую» область O , в которой происходят столкновения поглощенных или вылетевших из системы частиц. Случайный переход из x_i в x_{i+1} распадается на элементарные случайные события: выбор типа рассеяния (например, молекулярное или аэрозольное) или поглощения, выбор скорости после рассеяния, выбор длины пробега до следующего столкновения. При решении задач методом Монте-Карло эти случайные события последовательно моделируются на ЭВМ, а искомые оценки получают статистической обработкой результатов.

Построение случайных траекторий для физической модели процесса принято называть прямым моделированием. Математическое содержание задачи прямого моделирования состоит в нахождении оптимальных методов моделирования случайных величин по заданным законам распределения. Этому вопросу посвящен § 2 раздела II. Однако весьма часто прямое моделирование не может дать удовлетворительного решения задачи даже на самых быстродействующих ЭВМ. Разработан ряд общих методов улучшения прямого моделирования, применение которых не изменяет средних значений оценок искомых функционалов, но уменьшает их вероятностную погрешность. В § 3–9 описаны модификации метода Монте-Карло, частично разработанные при выполнении данной работы.

2. Моделирование случайных величин

Случайные величины обычно моделируются с помощью преобразований над одним или несколькими независимыми случайными числами, равномерно (т. е. с плотностью $f(x) = 1$) распределенными в интервале $[0, 1]$. Эти стандартные случайные числа мы будем обозначать символом α с различными индексами. Существуют различные способы «генерирования» случайных чисел α , среди которых наиболее употребимы рекуррентные соотношения, производящие последовательности «псевдослучайных» чисел. Эти последовательности вполне детерминированы, но способ перехода от предыдущего числа к последующему арифметически настолько сложен, что в совокупности получаемые числа обладают многими «случайными» свойствами. Наиболее часто, по-видимому, используется метод вычетов, например, в таком виде (для ЭВМ М-20):

$$u_0 = 1, \quad u_n \equiv u_{n-1} \cdot 5^{13} (\text{mod } 2^{36}), \quad \alpha_n = u_n \cdot 2^{-36}.$$

Различные методы моделирования случайных величин по заданным законам распределения описаны в [13–15]. Пусть задана плотность вероятностей $f(x)$, а $F(x)$ – соответствующая ей функция распределения. Хорошо известно, что случайная величина

$$\xi = F^{-1}(\alpha) \tag{1}$$

распределена по закону с плотностью $f(x)$. В тех случаях, когда функция $F^{-1}(\alpha)$ не выражается через элементарные, моделирование с помощью формулы (1) может оказаться слишком затруднительным. В работах [14, 15] исследуется вопрос о нахождении удобных для численного моделирования формул вида

$$\xi = g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k).$$

В частности, в [15] получена экономичная формула для моделирования закона Релея для косинуса угла молекулярного рассеяния фотонов в атмосфере, который задается плотностью

$$f(x) = \frac{3}{8} (1 + x^2), \quad -1 \leq x \leq +1.$$

Пусть $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ независимы и распределены равномерно в $[0, 1]$. Тогда закон Релея моделируется с помощью формулы

$$\xi = \begin{cases} \frac{8}{3}\alpha - 1, & 0 \leq \alpha \leq \frac{3}{4}, \\ \text{sign}(\alpha - \frac{7}{8}) \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), & \frac{3}{4} < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, что в случае $0 \leq \alpha \leq \frac{3}{4}$ случайные числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ можно не выбирать.

Индикатрисы рассеяния фотонов на аэрозоле обычно бывают заданы таблицами. Рассмотрим соответствующий моделирующий алгоритм, полученный с помощью формулы (1). Пусть плотность вероятностей $f(x)$ линейна в каждом из интервалов $x_k < x \leq x_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, $f(x_k) = y_k$.

Обозначим

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} < 0, \quad s_k = -\frac{y_{k-1} + y_k}{2} \Delta x_k.$$

Очевидно, должно быть $\sum_{k=1}^n s_k = 1$. Пусть $M = \alpha - \sum_{k=1}^m s_k \leq 0$, а $M + s_m > 0$. Тогда

$$\xi = x_m - \frac{y_m \Delta x_m + \sqrt{y_m^2 (\Delta x_m)^2 - 2 \Delta x_m (y_m - y_{m-1}) M}}{y_m - y_{m-1}}.$$

Мы не рассматриваем здесь выбор случайных длин пробегов частиц в веществе от столкновения до столкновения и выбор типа рассеяния или поглощения. Соответствующие алгоритмы описаны в [16, гл. II].

Известный интерес представляют экономичные формулы пересчета координат направления пробега частицы при столкновении, полученные П. П. Ченцовым. Пусть ϑ – широтный угол; φ – азимутальный угол нового направления относительно старого; $\mu = \cos \vartheta$; $\delta_1 = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi$; $\delta_2 = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi$; a, b, c – координаты старого направления; $a^2 + b^2 + c^2 = 1$; $a\delta_1 - b\delta_2 = A$; a', b', c' – координаты нового направления. Тогда a', b', c' рассчитываются по формулам

$$a' = a \left(\mu - \frac{A}{a + |c|} \right) + \delta_1,$$

$$b' = b \left(\mu - \frac{A}{a + |c|} \right) - \delta_2,$$

$$c' = c\mu - A \operatorname{sign} c.$$

Так как угол φ изотропен, то δ_1 и δ_2 можно рассчитывать с помощью следующего алгоритма:

а) выбираются независимые α_1, α_2 и вычисляются

$$x = 1 - 2\alpha_1, \quad y = 1 - 2\alpha_2;$$

б) если $m = x^2 + y^2 \leq 1$, то полагаем

$$\delta_1 = x \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{m}}, \quad \delta_2 = y \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{m}},$$

если же $x^2 + y^2 > 1$, то выполняется п. «а» и т. д.

3. Оценка распределений числа частиц

Хорошо известным методом оценки распределения числа частиц по некоторому параметру является построение соответствующей гистограммы. Например, для оценки распределения вылетающих из атмосферы фотонов по углам ϑ и φ необходимо подсчитать число случаев вида

$$\vartheta_{k-1} \leq \vartheta \leq \vartheta_k, \quad k = 0, 1, 2, K;$$

$$\varphi_{l-1} \leq \varphi \leq \varphi_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L.$$

Иногда большой эффект может дать предложенный Н. Н. Ченцовым [17] метод, основанный на среднеквадратической аппроксимации искомой плотности распределения с помощью ортогональных систем функций.

Пусть $f(x)$ – плотность распределения и $\{p_i(x)\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, – система функций, ортонормированная с весом $\rho(x)$. Наилучшая среднеквадратическая аппроксимация функции $f(x)$ линейными комбинациями функций $p_i(x)$ задается следующими коэффициентами:

$$a_i = \int f(x) \rho(x) p_i(x) dx = M O \rho(\xi) p_i(\xi).$$

Пусть получена «выборочная» последовательность x_1, x_2, \dots, x_n . Тогда статистической оценкой для a_i может служить величина

$$a_i^* = \frac{\sum_{k=1}^n \rho(x_k) p_i(x_k)}{n},$$

а для $f(x)$ – функция

$$f^*(x) = \sum_{k=1}^m a_k^* p_k(x).$$

Этот метод особенно удобен для оценки «гладких» распределений, когда можно априори предположить, что плотность распределения хорошо аппроксимируется с помощью небольшого числа коэффициентов a_i . В качестве практического правила для выбора числа коэффициентов можно предложить учитывать лишь те коэффициенты, абсолютная величина которых существенно превосходит величину их статистической погрешности.

Физические соображения, связанные с симметрией системы земля – атмосфера – солнце, позволяют предположить, что распределение фотонов, пересекающих сферу радиуса $R = R_3$ (см. § 1), по азимутальному углу φ хорошо аппроксимируется с помощью следующей системы функций, ортонормированной на интервале $[0, 2\pi]$:

$$p_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad p_i(\varphi) = \frac{\cos i\varphi}{\sqrt{\pi}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Результаты расчетов показали удовлетворительность избранной системы аппроксимации по φ . Выборочные значения для $\cos i\varphi$, $i = 1, 2, 3, 4$ вычислялись по формулам

$$\eta = \cos \varphi = \frac{Bz_0 + Cy_0}{\sqrt{y_0^2 + z_0^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты точки пересечения фотоном сферы радиуса $R = R_3$; a, b, c – направляющие косинусы скорости фотона;

$$A = bz_0 - xy_0, \quad B = cx_0 - az_0, \quad C = ay_0 - bx_0,$$

$$\cos 2\varphi = 2\eta^2 - 1, \quad \cos 3\varphi = \eta(4\eta^2 - 3), \quad \cos 4\varphi = 8\eta^2(\eta^2 - 1) + 1.$$

4. Основные принципы построения экономических алгоритмов

Общие принципы построения экономических модификаций метода Монте-Карло для решения задач переноса могут быть получены из рассмотрения интегрального уравнения переноса [18]. Это уравнение можно записать в виде

$$F(x) = \int_X k(x' \rightarrow x) F(x') dx' + f(x'), \quad (2)$$

или

$$F = KF + f.$$

Здесь $F(x)$ – плотность столкновений в точке x фазового пространства X ; $k(x' \rightarrow x)$ – плотность первичных столкновений в точке x от одного столкновения в точке x' ; $f(x)$ – плотность источников.

Предполагаем, что решение уравнения (2) можно представить в виде ряда Неймана

$$F = f + \sum_{n=1}^{\infty} K^n f = \sum_{n=0}^{\infty} K^n f, \quad K^0 f = f.$$

Функция $K^n f$ представляет собой плотность столкновений n -го порядка от источника с плотностью f .

Различные интегральные характеристики процесса переноса могут быть, как правило, представлены в виде линейных функционалов от решения уравнения (2):

$$I_\varphi = (\varphi, F) = \int_X F(x) \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi, K^n f).$$

Отсюда ясно, что для оценки функционала I_φ методом Монте-Карло необходимо осреднять суммы значений $\varphi(x)$ для столкновений разных порядков. Несмещенность этой оценки доказана в [19]. Один из основных принципов улучшения метода Монте-Карло состоит в замене осредняемой функции $\varphi(x)$ на функцию $\psi(x)$ таким образом, что $I_\psi = I_\varphi + A$, где A – известная величина.

Этот принцип можно назвать «аналитическим осреднением», так как при этом обычно производится интегрирование по некоторым переменным.

Рассмотрим сопряженное относительно φ уравнение переноса [18]

$$F^*(x) = \int_X k(x \rightarrow x') F^*(x') dx' + \varphi(x). \quad (3)$$

Легко показать, что

$$I_\varphi = (F^*, f).$$

В частности, если положить $f(x) = \delta(x - x_0)$, то получим, что $F^*(x_0)$ равно значению вычисляемого функционала I_φ для источника «единичной мощности» в точке x_0 . Поэтому функцию $F^*(x)$ принято называть функцией «ценности» относительно вычисляемого функционала [18]. Можно показать, что если моделирование траекторий проводить, умножая плотности вероятностей «элементарных» случайных величин на «ценность» точек фазового пространства, то вероятностная погрешность оценки функционала будет равна нулю. При этом, конечно, нужно после каждой выборки вспомогательный «вес» частицы умножать на соответствующий весовой множитель [16]. Таким образом, используя информацию о характере решения сопряженного уравнения, можно строить экономичные модификации метода Монте-Карло. В частности, «ценность» поглощенных частиц равна нулю, поэтому в ряде случаев поглощение выгодно «не разыгрывать». Эта схема, названная методом условных вероятностей, подробно рассмотрена в [19]. Она была применена нами в задаче A_1 при моделировании альбедо земной поверхности. В § 7 описана разработка общего принципа моделирования по ценности для задачи A_2 .

5. Метод аналитического осреднения и метод локальной оценки потока частиц

Функционал I_φ оценивает число столкновений в области $D \subset X$, если

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases} \quad (4)$$

Если объем области D мал, то столкновения в ней будут происходить редко, а относительная вероятностная погрешность будет велика. Рассмотрим соотношение

$$I_\varphi = (\varphi, F) = (\varphi, KF + f) = (\varphi, KF) + (\varphi, f) = (K^*\varphi, F) + (\varphi, f).$$

Отсюда, осредняя функцию $K^*\varphi$ по всем столкновениям, мы получаем несмещенную оценку для функционала $I_\varphi = (\varphi, f)$, вероятностная погрешность которой может быть существенно меньше, чем у оценки, использующей функцию $\varphi(x)$. Из (4) следует, что

$$[K^*\varphi](x) = \int_D k(x \rightarrow x') dx'.$$

Обозначим $\Phi(x)$ – поток частиц, или яркость излучения, в точке $x = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$ (см. [18]). Известно, что

$$\int_D F(x) dx = \int_D \sigma(x) \Phi(x) dx,$$

где $\sigma(x)$ – полное эффективное сечение в точке с координатами $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x)$. Таким образом, используя

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} 1/|D|\sigma(x), & x \in D, \\ 0, & x \notin D, \end{cases}$$

мы получим оценку потока в некоторой точке $x^* = (\mathbf{r}^*, \mathbf{v}^*)$. Аналогично вместо K_φ^* следует использовать $K^*[\varphi/|\sigma|]$ и

$$\frac{1}{|D|} \left[K^* \frac{\varphi}{\sigma} \right] (x) = \frac{1}{|D|} \int_D \frac{k(x \rightarrow x')}{\sigma(x')} dx' \xrightarrow{|D| \rightarrow 0} \frac{k(x \rightarrow x^*)}{\sigma(x^*)}. \quad (5)$$

Исходя из метода аналитического осреднения, получаем таким образом метод локальной оценки потока, который был предложен в работах [19, 20]. Там же показано, что выражение (5) равно

$$\frac{e^{-\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)} g(\mu^*) \delta(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}')}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|^2}, \quad (6)$$

где $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$ – оптическая толщина вдоль отрезка \mathbf{r}, \mathbf{r}^* ; $\mu^* = \cos \vartheta^*$, ϑ^* – угол между скоростью частицы до рассеяния и вектором $\mathbf{r}^* - \mathbf{r}$; $g(\mu)$ – индикатриса для выбранного типа рассеяния;

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{r}^* - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}|} v'(\mu^*),$$

$v'(\mu^*)$ определяется выбранным типом рассеяния.

Из (6) следует, что для оценки интегралов потока по областям $V_i \subset V$ необходимо осреднять величину

$$\frac{e^{-\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)} g(\mu^*)}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|^2} \Delta_i, \quad (7)$$

где

$$\Delta_i = \begin{cases} 1, & \mathbf{v}' \in V_i, \\ 0, & \mathbf{v}' \notin V_i. \end{cases}$$

Из-за множителя $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|^2$ в знаменателе выражения (7) локальная оценка потока имеет бесконечную дисперсию. В [20] показано, что порядок вероятностей сходимости этой оценки равен $N^{-1/3}$ (N – число траекторий) вместо $N^{-1/2}$ при конечной дисперсии.

6. Модификация метода локальной оценки потока для одного класса систем с осевой симметрией

Осевая симметрия системы Земля – атмосфера – Солнце позволяет для задач типа A_2 применить модификацию метода локальной оценки потока с конечной дисперсией. Предполагаемая задачей A_2 оценка вертикальной структуры излучения в плоскости $\varphi = 0$ (см. § 1 раздела I) означает, что нужно рассчитывать вклад в приходящее излучение от рассеяний в области $0 \leq \varphi \leq d\varphi$ (рис. 3).

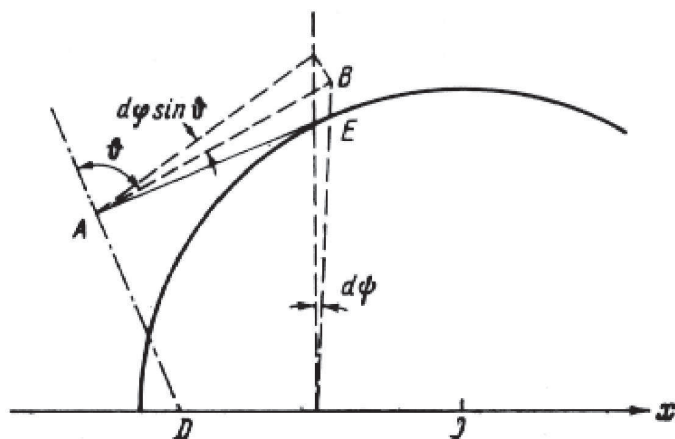


Рис. 3. Геометрическая схема модификации метода локальной оценки потока

Обозначим сферические координаты, связанные со спутником A (рис. 3), r , ϑ , φ , а цилиндрические «глобальные» координаты — x , ρ , φ . Считаем, что ось AD сферической системы координат лежит в плоскости $\varphi = \psi = 0$ и ориентирована ортогонально к лежащей в той же плоскости касательной AE к земной поверхности. Пусть $\overline{AB} = r$ и $\overline{BC} = \rho$. Обозначим также ξ , η – координаты направления скорости частицы в цилиндрической системе координат. Обозначим величину (7) в цилиндрической системе координат $P(x, \rho, \psi, \xi, \eta)$, а $F_1(x, \rho, \xi, \eta)$ – плотность столкновений в той же системе. Ввиду

осевой симметрии плотность столкновений не зависит от ψ . Можно записать

$$\begin{aligned} & \int_0^\psi \int_{\varphi}^\psi \int_{d\varphi}^\psi F_1(x, \rho, \xi, \eta) P(x, \rho, 0, \xi, \eta) dx d\rho d\xi d\eta d\psi = \\ & = \iiint \int dx d\rho d\xi d\eta \int_0^{\frac{d\psi}{d\varphi}} F_1(x, \rho, \xi, \eta) P(x, \rho, 0, \xi, \eta) d\psi. \end{aligned}$$

Из рассмотрения рис. 3 следует, что

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{r \sin \vartheta}{\rho}.$$

Поэтому последний интеграл равен

$$d\varphi \iiint \int dx d\rho d\xi d\eta F_1 P \frac{r \sin \vartheta}{\rho}. \quad (8)$$

Из (7), (8) вытекает эффективный алгоритм оценки вертикальной структуры приходящего на спутник излучения. Его смысл заключается в том, что спутник поворачивается в плоскость столкновения – ось симметрии и затем вычисляется локальная оценка (7), умноженная на $\frac{r \sin \vartheta}{\rho}$ в соответствии с (8). Запишем алгоритм в декартовой системе координат, так как в ней проводилось моделирование траекторий.

Пусть x, y, z – координаты столкновения; a, b, c – единичный вектор направления частицы перед столкновением; x^*, y^*, z^* – координаты спутника. Вычисляются величины

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \rho^* = \sqrt{y^{*2} + z^{*2}}, \quad y' = \frac{\rho^*}{\rho} y, \quad z' = \frac{\rho^*}{\rho} z,$$

$$r^* = \sqrt{(x - x^*)^2 + (\rho - \rho^*)^2}, \quad b^* = \frac{y}{r^*} \left(\frac{\rho^*}{\rho} - 1 \right),$$

$$a^* = \frac{x^* - x}{r^*},$$

$$c^* = \frac{z}{r^*} \left(\frac{\rho^*}{\rho} - 1 \right),$$

$$\mu^* = aa^* + bb^* + cc^*.$$

Обозначая $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и $\mathbf{r}^* = (x^*, y', z')$, имеем $\mathbf{r}^* = |\mathbf{r} - \mathbf{r}^*|$. Наконец, вместо величины (7) вычисляется величина

$$\frac{e^{-\tau(r, r^*)} g(\mu^*) \sin \vartheta}{2\pi r^* \rho} \Delta_i. \quad (9)$$

Ввиду ограниченности ρ описанная модификация метода локальной оценки потока имеет конечную дисперсию. Для простоты вычислений области Δ_i определялись косинусами широтного угла $\theta = \theta(h)$ (см. рис. 1) в сферической системе координат, ось которой проходит через центр земли. Видно, что

$$\cos \theta = \frac{a^* x^* + b^* y' + c^* z'}{\sqrt{x^{*2} + y'^2 + z'^2}}.$$

Сделаем заключительное замечание о применении метода локальной оценки потока в задачах типа A_2 . Очевидно, что в среднем эквивалентны следующие способы вычисления величины (9): 1) предварительно выбирается тип рассеяния и затем рассчитывается $\tilde{g}(\mu^*)$ для выбранного типа рассеяния; 2) рассчитывается $\tilde{g}(\mu^*)$ -индикатриса, усредненная по всем типам рассеяния. Второй способ требует большего количества вычислений, но может существенно уменьшить вероятностную погрешность результатов, если индикатрисы различных типов сильно отличаются. Нами в задаче A_2 был применен именно второй способ, так как молекулярная и аэрозольные индикатрисы существенно различны.

7. Некоторые применения принципа моделирования «по ценности» для задач типа A_2

Выбор начальных координат частицы. «Падающий» поток излучения параллелен, поэтому функция распределения величины $\rho_0 = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$ равна

$$F_0(\rho) = \frac{\rho^2}{R_2^2}, \quad 0 \leq \rho \leq R_2.$$

Соответствующая моделирующая формула такова:

$$\rho_0 = R_2 \sqrt{\alpha}$$

(или $\rho_0 = R_2 \max[\alpha_1, \alpha_2]$).

«Ценность» частиц, «стартующих» в области $\rho_0 < R_1$, сравнительно невелика, а при некотором ϵ частицы с $\rho_0 < R_1 - \epsilon$ практически не дают вклада в приходящее на спутник излучение (рис. 4). Это предположение проверено численными экспериментами.

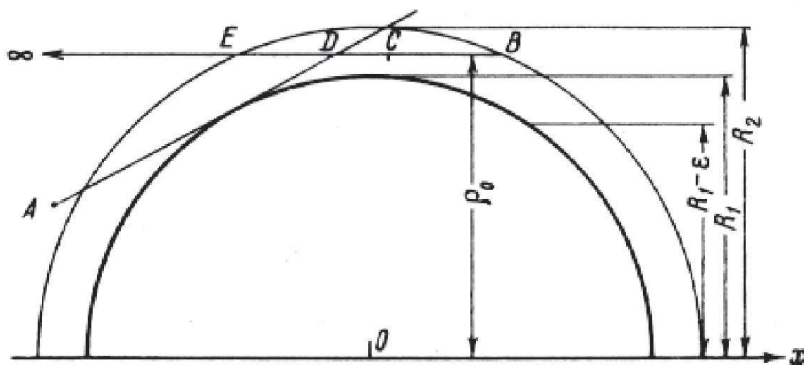


Рис. 4. К выбору точки первого столкновения фотона в атмосфере

Поэтому было выбрано следующее приближение для функции «ценности» начальных положений частицы:

$$f_0^*(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho \geq \rho_1 = R_1 - \epsilon, \\ 0, & \rho < \rho_1. \end{cases}$$

Величина ρ_0 соответственно моделировалась по формуле

$$\rho_0 = \sqrt{(R_1 - \epsilon)^2 + \alpha [R_2^2 - (R_1 - \epsilon)^2]}.$$

Этот прием весьма полезен, так как не было затрачено время ЭВМ на моделирование практически «бесполезных» частиц, «стартующих» из области $0 \leq \rho_0 < R_1 - \epsilon$. Заметим, что программа расчетов, составленная для ЭВМ М-20, позволяет проводить моделирование для функции $f_0^*(\rho)$ более общего вида:

$$f_0^*(\rho, c) = \begin{cases} 1, & \rho \geq \rho_1 = R_1 - \epsilon, \\ c, & \rho < \rho_1. \end{cases}$$

Выбор длины первого пробега. Пусть частица стартует в точке В (рис. 4); $\rho_0 > R_1$; в точке А находится спутник; AD – касательная

к земной поверхности в плоскости ось – спутник – частица. С помощью численных экспериментов была исследована эффективность различных приближений к функции «ценности» точек первого столкновения на прямой ∞, B . Простым для реализации и достаточно эффективным оказалось следующее приближение:

$$f_1^*(l) = \begin{cases} 0, & l \in cB, \\ \frac{e^{\tau(l)}}{\sigma(l)}, & l \in EC = EC \cup DC, \\ 0, & l \in \infty, E. \end{cases}$$

Так как плотность вероятностей случайной величины l равна

$$f_1(l) = \sigma(l)e^{-\tau(l)},$$

то

$$cf_1(l)f_1^*(l) = \begin{cases} 0, & l \in CB, \\ c, & l \in EC, \\ 0, & l \in \infty, E, \end{cases}$$

где $c = 1/\overline{EC}$ – нормировочная константа. Итак, точку первого столкновения следует выбирать равномерно в интервале EC . Соответствующий весовой множитель равен

$$P_1(l) = f_1(l) : \overline{EC} = \overline{EC}\sigma(l)e^{-\tau(l)}, \quad l \in EC.$$

Величина \overline{EC} является параметром.

Выбор направления после столкновения. Пусть в точке A (рис. 5) произошло рассеяние частиц. Символом ν обозначен широтный угол в сферической системе координат с центром в точке A и осью, проходящей через центр Земли. Ясно, что рассеянные с $\nu \approx 0$ и $\nu \approx \pi$ частицы обладают малой «ценностью», так как в первом случае они с большой вероятностью вылетают из атмосферы, а во втором – поглощаются Землей. Наоборот, частицы, направленные в сторону некоторого слоя $R_1 < R \leq R_1 + H$ (на рис. 5 $\nu_2 \leq \nu \leq \nu_3$), могут обладать повышенной ценностью, например, из-за наличия в нем аэрозоля. Поэтому для $h > H = 25$ (км) (область чистого молекулярного рассеяния) $\mu = \cos \nu$ «разыгрывался» равномерно в интервале (μ_i, μ_{i+1}) с вероятностью p_i , причем параметры μ_i и p_i были определены, ис-

ходя из вышеуказанных соображений. Легко показать, что с высокой степенью точности

$$\cos \nu_2 = -\sqrt{\frac{2(h-H)}{R_1}}.$$

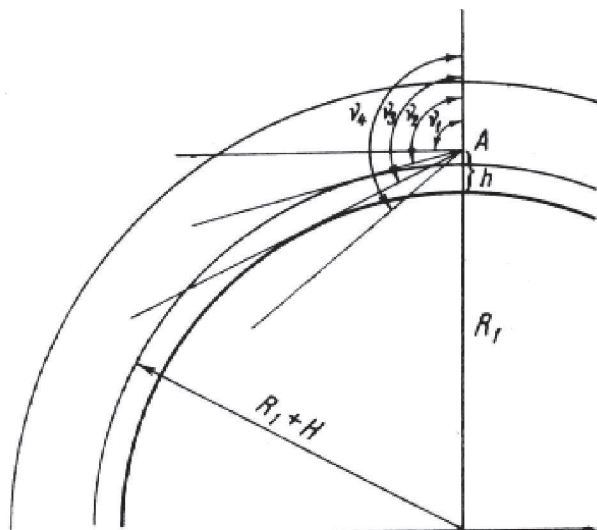


Рис. 5. Интервалы углов для модификации рассеяния фотонов

Для конкретных расчетов были выбраны следующие значения параметров:

$\mu_i = \cos \nu_i$	p_i
1	0,2
0	0,2
$-\sqrt{\frac{2(h-25)}{R_1}}$	0,3
$-\sqrt{2\frac{h}{R_1}}$	0,1
$-\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{h}{R_1}}$	0,1
-1	

Весовой множитель при рассеянии в интервале μ_i, μ_{i+1} равен

$$q_i(\mu') = -\frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{p_i} f_M(\mu'),$$

где $\mu' = \cos \vartheta$; ϑ – угол, который составляет новое направление частицы со старым; $f_M(\mu)$ – молекулярная индикатриса.

8. Метод зависимых испытаний. Вычисление производных методом Монте-Карло

Сущность метода зависимых испытаний (см. [21]) состоит в том, что моделирование траекторий в различных системах производится по одним и тем же случайным числам, а возникающее при этом постоянное смещение устраняется с помощью специальных весовых множителей. При этом происходит экономия времени ЭВМ, так как каждая траектория учитывается для нескольких систем. Кроме того, зависимость искомого функционала от параметров системы определяется более точно, чем при независимых испытаниях. Метод зависимых испытаний весьма эффективен для решения задач атмосферной оптики, так как здесь необходимо моделировать перенос излучения различных длин волн. С помощью зависимых испытаний можно получать с высокой точностью спектр приходящего излучения, что дает возможность воссоздания наблюдаемой на спутнике цветной картины.

Выведем алгоритм с помощью представления решения уравнения переноса в виде ряда Неймана. Пусть

$$k(x \rightarrow x') = k(x \rightarrow x', \lambda),$$

где λ – некоторый параметр системы. Тогда

$$I_{\varphi}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi, K_{\lambda^n} f). \quad (10)$$

Рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} (\varphi, K_{\lambda^n} f) &= \iint \dots \int k(x^{(1)} \rightarrow x^{(2)}, \lambda) \dots k(x^{(n)} \rightarrow x, \lambda) \varphi(x) dx^{(1)} \dots \\ &\dots dn^{(n)} dx = \iint \dots \int k(x^{(1)} \rightarrow x^{(2)}, \lambda_0) \dots k(x^{(n)} \rightarrow x, \lambda_0) \times \\ &\times \frac{k(x^{(1)} \rightarrow x^{(2)}, \lambda)}{k(x^{(1)} \rightarrow x^{(2)}, \lambda_0)} \dots \frac{k(x^{(n)} \rightarrow y, \lambda)}{k(x^{(n)} \rightarrow y, \lambda_0)} \varphi(x) dx^{(1)} \dots dx^{(n)} dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда траектории, построенные для $\lambda = \lambda_0$ можно использовать для оценки $I_{\varphi}(\lambda)$, если после каждого перехода $x \rightarrow y$ вспомогательный вес частицы умножать на величину

$$\frac{k(x \rightarrow x, \lambda)}{k(x \rightarrow x, \lambda_0)}. \quad (12)$$

Из (12) следует, что метод зависимых испытаний неприменим в тех случаях, когда существуют такие точки x, y , что

$$k(x \rightarrow y, \lambda) \neq 0, \quad k(x \rightarrow y, \lambda_0) = 0.$$

Для практического вычисления величины (12) следует представить $k(x \rightarrow y, \lambda)$ в виде произведения плотностей элементарных случайных величин: длины пробега, направления рассеяния, номера типа столкновения.

Таким образом, получаем простое правило метода зависимых испытаний: после каждой элементарной выборки вспомогательный «вес» частицы надо умножать на отношение соответствующих плотностей вероятностей для значений параметра λ и λ_0 . Рассмотрим два случая применения этого метода в задачах атмосферной оптики.

Одновременное моделирование для различных длин волн λ . Пусть от λ зависят эффективные сечения различных типов столкновений, т. е.

$$\sigma_i = \sigma_i(\lambda), \quad \sigma = \sigma(\lambda) = \sum_i \sigma_i(\lambda),$$

и не зависят индикатрисы. Тогда после выбора очередной длины l пробега «вес» следует умножить на

$$\frac{\sigma(\lambda, l)e^{-\tau(\lambda, l)}}{\sigma(\lambda_0, l)e^{-\tau(\lambda_0, l)}} = \frac{\sigma(\lambda, l)}{\sigma(\lambda_0, l)} e^{-[\tau(\lambda, l) - \tau(\lambda_0, l)]}, \quad (13)$$

а после выбора i -го типа столкновения – дополнительно на

$$\frac{\sigma_i(\lambda, l)}{\sigma(\lambda, l)} : \frac{\sigma_i(\lambda_0, l)}{\sigma(\lambda_0, l)} = \frac{\sigma(\lambda_0, l)}{\sigma(\lambda, l)} \frac{\sigma_i(\lambda, l)}{\sigma_i(\lambda_0, l)}.$$

Одновременное моделирование для различных значений сечения некоторого типа столкновений. Пусть в какой-то области $\bar{\Sigma}$ системы

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i + \bar{\sigma}, \quad \text{где } \bar{\sigma} - \text{параметр.}$$

Аналогично предыдущему случаю в (13) после выбора длины пробега «вес» следует умножить на величину

$$e^{-[\tau(\bar{\sigma}, l) - \tau(\bar{\sigma}_0, l)]} = e^{-\Delta l(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_0)},$$

где Δl – длина пути, пройденного частицей в области Σ за очередной пробег. Если затем выбран тип столкновения, соответствующий $\bar{\sigma}$, то «вес» дополнительно умножается на σ/σ_0 . Следовательно, в конце траектории вспомогательный «вес» равен

$$\left[\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} \right]^n e^{-\Delta L(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_0)},$$

где ΔL – полный путь, пройденный частицей в области Σ ; n – число столкновений типа, соответствующего $\bar{\sigma}$.

Предположим, что ряд (10) можно дифференцировать по λ почленно под знаком интеграла. Очевидно, что оценку производной $\partial I_\varphi(\lambda)/\partial \lambda$ можно получить методом Монте-Карло, если осреднять суммы по всем столкновениям величин вида

$$\varphi(x) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{k(x^{(1)} \rightarrow x^{(2)}, \lambda)}{k(x^{(1)} \rightarrow x^{(2)}, \lambda_0)} \cdots \frac{k(x^{(n)} \rightarrow x, \lambda)}{k(x^{(n)} \rightarrow x, \lambda_0)} \right]_{\lambda=\lambda_0}.$$

Например, дифференцируя (14) по $\bar{\sigma}$ в точке $\bar{\sigma}_0$, получаем величину $n/\bar{\sigma}_0 - \Delta L$, которая легко вычисляется при построении случайных траекторий. Таким образом, методом Монте-Карло можно эффективно решать некоторые обратные задачи в постановке, описанной в [1]. При локальной оценке потока осредняемая функция зависит от параметра λ . Однако легко получить, что алгоритмы зависимых испытаний остаются теми же, если рассматривать отрезок \mathbf{r} , \mathbf{r}^* (см. (9)) как последний пробег частицы.

9. Применение «неслучайных узлов» для оценки вклада от первых столкновений

В некоторых задачах типа A_2 вычисляемый функционал в большой степени определяется вкладом $I_0 = (\psi, Kf)$ от первых столкновений. Точка x_1 первого столкновения вполне определяется двумя случайными числами α_1 и α_2 (для выбора ρ_0 (рис. 4) и для выбора длины первого пробега). Поэтому

$$I_0 = \int_0^1 \int_0^1 p(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (15)$$

Интеграл (15) можно вычислять с помощью подходящей квадратурной формулы, и в то же время узлы этой формулы использовать

для определения точек первых столкновений. Траектории затем моделируются, начиная с этих точек, с «весами», равными коэффициентам квадратурной формулы. В расчетах для задачи A_2 числа α_1 и α_2 определялись с помощью второго и третьего оптимальных коэффициентов третьей кратности для следующих значений параметров: $a_1 = 1$, $a_2 = 3072$, $a_3 = 583$, $p = 10\,007$ (см. [22]). Применение оптимальных коэффициентов обеспечивает для I_0 в данном случае порядок сходимости $\ln N/N$ вместо $N^{-1/2}$ при использовании случайных узлов.

Численные эксперименты показали, что применение неслучайных узлов в данном случае существенно уточнило результаты.

В постановке задачи принял участие К. Я. Кондратьев, которому авторы выражают благодарность. Авторы признательны также Г. В. Розенбергу за ряд замечаний при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Уравнение для ценности информации с метеорологических спутников и постановка обратных задач // Космические исследования. 1964. Т. 2, вып. 3.
2. Малкевич М. С., Фейгельсон Е. М. и др. Расчет яркости света в атмосфере при анизотропном рассеянии. I, II. Тр. ИФА. 1958. № 1, 1962. № 1.
3. Wark D. G. On indirect temperature soundings of the stratosphere from satellites // J. Geophys. Res. 1964. V. 66, No. 1.
4. Yamamoto G. Numerical method for estimating the stratospheric temperature distribution from satellite measurements in the CO_2 band // J. Meteorology. 1961. V. 18, No. 5.
5. Малкевич М. С., Татарский В. И. Определение вертикального профиля температуры атмосферы по уходящему излучению в полосе поглощения CO_2 // Космические исследования. 1965. V. 3, вып. 3.
6. Розенберг Г. В. Сумерки. Физматгиз, 1963.
7. Соболев В. В., Минин И. И. Рассеяние света в сферической атмосфере. I–III // Искусственные спутники Земли. 1962. Вып. 14; Космические исследования, 1963. Т. 1, Вып. 2; 1964. Т. 2, Вып. 4.
8. Розенберг Г. В. О сумеречных исследованиях планетных атмосфер с космических кораблей // Изв. АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1965. Т. 1, № 4.
9. Розенберг Г. В., Николаева-Терешкова В. В. Стратосферный аэрозоль по измерениям с космического корабля // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1965. Т. 1, № 4.

-
10. Шифрин К. С., Минин И. Н. К теории негоризонтальной видимости // Тр. ГГО. 1957. Вып. 68.
 11. Шифрин К. С. Рассеяние света в мутной среде. ОНТИ, 1951.
 12. Кондратьев К. Я. Актинометрия. Гидрометеиздат, 1966.
 13. Голенко Д. И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. Наука, 1965.
 14. Михайлов Г. А. О моделировании случайных величин одного класса законов распределения // Теория вероятностей и ее применение 1965. Т. 10, № 4.
 15. Михайлов Г. А. К вопросу о построении экономичных алгоритмов моделирования случайных величин // Журнал вычис. мат. и мат. физики. 1966. Т. 6, № 6.
 16. Бусленко Н. П. и др. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Физматгиз, 1962.
 17. Ченцов Н. Н. Оценка неизвестной плотности распределения по наблюдениям // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 1.
 18. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. Атомиздат, 1961.
 19. Золотухин В. Г., Ермаков С. М. Применение метода Монте-Карло для расчета защиты от ядерных излучений // В сб.: Вопросы физики защиты реакторов. Атомиздат, 1963.
 20. Kalos M. H. On the estimation of flux at a point by Monte-Carlo // Nucl. Sci. and Eng. 1963. V. 16, No. 4.
 21. Фролов А. С., Ченцов Н. Н. Использование зависимых испытаний в методе Монте-Карло для получения гладких кривых // Тр. VI Всес. совещания по теории вероятностей и матем. статистике. Гос. изд. ЛитССР, 1962.
 22. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. Физматгиз, 1963.

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЦЕННОСТИ ИНФОРМАЦИИ С МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ СПУТНИКОВ И ПОСТАНОВКА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ¹⁸

Рассматриваются задачи атмосферной оптики и переноса длинноволнового излучения. Вводятся в рассмотрение функционалы основных задач, которыми являются показания приборов на метеорологическом спутнике. Строятся сопряженные уравнения, связанные с соответствующими функционалами задачи, которые названы уравнениями для ценности информации по отношению к заданным функционалам. При помощи основных и сопряженных уравнений развивается теория возмущений. Формула теории возмущений позволяет сформулировать соответствующие обратные задачи метеорологии.

В настоящей работе будет сформулировано уравнение для ценности информации, получаемой с метеорологических спутников. Предполагается, что на спутнике имеется комплекс приборов, регистрирующих определенные характеристики поля излучения. Показания приборов являются функционалами соответствующих задач. Будем рассматривать процесс переноса радиации заданных частот в диапазоне от ультрафиолетового до длинноволнового излучения.

Введем в рассмотрение стандартную атмосферу, которая характеризуется заданным распределением метеорологических элементов: температуры, влажности, плотности, аэрозолей и т. д. При помощи уравнения переноса для стандартной атмосферы можно сформулировать задачу о переносе радиации. Такую задачу будем называть невозмущенной.

Приборы, установленные на метеорологическом спутнике, будут регистрировать истинные функционалы задач, которые отличаются от функционалов невозмущенных задач на определенную величину, которую будем называть вариацией функционала. Основная задача состоит в определении вариаций характеристик атмосферы по заданным вариациях функционалов.

В дальнейшем будет изложена общая точка зрения на обратные задачи, связанные с интерпретацией данных метеорологических спутников, и даны алгоритмы решения некоторых обратных задач.

¹⁸Космические исследования, 1964, т. 2, вып. 3, с. 462–477.

1. Постановка обратных задач

Пусть φ – интенсивность излучения, f – источники излучения. Тогда задача о переносе радиации в операторной форме примет следующий вид:

$$L\varphi = f, \quad (1)$$

где L – интегро-дифференциальный оператор переноса излучения. Функции φ и f принадлежат к классам функций, на которых уравнение (1) имеет смысл. Кроме того, все функции, из которых выбирается решение – φ , удовлетворяют граничным условиям.

Введем в рассмотрение скалярное произведение (g, h) как интеграл по всей области переменных задач от произведения функции g и h и определим сопряженный оператор L^* в смысле Лагранжа:

$$(h, Lg) = (g, L^*h). \quad (2)$$

Рассмотрим некоторый линейный функционал поля излучения, который всегда можно представить в виде следующего произведения:

$$J_p(\varphi) = (p, \varphi), \quad (3)$$

и введем в рассмотрение сопряженное уравнение по отношению к этому функционалу

$$L^*\varphi_p^* = p, \quad (4)$$

где φ_p^* принадлежит к классу функций, удовлетворяющих граничным условиям и определенным свойствам дифференцируемости.

Умножим скалярно уравнение (1) на φ_p^* , а уравнение (4) – на φ и возьмем разность полученных выражений:

$$(\varphi_p^*, L\varphi) - (\varphi, L^*\varphi_p^*) = (f, \varphi_p^*) - (p, \varphi). \quad (5)$$

С учетом соотношения (2) левая часть равенства (5) равна нулю, поэтому имеет место формула

$$J_p(\varphi) = (f, \varphi_p^*). \quad (6)$$

Таким образом, рассматриваемый функционал $J_p(\varphi)$ может быть вычислен либо по формуле (3), либо по формуле (6).

Это значит, что вычисление функционала $J_p(\varphi)$ может быть произведено двумя совершенно различными способами: либо при помощи

решения основной задачи (1), либо при помощи сопряженной задачи (4).

Рассмотренный подход к определению линейных функционалов особенно интенсивно развивался в ядерной физике [1–6]. Общая постановка задачи была сформулирована в работе [3], в которой дан вывод формул теории возмущений для функционала $J_p(\varphi)$.

Задачи (1) и (4) будем считать невозмущенными; решения их находятся для стандартных характеристик поля излучения.

Поскольку в нашем распоряжении имеется набор вариаций функционалов, используем их для отыскания возмущений в основных характеристиках атмосферы. Для этой цели построим соответствующие формулы теории возмущений для функционалов.

Введем в рассмотрение возмущенную задачу

$$L'\varphi' = f', \quad (7)$$

где

$$L' = L + \delta L, \quad f' = f + \delta f. \quad (8)$$

Умножим скалярно уравнение (7) на функцию φ_p^* , а (4) – на функцию φ' и результаты вычтем друг из друга. Тогда будем иметь

$$(\varphi_p^*, L'\varphi') - (\varphi', L^*\varphi_p^*) = (f', \varphi_p^*) - (p, \varphi'), \quad (9)$$

с учетом соотношений (5) и (8) равенство (9) перепишем в виде

$$(\varphi_p^*, \delta L\varphi') = (\varphi_p^*, \delta f) - \delta J_p, \quad (10)$$

где

$$\delta J_p = J_p(\varphi') - J_p(\varphi).$$

Соотношение (10) окончательно перепишем в следующем виде:

$$(\varphi_p^*, \delta L\varphi' - \delta f) = \delta J_p. \quad (11)$$

Формулу (11) можно записать для любого линейного функционала из набора ($n = 1, 2, \dots, N$):

$$(\varphi_{p_n}^*, \delta L\varphi' - \delta f) = -\delta J_{p_n}. \quad (12)$$

Функции $\varphi_{p_n}^*$ являются статистическими весами в формулах (12) и характеризуют область влияния возмущения $\delta L\varphi' - \delta f$ во всем фазовом пространстве. Учитывая это обстоятельство, функции $\varphi_{p_n}^*$ можно

назвать функциями ценности информации по отношению к функционалу J_{p_n} .

Рассмотрим далее разность вариаций функционалов при разных параметрах n . Тогда получим

$$(\varphi_{p_n}^* - \varphi_{p_m}^*, \delta L\varphi' - \delta f) = \delta J_{p_m} - \delta J_{p_n}. \quad (13)$$

Очевидно, информация в различных функционалах должна быть независимой, т. е.

$$\varphi_{p_n}^* \not\equiv \varphi_{p_m}^*.$$

Зафиксируем некоторый функционал J_{p_n} . Этому функционалу соответствует сопряженная функция $\varphi_{p_n}^*$, являющаяся решением уравнения (4). Чтобы оценить меру независимой информации, содержащейся в $\varphi_{p_m}^*$, удобно рассматривать функции

$$\varphi_{p_n p_m}^* = \varphi_{p_n}^* - \varphi_{p_m}^*.$$

Таким образом, приходим к набору следующих задач:

$$L^* \varphi_{p_n}^* = p_n, \quad L^* \varphi_{p_n p_m}^* = p_n - p_m. \quad (14)$$

2. Обратные задачи атмосферной оптики

При интерпретации результатов наблюдений с метеорологических спутников по полю излучения в видимой части спектра могут быть поставлены различные обратные задачи по определению некоторых важных характеристик атмосферы. Ради простоты предположим, что неизвестной характеристикой атмосферы является отклонение плотности некоторой субстанции, поглощающей и рассеивающей радиацию, от нормального распределения. Атмосферу будем считать плоским слоем; внешним источником излучения является Солнце [7–9]. Тогда приходим к следующему уравнению:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi \alpha_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu') = f, \quad (15)$$

$$f = -S_\nu \delta(\mu - \mu_\odot) \delta(z - h) \mu_\odot,$$

которое может быть записано в операторной форме

$$L\varphi = f. \quad (16)$$

Здесь использовано предположение о независимости решения задачи от азимута и введены следующие обозначения: φ – интенсивность излучения с частотой ν ; $\alpha_\nu = \alpha_{s\nu} + \alpha_{c\nu}$, $\alpha_{s\nu}$ – сечение рассеяния; $\alpha_{c\nu}$ – сечение поглощения; S_ν – спектр солнечного излучения; $\mu_\odot = \cos \vartheta_\odot$, ϑ_\odot – высота Солнца; z – вертикальная координата с началом отсчета на поверхности Земли; h – верхняя граница атмосферы; $\mu = \cos \vartheta$, ϑ – высотный угол; $\gamma_\nu(\mu, \mu')$ – индикатриса рассеяния:

$$\gamma_\nu(\mu, \mu') = \sum_n \frac{2n+1}{2} \gamma_\nu p_n(\mu) p_n(\mu'). \quad (17)$$

Граничными условиями для функции φ выберем следующие. На верхней границе атмосферы – условие отсутствия приходящего извне излучения. Поскольку излучение Солнца учтено в самом уравнении переноса, будем иметь

$$\varphi(h, \mu) = 0 \quad \text{при} \quad \mu < 0. \quad (18)$$

На поверхности Земли будем считать, что приходящее излучение диффузно отражается от земной поверхности с заданным альбедо a_ν . Тогда приходим к условию

$$\frac{1}{2} \varphi(0, \mu) = a_\nu \int_{-1}^0 \varphi(0, \mu') \mu' d\mu' \quad \text{при} \quad \mu > 0. \quad (19)$$

Введем далее в рассмотрение функционал $J_p(\varphi)$, который связан с показанием прибора на метеорологическом спутнике, регистрирующего поток приходящего из атмосферы излучения со спектральной характеристикой $\xi(\nu)$. Очевидно, имеет место следующее равенство:

$$J_p(\varphi) = \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu p \varphi, \quad (20)$$

где $p = \mu g(\mu) \xi(\nu) \delta(z - h)$,

$$g(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu > 0, \\ 0, & \mu < 0. \end{cases} \quad (21)$$

С учетом вида функции p выражение для функционала $J_p(\varphi)$ несколько упростится:

$$J_p(\varphi) = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \xi(\nu) \varphi \mu d\mu, \quad z = h. \quad (22)$$

Очевидно, в рассматриваемом фазовом пространстве скалярное произведение определено следующим образом:

$$(\varphi, \varphi^*) = \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \varphi \varphi^*. \quad (23)$$

Введем в рассмотрение сопряженное уравнение

$$L^* \varphi_p^* = p, \quad (24)$$

где p определено формулой (21), а L^* – сопряженный в смысле Лагранжа оператор, удовлетворяющий условию (2). При помощи непосредственной проверки можно убедиться, что вид оператора L^* дается формулой

$$L^* \varphi_p^* = -\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* - \frac{\alpha_{s\nu}}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi_p^* \gamma_\nu(\mu, \mu'). \quad (25)$$

Таким образом, сопряженное уравнение переноса излучения будет иметь вид

$$-\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* - \frac{\alpha_{s\nu}}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi_p^* \gamma_\nu(\mu, \mu') = p. \quad (26)$$

Заметим, однако, что условие (2) будет выполнено тождественно только в том случае, если, кроме того, функцию φ_p^* связать дополнительными условиями, которые играют роль граничных условий для уравнения (26):

на верхней границе атмосферы

$$\varphi_p^*(h, \mu) = 0 \quad \text{при} \quad \mu > 0; \quad (27)$$

на поверхности Земли

$$\frac{1}{2}\varphi_p^*(0, \mu) = a_\nu \int_0^1 d\mu' \mu' \varphi_p^*. \quad (28)$$

В соответствии с общей теорией функционал задачи может быть определен также при помощи решения сопряженного уравнения

$$J_p(\varphi) = \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu f \varphi_p^* \quad (29)$$

или с учетом вида функции f

$$J_p(\varphi) = \int_0^\infty d\nu S_\nu \varphi_p^*(h, \mu_\odot). \quad (30)$$

Отметим, что φ и φ_p^* являются функциями ν , хотя этот факт и не отмечается специально.

Предположим теперь, что метеорологический прибор фиксирует отклонение функционала J_p от значения, соответствующего стандартной атмосфере, т. е. фиксируется величина

$$\delta J_p = J\delta(\varphi') - J_p(\varphi). \quad (31)$$

Указанное отклонение вызвано изменением плотности изучаемой субстанции в атмосфере. Задача теперь состоит в том, чтобы связать изменения характеристики атмосферы с вариацией функционала и найти вариации плотности субстанции.

С этой целью рассмотрим возмущенное уравнение (15):

$$\mu \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \alpha_{\nu'} \varphi' - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi' \alpha'_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu') = f. \quad (32)$$

Предполагается, что решение φ' удовлетворяет граничным условиям (18), (19).

Умножим далее уравнение (32) на φ_p^* , уравнение (26) – на φ' , вычтем одно выражение из другого и результат проинтегрируем по всей области определения решения.

Тогда, полагая

$$L' = L + \delta L,$$

где

$$L = \mu \frac{\partial}{\partial z} + \alpha_\nu - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \alpha'_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu'),$$

$$\delta L = \delta \alpha_\nu - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \delta \alpha'_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu'),$$

и учитывая соотношение (2), приходим к формуле теории возмущений для функционала $J_p(\varphi)$:

$$(\varphi_p^*, \delta L \varphi') = -\delta J_p. \quad (33)$$

В развернутом виде формула (33) имеет вид

$$\int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \varphi_p^* \left[\delta \alpha_\nu \varphi' - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \delta \alpha_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu') \right] = -\delta J_p. \quad (34)$$

Функции α_ν , $\alpha_{s\nu}$ связаны с плотностью ρ поглощающей и рассеивающей субстанции

$$\alpha_\nu = \rho \sigma_\nu, \quad \alpha_{s\nu} = \rho \sigma_{s\nu},$$

где σ – сечение, отнесенное к единице массы субстанции. Тогда будем иметь

$$\delta \alpha_\nu = \delta \rho(z) \sigma_\nu, \quad \delta \alpha_{s\nu} = \delta \rho(z) \sigma_{s\nu}. \quad (35)$$

Подставим соотношения (35) в формулу (34) и получим

$$\int_0^h \delta \rho(z) F_p(z) dz = -\delta J_p, \quad (36)$$

где

$$F_p(z) = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \varphi_p^* \left[\sigma_\nu \varphi' - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \sigma_{s\nu} \varphi' \gamma_\nu(\mu, \mu') \right]. \quad (37)$$

В том случае, когда возмущение решения мало, т. е. приближенно можно положить $\varphi' = \varphi$, функция $F_p(z)$ будет определена полностью:

$$F_p(z) = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \varphi_p^* \left[\sigma_\nu \varphi - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \sigma_{s\nu} \varphi \gamma_\nu(\mu, \mu') \right], \quad (37a)$$

а также может быть протабулирована заранее.

Если имеется набор функционалов J_{p_n} , то аналогично предыдущему приходим к системе уравнений

$$\int_0^h \delta\rho(z) F_{p_n}(z) dz = -\delta J_{p_n}, \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (38)$$

где

$$F_{p_n} = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \varphi_{p_n}^* \left[\sigma_\nu \varphi' - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi' \sigma_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu') \right]. \quad (39)$$

Система уравнений (38) может быть использована для нахождения функции $\delta\rho(z)$. Имеются по крайней мере два подхода к решению этой задачи.

Первый подход состоит в следующем. Предположим, что стандартное распределение плотности субстанции может быть описано интерполяционной формулой вида

$$\rho(z) = \sum_i \kappa_i g_i(\beta_i z), \quad (40)$$

где κ_i, β_i – параметры, а $g_i(x)$ – заданные интерполяционные функции.

В предположении, что возмущенная плотность $\rho'(z)$ может быть описана формулой (40) с измененными параметрами κ'_i, β'_i , можно приближенно записать

$$\delta\rho(z) = \sum_i \left[\delta\kappa_i g_i(\beta_i z) + \delta\beta_i \kappa_i \frac{\partial g_i}{\partial \beta_i} \right]. \quad (41)$$

Строго говоря, представление (41) справедливо при малых вариациях $\delta\kappa_i, \delta\beta_i$. Однако в дальнейшем будет введен в рассмотрение метод последовательных приближений, который расширит область применения соображения (41).

Формулу (41) удобно записать в виде

$$\delta\rho(z) = \sum_i \delta\epsilon_i \psi_i(z), \quad (42)$$

где $\{\delta\epsilon_i\}$ – совокупность параметров $\{\delta\kappa_i\}$ и $\{\delta\beta_i\}$, а $\{\psi_i\}$ – совокупность функций $\{g_i\}$ и $\left\{\kappa_i \frac{\partial g_i}{\partial \beta_i}\right\}$.

Подставим выражение (42) в систему (38). Тогда получим

$$\sum_i \delta\epsilon_i a_{ni} = -b_n, \quad (i, n = 1, 2, \dots, N), \quad (43)$$

где

$$a_{ni} = \int_0^h \psi_i F_{p_n} dz, \quad b_n = \delta J_{p_n}. \quad (44)$$

Если матрица $\mathbf{A} = \| a_{ni} \|$ хорошо обусловлена, то система линейных уравнений разрешается эффективно, а решение находится в виде

$$\delta\epsilon = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}. \quad (45)$$

Если возмущения не малы, то можно сформулировать следующий метод последовательных приближений:

$$\delta\epsilon^{(m+1)} = \mathbf{A}_m^{-1} \mathbf{b}^{(m)}, \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ni}^{(m)} &= \int_0^h \psi_i^{(m)} F_{p_n}^{(m)} dz, \\ b_n^{(m)} &= -\delta J_{p_n}^{(m)} = J_{p_n}(\varphi) - J_{p_{n1}}(\varphi^{(m)}), \\ F_{p_n}^{(m)} &= \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \varphi_{p_n}^* \left[\sigma_\nu \varphi^{(m)} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi^{(m)} \sigma_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu') \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь $\varphi^{(m)}$ – решение уравнения (15) при

$$\rho = \rho^{(m)}(z), \quad \psi_i^{(m)} = \psi_i(z; \beta^{(m)}).$$

Второй подход связан с построением подходящей квадратурной формулы для интеграла в левой части формулы (38). Положим

$$\int_0^h \delta\rho(z) F_{p_n}(z) dz = \sum_i c_{in} \delta\rho_i, \quad (48)$$

где $\delta\rho_i = \delta\rho(z_i)$, а c_{in} – коэффициенты квадратурной формулы с учетом множителя $F_{p_n}(z)$. Очевидно, такая постановка обратной задачи принципиально не отличается от рассмотренной выше. Аналогично здесь определяется метод последовательных приближений.

Сделаем одно важное замечание, а именно: если бы прибор фиксировал монохроматическое излучение, то интегрирование по ν можно было бы не проводить. В этом случае нетрудно убедиться, что и сопряженная функция была бы отлична от нуля только при $\nu = \nu_0$. Однако разрешение приборов, как правило, не позволяет делать указанного предположения, поскольку в интервале разрешения прибора функция σ_ν может изменяться весьма существенно, а это обстоятельство должно быть тщательно учтено, ибо ценность информации по отношению к функционалу J_p в этом случае может существенно измениться по сравнению с монохроматическим приближением.

Сформулированный алгоритм постановки обратных задач тривиально обобщается на различные случаи. Так, например, можно считать, что атмосфера состоит из смеси веществ и одновременно возмущается плотность многих субстанций. Далее, в расчетах предполагалось, что индикатриса рассеяния и альбеда не изменялись. Если происходит изменение этих величин, то можно для них сформулировать аналогичные формулы теории возмущений. Возможны и другие обобщения.

В заключение обратим внимание на некоторые упрощения математической постановки задачи, а именно: в предыдущем рассмотрении правые части уравнений (15) и (26) включали в себя источники, отличные от нуля только на верхней границе атмосферы при $z = h$. Можно дать эквивалентные постановки задач, где источники будут учтены в граничных условиях. В этом случае задача для основных и сопряженных функций формулируется в следующем виде:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi \alpha_{s\nu} \gamma_\nu(\mu, \mu') = 0,$$

$$\varphi(h, \mu) = S_\nu \delta(\mu - \mu_\odot) \quad \text{при} \quad \mu < 0, \quad (49)$$

$$\frac{1}{2} \varphi(0, \mu) = a_\nu \int_{-1}^0 \varphi(0, \mu') \mu' d\mu' \quad \text{при} \quad \mu > 0$$

– для интенсивности излучения и

$$\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* - \frac{\alpha_{s\nu}}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi_p^* \gamma_\nu(\mu, \mu') = 0,$$

$$\varphi_p^*(h, \mu) = g(\mu) \xi(\mu) \quad \text{при} \quad \mu > 0, \quad (50)$$

$$\frac{1}{2} \varphi_p^*(0, \mu) = -a_\nu \int_0^1 \varphi_p^*(0, \mu') \mu' d\mu' \quad \text{при} \quad \mu < 0$$

– для сопряженных функций.

В следующем пункте на примере длинноволнового излучения будет показана эквивалентность этих двух подходов к формулировке системы основных и сопряженных уравнений переноса излучения.

3. Обратные задачи длинноволнового излучения

В настоящем пункте будет сформулирована задача восстановления температуры в атмосфере по полю уходящего длинноволнового излучения, регистрируемого приборами, установленными на метеорологическом спутнике.

По-прежнему функционалом поля излучения будем считать показание прибора, регистрирующего полный поток длинноволнового излучения в диапазоне частот с характеристикой прибора $\xi(\nu)$. Тогда будем иметь

$$J_p = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \xi(\nu) \varphi \mu d\mu \quad (z = h). \quad (51)$$

Уравнение переноса длинноволнового излучения в атмосфере запишем в следующем виде:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi \alpha_{s\nu} \gamma(\mu, \mu') = f, \quad (52)$$

где f – собственное излучение атмосферы, определяемое в виде

$$f = \frac{1}{2} \alpha_{cv} \eta_\nu(T), \quad (53)$$

где $\eta_\nu(T)$ определяется формулой Планка

$$\eta_\nu(T) = 2\pi \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

со следующей нормировкой:

$$\int_0^\infty \eta_\nu(T) d\nu = 2\pi\sigma T^4,$$

где σ – постоянная Больцмана; h – постоянная Планка; c – скорость света в пустоте; kT – внутренняя энергия среды.

В качестве условий на верхней границе атмосферы возьмем

$$\varphi(h, \nu) = 0 \quad \text{при} \quad \mu < 0 \quad (54)$$

и на поверхности Земли

$$\frac{1}{2} \varphi(0, \mu) = \alpha_\nu \int_{-1}^0 d\mu' \mu' \varphi(0, \mu') + \frac{1}{2} \eta_\nu(T_0) \quad \text{при} \quad \mu > 0, \quad (55)$$

где T_0 – температура поверхностного слоя Земли. Существенным отличием рассматриваемой задачи от случая переноса коротковолновой радиации является то, что граничное условие на поверхности Земли (55) теперь оказалось неоднородным вследствие учета собственного излучения Земли. Если T_0 задано, то прямая задача (52), (54), (55) поставлена полностью, а ее решение может быть выполнено при помощи хорошо разработанных методов.

Переходим далее к формулировке сопряженной задачи по отношению к функционалу J_p . Для этого рассмотрим основное сопряжение

$$(\varphi^*, L\varphi) = (\varphi, L^* \varphi_p^*), \quad (56)$$

где φ и φ^* – функции из соответствующих фиксированных пространств.

Пусть $\varphi^* = \varphi_p^*$, а φ – решение задачи (52), (54), (55). Рассмотрим выражение

$$(\varphi_p^*, L\varphi) = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \int_0^h \varphi_p^* \times \\ \times \left[\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi \alpha_{s\nu} \gamma(\mu, \mu') \right]. \quad (57)$$

Первое слагаемое перепишем в виде

$$\int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \int_0^h dz \varphi_p^* \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \mu \varphi_p^* \varphi \Big|_{z=0}^{z=h} - \\ - \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \int_0^h dz \varphi \mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z}. \quad (58)$$

Переставляя порядки интегрирования в остальных членах соотношения (57), получим

$$(\varphi_p^*, L\varphi) = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \int_0^h dz \varphi \left[-\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_{s\nu}}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi_p^* \gamma_\nu(\mu, \mu') \right] + \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \mu \varphi_p^* \varphi \Big|_{z=0}^{z=h}. \quad (59)$$

Введем далее обозначение

$$L^* \varphi_p^* = -\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* - \frac{\alpha_{s\nu}}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi_p^* \gamma_\nu(\mu, \mu'). \quad (60)$$

Тогда соотношение (59) записывается в виде

$$(\varphi^*, L\varphi) = (\varphi, L^* \varphi_p^*) + \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \mu \varphi_p^* \varphi \Big|_{z=0}^{z=h}. \quad (61)$$

Потребуем теперь, чтобы выполнялось равенство

$$L^* \varphi_p^* = 0. \quad (62)$$

Тогда с учетом уравнения (52) соотношение (61) перепишем в виде

$$(\varphi_p^*, f) = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \mu \varphi_p^* \varphi \Big|_{z=0}^{z=h}. \quad (63)$$

Выражение (63) представим в виде

$$(\varphi_p^*, f) = a - b, \quad (64)$$

где

$$a = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \mu \varphi_p^*(h, \mu) \varphi(h, \mu),$$

$$b = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \varphi(0, \mu).$$

Рассмотрим выражение для величины b в следующем виде:

$$b = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^0 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \varphi(0, \mu) + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \varphi(0, \mu). \quad (65)$$

Вспомним теперь, что решение $\varphi(0, \mu)$ удовлетворяет граничному условию (55), которое представим в виде

$$\varphi(0, \mu) = 2a_\nu \int_{-1}^1 d\mu' \mu' \varphi(0, \mu') + \eta_\nu(T_0) \quad \text{при} \quad \mu > 0. \quad (66)$$

Подставим выражение (66) во второй интеграл формулы (65). Тогда получим

$$b = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^0 d\mu \varphi(0, \mu) \left[\varphi_p^*(0, \mu) + 2a_\nu \int_0^1 d\mu' \mu' \varphi_p^*(0, \mu') \right] +$$

$$+ \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \eta_\nu(T_0). \quad (67)$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\frac{1}{2} \varphi_p^*(0, \mu) = -a_\nu \int_0^1 d\mu' \mu' \varphi_p^*(0, \mu). \quad (68)$$

Тогда получим

$$b = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \eta_\nu(T_0). \quad (69)$$

Рассмотрим выражение для величины

$$a = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^0 d\mu \mu \varphi_p^*(h, \mu) \varphi(h, \mu) + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(h, \mu) \varphi(h, \mu). \quad (70)$$

Из условия (54) можно считать, что первый интеграл равен нулю, поскольку $\varphi(h, \mu) = 0$. Потребуем, чтобы второй интеграл в формуле (70) был равен функционалу J_p , т. е.

$$J_p = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(h, \mu) \varphi(h, \mu). \quad (71)$$

Чтобы выражение (71) совпало с (51), необходимо положить

$$\varphi_p^*(h, \mu) = g(\mu) \xi(\nu).$$

С учетом изложенного выше выражение (64) будет иметь вид

$$(\varphi_p^*, f) = J_p - \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \eta_\nu(T_0),$$

откуда непосредственно следует, что

$$J_p = (\varphi_p^*, f) + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \eta_\nu(T_0),$$

или в развернутом виде

$$J_p = \frac{1}{2} \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \varphi_p^* \alpha_{c\nu} \eta_\nu(T) + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \eta_\nu(T_0). \quad (72)$$

Итак, сопряженная задача по отношению к функционалу будет иметь вид

$$-\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* - \frac{\alpha_{s\nu}}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi_p^* \gamma_\nu(\mu, \mu') = 0,$$

$$\varphi_p^*(h, \mu) = g(\mu) \xi(\nu) \quad \text{при} \quad \mu > 0; \quad (73)$$

$$\frac{1}{2} \varphi_p^*(0, \mu) = -a_\nu \int_0^1 d\mu' \mu' \varphi_p^*(0, \mu') \quad \text{при} \quad \mu < 0.$$

Причем функционал J_p вычисляется при помощи одной из двух следующих формул:

$$J_p = \int_0^h dz \int_0^1 \xi(\nu) \varphi(h, \nu) \mu d\mu,$$

$$J_p = \frac{1}{2} \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \varphi_p^* \alpha_{c\nu} \eta_\nu(T) + \\ + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \eta_\nu(T_0). \quad (74)$$

Предположим теперь, что функционалы (74) соответствуют стандартным характеристикам температурного поля в атмосфере. Рассмотрим возмущенное состояние атмосферы, характеризующееся отклонением температуры от стандартного состояния. В формулах для функционалов это отразится на том, что они несколько изменяют свою величину:

$$J_p + \delta J_p = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \xi(\nu) \varphi'(h, \mu) \mu d\mu,$$

$$\begin{aligned}
J_p + \delta J_p = & \frac{1}{2} \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \varphi_p^* \alpha_{c\nu} \eta_\nu(T + \delta T) + \\
& + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \eta_\nu(T_0 + \delta T_0).
\end{aligned} \tag{75}$$

Воспользуемся второй формулой (75). Исключая J_p при помощи второй формулы (74), получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \varphi_p^* \alpha_{c\nu} \delta \eta_\nu(T) + \\
& + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \delta \eta_\nu(T_0) = \delta J_p,
\end{aligned} \tag{76}$$

где

$$\delta \eta_\nu(T) = \eta_\nu(T + \delta T) - \eta_\nu(T). \tag{77}$$

Поскольку отклонения температуры от стандартного распределения, как правило, не превышает 10–20% от абсолютной температуры, то можно воспользоваться разложением функции $\eta_\nu(T + \delta T)$ в ряд Тейлора и ограничиться двумя первыми членами. Тогда приближенно будем иметь

$$\eta_\nu(T + \delta T) = \eta_\nu(T) + \left(\frac{\partial \eta_\nu}{\partial T} \right) \delta T.$$

Отсюда

$$\delta \eta_\nu(T) = \left(\frac{\partial \eta_\nu}{\partial T} \right) \delta T. \tag{78}$$

Подставляя выражение (78) в формулу (76), получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \varphi_p^* \alpha_{c\nu} \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T} \delta T + \\
& + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T_0} \delta T_0 = \delta J_p.
\end{aligned} \tag{79}$$

Таким образом, формула (79) позволяет связать вариации функционала δJ_p с вариациями температуры. Формулу (79) удобно переписать в следующем виде:

$$\int_0^h \delta T(z) \psi(z) dz + \Psi \delta T_0 = \delta J_p, \quad (80)$$

где

$$\psi(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \varphi_p^* \alpha_{c\nu} \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T}, \quad \Psi = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \varphi_p^*(0, \mu) \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T_0}. \quad (81)$$

Предположим, что на спутнике имеются N приборов, которые регистрируют различные характеристики длинноволновой радиации. Тогда имеем N функционалов

$$J_{p_n} = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^0 \xi_n(\nu) \varphi(h, \mu) \mu d\mu. \quad (82)$$

Тогда получим N уравнений вида (80):

$$\int_0^h \delta T(z) \psi_n(z) dz + \Psi_n \delta T_0 = \delta J_{p_n}. \quad (83)$$

Здесь ψ_n и Ψ_n определяются при помощи формул (81), где функцию φ_p^* следует заменить на $\varphi_{p_n}^*$.

Таким образом, приходим к системе уравнений для определения отклонений δT . Поскольку системы уравнений (83) и (38) формально эквивалентны друг другу, для решения системы (83) применим методы, уже разработанные применительно к решению системы (38). В результате приходим к решению обратной задачи для поля температуры.

Следует обратить внимание на некоторые детали расчета. А именно: поскольку функция $\psi_n(z)$ и величины Ψ выражаются только через решения невозмущенных сопряженных уравнений, то задача для $\varphi_{p_n}^*$ решается один раз при заданных функциях $\xi_n(\nu)$. Здесь нет необходимости использовать метод последовательных приближений, который

был необходим при решении обратных задач атмосферной оптики. Даже величина $\frac{\partial \eta_\nu}{\partial T}$ может быть затабулирована при фиксированных значениях стандартных температур. В том случае, когда

$$\xi_n(\nu) = \xi_n \delta(\nu - \nu_n),$$

задача становится монохроматической и все интегрирования по ν исключаются.

В заключение отметим, что одновременно с вариациями температуры может возникнуть необходимость учета вариаций других характеристик атмосферы, например, плотности водяного пара и др.

В этом случае можно сначала решить обратную задачу, аналогичную рассмотренной для атмосферной оптики, найти вариации плотностей субстанций, а следовательно, вид невозмущенного уравнения для стандартного распределения температуры. Для найденных операторов решается задача нахождения $\varphi_{p_n}^*$, а затем при помощи формул (83) ставится и решается обратная задача.

4. Уравнение для ценности информации для метеорологических спутников

В предыдущих пунктах были введены сопряженные функции, которыми мы широко пользовались при постановке обратных задач. Ввиду особой важности этих функций остановимся на их качественном анализе более подробно. Значение сопряженных функций особенно наглядно проявляется при изучении формул теории возмущений. С этой целью рассмотрим формулу (36) при некоторых упрощающих предположениях. А именно: будем считать, что задача монохроматическая, рассеяние излучения отсутствует и функция $\varphi' \cong \varphi$ не зависит от μ . Тогда формулы (36), (37) представляются в виде

$$\int_0^h \delta\alpha(z) \varphi(z) \varphi_p^*(z) dz = -\delta J_p, \quad (84)$$

где

$$\varphi(z) = \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu) dz, \quad \varphi_p^*(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi_p^*(z, \mu) dz. \quad (85)$$

Заметим, что в формулу (84) входит уже не интенсивность излучения, а поток.

Проанализируем формулу (84). Очевидно, величина $\delta\alpha\varphi$ описывает число актов поглощения радиации на единицу высоты атмосферы.

Пронормируем величину $\varphi_p^*(z)$ следующим образом:

$$\int_0^h \varphi_p^*(z) dz = 1. \quad (86)$$

Это всегда можно сделать подходящей нормировкой J_p , т. е. вместо J_p рассматривать cJ_p , где c – константа, которую можно выбирать произвольно. При такой замене, очевидно, изменится только масштаб функционала.

Формула (84) указывает на следующий факт: чем больше произойдет актов поглощения радиации, тем меньше будет функционал J_p , поскольку меньшее количество радиации будет зарегистрировано прибором. С учетом нормировки (86) функцию $\varphi_p^*(z)$ можно считать плотностью вероятности. В самом деле, пусть

$$\delta\alpha\varphi = \delta(z - z_0),$$

т. е. произошло полное поглощение радиации при $z = z_0$, а вне никаких дополнительных поглощений не происходит. Тогда формула (84) приводит к выражению

$$\varphi_p^*(z) = -\delta J_p. \quad (87)$$

Формула (87) указывает на тот факт, что

$$|\delta J_p| = \varphi_p^*(z_0),$$

т. е. абсолютное значение вариации функционала равно сопряженной функции. Учитывая нормировку (86), формула (88) интерпретируется следующим образом. Функция $\varphi_p^*(z_0)$ есть вероятность при осуществлении поглощения радиации в точке $z = z_0$ изменения в функционале на величину $\varphi_p^*(z_0)$. Это значит, что вариация функционала будет зависеть от того, какова в этой точке величина φ_p^* .

Если φ_p^* в точке z_0 исчезающе мала, то какие бы акты поглощения в окрестности этой точки ни происходили, они не приведут к существенным изменениям δJ_p , и наоборот, в точках максимума функции φ_p^* даже не очень интенсивные акты поглощений радиации приведут к значительным отклонениям δJ_p . Это значит, что функция φ_p^* может быть интерпретирована как ценность информации в области $0 \leq z \leq h$

по отношению к показанию прибора или, что то же самое, по отношению к функционалу J_p . В тех областях, где функция φ_p^* мала, мала и ценность информации по отношению к показанию прибора, и наоборот.

Разумеется, все сформулированные соображения остаются в силе и в общем случае, когда не делаются какие-либо упрощающие предположения.

Следует, однако, иметь в виду, что хотя ценность информации имеет исключительное значение при планировании экспериментов и интерпретации данных, необходимо еще учитывать абсолютные величины актов взаимодействия радиации со средой, т. е. величины $\delta\alpha\varphi$, которые могут быть большими как раз в области малых значений функции ценности информации. В этом случае необходимо учитывать характер и величину коэффициентов матрицы \mathbf{A}^{-1} в решении (45) с учетом требований, чтобы матрица коэффициентов \mathbf{A} была хорошо обусловлена.

Аналогичный анализ может быть выполнен и при помощи уравнения (80), с той только разницей, что этот случай является более простым, поскольку в формулу не входит решение основных уравнений, а функции $\psi(z)$ и величины Ψ связаны с изменениями температуры и являются ценностями информации по отношению к своему функционалу. В рассматриваемой задаче функция ценности информации является единственной существенной характеристикой задачи.

Особое значение функции ценности информации по отношению к соответствующим функционалам имеют при планировании программы исследований при помощи метеорологических спутников.

В этом случае необходимо провести серию решений уравнений для ценности информации и дать анализ независимой информации, получаемой при помощи различных приборов.

Если функции $\varphi_{p_n}^*$ в некоторых двух задачах будут отличаться мало, то это значит, что ценность информации в обеих задачах одна и та же и, следовательно, нет смысла рассматривать два прибора, а можно ограничиться только одним. Если же разница в функциях $\varphi_{p_n}^*$ будет существенной, по крайней мере на части интервала $0 \leq z \leq h$, то второй прибор дает нам новую информацию по сравнению с первым прибором.

Такая информация будет полезной независимой информацией. Сопоставление ценности информации следует производить в условиях нормировки функций $\varphi_{p_n}^*$, т. е.

$$\int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \varphi_{p_n} = 1,$$

и рассматривать не сами функции $\varphi_{p_n}^*$, а разности $\varphi_{p_n p_m}^* = \varphi_{p_m}^* - \varphi_{p_n}^*$, выбирая из них только линейно независимые. Если функции $\varphi_{p_n p_m}^*$ имеют частичные области максимального значения ценности информации, которые покрывают более или менее равномерно всю область $0 \leq z \leq h$, то соответствующий этим функциям набор функционалов $J_{p_n p_m}$ будет эффективен для решения обратных задач. Если же некоторые области не будут должным образом представлены при анализе, поскольку ценность информации в них будет мала, то обратная задача для таких областей с использованием фиксированных приборов не может быть решена достаточно эффективно. Поэтому следует отыскивать другие функционалы, которые позволяют «осветить» и такие частичные области.

Рассмотренные в настоящей статье методы могут быть использованы в постановке различных прямых и обратных задач метеорологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усачев Л. Н. В сб. Реакторостроение и теория реакторов. Изд-во АН СССР, 1955. С. 376.
2. Кадомцев Б. Б. Докл. АН СССР. 1957. Т. 113, № 3.
3. Марчук Г. И., Орлов В. В. В сб. Нейтронная физика. Госатомиздат, 1961. С. 116.
4. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. Госатомиздат, 1961.
5. Марчук Г. И., Бельская Ж. Н. В сб. Вопросы физики защиты реакторов. Госатомиздат, 1963. С. 99.
6. Абагян А. А., Орлов В. В., Родионов Г. И. В сб. Вопросы физики защиты реакторов. Госатомиздат, 1963. С. 7.
7. Кондратьев К. Я. Лучистая энергия Солнца. Гидрометеиздат, 1954.
8. Кондратьев К. Я., Филиппович О. П. Тепловой режим верхних слоев атмосферы. Гидрометеиздат, 1960.
9. Кондратьев К. Я. Метеорологические спутники. Гидрометеиздат, 1963.

SOLUTION OF INVERSE PROBLEMS IN SATELLITE METEOROLOGY¹⁹

A method is proposed for the determination of meteorological parameters in the underlying surface-atmosphere system using solutions of the adjoint equations of the radiation transfer theory in the **R**-spectrum. This method makes it possible to take the variations of the main absorbing substances in the atmosphere and the emissivity of the surface into account. It may also be used for scanning satellite systems. Modern methods in mathematical statistics and a priori statistical information are used for the parametrization and solution of an inverse problem.

0. Introduction

The general statement of remote sensing problems for the determination of meteorological parameters from artificial satellite data is formulated in [1] for the ultra-violet to infra-red radiation spectrum range. This formulation is based on the theory of adjoint equations and information value equations.

There are many works dedicated to partial problems of determination of the temperature field in the underlying surface-atmosphere system from satellite data in the **R**-spectrum (see, for example, [2–10]). However, these works consider the problem of determination either for the vertical temperature profiles in the atmosphere, for the sea surface temperature or for the vertical humidity profiles. The main part of these works was performed under the assumption that the underlying surface is absolutely black body. Moreover, some works neglect the variations of the transparency function of the atmosphere due to water vapor and aerosols.

The problem is now ripe for the simultaneous determination of both vertical temperature profiles and underlying surface temperature with regard to variations of the main absorbing substances and emissivity of the surface. As we believe, the theory of adjoint equations provides a suitable framework to state such a problem correctly [1, 11, 12].

The present work is a development of the methods published in [1]. We consider an identification problem for meteorological parameters in

¹⁹Equations aux dérivées partielles et applications. Paris: Elsevier, 1998, pp. 667–682. Jointly with A. I. Chavro.

the underlying surface – atmosphere system using satellite measurements in the \mathbf{R} -spectrum for the case of a cloudless atmosphere, that is to say, neglecting the dispersion due to aerosol particles. Unlike in [1], we take into account variations of the main absorbing substances and emissivity of the surface. To construct this method, we use the theory of adjoint equations, methods of mathematical statistics and a priori information about a sought solution.

1. The method

Consider a satellite that records a radiation flux with the help of an infra-red radiometer in the frequency range $\Delta\nu$ with spectral characteristic $\xi(\nu)$ and the direction diagram $g(\mu)$. Then, the flux functional is

$$J_p = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \xi(\nu) g(\mu) \varphi \mu d\mu, \quad z = h, \quad (1)$$

where $\mu = \cos\theta$; θ is an altitude angle; z is a vertical coordinate with the zero at the Earth surface; h is the upper boundary of atmosphere.

We write the transfer equation for infra-red radiation in the case of cloudless atmosphere, when the dispersion may be neglected, in the following form [2, 13]:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi = f, \quad (2)$$

where φ is a radiation intensity with a frequency ν ; α_ν is an absorption coefficient; f is the radiation of atmosphere itself defined as

$$f = \alpha_\nu \eta_\nu(T), \quad (3)$$

where $\eta_\nu(T)$ is determined by the Plank formula:

$$\eta_\nu(T) = 2\pi \frac{h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

with the scaling

$$\int_0^\infty \eta_\nu(T) d\nu = \sigma T^4,$$

where σ is the Boltzman constant; h is the Plank constant; c is the velocity of light in vacuum; kT is the internal energy of a medium.

We choose a boundary condition at upper boundary of atmosphere

$$\varphi(h, \mu) = 0 \quad \text{for } \mu < 0 \quad (4)$$

and at the Earth surface

$$\varphi(0, \mu) = a_\nu(\mu) \int_{-1}^0 d\mu' \mu' \varphi(0, \mu') + \varepsilon_\nu(\mu) \eta_\nu(T_0) \quad \text{for } \mu > 0, \quad (5)$$

where T_0 is the Earth surface temperature, $a_\nu(\mu)$ is a reflection coefficient, and $\varepsilon_\nu(\mu)$ is emissivity of a surface.

The direct problem is thus posed completely.

The main problem (1), (2), (3) may be formulated in the equivalent form:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha \varphi = F, \quad (6)$$

where $F(z, \mu)$ is defined by

$$\begin{cases} f(z) & \text{for } \mu < 0, \\ f(z) - \delta(z) \mu \left[\varepsilon_\nu(\mu) \eta_\nu[T(z)] + a(\mu) \int_{-1}^0 d\mu' \mu' \varphi(z, \mu') \right] & \text{for } \mu > 0. \end{cases} \quad (7)$$

The boundary conditions will be written in this case as follows:

$$\varphi(h, \mu) = 0 \quad \text{for } \mu < 0, \quad (8)$$

$$\varphi(0, \mu) = 0 \quad \text{for } \mu > 0. \quad (9)$$

Signal (1) recorded by a satellite may be written as a functional

$$J_p(\varphi) = \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 p \varphi d\mu, \quad (10)$$

where

$$\begin{aligned} p &= \mu \hat{g}(\mu) \xi(\nu) \delta(z - h), \\ \hat{g}(\mu) &= \begin{cases} g(\mu) & \text{for } \mu > 0, \\ 0 & \text{for } \mu < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

The form of the function p suggests that we may confine ourselves just with positive domain of integration with respect to μ . Therefore, the expression for the functional $J_p(\varphi)$ takes the form

$$J_p(\varphi) = \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_0^1 p\varphi d\mu. \quad (12)$$

It is obvious that the following expression defines an inner product in the phase space under consideration:

$$(\varphi, \varphi^*) = \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \varphi \varphi^* d\mu. \quad (13)$$

Hence we have a relationship

$$J_p(\varphi) = (\varphi, p). \quad (14)$$

Let us now formulate now an adjoint problem related to the functional J_p . We introduce the adjoint equation

$$L^* \varphi_p^* = p$$

and write the Lagrange relation

$$(\varphi_p^*, L\varphi) = (\varphi, L^* \varphi_p^*), \quad (15)$$

where the operator L has the form

$$L = \mu \frac{\partial}{\partial z} + \alpha_\nu$$

and φ and φ_p^* are functions from corresponding spaces. With regard to relationships (6), (14), and (15) the functional J_p can be written also as

$$J_p = (\varphi^*, F). \quad (16)$$

Let φ be a solution to problem (6), (8), (9). Consider the expression

$$(\varphi_p^*, L\varphi) = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \int_0^h dz \varphi_p^* \left[\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi \right]. \quad (17)$$

The first term may be written as

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \int_0^h dz \varphi_p^* \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \mu \varphi_p^* \varphi \Big|_{z=0}^{z=h} - \\ &- \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \int_0^h dz \varphi \mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z}. \end{aligned} \quad (18)$$

In view of (18) expression (17) takes the form

$$\begin{aligned} (\varphi_p^*, L\varphi) &= \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \int_0^h dz \varphi \left[-\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* \right] + \\ &+ \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \mu \varphi_p^* \varphi \Big|_{z=0}^{z=h}. \end{aligned} \quad (19)$$

Now, introduce the notation

$$L^* \varphi_p^* = -\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^*. \quad (20)$$

Then, thanks to (20), relation (19) takes the form

$$(\varphi_p^*, L\varphi) = (\varphi, L^* \varphi_p^*) + \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \mu \varphi_p^* \varphi \Big|_{z=0}^{z=h}. \quad (21)$$

In order to satisfy the Lagrange relation (15), let us require that the second term in formula (21) be equal to zero, i. e.

$$\int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 d\mu \mu \varphi_p^* \varphi \Big|_{z=0}^{z=h} = 0. \quad (22)$$

Expression (22) may be presented in the form

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 \mu \varphi_p^* \varphi \Big|_{z=0}^{z=h} = \\
& = \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^0 d\mu \mu \varphi_p^*(h, \mu) \varphi(h, \mu) - \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^0 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \varphi(0, \mu) + \\
& + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(h, \mu) \varphi(h, \mu) - \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \varphi(0, \mu). \quad (23)
\end{aligned}$$

Keeping in mind boundary conditions (8) and (9), we see that the first and the fourth integrals in (23) are equal to zero. We now require that

$$\varphi_p^*(0, \mu) = 0 \quad \text{for } \mu < 0, \quad (24)$$

$$\varphi_p^*(h, \mu) = 0 \quad \text{for } \mu > 0. \quad (25)$$

The Lagrange relation (15) remains valid under these conditions.

The adjoint problem related to the functional J_p will be written in the form

$$\begin{cases} -\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* = p, \\ \varphi_p^*(0, \mu) = 0 \quad \text{for } \mu < 0, \\ \varphi_p^*(h, \mu) = 0 \quad \text{for } \mu > 0. \end{cases} \quad (26)$$

The form of the function p from (11) leads us to consider two problems instead of problem (26):

$$\begin{cases} -\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* = 0, \\ \varphi_p^*(0, \mu) = 0 \quad \text{for } \mu < 0; \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} -\mu \frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} + \alpha_\nu \varphi_p^* = \delta(z - h) \mu g(\mu) \xi(\nu), \\ \varphi_p^*(h, \mu) = 0 \quad \text{for } \mu > 0. \end{cases} \quad (28)$$

Problem (27) only has trivial solution, i. e.

$$\varphi_p^*(z, \mu) = 0 \quad \text{for } \mu < 0. \quad (29)$$

With regard to relationships (12) and (29), we introduce the following inner product instead of inner product (13)

$$(\varphi, \varphi^*) = \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \varphi \varphi^* d\mu. \quad (30)$$

Let us now solve problem (28). Write equation (28) in the form

$$\frac{\partial \varphi_p^*}{\partial z} - \frac{\alpha_\nu}{\mu} \varphi_p^* = -\delta(z-h)g(\mu)\xi(\nu) \quad (31)$$

and introduce the notations

$$P = -\frac{\alpha_\nu(z)}{\mu}, \\ Q = -\delta(z-h)g(\mu)\xi(\nu).$$

Then a general solution of equation (31) will be written in the form

$$\varphi_p^*(z, \mu) = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

or, with previous notations, as

$$\varphi_p^*(z, \mu) = e^{\frac{1}{\mu} \int \alpha_\nu(x)dx} \left[- \int \delta(x-h)g(\mu)\xi(\nu) e^{-\frac{1}{\mu} \int \alpha_\nu(x)dx} dx + C \right],$$

where C is some constant. For $\mu > 0$ we obtain

$$\varphi_p^*(z, \mu) = e^{\frac{1}{\mu} \int_0^z \alpha_\nu(x)dx} \left[- \int_0^z \delta(x-h)\xi(\nu)g(\mu) e^{-\frac{1}{\mu} \int_0^x \alpha_\nu(t)dt} dx + C \right]. \quad (32)$$

In order to determine the constant C , substitute (32) into boundary condition (28) to obtain

$$e^{\frac{1}{\mu} \int_0^h \alpha_\nu(x)dx} \left[- \int_0^h \delta(x-h)\xi(\nu)g(\mu) e^{-\frac{1}{\mu} \int_0^x \alpha_\nu(t)dt} dx + C \right] = 0.$$

It follows from this relationship that

$$C = \int_0^h \delta(x-h)\xi(\nu)g(\mu) e^{-\frac{1}{\mu} \int_0^x \alpha_\nu(t)dt} dx.$$

We obtain, with regard to property of δ -function a value for the constant

$$C = \xi(\nu)g(\mu) e^{-\frac{1}{\mu} \int_0^h \alpha_\nu(t)dt}. \quad (33)$$

Relationship (12) with regard to (33) takes the form

$$\varphi_p^*(z, \mu) = - \int_0^z \delta(x-h) \xi(\nu) g(\mu) e^{-\frac{1}{\mu} \int_z^x \alpha_\nu(t) dt} dx + \xi(\nu) g(\mu) e^{-\frac{1}{\mu} \int_z^h \alpha_\nu(t) dt}.$$

So, a solution to problem (28) may be expressed in the form

$$\varphi_p^*(z, \mu) = \begin{cases} \xi(\nu) g(\mu) e^{-\frac{1}{\mu} \int_z^h \alpha_\nu(t) dt} & \text{for } z < h, \\ 0 & \text{for } z = h \end{cases} \quad (34)$$

for $\mu > 0$.

Having solved problem (28), the functional J_p may be represented by one of two formulas:

$$J_p = (\varphi, p); \quad J_p = (\varphi_p^*, F),$$

or in more detailed form

$$\begin{aligned} J_p &= \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \xi(\nu) g(\mu) \varphi \mu d\mu \quad \text{for } z = h, \\ J_p &= \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \int_0^h dz \varphi_p^*(z, \mu) \left[\alpha_\nu(x) \eta_\nu(T) - \right. \\ &\quad \left. - \delta(z) \mu (\varepsilon_\nu(\mu) \eta_\nu[T(z)] + a_\nu(\mu) \int_{-1}^0 d\mu' \mu' \varphi(z, \mu')) \right] \quad \text{for } z \neq h. \end{aligned} \quad (35)$$

Let us perform some transformations of the last expression (35). Integrate first with respect to z to obtain

$$\begin{aligned} J_p &= \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \left[\int_0^h \varphi_p^*(z, \mu) \alpha_\nu(z) \eta_\nu(T) dz + \varphi_p^*(0, \mu) \mu (\varepsilon_\nu(\mu) \eta_\nu(T_0) + \right. \\ &\quad \left. + a_\nu(\mu) \int_{-1}^0 d\mu' \mu' \varphi(0, \mu')) \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Introduce the notation

$$U_\nu = \int_{-1}^0 d\mu' \mu' \varphi(0, \mu'), \quad (37)$$

where U_ν represents the radiation flux of atmosphere falling to the Earth surface; we consider it as unknown parameter of problem.

Take into account also that the reflection coefficient $a_\nu(\mu)$ of a surface can be represented in the form

$$a_\nu(\mu) = 1 - \varepsilon_\nu(\mu). \quad (38)$$

Expression (36) with regard to (37) and (38) will be written as

$$J_p = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \left[\int_0^h \varphi_p^*(z, \mu) \alpha_\nu(z) \eta_\nu(T) dz + \varphi_p^*(0, \mu) \mu (\varepsilon_\nu(\mu) \eta_\nu(T_0) + \right. \\ \left. + (1 - \varepsilon_\nu(\mu)) U_\nu) \right]. \quad (39)$$

Now, assume that functional (39) corresponds to standard characteristics of the atmosphere.

It is seen from formula (39) that perturbed state of the system *underlying surface – atmosphere* is determined by deviations from standard values of vertical profiles of temperature $T(z)$, absorption coefficient α_ν , temperature T_0 , and emissivity $\varepsilon_\nu(\mu)$ of underlying surface.

Therefore, functional (39) should change somewhat its value:

$$J_p + \delta J_p = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \left[\int_0^h dz \varphi_p^*(z, \mu) (\alpha_\nu + \delta \alpha_\nu) \eta_\nu(T + \delta T) + \right. \\ \left. + \varphi_p^*(0, \mu) \mu ((\varepsilon_\nu + \delta \varepsilon_\nu) \eta_\nu(T_0 + \delta T_0) + \right. \\ \left. + (1 - (\varepsilon_\nu + \delta \varepsilon_\nu)) (U_\nu + \delta U_\nu) \right). \quad (40)$$

One can rewrite formula (40) in the form

$$\begin{aligned}
J_p + \delta J_p = & \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \left[\int_0^h dz \varphi_p^*(z, \mu) (\alpha_\nu \eta_\nu(T) + \right. \\
& + \alpha_\nu \delta \eta_\nu(T) + \eta_\nu(T) \delta \alpha_\nu + \delta \eta_\nu(T) \delta \alpha_\nu) + \varphi_p^*(0, \mu) \mu (\varepsilon_\nu \eta_\nu(T_0) + \\
& + \varepsilon_\nu \delta \eta_\nu(T_0) + \eta_\nu(T_0) \delta \varepsilon_\nu + \delta \varepsilon_\nu \delta \eta_\nu(T_0) + U_\nu + \delta U_\nu - \varepsilon_\nu U_\nu - \\
& \left. - \varepsilon_\nu \delta U_\nu - U_\nu \delta \varepsilon_\nu - \delta \varepsilon_\nu \delta U_\nu) \right], \tag{41}
\end{aligned}$$

where

$$\delta \eta_\nu(T) = \eta_\nu(T + \delta T) - \eta_\nu(T). \tag{42}$$

Let us exclude formula (39) from (41) neglecting the values of the second order of smallness to obtain

$$\begin{aligned}
\delta J_p = & \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \left[\int_0^h dz \varphi_p^*(z, \mu) (\alpha_\nu \delta \eta_\nu(T) + \eta_\nu(T) \delta \alpha_\nu + \right. \\
& \left. + \varphi_p^*(0, \mu) \mu (\varepsilon_\nu \delta \eta_\nu(T_0) + (\eta_\nu(T_0) - U_\nu) \delta \varepsilon_\nu + (1 - \varepsilon_\nu) \delta U_\nu) \right]. \tag{43}
\end{aligned}$$

It is possible, since temperature deviations from standard value do not exceed usually 10–20% of absolute temperature, to expand the function $\eta_\nu(T + \delta T)$ into the Taylor series up to the first two members. Then we have

$$\eta_\nu(T + \delta T) = \eta_\nu(T) + \left(\frac{\partial \eta_\nu}{\partial T} \right) \delta T.$$

From here, with regard to (42), we obtain

$$\delta \eta_\nu(T) = \left(\frac{\partial \eta_\nu}{\partial T} \right) \delta T. \tag{44}$$

In the same way, one may represent also variations of emissivity of underlying surface. In fact, if we take the problem with only water surface, then for fixed frequency ν and vision angle ϑ the emissivity is rather smooth function of water surface wind velocity v [14, 15]. So, we should consider the emissivity as a function of three variables: ν , μ , and v . The analytical form of the function $\varepsilon_\nu(\mu, v)$ can be found using the data of works [14, 15].

Assume further that a value of the function $\varepsilon_\nu(\mu, v)$ corresponds to standard value of the wind velocity. Then it is possible to represent the emissivity for a perturbed value of the wind velocity as the Taylor expansion leaving there the first two members. As a result, we obtain

$$\varepsilon_\nu(\mu, v + \delta v) = \varepsilon_\nu(\mu, v) + \left(\frac{\partial \varepsilon_\nu(\mu, v)}{\partial v} \right) \delta v.$$

Hence,

$$\delta \varepsilon_\nu(\mu, v) = \left(\frac{\partial \varepsilon_\nu(\mu, v)}{\partial v} \right) \delta v. \quad (45)$$

Let us suppose also that the absorption coefficient $\alpha_\nu(z)$ is determined by the absorption of gases CO_2 , H_2O , and aerosols. In this case, $\alpha_\nu(z)$ can be represented as

$$\alpha_\nu(z) = \sum_{l=1}^3 k_l(\nu, z) \rho_l(z), \quad (46)$$

where $k_l(\nu, z)$ is the absorption coefficient per unit of density of l -th substance, and $\rho_l(z)$ is a density of this substance. Variations of the absorption coefficient $\alpha_\nu(z)$ will be determined by the density variations $\rho_l(z)$, i. e.

$$\delta \alpha_\nu(z) = \sum_{l=1}^3 k_l(\nu, z) \delta \rho_l(z). \quad (47)$$

By (44), (45), and (47), formula (43) can be written as

$$\begin{aligned} \delta J_p = & \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \varphi_p^*(z, \mu) \alpha_\nu \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T} \delta T(z) + \\ & + \sum_{l=1}^3 \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \varphi_p^*(z, \mu) \eta_\nu(T) k_l(\nu, z) \delta \rho_l(z) + \\ & + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \varepsilon_\nu(\mu) \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T_0} \delta T_0 + \\ & + \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) (\eta_\nu(T_0) - U_\nu) \frac{\partial \varepsilon_\nu(\mu, v)}{\partial v} \delta v + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) (1 - \varepsilon_\nu(\mu)) \delta U_\nu. \quad (48)$$

This formula connects variations of the functional δJ_p with variations of vertical profiles of temperature and absorbing substances of atmosphere, temperature of underlying surface, and water surface wind velocity. It is convenient to write formula (48) in the following form

$$\begin{aligned} & \int_0^h \delta T(z) \psi(z) dz + \sum_{l=1}^3 \int_0^h \delta \rho_l(z) \chi_l(z) dz + \\ & + \Psi \delta T_0 + \Phi \delta v + \phi \delta U_\nu = \delta J_p, \end{aligned} \quad (49)$$

where

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(z) = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \varphi_p^*(z, \mu) \alpha_\nu \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T}, \\ \chi_l(z) = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \varphi_p^*(z, \mu) \eta_\nu(T) k_l(\nu, z), \\ \Psi = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) \varepsilon_\nu(\mu) \frac{\partial \eta_\nu}{\partial T_0}, \\ \Phi = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) (\eta_\nu(T_0) - U_\nu) \frac{\partial \varepsilon_\nu(\mu, v)}{\partial v}, \\ \phi = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \mu \varphi_p^*(0, \mu) (1 - \varepsilon_\nu(\mu)). \end{array} \right. \quad (50)$$

While solving an inverse problem we should pass to discrete formulation and restore rather complicated structures of the functions $\delta T(z)$ and $\delta \rho_l(z)$; therefore, this approach involves the measurements of a great number of functionals which may result in ill-conditioned system of equations. In this case one is advised to do the following.

Represent the function $\delta T(z)$ as an expansion with respect to empirical orthogonal functions $\{\omega_j(z)\}_{j=1}^\infty$ [16]

$$\delta T(z) = \sum_{j=1}^\infty x_j \omega_j(z), \quad (51)$$

where $\omega_j(z)$ are eigenfunctions of an autocorrelated function

$$\Sigma_T(z, z') = \overline{\delta T(z) \cdot \delta T(z')} \quad (52)$$

that is considered as a symmetric kernel of the Fredholm integral equation

$$\lambda\omega(z) = \int_0^h \Sigma_T(z, z')\omega(z')dz', \quad (53)$$

where λ are eigenvalues of the kernel $\Sigma_T(z, z')$ and x_j are expansion coefficients:

$$x_j = \int_0^h \delta T(z)\omega_j(z)dz. \quad (54)$$

Let us enumerate the eigenfunctions $\omega_j(z)$ in order of decreasing eigenvalues λ_j . Then, as was shown in [16], the fields of meteorological parameters may be sufficiently well approximated by a small number of the first (the most informative) orthonormed functions $\omega_j(z)$.

Let us suppose that for an assigned approximation accuracy we may confine ourselves in relationship (51) with K members of expansion. Usually this number does not exceed 3–4. then relationship (51) turns into approximate equality

$$\delta T(z) \approx \sum_{j=1}^K x_j \omega_j(z). \quad (55)$$

Variations of vertical profiles of absorbing substances $\delta\rho_l(z)$ may be also represented as an expansion with respect to empirical orthogonal functions $\{e_k^{(l)}(z)\}$ where l is a number of substance, k is a number of function; we may confine ourselves with N members of expansion. Then we obtain

$$\delta\rho_l(z) \approx \sum_{k=1}^N \gamma_k^{(l)} e_k^{(l)}(z), \quad l = 1, 2, 3, \quad (56)$$

where $\gamma_k^{(l)}$ are expansion coefficients

$$\gamma_k^{(l)} = \int_0^h \delta\rho_l(z) e_k^{(l)}(z) dz \quad (57)$$

with respect to the basis $e_k^{(l)}(z)$.

Substitute (55) into (56) formula (49) to obtain

$$\sum_{j=1}^K x_j \int_0^h \omega_j(z) \psi(z) dz + \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^N \gamma_k^{(l)} \int_0^h e_k^{(l)}(z) \chi_l(z) dz + \Psi \delta T_0 + \Phi \delta v + \phi \delta U_\nu = \delta J_p. \quad (58)$$

Let us introduce the notations:

$$\begin{cases} b_j &= \int_0^h \omega_j(z) \psi(z) dz, \\ y_\beta &= \gamma_k^{(l)}, \\ d_\beta &= \int_0^h e_k^{(l)}(z) \chi_l(z) dz, \end{cases} \quad (59)$$

where $\beta = k + 3(l - 1)$ takes the values from 1 to $M = 3N$.

By formulas (59), equation (58) takes the form

$$\sum_{j=1}^K x_j b_j + \sum_{\beta=1}^M y_\beta d_\beta + \Psi \delta T_0 + \Phi \delta v + \phi \delta U_\nu = \delta J_p. \quad (60)$$

Let us assume that a satellite has an \mathbf{R} radiometer that is capable of recording the eigen radiation of the system *underlying surface – atmosphere* in n spectrum intervals, or for a fixed frequency but for various vision angles. A variant is possible also when they use a number of frequencies and several angles, i. e. spectral-angular method. Then we have n functionals

$$J_{p_i} = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \xi_i(\nu) g_i(\mu) \varphi(h, \mu) \mu d\mu, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (61)$$

We obtain in this case n equations in the form (60)

$$\sum_{j=1}^K x_j b_{ij} + \sum_{\beta=1}^M y_\beta d_{i\beta} + \Psi_i \delta T_0 + \Phi_i \delta v + \phi_i \delta U_{\nu_i} = \delta J_{p_i}, \quad (62)$$

where b_{ij} , $d_{i\beta}$, Ψ_i , Φ_i are determined by formulas

$$\begin{cases} b_{ij} = \int_0^h \omega_j(z) \psi_i(z) dz, \\ d_{i\beta} = \int_0^h e_k^{(l)}(z) \chi_{il}(z) dz, \end{cases} \quad (63)$$

and (50) for $\varphi_p^* = \varphi_{p_i}^*$.

Let us notice that since the functions $\psi_i(z)$, $\chi_{il}(z)$ and the values Ψ_i , Φ_i , ϕ_i are expressed only through the solutions of unperturbed adjoint equations, then problems for $\varphi_{p_i}^*$ are solved just once for assigned functions $\xi_i(\nu)$ and $g_i(\mu)$. The values $\partial\eta_\nu/\partial T$ and $\partial\varepsilon_\nu/\partial v$ can be also tabulated for fixed values of standard temperature and wind velocity.

So we arrive at a system of linear equations for the determination of expansion coefficients of functions $\delta T(z)$ and $\delta\rho_l(z)$ with respect to empirical orthogonal functions and parameters δT_0 , δv , δU_ν . Having solved this system we obtain values of variations of underlying surface temperature and water surface wind velocity and can restore by formulas (55) and (56) the values of functions $\delta T(z)$ and $\delta\rho_l(z)$, i. e. variations of vertical profiles of temperature and absorbing substances of atmosphere.

Write down the system of linear equations (62) in a matrix form

$$c = Ax, \quad (64)$$

where $c = (J_{p_1}, J_{p_2}, \dots, J_{p_n})^*$ is a vector of functionals measured by a satellite; $x = (x_1, x_2, \dots, x_K, y_1, y_2, \dots, y_M, \delta T_0, \delta v, \delta U_\nu)^*$ is a vector of unknown parameters; $A = \|a_{ij}\|$ is a matrix $n \times m$ ($m = K + M + 3$) with elements determined by relationships (50) and (63) for $\varphi_p^* = \varphi_{p_i}^*$.

If the matrix A is invertible, then system (64) can be solved by conventional methods.

Let us notice, though, that in a real experiment, relation (64) will never be satisfied exactly since the functionals J_{p_i} (and, therefore, δJ_{p_i}) are always measured with some error.

Then, equation (64) should be written as

$$c = Ax + \nu, \quad (65)$$

where ν is an error vector caused by the errors of measurements of the functionals J_{p_i} , approximation errors of the functions $\delta T(z)$ and $\delta\rho_l(z)$ with finite series (55), (56) and parameterization errors of problem.

In this case, we cannot obtain an exact solution for the vector x and should confine ourselves with an estimate of this vector.

Since we are dealing with random vectors c , x , we may apply methods for obtaining an estimate of random vectors with minimal mean square error [17, 18].

To solve the inverse problem successfully, we need to select spectral characteristics ξ_i of separate channels of **R**-radiometer such that the system of equations (64) would be well-posed and the functionals J_{p_i} would carry an information about various layers of atmosphere.

Usually they take the absorption band CO_2 15 mcm [2] for spectral interval in order to solve the restoration problem for vertical profile of temperature. This idea is based on the physical fact that the radiation in various parts of chosen band is generated by different layers of atmosphere and, therefore, is determined by temperature of those layers. This correlation is rather univalent, since relative concentration of CO_2 is practically constant and well known up to very high altitudes. In this case, variations of concentration of may be neglected in the first approximation.

In our problem, we are going to determine, aside from temperature profile of atmosphere, a temperature of underlying surface; therefore, the measurements in the CO_2 band should be supplemented with a measurement in one of transparency “windows” in the 8–12 mcm band. Spectral intervals in the CO_2 band may be selected as advised in [9] at frequencies with centers in 677.5, 691, 697, 703, and 709 cm^{-1} and in the frequency “window” 899 cm^{-1} with a resolution 5–7 cm^{-1} . Note that it is possible to select, instead of various frequencies, various vision angles or choose an optimal combination of measurements on various frequencies and various vision angles.

In order to take into account variations of water vapor and aerosol concentrations, and wind velocity too, one should select additional spectral intervals or use an information about these parameters obtained by other measurement systems. For example, wind velocity can be measured with sufficient accuracy with the help of scatterometer in the microwave range of spectrum.

Let us notice that variations of emissivity $\varepsilon_\nu(\mu)$ may be neglected when the measurements of the functionals J_{p_i} are carried out with the help of multi-channel **R**-radiometer directed into nadir with sufficiently narrow direction diagram ($< 10^\circ$) and the problem is solved for the case of water surface, since for the vision angles close to vertical

(< 10°) there is practically no dependence of $\varepsilon(\mu)$ on the degree of water surface perturbation, that is, on wind velocity [14, 15]. However, lately they install on satellites scanning systems capable of performing the measurements in a rather broad strip of survey in order to construct meteorological field mass on global scale. In this case, measurements will be performed for angles ϑ different from zero. Since the emissivity of water surface for the vision angles $\vartheta > 10^\circ$ depends on degree of perturbation, i. e. on wind velocity, then for such measurement conditions we should take into account the variations $\varepsilon_\nu(\mu)$ as dependent on wind velocity v .

The measurement vector in equation (65) consists of a set of unique measurements. Therefore, the question arises of what impact of each measurement on the result and the error of interpretation. An answer to this question may be found investigating a value of information of measurement channels [1].

To conclude, note that if we take into account in our problem only variations of water vapor and aerosol, since CO_2 concentration stays sufficiently constant, and confine ourselves with 3–4 member in the expansion of vertical density distribution of these substances and take into account variations of wind velocity, then the number of sought parameters in combined problem may be about 13–14. In presence of such number of measurements of linearly independent functionals, the problem of determination of a temperature field for the system *underlying surface – atmosphere*, with regard to variations of densities of absorbing substances and emissivity of a surface, becomes quite solvable.

REFERENCES

1. Marchuk G. I. Equation for the Value of Information from Meteorological Satellites and Statement of Inverse Problems // Space Research. 1964. V. 2, Iss. 3. Pp. 462–477. (In Russian.)
2. Malkevich M. C. Optical Investigations of Atmosphere from Satellites. M.: Nauka, 1973. 304 p. (In Russian.)
3. Chavro A. I. Physical Bases and Methods for the Determination of Sea Surface Temperature from Satellites. M.: ONM USSR AS, 1990. 174 p. (In Russian.)
4. Knurenko A. B., Pyt'ev Yu. P., Chavro A. I. Measurement Reduction Method in the Problem of Determination of SST with Remote Sensing in IR Spectrum Range // Investigation of Earth from Space, 1991. No. 6. Pp. 26–34. (In Russian.)

5. Kaplan L. D. Inference of Atmospheric Structure from Remote Radiation Measurements // J. Opt. Soc. America. 1959. V. 49, No. 10.

6. Yamamoto G. Numerical Method for Estimating the Stratospheric Temperature Distribution from Satellite Measurements in the CO_2 band // J. Meteorology. 1961. V. 18, No. 5.

7. Malkevich M. C., Tatarski V. I. Determination of Vertical Distribution of Atmosphere Temperature by Spectrum of Outgoing Radiation in the Absorption band of Carbon Dioxide // Space Research. 1965. V. 3, No. 3.

8. Kozlov V. P. On the Restoration of Altitude Temperature Profile by Spectrum of Outgoing Radiation // Izvestia of USSR AS. Physics of Atmosphere and Ocean. 1966. V. 2, No. 2. Pp. 137–148. (In Russian.)

9. Hilleary D. T., Wark D. Q., James D. G. An Experimental Determination of the Atmospheric Temperature Profile by Indirect Means // Nature. 1965. V. 205. 4970 p.

10. Pokrovski O. M. Optimization of Meteorological Sensing of Atmosphere from Satellites. L.: Gidrometeoizdat, 1984. 264 p. (In Russian.)

11. Marchuk G. I. On Statement of Some Inverse Problems // Doklady of USSR AS. 1964. V. 156, No. 3. Pp. 503–506. (In Russian.)

12. Marchuk G. I. Methods of Computational Mathematics. M.: Nauka, 1989. 618 p. (In Russian.)

13. Kondrat'ev K. Ya. Radian Energy of Sun. L.: Gidrometeoizdat, 1954. (In Russian.)

14. Masuda K., Takashima T., Takayama Y. Emissivity of Pure and Sea Waters for the Model Sea Surface in Infrared Window Regions // Remote Sensing of Environment. 1988. V. 24. Pp. 313–329.

15. Takashima T., Takayama Y. Emissivity and Reflectance of the Model Sea Surface for the Use of AVHRR data of NOAA Satellites // Papers in Meteorology and Geophysics. 1981. V. 32, No. 4. Pp. 267–274.

16. Obukhov A. M. On Statistically Orthogonal Expansions of Empirical Functions // Izvestia of USSR AS. Ser. Geophys. 1960. No. 3. Pp. 432–439. (In Russian.)

17. Pyt'ev Yu. P. Mathematical Methods for the Interpretation of Experiment. M.: Vysshaya shkola, 1989. 351 p. (In Russian.)

18. Uspenski A. B. Inverse Problems in Mathematical Physics: Analysis and Planning the Experiments // Mathematical Methods for Planning the Experiments. Novosibirsk: Nauka. 1981. Pp. 199–242. (In Russian.)

МОДЕЛИРОВАНИЕ КЛИМАТА И ЕГО ИЗМЕНЕНИЙ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ²⁰

К важнейшим проблемам современного развития науки относится решение задачи прогноза изменений климата. Согласно оценкам межправительственной группы экспертов по изменению климата (МГЭИК, IPCC – Intergovernmental Panel on Climate Change) в последние десятилетия значительный вклад в эти изменения вносит антропогенное воздействие [1]. К нему, прежде всего, относится сжигание ископаемого топлива, приводящее к изменению концентрации углекислого газа в атмосфере, изменение концентрации малых газовых примесей, контролирующей концентрацию озона в атмосфере, вырубка лесов, приводящая к изменению альбедо и процессу опустынивания, и многие другие воздействия. Не менее важна и естественная изменчивость климата, которая может также вносить существенный вклад в общую картину изменений климата. К наиболее значимым проявлениям собственной изменчивости климатической системы Земли следует отнести такие явления, как Эль-Ниньо – Южное колебание, Северо-Атлантическое колебание, Арктическая осцилляция. Эти явления оказывают существенное влияние на текущее состояние атмосферы и океана и могут изменять свою интенсивность и повторяемость на фоне изменений климата, вызванных внешними воздействиями.

Математически климат определяется как статистический ансамбль состояний, принимаемый климатической системой за достаточно большой интервал времени (см., например, [2]). Согласно Всемирной метеорологической организации, классический период осреднения составляет 30 лет. В общем случае под ансамблем понимается не только множество состояний, но и некоторая вероятностная мера, заданная на этом множестве и определяющая вероятность того, что система может находиться на некотором подмножестве данного множества [1]. На проблеме определения климата следует остановиться более подробно, так как масса дискуссий о климате вызывается тем, что люди

²⁰Вестник Российской академии наук, 2012, т. 82, № 3, с. 227–236. В. П. Дымников, В. Н. Лыков, Е. М. Володин

имеют в виду разные его дефиниции. Вышеприведенное определение подразумевает, что к климатическим характеристикам относятся любые параметры, осредненные по вероятностной мере (статистические характеристики). В частности, если рассматривать прогноз погоды как расчет траектории системы на конечном промежутке времени, а под предсказуемостью траектории понимать характерное время сходимости локализованного начального распределения точек в фазовом пространстве, характеризующего ошибки исходного состояния, к равновесному (климатическому) распределению, то эта характеристика, усредненная по всему ансамблю начальных данных, будет характеристикой климатической. Ниже будет показано, что это характерное время определяет и чувствительность системы к малым внешним воздействиям. В этом смысле понятия «климатическая модель» и «модель прогноза погоды» должны совпадать. В настоящее время при естественных ограничениях, обусловленных большой разницей во временных масштабах интегрирования, эти модели сильно различаются точностью пространственно-временной аппроксимации (выбором пространственного и временного разрешения) и, как следствие, также описанием процессов подсеточного масштаба.

Проблемы воспроизведения и прогноза изменений климата, в отличие от классических проблем физики, имеют одну отличительную особенность: они не допускают прямого физического эксперимента. Более того, в силу специфических особенностей климатической системы (атмосфера и океан есть тонкие пленки) адекватные лабораторные эксперименты представляются также весьма проблематичными. Для детального изучения реальной климатической системы имеется лишь ограниченный набор параметров траектории системы протяженностью в несколько десятков лет, в течение которых проводились достаточно полные натурные измерения. Все перечисленное позволяет сделать вывод, что главным средством изучения как климатической системы в целом, так и протекающих в ней отдельных геофизических процессов является математическое (численное) моделирование, базирующееся на иерархии моделей: от глобальных, основу которых составляют модели общей циркуляции атмосферы и океана, до микромасштабных моделей турбулентности.

Краткий исторический очерк

Исторически математическое моделирование в физике атмосферы началось с постановки и решения задачи о гидродинамическом чис-

ленном прогнозе погоды. Впервые проблема прогноза погоды как задача математики и механики была сформулирована в опубликованной в 1904 г. статье Вильгельма Бьеркнеса [3], где эта проблема рассматривалась как задача с начальными условиями для уравнений гидромеханики бароклинной жидкости. В начале 20-х гг. XX столетия Льюисом Ричардсоном была предложена методология численного прогноза погоды [4]. Поскольку в качестве начальных условий требуется использовать информацию о реальном состоянии атмосферы во всей ее толще, им были также разработаны приборы для атмосферных измерений на высотах, достигающих нескольких километров над подстилающей поверхностью. При построении теории численного прогноза погоды Ричардсон внес большой вклад в исследования турбулентности пограничного слоя атмосферы, радиационных процессов и термодинамики атмосферы.

Однако попытка практического прогноза на один день (на 20 мая 1910 г. для района Нюрнберг – Аугсбург, Германия) численным методом (с помощью существовавших тогда вычислительных средств типа логарифмических линеек и механических калькуляторов) не удалась: рассчитанное приземное давление выросло за 6 часов на 145 гПа, что в 50 раз превысило наблюдавшуюся тенденцию. Это было связано с тем, что: 1) в качестве начальных условий были использованы лишь наземные данные небольшой сети метеорологических станций в Европе; 2) использованный Л. Ричардсоном конечно-разностный метод оказался вычислительно неустойчивым (критерий Куранта – Фридрихса – Леви для соотношения пространственного и временного шагов был установлен позже [5]); 3) уравнения гидродинамики атмосферы, использованные в прогностической схеме, наряду с относительно медленными движениями, ответственными за синоптические процессы, описывали также всевозможные «шумы» типа акустических и гравитационных волн, фильтрация которых в начальный момент времени также не была проведена.

Одна из причин неудачной попытки Л. Ричардсона, а именно связанная с наличием «шумов» в синоптических движениях, была устранена И. А. Кибелем [6]. Предложенный им фундаментальный принцип упрощения уравнений гидродинамики атмосферы (асимптотическое «квазигеострофическое разложение») позволил разработать процедуру фильтрации из решений уравнений несущественных для погоды метеорологических шумов и послужил основой для создания гидродинамической теории краткосрочных прогнозов погоды [7, 8]. Появ-

ление электронно-вычислительных машин позволило в начале 50-х гг. XX в. осуществить [9] первый «практический» численный прогноз погоды (использована модель, основанная на баротропном уравнении вихря). Это была реализация первого этапа плана исследовательской метеорологической группы в Институте перспективных исследований (Принстон, США) по созданию серии моделей, шаг за шагом все лучше и лучше воспроизводящих реальное состояние атмосферы. Важным выводом статьи [9] стало заключение о принципиальной возможности оперативного решения задачи прогноза погоды численными методами с использованием более совершенной (в частности, за счет исключения неарифметических операций) вычислительной техники.

Центральной проблемой теории климата, поставленной в первой половине двадцатого века, стала задача воспроизведения основных характеристик атмосферной циркуляции с помощью математических моделей [10]. В этой работе под математической теорией общей циркуляции атмосферы понималась возможность ее описания с помощью уравнений геофизической гидродинамики. В 1956 г. опубликованы результаты первого численного эксперимента по воспроизведению основных характеристик общей циркуляции атмосферы с помощью двухслойной, квазигеострофической, «полусферной» модели [11], а в начале 60-х гг. появилась первая 9-уровневая модель, основанная на полных (неупрощенных) уравнениях [12]. Параллельно с атмосферными моделями стали разрабатываться и модели общей циркуляции океана [13, 14]. В 1969 г. были опубликованы результаты численных экспериментов с первой совместной моделью общей циркуляции атмосферы и океана [15].

В России разработка гидродинамических климатических моделей началась в 70-х гг. В 1973 г. по инициативе Г. И. Марчука Отделением океанологии, физики атмосферы и географии АН СССР было принято решение о разработке математических моделей климата, основанных на моделях общей циркуляции атмосферы и океана. Упрощенный вариант, включающий модель общей циркуляции атмосферы и описание динамики верхнего слоя океана, был предложен и реализован Зилитинкевичем и др. [16], но он не получил дальнейшего развития. Совместная модель общей циркуляции атмосферы и океана, вычислительная технология которой базировалась на использовании законов сохранения и неявных методов расщепления, была построена в Вычислительном центре СО АН СССР [17–19]. Важной особенностью публикации [19] являлось то, что в этой кни-

ге, по-видимому, впервые проблема моделирования общей циркуляции атмосферы и океана обсуждалась во всем ее многообразии – от физической постановки и ее математической формулировки до вычислительной технологии.

Возможности вычислительной техники того времени и недостаточная деятельность параметризаций физических процессов в атмосфере и океане не позволили добиться необходимого качества воспроизведения климата, отвечающего современным требованиям (в частности, проявлялся так называемый дрейф климата – все нарастающее отклонение расчетных характеристик от наблюдаемых). Тем не менее перечисленные выше работы послужили существенным заделом дальнейшего развития климатического моделирования как в мире в целом, так и в России. Кроме того, было продемонстрировано, что прогресс в развитии вычислительной техники позволяет строить все более точные модели конкретных физических процессов и тем самым не только совершенствовать модели климата и технологии прогноза погоды, но и формулировать новые задачи и, в соответствии с этим, новые требования к вычислительным системам.

Климатические модели в настоящее время переживают период интенсивного развития, определяемого в конечном итоге бурным развитием вычислительной техники. Процесс их создания происходит повсеместно, и этот «параллелизм» необходим для понимания механизмов, ответственных за воспроизведение различных климатических характеристик. Обоснование необходимости такого «параллелизма» следует из того, что обработка результатов численных экспериментов по воспроизведению современного климата в рамках международных программ показала: основные климатические характеристики, полученные с помощью различных моделей и затем усредненные по всему набору моделей, оказываются ближе к реально наблюдаемым, чем характеристики, полученные с помощью отдельных, даже лучших, моделей.

В рамках международных программ AMIP (Atmospheric Model Intercomparison Project), CMIP (Coupled Model Intercomparison Project) и др., описание и результаты которых можно найти в Интернете (см. <http://www-pcmdi.llnl.gov/projects/cmip/index.php>), проводится целенаправленное сравнение моделей, разработанных различными группами исследователей в разных странах мира, как между собой, так и с данными наблюдений [20]. Это дает возможность исследовать систематические ошибки в воспроизведении современного климата

и оценить диапазон возможных его изменений, обусловленных, например, антропогенными воздействиями. В России, в частности, такого рода климатические модели разрабатываются в Институте вычислительной математики (ИВМ) РАН и Главной геофизической обсерватории (ГГО) [21]. Созданная в Институте физики атмосферы (ИФА) РАН совместная модель атмосферы и океана [22] для исследования долгопериодной изменчивости климата относится к классу так называемых моделей промежуточной сложности [23].

Принципы построения современных климатических моделей

Согласно определению Всемирной метеорологической организации [24], климатическую систему планеты Земля образуют следующие взаимодействующие между собой компоненты: 1) атмосфера – газовая оболочка Земли сложного состава (кислород, азот, углекислый газ, водяной пар, озон и т. д.), воздействующая на перенос к поверхности Земли солнечной радиации, поступающей на ее верхнюю границу, и являющаяся наиболее изменчивой составляющей рассматриваемой системы; 2) океан – главный водный резервуар в системе, состоящий из соленых вод Мирового океана и прилегающих к нему морей, поглощающий основную часть поступающей на его поверхность солнечной радиации и представляющий собой, благодаря высокой теплоемкости воды, мощный аккумулятор энергии; 3) суша – поверхность континентов с ее гидрологической системой (внутренние водоемы, болота и реки) и почва (в том числе с грунтовыми водами); 4) криосфера – континентальные и морские льды, горные ледники, снежный покров и криолитозона («вечная мерзлота»); 5) биота – растительность на суше и океане, а также живые организмы в воздухе, море и на суше, включая человека. На рис. 1, который можно рассматривать как «блок-схему» современных климатических моделей, представлены элементы климатической системы, а также основные процессы и взаимодействия, происходящие в ней.

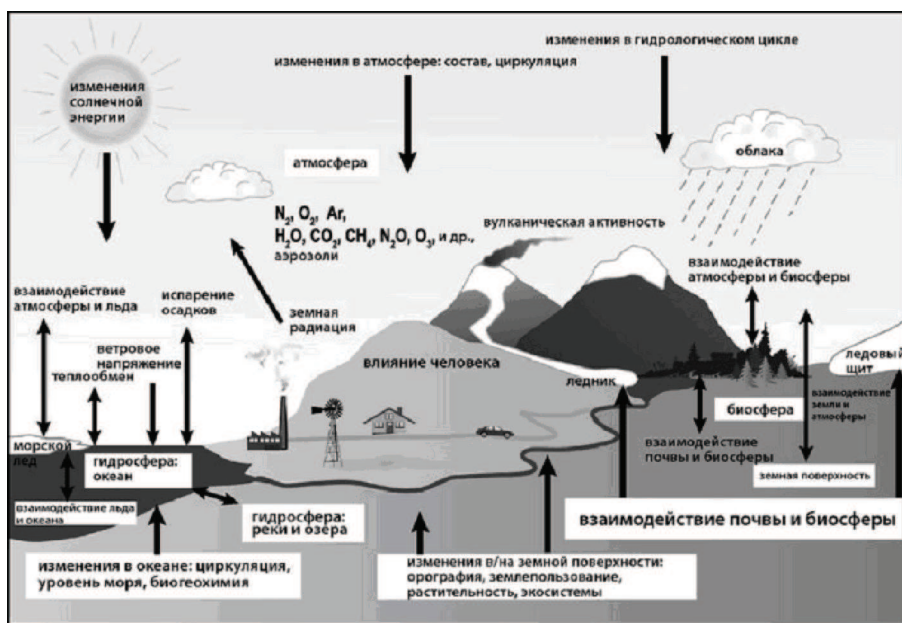


Рис. 1. Схематическое изображение компонентов климатической системы, их взаимодействий и основных процессов [1]

В основу построения современных моделей климата положен ряд принципов. Принимается, что локально справедливы уравнения классической равновесной термодинамики. Далее предполагается, что для описания динамики атмосферы и океана справедливы уравнения Навье – Стокса для сжимаемой жидкости. Поскольку в современных моделях в силу главным образом вычислительных возможностей используются уравнения Рейнольдса – осредненные по некоторым пространственным и временным масштабам уравнения Навье – Стокса, то считается, что существует принципиальная возможность их замыкания. Процедура замыкания предполагает, что эффекты процессов подсеточных масштабов (масштабов меньших, чем масштаб осреднения) могут быть выражены через характеристики процессов крупных масштабов. К этим процессам относятся: перенос излучения (коротковолновой и длинноволновой радиации); фазовые переходы влаги и локальное осадкообразование; конвекция; турбулентность в пограничных слоях (некоторые характеристики этих слоев описываются явно); мелкомасштабные орографические возмущения; волновое сопротивление (взаимодействие мелкомасштабных гравитационных волн с основным потоком); мелкомасштабная диссипация и диффузия; перенос

тепла, влаги, метана и других газов в деятельном слое суши, в том числе при наличии водоемов. Наконец, для описания крупномасштабных атмосферных и океанических движений справедливо приближение гидростатики: вертикальный градиент давления уравнивается силой тяжести. Использование такого приближения требует дополнительных упрощений (постоянный радиус Земли, пренебрежение составляющими силы Кориолиса с вертикальной компонентой скорости) с тем, чтобы в системе уравнений при отсутствии внешних источников энергии и диссипации выполнялся закон сохранения энергии. Уравнения гидротермодинамики атмосферы и океана, замыкания процессов подсеточных масштабов и краевые условия подробно рассмотрены в [25].

Совершенно очевидно, что получить аналитические решения при произвольных начальных данных сложных нелинейных уравнений гидротермодинамики атмосферы и океана практически невозможно и потому ищутся их приближенные решения с помощью разного рода конечномерных аппроксимаций. Эти аппроксимации должны строиться таким образом, чтобы при отсутствии диссипации и источников энергии выполнялся бы квадратичный закон сохранения – аналог исходного закона. Этот закон сохранения автоматически приводит в данном случае к вычислительной устойчивости решения разностной задачи, если под устойчивостью понимается непрерывная зависимость нормы решения от нормы правой части и нормы начальных данных.

Вместе с тем этого требования при построении разностных схем для климатических моделей недостаточно. Важно отметить, что в отличие от задач прогноза погоды, где необходимо воспроизвести решение задачи на конечном промежутке времени, в задачах климата требуется аппроксимировать аттрактор исходной модели как множество и меру на нем или статистическое стационарное решение (см. раздел 5). Доказательство глобальной разрешимости конечномерных моделей климата и существования для них глобального аттрактора не вызывает особых затруднений [2]. Проблема же состоит в доказательстве сходимости аттракторов конечномерных аппроксимаций к аттрактору исходной модели при стремлении параметров аппроксимации к нулю. Сложность здесь заключается еще и в выборе метрики, в которой исследуется сходимость. Конструктивные оценки упомянутой выше сходимости в «полезных» (хаусдорфовых) метриках в настоящее время отсутствуют, что представляет собой важную и интересную проблему вычислительной математики. Поскольку теорем сходимости нет, то

при моделировании климатической системы используется подход, связанный с аппроксимацией наиболее значимых физических процессов, участвующих в формировании климата. В качестве примеров можно привести следующие процессы.

Так как атмосфера и океан квазидвумерны, то перенос энергии по спектру в этих средах определяется законами двумерной жидкости. Известно, что в идеальной несжимаемой двумерной жидкости имеется два квадратичных инварианта – энергия и энстрофия (квадрат завихренности). При этом распределение энергии в инерционном интервале масштабов, в котором диссипация и генерация энергии практически отсутствуют и основным процессом является передача энергии по спектру, по существу определяется переносом энстрофии в сторону высоких волновых чисел. Чтобы выполнить это условие в численной модели, необходимо строить конечномерные аналоги таким образом, чтобы в двумерной асимптотике также существовали конечномерные аналоги энергии и энстрофии, которые были бы инвариантами при отсутствии диссипации и источников.

Следует, однако, отметить, что измерения, проведенные в последние десятилетия (см., например, [26]), показали, что атмосфера имеет принципиальные особенности, отличающие ее эволюцию от поведения квазидвумерной жидкости. Генерация энергии в атмосфере происходит на синоптических масштабах вследствие реализации бароклинной неустойчивости. На масштабах, больших синоптических, инерционный интервал отсутствует, а распределение энергии по спектру на этих масштабах определяется относительным соотношением между характерным временем диссипации энергии в пограничном слое и характерным временем нелинейных взаимодействий. На масштабах, меньших синоптических, инерционный интервал существует и там, согласно теории двумерной турбулентности, распределение энергии имеет вид k^{-3} (k – пространственное волновое число). Однако, начиная с масштаба примерно 800 км, распределение энергии подчиняется закону $k^{-5/3}$ как в трехмерной турбулентности Колмогорова, хотя на этих масштабах атмосфера, очевидно, квазидвумерна.

Далее, закон сохранения момента количества движения относительно оси вращения Земли по существу определяет распределение скорости ветра у поверхности Земли (наличие пассатов). Важным также является закон сохранения энтропии в адиабатическом приближении. Кроме того, следует отметить конкретные физические явления типа циклогенеза, правильное воспроизведение которого требу-

ет хорошей аппроксимации по спектру некоторых линейных операторов (по собственным и сингулярным числам), 30–60-дневных колебаний в тропиках, распространения квазистационарных волн и многих других процессов, ответственных за климатические характеристики. Особое значение имеет решение уравнений переноса малых примесей, имеющих большие пространственные градиенты, что накладывает очень сильное требование на условие монотонности разностных схем.

Необходимо отметить также проблему отображения вычислительных алгоритмов на суперкомпьютерную архитектуру. Хорошо известно, что в настоящее время развитие вычислительной техники и вычислительных алгоритмов связано с параллельными вычислениями. Современные оценки вычислительных алгоритмов могут существенно отличаться от устоявшихся оценок, связанных с оценками последовательных вычислений. Часто исследователь, использующий массивные параллельно-вычислительные системы, вынужден выбирать алгоритм – может быть не самый изящный и эффективный для последовательных вычислений, но легко распараллеливаемый. Поскольку в процессе решения климатических задач количество арифметических операций огромно, а также принимая во внимание важность этих проблем, кажется целесообразным конструировать вычислительные системы, непосредственно ориентированные на решение этих задач.

Моделирование климата и его изменений

В начале 2000-х гг. был объявлен международный проект CMIP3 по воспроизведению современного климата и прогноза его изменений с помощью совместных моделей. В 2004–2005 гг. проводились эксперименты по сценариям, предложенным МГЭИК [1]. Всего в этом проекте принимали участие 23 совместные модели, созданные в разных странах и имеющие различные параметры. Результаты, полученные с помощью этих моделей, положены в основу прогноза изменений климата в XXI в. в 4-м оценочном докладе МГЭИК [1], получившем большой общественный резонанс. Единственной от России, участвовавшей в этом проекте, была совместная модель общей циркуляции атмосферы и океана, разработанная в ИВМ РАН [27], которая получила название INMCM3.0 (Institute of Numerical Mathematics Climate Model, версия 3.0) [1]. Расчеты современного климата и его изменений в XX в., а также вероятных изменений климата в XXI–XXII вв.

с помощью версии модели INMCM3.0 представлены в [27, 28]. Результаты этих расчетов использованы в 4-м оценочном докладе МГЭИК [1], а наиболее полный анализ воспроизведения климата моделью INMCM3.0 представлен на сайте <http://ksv.inm.ras.ru/index.html> ИВМ РАН.

К настоящему времени в Институте вычислительной математики РАН разработан комплекс версий климатической модели различного (в зависимости от решаемых задач) пространственного разрешения, реализованных на параллельных вычислительных системах средствами MPI и OPEN MP. На каждом временном шаге происходит обмен граничными условиями между атмосферой и океаном. В модели также рассчитываются процессы, происходящие в криосфере, деятельном слое суши и на ее поверхности, в том числе в растительном покрове, а также учитывается углеродный цикл, описывающий эволюцию углерода растений, почвы, океана и атмосферы [29]. Наилучшее разрешение составляет: 1.25 градуса по долготе, 1 градус по широте и 128 уровней по высоте – в атмосфере; 1/6 градуса по долготе, 1/8 градуса по широте и 40 уровней по глубине – в океане. Этот вариант модели реализован на суперкомпьютере «Ломоносов» Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова и для расчета на 1 модельный год требует сутки астрономического времени (при использовании 240 процессорных ядер в блоке атмосферы и 512 ядер – в блоке океана). Наряду с климатической моделью разрабатывается также модель Земной системы, включающая в себя вместе с перечисленными выше блоками и блок химии атмосферы [30].

В программе CMIP5, по результатам которой будет подготовлен 5-й отчет МГЭИК, запланированный для публикации на 2013 г., участвует версия INMCM4. Модель INMCM4 и воспроизведение ею современного климата подробно описаны в работе [31]. В атмосфере разрешение составляет 2×1.5 градуса по долготе и широте и 21 уровень по вертикали до высоты около 30 км. Шаг по времени в динамическом блоке равен 5 мин. В модели океана – разрешение составляет 1×0.5 градуса по долготе и широте и 40 уровней по вертикали. Шаг по времени равен 2 ч. На кластере ИВМ РАН счет на 48 процессорах на 8 модельных лет занимает сутки астрономического времени.

Программа CMIP5 (см. <http://cmip-pcmdi.llnl.gov>) предусматривает всестороннее сравнение всех существующих ныне климатических моделей в воспроизведении климата прошлого, настоящего и будущего. Численные эксперименты, предлагаемые CMIP5, подразделяются

на расчеты реалистичные и методические. В реалистичных расчетах моделируется либо климат настоящего, либо прошлого или будущего согласно предписанному сценарию. По этим расчетам строятся прогнозы вероятных будущих изменений климата. Методические расчеты содержат идеализированный сценарий и позволяют лучше понять причины, по которым модели дают те или иные результаты. Кроме того, у каждого предлагаемого численного эксперимента имеется приоритет, то есть желательно провести с моделью эксперименты с наивысшим приоритетом, а потом, если позволяют ресурсы и имеется научный интерес, эксперименты с более низким приоритетом.

С моделью INMCM4 проведены лишь те численные эксперименты, которые имеют наивысший приоритет. Реалистичные эксперименты были следующими: (1.1) воспроизведение изменений климата в 1850–2005 гг., используя наблюдавшиеся концентрации парниковых и других газов, вулканических и антропогенных аэрозолей, вариаций солнечного излучения; (1.2) моделирование изменений климата в 2006–2100 гг., используя сценарии RCP8.5 (очень теплый) и RCP4.5 (наиболее вероятный) концентрации парниковых и других газов; (1.3) моделирование изменений климата в 1850–2100 гг., используя антропогенные эмиссии углекислого газа CO_2 в результате сжигания топлива и землепользования, в отличие от концентрации, принятой в экспериментах 1.1 и 1.2, что предусматривает интерактивный расчет углеродного цикла; в остальном условия эксперимента соответствуют экспериментам 1.1 и 1.2 (сценарий RCP8.5); (1.4) моделирование прединдустриального климата на срок 500 лет; (1.5) воспроизведение климата 1979–2008 гг. с предписанными наблюдаемыми температурой океана и количеством морских льдов, то есть без использования модели океана.

Кроме того, были проведены следующие методические эксперименты: (2.1) моделирование климата для условий, при которых концентрация CO_2 увеличивается, начиная с прединдустриального уровня, на 1% в год в течение 140 лет, т. е. до ее учетверения; (2.2) моделирование климата для ситуации, для которой в начальный момент времени происходит мгновенное учетверение концентрации CO_2 , после чего она держится постоянной в течение 150 лет; (2.3) то же, что и 2.2, но с предписанным состоянием океана, полученным из эксперимента 1.4.

Результаты всех проведенных экспериментов загружены в базу данных CMIP5 и занимают объем около 8 Тб. По результатам методиче-

ских экспериментов равновесная чувствительность модели к учетверению концентрации CO_2 составляет 4.1 градуса, что, по-видимому, является одной из самых низких среди современных моделей. Результаты CMIP5 пока не опубликованы, но согласно результатам CMIP3 равновесная чувствительность к удвоению CO_2 для всех моделей укладывается в диапазон 2.1–4.4 градуса [32]. При этом величина глобального потепления зависит от увеличения концентрации CO_2 логарифмическим образом. Уровень потепления спустя 150 лет после мгновенного учетверения CO_2 составляет в модели лишь 3.1 градуса в силу термической инерции океана.

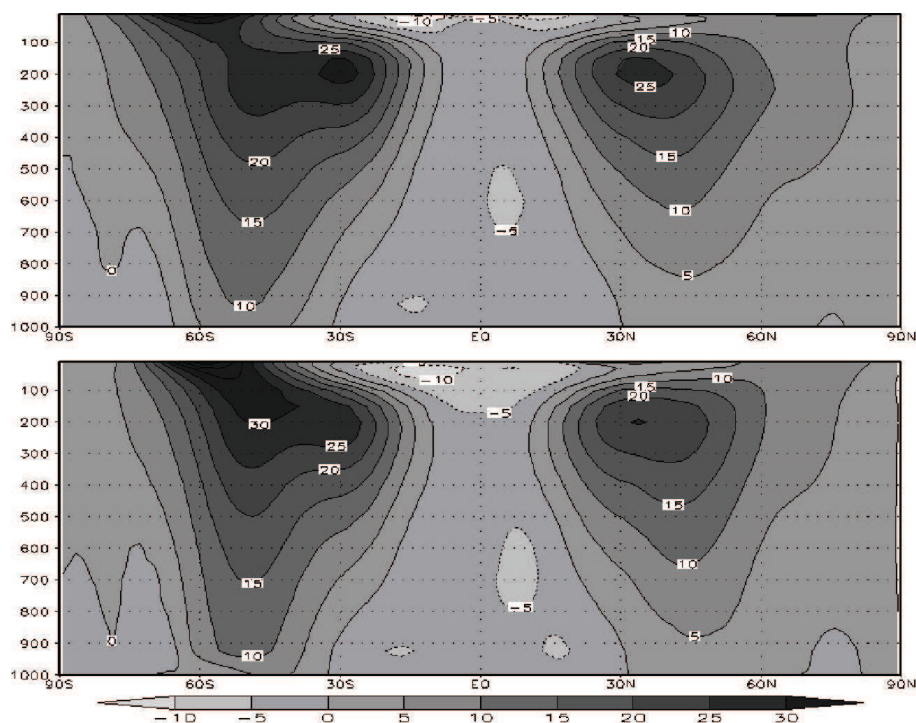


Рис. 2. Среднегодовая температура воздуха ($^{\circ}C$) на различных уровнях, осредненная вдоль круга широты, по данным реанализа NCEP [33] (вверху) и эксперимента 1.3 (внизу)

Воспроизведение современного климата подробно описано в работе [31], здесь же приводится лишь краткий анализ среднегодовых полей температуры, давления и скорости ветра. На рис. 2 изображены высотно-широтные распределения зонально осредненной температуры, рассчитанные по данным реанализа NCEP [33] за 1971–2000 гг.

(вверху) и результатам модельного эксперимента 1.3 (те же годы, внизу). Как видно из этого рисунка, в тропосфере отличие модельной температуры от наблюдаемой не превосходит 1–2 градуса. Исключение составляет нижняя тропосфера в Арктике, где модель завышает температуру на 3–4 градуса. Нижняя стратосфера в высоких широтах обеих полушарий в модели на 4–6 градусов холоднее, чем по данным реанализа, а вблизи тропической тропопаузы – на 2–4 градуса теплее.

Сравнение наблюдаемой и модельной скорости зонального ветра приведено на рис. 3. В модели хорошо воспроизводятся области пассатов и западных ветров умеренных широт, субтропические максимумы скорости вблизи тропопаузы. В тропосфере ошибка скорости ветра в модели всюду не превосходит 2 м/с, а в стратосфере достигает 4–8 м/с в умеренных широтах Южного полушария.

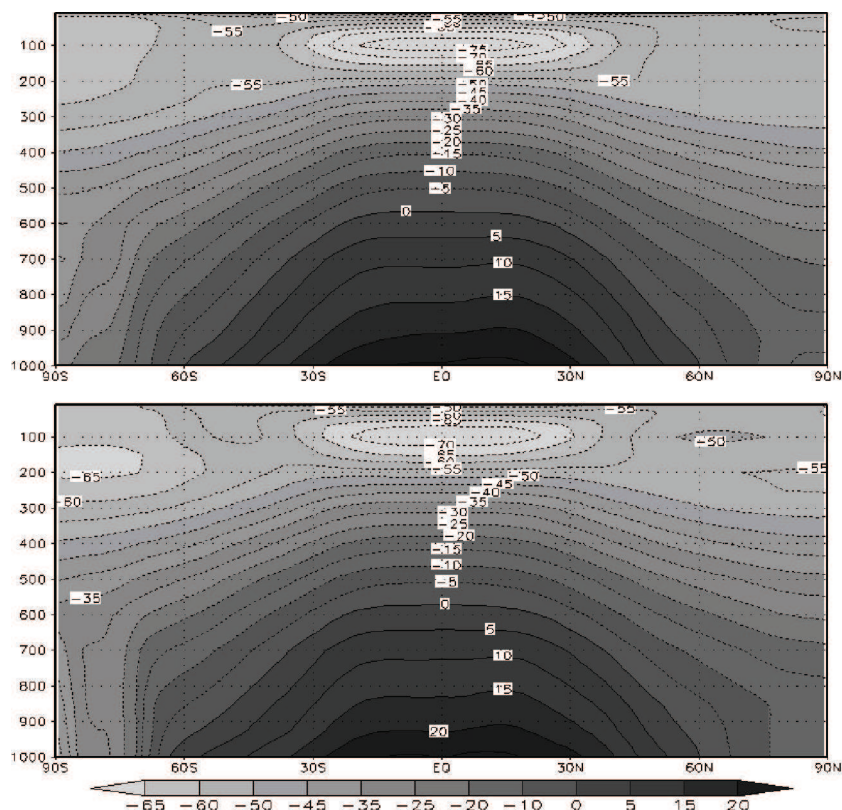


Рис. 3. Среднегодовая зональная компонента скорости ветра (м/с), осредненная вдоль круга широты, по данным NCEP [33] (вверху) и эксперимента 1.3 (внизу)

Географическое распределение температуры воздуха у поверхности Земли по данным реанализа NCEP [33] и результатам модели представлено на рис. 4. В целом модель верно воспроизводит наблюдаемую температуру. Ошибки в основном не превосходят 2 градусов. Исключение составляет лишь северная часть Африки и юго-запад Азии, где температура занижена на 3–5 градусов, а также некоторые районы Южного океана, где температура завышена на 3–6 градусов.

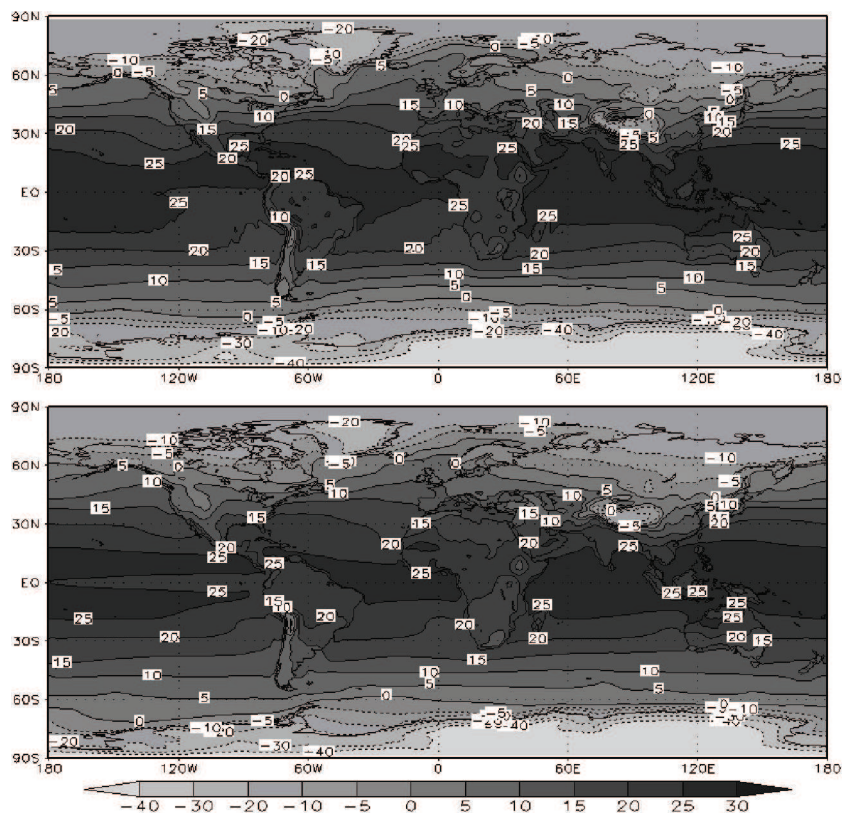


Рис. 4. Среднегодовая температура ($^{\circ}\text{C}$) воздуха у поверхности земли в 1971–2000 гг. по данным реанализа NCEP [33] (вверху) и эксперимента 1.3 (внизу)

Среднегодовое распределение давление на уровне моря изображено на рис. 5. В данных модели и наблюдений хорошо видны субтропические антициклоны Северного и Южного полушарий, Алеутский и Исландский минимумы давления, а также минимум давления в Южном океане и максимумы над Антарктидой и Гренландией. В основном ошибки модели не превосходят 1–2 гПа. Исключение составляет за-

нижение давления на 4–5 гПа над северо-востоком Азии, Аляской и прилегающими районами Тихого и Северного Ледовитого океанов. Различие в давлении над Антарктидой по данным модели и реанализа объясняется разницей в методах пересчета давления с поверхности на уровень моря.

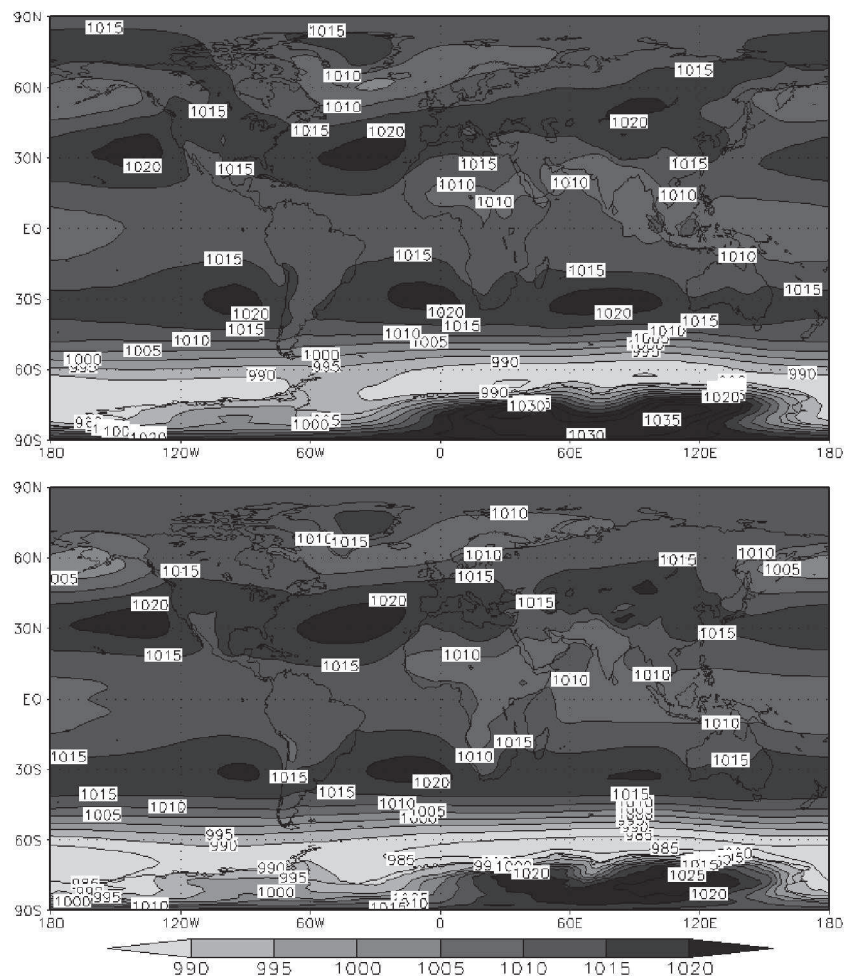


Рис. 5. Среднегодовое давление на уровне моря (гПа) в 1971–2000 гг. по данным реанализа NCEP [33] (вверху) и эксперимента 1.3

Моделирование изменений климата. Анализ результатов эксперимента 1.4 позволяет выделить основные моды естественной климатической изменчивости в модели. С этой целью вычислены эмпирические ортогональные функции (ЭОФ) температуры поверхности, осредненной за каждое пятилетие предындустриального эксперимен-

та, в различных географических регионах. Эти функции представляют собой собственные векторы ковариационной матрицы временного ряда поля соответствующей климатической переменной и характеризуют их вклад во временную изменчивость этой переменной. Наибольший интерес, по-видимому, представляет регион Северная Атлантика – Арктика – Евразия, где согласно данным наблюдений проявляется Атлантическое декадное (десятилетнее) колебание (см., например, [34]), и тропики Тихого океана, где по данным наблюдений проявляется аналогичное Тихоокеанское колебание [35].

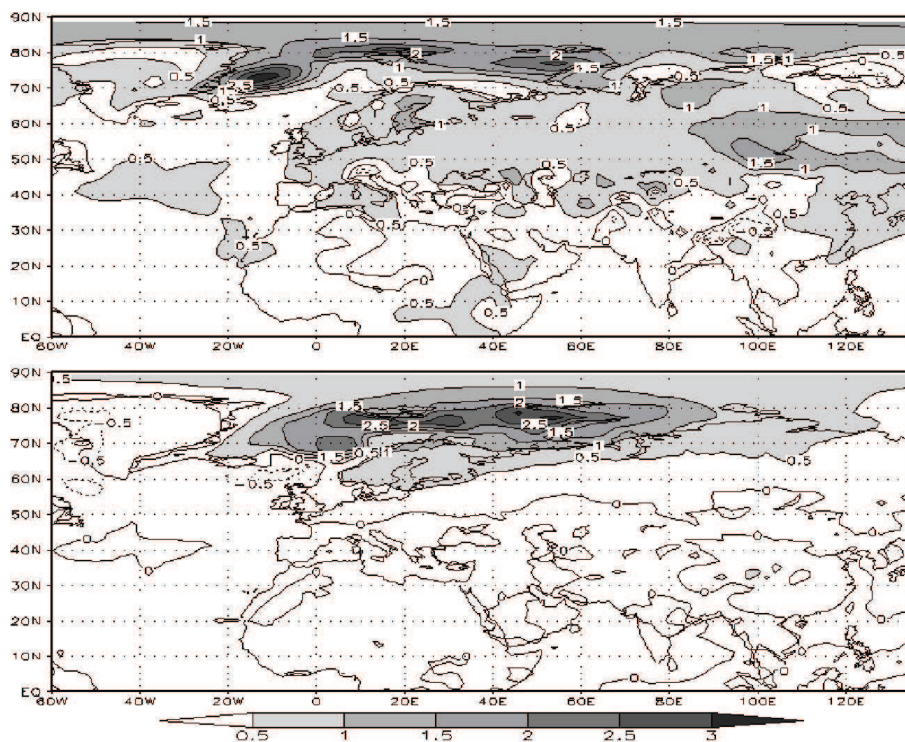


Рис. 6. Вверху – разность среднегодовой приповерхностной температуры в 1991–2010 гг. и 1971–1990 гг. по данным реанализа NCEP [33]. Внизу – первая ЭОФ модельной приземной температуры

На рис. 6 представлена первая ЭОФ температуры над Северной Атлантикой, Арктикой и Евразией. Она характеризует повышение температуры в высоких широтах Северного полушария с максимумом в атлантическом секторе Северного Ледовитого океана. Характерный период изменчивости в модели составляет 35–50 лет. Для сравнения на этом же рисунке приведена разность приземной температу-

ры, осредненной за последние 20 лет (1991–2010 гг.) и предыдущие 20 лет (1971–1990 гг.) по данным реанализа NCEP [33]. В данных реанализа на фоне общего потепления хорошо видно более сильное потепление в атлантическом секторе Арктики. Таким образом, заметный вклад в наблюдаемое потепление Арктики в последние десятилетия может вносить естественная изменчивость, проектирующаяся на первую ЭОФ.

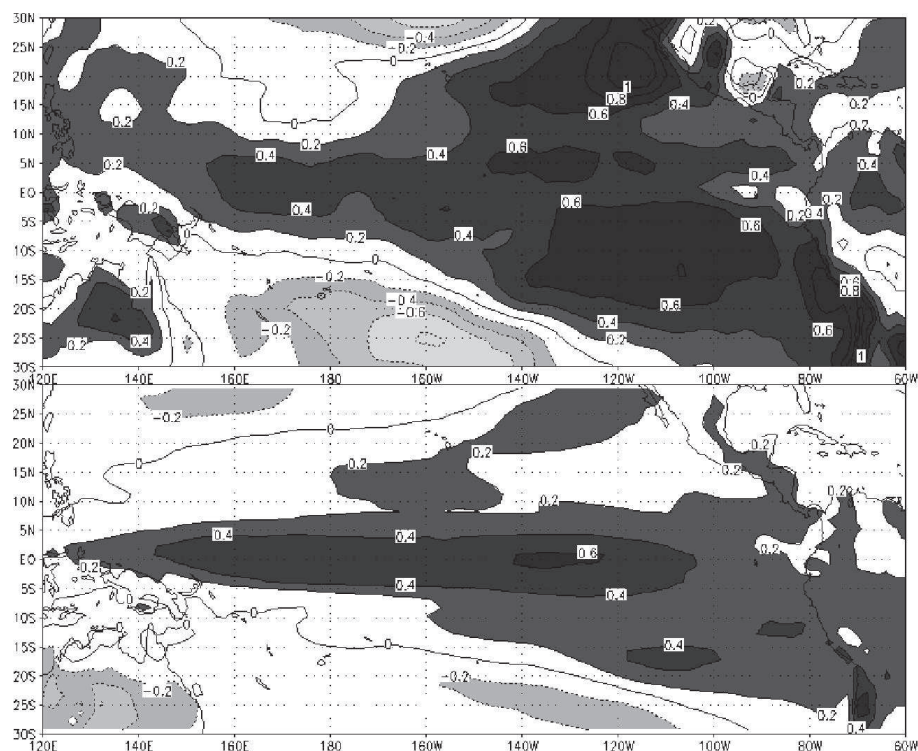


Рис. 7. Вверху – разность среднегодовой приповерхностной температуры в 1978–1987 гг. и 1963–1972 гг. по данным реанализа NCEP [33]. Внизу – первая ЭОФ модельной приземной температуры в тропиках Тихого океана

Первая ЭОФ для тропиков Тихого океана изображена на рис. 7. Она представляет собой положительную аномалию вблизи экватора и на востоке Тихого океана и отрицательную аномалию – на западе и в центре океана в субтропиках. Фурье-анализ показывает, что максимальная изменчивость, приходящаяся на эту моду, имеет характерный период около 20 лет. На этом же рисунке для сравнения приведена разность температуры в 1978–1987 гг. и 1967–1976 гг., ко-

гда индекс Тихоокеанского декадного колебания был соответственно положительным и отрицательным [35]. Из рис. 6 следует, что модель неплохо воспроизводит аномалии температуры, соответствующие Тихоокеанскому десятилетнему колебанию.

Изменение глобально осредненной температуры в 1850–2100 гг. по данным экспериментов 1.1–1.3, а также в первую половину предын-дустриального эксперимента можно видеть на рис. 8. Естественные колебания температуры в модельной климатической системе не превосходят 0.2 градуса. Потепление в течение XX в. составило по модельным данным величину, равную примерно 0.7 градуса. К концу XXI в. потепление достигает почти 1.9 градуса при сценарии RCP4.5 и 3.5 градуса при сценарии RCP 8.5. Глобальное потепление в эксперименте 1.3, в котором концентрация CO_2 рассчитывается по заданным антропогенным эмиссиям с помощью модели углеродного цикла, очень близко к данным экспериментов 1.1 и 1.2, где концентрация CO_2 предписана.

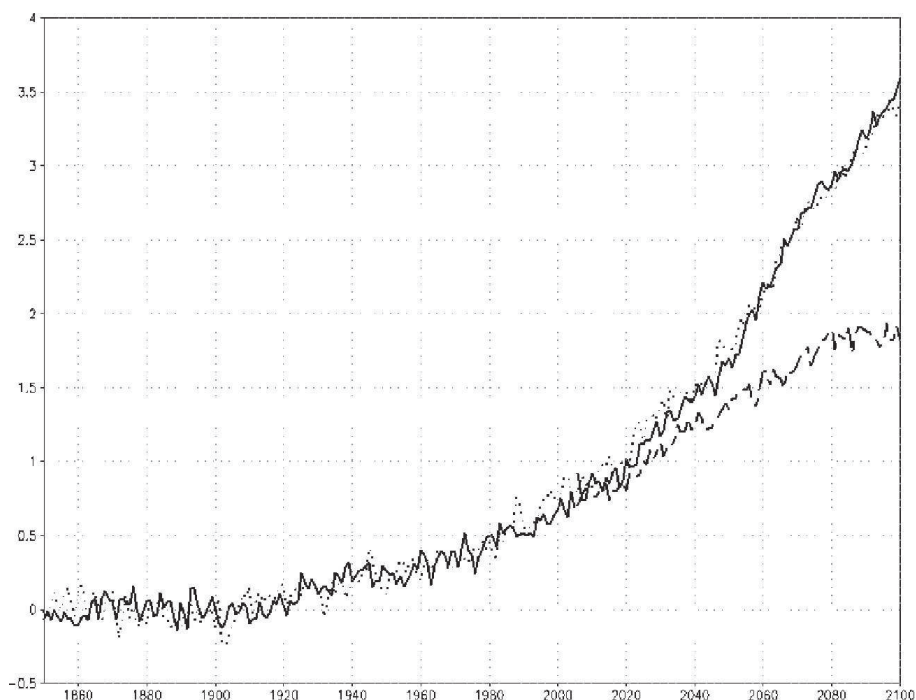


Рис. 8. Изменение температуры по сравнению с 1850–1899 гг. в экспериментах: 1.1 и 1.2, сценарий RCP8.5 (сплошная линия); 1.2, сценарий RCP4.5 (штриховая линия) и 1.3 (точки)

Роль углеродного цикла отражена на рис. 9, где изображено увеличение массы углерода в растениях, почве, океане и атмосфере по сравнению с 1850 г. Прирост массы углерода в океане немного меньше, чем в атмосфере. В растениях и почве в течение 1850–2030 гг. происходит небольшое уменьшение массы углерода вследствие интенсивного землепользования, а в 2040–2100 гг. – небольшой рост, поскольку влияние потепления и фертилизации становится сильнее.

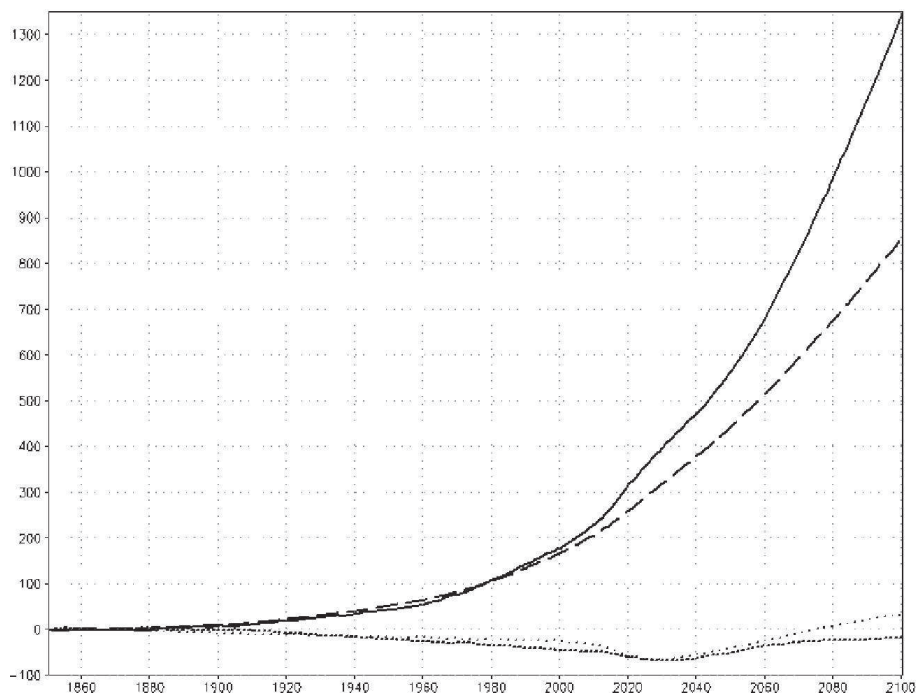


Рис. 9. Изменение массы углерода (Гт) в атмосфере (сплошная линия), в океане (длинные штрихи), в растениях (точки) и почве (короткие штрихи) в эксперименте 1.3

Модель Земной системы [29] включает в себя атмосферный блок с разрешением 5×4 градуса по долготе и широте и 39 уровней по вертикали до 90 км. Блоки океана и углеродного цикла полностью идентичны тем, что используются в модели INMCM4 и кратко описаны выше. Модель включает также химический блок, в котором учитывается изменчивость 74 малых газовых составляющих атмосферы, прямо или косвенно влияющих на фотохимическое изменение концентрации озона. В модели приняты во внимание реакции кислородного, водородного, азотного, хлорного, бромного и серного циклов. Схема

химических реакций соответствует приведенной в [36], но с добавлением серного цикла. Атмосферный перенос химически активных примесей осуществляется с использованием рассчитанных в динамическом блоке скоростей ветра, а скорости химических реакций оцениваются с использованием температуры, полученной из циркуляционного блока. Расчетные концентрации озона используются для вычисления скоростей лучистого нагрева атмосферы, а метана и водяного пара – охлаждения атмосферы, учитываемых в циркуляционном блоке модели. Для учета гетерогенных процессов рассматриваются процессы формирования и эволюции полярных стратосферных облаков. Взаимодействие химического и динамического блоков подробно описано в [37]. Такая модель необходима в первую очередь для моделирования таких ситуаций, где изменение климата и всей окружающей среды носит комплексный характер, например, при оценке последствий гипотетических геоинженерных воздействий с целью смягчить глобальное потепление [38].



Рис. 10. Среднегодовое общее содержание озона (ед. Добсона) в XX–XXI вв.

С моделью Земной системы проведен численный эксперимент, условия которого аналогичны условиям эксперимента 1.4, но вместе с тем задавались сценарии потоков с поверхности нескольких десятков малых газовых составляющих. Поскольку изменения собственно климата и углеродного цикла рассматривались выше, здесь целесообразно ограничиться рассмотрением изменения общего содержания озона (ОСО) в XX–XXI вв. (рис. 10). Минимум ОСО в конце XX – начале XXI в. обусловлен максимальной эмиссией хлор- и фторсодержащих веществ. После уменьшения их эмиссий происходит восстановление, а в конце XXI в. и превышение ОСО по сравнению с 70-ми гг. XX столетия, что связано с похолоданием стратосферы вследствие парникового эффекта. Однако превышение ОСО над уровнем 70-х гг. XX в. велико лишь в умеренных и высоких широтах, особенно в конце зимы в каждом из полушарий.

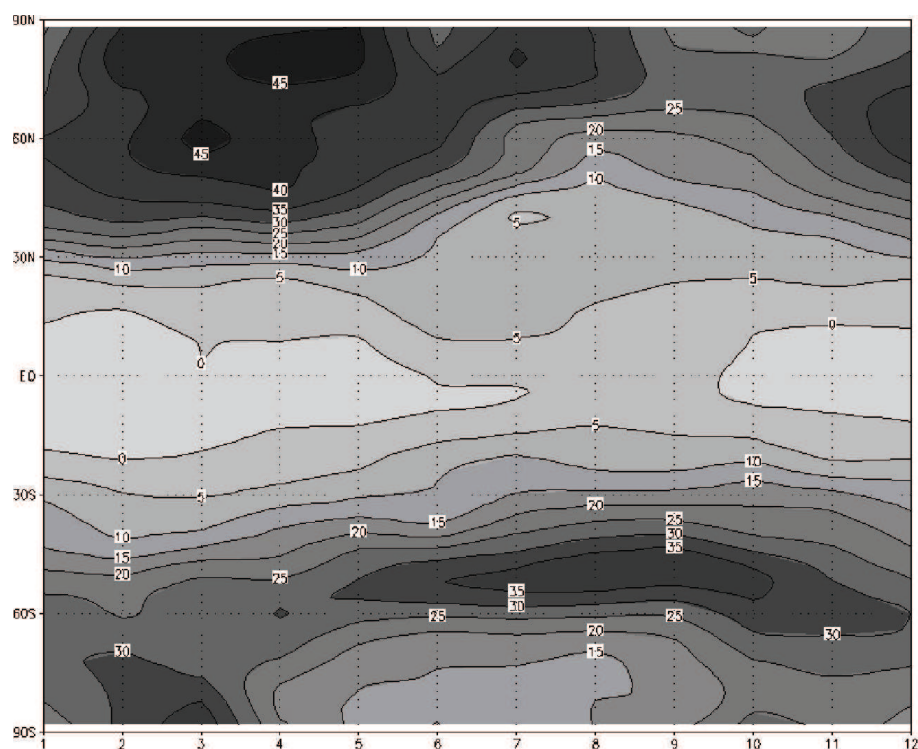


Рис. 11. Изменение ОСО (ед. Добсона) на различных широтах и в различные месяцы в 2091–2100 гг. по сравнению с 1971–1980 гг.

В тропиках ОСО в конце XXI в. не превосходит уровень 1971–1980 гг. (рис. 11). Такая неоднородность обусловлена усилением

ем циркуляции Брюера – Добсона, т. е. более интенсивным подъемом воздуха в тропической стратосфере и опусканием в высоких широтах. Подобные особенности изменения ОСО в XX–XXI веках получены и в других химико-климатических моделях (см., например, [39]).

Математическая теория климата

История развития климатических моделей показывает, что их уровень и количество характеристик, которые необходимо воспроизвести, неизмеримо возросли. Поскольку на компьютерах реализуется некоторая конечномерная аппроксимация исходной дифференциальной модели, то на первый взгляд кажется, что аналитические исследования асимптотических свойств моделей не очень-то и важны, поскольку свойства близости к реальности можно изучать непосредственно с помощью сравнительного анализа результатов численных экспериментов с данными наблюдений. Однако имеется серьезное возражение по поводу этого утверждения, связанное с проблемой чувствительности климатической системы к внешним воздействиям. Поскольку нельзя провести целенаправленные эксперименты с климатической системой, то требуется убедительное обоснование того, что разрабатываемые модели имеют чувствительность к малым внешним воздействиям, близкую к чувствительности реальной климатической системы.

Следует отметить, что к настоящему времени отсутствует достаточно подробное описание хотя бы одного состояния климатической системы. Наибольшее количество измерений имеется для атмосферы, состояния которой характеризуются набором асинхронных измерений различного качества (радиозондовых, спутниковых, самолетных, наземных на метеорологических станциях и др.). Эти данные с помощью систем четырехмерного усвоения приводятся к синхронным временным срезам, заданным на некоторых регулярных пространственных сетках. Вектор таких «наблюдений» в настоящее время имеет размерность порядка 10^{10} . В результате в вещественном векторном пространстве можно построить траекторию системы (в данном случае – атмосферы) на промежутке времени порядка нескольких десятков лет (такую возможность предоставляют так называемые системы реанализа [33, 40]), т. е. фактически на климатическом временном масштабе.

Возникает вопрос: возможно ли, зная траекторию системы, вычислить отклик системы на малые внешние воздействия? Каким условиям должна удовлетворять система, чтобы ответ на сформулированный

выше вопрос был положительным? Более того, следствием этих исследований должно стать формулирование главного математического результата – метода построения оператора отклика. Ответы на эти вопросы ищутся в рамках математической теории климата [2], в основу которой положены методы теории динамических систем. Чтобы применять методы этой теории к исследованию реальной климатической системы, следует сопоставить ей некоторый математический объект, представляющий собой идеализацию изучаемой системы, а также который можно назвать ее «идеальной» моделью. Предполагается, что такая «идеальная» модель существует, а наблюдаемая динамика климатической системы есть реализация траектории, порождаемой этой моделью. Считается также, что эта модель принадлежит классу динамических диссипативных систем, который можно формально описать следующей системой уравнений:

$$\frac{du}{dt} = F(u) + f, \quad u_{t=0} = u_0, \quad (1)$$

где t – время; u – вектор-функция параметров климатической системы; $F(u)$ – оператор задачи; f – внешнее возбуждение. Для простоты можно предположить, что система (1) представляет собой систему примитивных (гидростатических) уравнений, описывающих общую циркуляцию атмосферы. Задача состоит в том, чтобы исследовать поведение траектории системы (1).

Прежде всего, необходимо решить задачу о существовании и единственности решения (1) на произвольно большом промежутке времени. Большие успехи в исследовании глобальной разрешимости примитивных гидростатических уравнений для океана и атмосферы были достигнуты в последнее время силами российских ученых (см., например, [41]). Уравнения, для которых доказывались теоремы разрешимости, являются уравнениями Рейнольдса, в которых отношение горизонтального масштаба к вертикальному, гарантирующее справедливость гидростатического приближения, контролируется горизонтальной вихревой диффузией. По определению эта диффузия должна быть достаточно большой. Более того, модель атмосферы, для которой была доказана теорема глобальной разрешимости, сильно упрощена, так как использовалась постановка 60-х г. XX в. столетия для ограниченной территории.

Следующий этап состоит в построении конечномерной аппроксимации и доказательстве теоремы сходимости. Сразу следует отметить,

что сходимость здесь надо понимать в смысле сходимости решения конечномерной задачи к решению уравнений Рейнольдса. С практической точки зрения доказательство такой сходимости не является очень сильным результатом, поскольку в уравнениях Рейнольдса коэффициент горизонтальной диффузии пропорционален масштабу осреднения, который связывается с горизонтальным шагом сетки. Это означает, что при измельчении шага сетки коэффициент вязкости стремится к молекулярному и приближение гидростатики должно автоматически нарушаться. Для гидростатических уравнений Рейнольдса теорема сходимости для конечномерных аппроксимаций недавно была доказана для модели динамики океана. Из теоремы следует, что для сходимости достаточно использовать кососимметрические аппроксимации для кососимметрических операторов и симметрические аппроксимации для симметрических операторов. Этот результат представляется очень важным, поскольку из него следует, что при высоких разрешениях нет необходимости точного выполнения асимптотических законов сохранения для квазидвумерного и квазигеострофического приближений.

Рассмотренные выше задачи несомненно важны и для второй ключевой проблемы метеорологии – задачи прогноза погоды. Более того, для этой задачи они представляются более важными, поскольку прогноз погоды есть задача прогноза траектории системы. Прогноз траектории системы на климатических временных масштабах в принципе невозможен в силу ее сильной неустойчивости по Ляпунову. Следовательно, проблема климатической чувствительности с помощью анализа близости траекторий не может быть решена, а требуется какой-то другой подход, другое понятие аппроксимации. Подходящим объектом для формулирования такого подхода является понятие аттрактора диссипативных систем.

Аттрактор – это компактное множество, которое притягивает все траектории системы, и это множество строго инвариантно относительно разрешающего оператора системы. Другими словами, если траектория системы попадает в окрестность аттрактора, то она остается там навсегда. Если начальная точка траектории лежит на аттракторе, то и вся траектория никогда не покинет аттрактор. Все множество (аттрактор), строго говоря, есть объединение всех целых траекторий системы, выпущенных из каждой его точки. Возникает вопрос: при каких условиях это множество может быть описано одной типичной траекторией? Ответ здесь состоит в следующем. Система должна

порождать эргодическую динамику, т. е. на аттракторе не должно существовать другого подмножества ненулевой меры, строго инвариантного относительно разрешающего оператора. Из этого следует, что каждая типичная траектория всюду плотна на аттракторе и инвариантную эргодическую меру каждого подмножества на аттракторе можно определить через время, которое проводит траектория на этом подмножестве.

Итак, климат, порождаемый моделью (1), можно определить через состояния, которые система проходит на своем аттракторе, а все статистические характеристики через вероятностную эргодическую меру, порождаемую системой на своем аттракторе. Известно, что аттрактор климатической системы – хаотический, т. е. все траектории на нем неустойчивы по Ляпунову. Это означает, что если в начальный момент времени задать множество начальных данных ненулевой меры в окрестности одной начальной точки, то с течением времени траектории, выпущенные из этой малой окрестности, разбегутся, а заданная мера будет сходиться к равновесной (инвариантной) мере, которую можно назвать климатической. Вследствие эргодичности эту меру и все статистические характеристики, порождаемые ею, можно вычислять, как говорилось выше, на основе одной типичной траектории. Хотя траектории системы на аттракторе неустойчивы по Ляпунову, сам аттрактор как множество и мера на нем, определяющая все статистические характеристики, могут быть устойчивы не только по Ляпунову, но и устойчивы к постоянно действующим возмущениям.

Конечномерную аппроксимацию системы (1) можно рассматривать как исходную модель, сравнивая результаты моделирования непосредственно с наблюдениями. Предполагая устойчивость меры и ее эргодичность, проблемы оценки качества модели на первый взгляд не существует. Ее действительно не было бы, если известно, какие ключевые характеристики определяют чувствительность системы к малым внешним воздействиям. Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно построить оператор отклика системы на малые внешние воздействия и сравнить параметры, определяющие этот оператор, с наблюдаемой величиной этих параметров.

Итак, пусть конечномерная климатическая модель, аппроксимирующая систему (1), имеет вид

$$\frac{du_h}{dt} = F_h(u_h) + f_h, \quad u_h \in R^N. \quad (2)$$

Система (2) порождает свой аттрактор и меру на нем. Желательно, чтобы эта мера была устойчивая и гладкая, чтобы можно было использовать идеи линеаризации. К сожалению, доказать гладкость меры для системы (2) в общем случае невозможно, поэтому необходима какая-то регуляризация, обеспечивающая искомую гладкость меры. В качестве такой регуляризации можно взять малый аддитивный шум η в правой части системы (2), т. е. рассмотреть следующую систему:

$$\frac{du_h}{dt} = F_h(u_h) + f_h + \eta(t). \quad (3)$$

Этот шум можно рассматривать как некоторую параметризацию процессов подсеточного масштаба, которую детерминировано (через решение обратной задачи) определить в принципе нельзя. Как результат, возникает нелинейная динамико-стохастическая задача, которая, однако, дает возможность доказывать гладкость мер в широком диапазоне правых частей. В качестве примера можно сослаться на уравнения двумерной несжимаемой жидкости, для которых гладкость, устойчивость и эргодичность меры доказываются даже для бесконечномерной постановки [42].

В простейшем случае можно принять, что $\eta(t)$ есть коррелированный по времени изотропный однородный гауссов шум, так что

$$\eta_i(t)\eta_j(t') = 2\delta_{ij}\epsilon^2\delta(t-t'),$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; ϵ – малый параметр; δ – функция Дирака. В этом случае для плотности функции распределения можно выписать уравнение Фоккера – Планка и дальнейшие рассуждения вести в терминах его решения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho [F_h(u_h) + f_h] = \epsilon^2 \Delta \rho, \quad (4)$$

где оператор Лапласа является N -мерным оператором. Если теперь рассмотреть возмущенную задачу

$$\frac{du'_h}{dt} = F_h(u'_h) + f_h + \delta f \quad (5)$$

и положить $\delta u = u'_h - u_h$, то задача будет состоять в том, чтобы построить оператор M , связывающий δu с δf :

$$\delta u = M\delta f. \quad (6)$$

Если мало, то в первом приближении M можно считать линейным оператором. Соотношение, которое в результате должно быть получено, называется диссипационно-флуктуационным соотношением. Не вдаваясь в подробности получения этого соотношения, окончательный результат можно выписать в следующем виде:

$$\delta u_i(t) = \int_0^t u_i(t) \frac{\partial \ln \bar{\rho}}{\partial u_j}(\tau) \delta f(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Если $\bar{\rho}$ – равновесная гауссова мера, то

$$M(t) = \int_0^t \tilde{C}(\tau) \tilde{C}^{-1}(0) d\tau, \quad (8)$$

где $\tilde{C}(\tau)$ – ковариационная матрица со сдвигом τ .

Важно отметить, что оператор M может быть вычислен как по данным моделирования, так и по реальным данным наблюдений. С его помощью могут быть решены и обратные задачи нахождения воздействия δf , вызывающего необходимый отклик. Применимость этого метода к вычислению отклика при различного рода внешних воздействиях и решению ряда обратных задач была показана в ряде работ, ссылки на которые можно найти в [25]. Следует подчеркнуть, что хотя такой подход и связан с прогнозом изменений климата, но не дает собственно прогноза, поскольку изменения климата включают в себя не только отклик на внешние воздействия, но и собственную изменчивость характеристик климатической системы.

Заключение

В настоящей работе внимание уделено лишь некоторым аспектам проблемы моделирования климата и его изменений, в рамках которой существует большое количество задач, требующих отдельного самостоятельного рассмотрения. К числу этих задач относится исследование таких фундаментальных вопросов, как роль океана в формировании изменчивости климатических характеристик на различных временных масштабах: взаимодействие нижней, средней и верхней атмосферы; предсказуемость поведения климатической системы на десятилетних временных масштабах и многие другие, не менее интересные проблемы.

Дальнейшее развитие климатических моделей и методов прогноза погоды связано с повышением пространственного разрешения и совершенствованием физических параметризаций процессов подсеточных масштабов. Уровень пространственного разрешения и, в значительной степени, сложность физических параметризаций лимитируются производительностью наиболее мощных вычислительных систем (суперкомпьютеров). Так, пиковая производительность имеющихся в распоряжении разработчиков климатических моделей вычислительных комплексов (несколько сотен и тысяч триллионов арифметических операций в секунду) позволяет проводить длительные (на сотни лет) расчеты лишь на сетке с разрешением порядка 100 км. Это разрешение не позволяет оценивать эффекты изменения климата на региональном уровне, в то время как именно региональные различия в будущем климате представляют особенный интерес. Для получения региональных прогнозов широко используются мезомасштабные модели с разрешением 1–10 км и размером расчетной области от нескольких сотен до нескольких тысяч километров. Мезомасштабные модели упомянутого разрешения, в свою очередь, не способны явно воспроизводить структуру атмосферных течений с пространственным масштабом менее нескольких километров. Такие течения могут быть воспроизведены методом вихреразрешающего моделирования, который позволяет явно описать нестационарную динамику крупных трехмерных вихрей, вносящих основной вклад в энергию турбулентных потоков в пограничном слое атмосферы. Пространственное разрешение вихреразрешающих моделей пограничного слоя атмосферы, в зависимости от типа турбулентного течения, составляет от нескольких метров до нескольких десятков метров, а размеры расчетной области – до нескольких десятков километров.

В настоящее время все более широкое распространение получают петафлопсные (10^{15} арифметических операций в секунду) вычислительные системы, а в перспективе текущего десятилетия ожидается, что производительность суперкомпьютеров достигнет эксафлопсного (10^{18} операций в секунду) уровня. Это означает, что глобальные атмосферные модели смогут иметь разрешение, характерное для современных мезомасштабных моделей (1–10 км), а шаг сетки моделей, используемых для прогноза и диагноза атмосферной циркуляции на региональном уровне, составит ~ 100 метров. Такое же разрешение (от 1 км до 100 м) будет доступным и для дискретизации уравнений гидротермодинамики по вертикальной координате. Опыт, по-

лученный японскими исследователями в моделировании глобальных климатических процессов с горизонтальным разрешением 3,5–10 км [43], заложил основу для широкого экспериментирования с моделями очень высокого разрешения и привел к необходимости разработать стратегию дальнейшего развития климатических моделей с учетом перспектив высокопроизводительных вычислений [44].

В связи с этим потребуются пересмотр многих параметризаций «подсеточных» процессов, использующихся в современных моделях общей циркуляции атмосферы и океана. В первую очередь это касается параметризации конвекции, поскольку конвекция начинает воспроизводиться явно при разрешениях несколько километров и менее. Все большее внимание уделяется созданию «бесшовных» (с улучшенным локальным разрешением и физическим описанием) моделирующих систем, позволяющих в рамках единой вычислительной технологии воспроизвести как можно более широкий спектр атмосферных движений (см., например, [45]). Переход на более детальное разрешение не может быть осуществлен «механически» (только за счет отказа от гидростатического приближения), без существенной переработки существующих вычислительных технологий и в некоторых случаях переформулировки параметризаций и систем уравнений, использующихся в настоящее время для приближенного описания гидротермодинамики климатической системы, а в перспективе – Земной системы.

В заключение необходимо подчеркнуть, что климатические модели современного времени и перспективного будущего можно с уверенностью отнести к классу высоких технологий. Имея в виду, что прогноз климатических изменений является проблемой государственной важности, такие технологии необходимо рассматривать в качестве необходимых элементов государственной безопасности. В связи с этим представляется необъяснимым тот факт, что несмотря на наличие «Климатической доктрины» в России отсутствует Национальная климатическая программа, в которой все важнейшие аспекты проблемы климата и его изменений были бы подчеркнуты надлежащим образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC) Fourth Assessment Report // Solomon S. D., Qin D., Manning M., Chen Z., Mar-

quis M., Averyt K. B., Tignor M., Miller H. L. (eds.). Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

2. Дымников В. П., Филатов А. Н. Основы математической теории климата. М.: ВИНТИ, 1994. 254 с.

3. Bjerknes V. Das Problem von der Wettervorhersage, betrachtet vom Standpunkt der Mechanik und der Physik // Meteor. Zeitschrift. 1904. B. 21. S. 1–7.

4. Richardson L. F. Weather Prediction by Numerical Process. Cambridge: Cambridge University Press, 1922.

5. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik // Math. Ann. 1928. B. 100. S. 32–74.

6. Кибель И. А. Приложение к метеорологии уравнений механики бароклинной жидкости // Известия АН СССР. Серия: География и геофизика. 1940. № 5.

7. Обухов А. М. К вопросу о геострофическом ветре // Известия АН СССР. Серия: География и геофизика. 1949. № 4. С. 281–306.

8. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. М.: Гостехиздат, 1957. 376 с.

9. Charney J. G., Fjørtoft R., von Neumann J. Numerical integrations of the barotropic vorticity equations // Tellus. 1950. V. 2. Pp. 237–254.

10. Дородницын А. А., Извеков Б. И., Швеиц М. Е. Математическая теория общей циркуляции // Метеорология и гидрология. 1939. № 4. С. 32–41.

11. Phillips N. The general circulation of the atmosphere: a numerical experiment // Quart. J. Roy. Met. Soc. 1956. V. 82. Pp. 123–164.

12. Smagorinsky J. General circulation experiment with the primitive equations. I. The basic experiment // Mon. Wea. Rev. 1963. V. 91. Pp. 99–164.

13. Саркисян А. С. Основы теории и расчет океанических течений. Л.: Гидрометеиздат, 1966.

14. Bryan K. A. Numerical method for the study of the circulation of the World Ocean // J. Comput. Phys. 1969. V. 4. Pp. 347–376.

15. Manabe S., Bryan K. Climate and the ocean circulation // Mon. Wea. Rev. 1969. V. 97. Pp. 739–827.

16. Зилитинкевич С. С., Монин А. С., Туриков В. Г., Чаликов Д. В. Численная модель глобального взаимодействия атмосферы и океана // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230. С. 556–559.

17. Марчук Г. И., Дымников В. П., Галин В. Я., Лыкосов В. Н., Перов В. Л., Бобылева И. М., Залесный В. Б. Гидродинамическая модель общей циркуляции атмосферы и океана (методы реализации). Информационное сообщение. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975. 214 с.

18. Марчук Г. И., Дымников В. П., Залесный В. Б., Лыкосов В. Н., Бобылева И. М., Галин В. Я., Перов В. Л. Математическая модель общей циркуляции атмосферы и океана // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. С. 577–581.

19. Марчук Г. И., Дымников В. П., Залесный В. Б., Лыкосов В. Н., Галин В. Я. Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1984. 320 С.

20. Covey C., AchutaRao K. M., Lambert S. J., Taylor K. E. Inter-comparison of present and future climates simulated by coupled ocean – atmosphere GCMs // PCMDI Report No. 66. 2000. Pp. 1–20.

21. Мелешко В. П., Катцов В. М., Спорышев П. В., Вавулин С. В., Говоркова В. А. Изучение возможных изменений климата с помощью моделей общей циркуляции атмосферы и океана // Изменения климата и их последствия. Мат. специальной сессии Ученого совета Центра международного сотрудничества по проблемам окружающей среды, посвященной 80-летию академика М. И. Будыко (19–20 мая 1999 г.). СПб, 2002. С. 13–35.

22. Мохов И. И., Демченко П. Ф., Елисеев А. В., Хон В. Ч., Хворостьянов Д. В. Оценки глобальных и региональных изменений в климатической модели ИФА РАН в XIX–XXI вв. с учетом антропогенных воздействий // Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38. № 5. С. 629–642.

23. Claussen M., Mysak L. A., Weaver A. J., Crucifix M., Fichet T., Loutre M.-F., Weber S. L., Alcamo J., Alexeev V. A., Berger A., Calov R., Ganopolski A., Goosse H., Lohmann O., Lunkeit F., Mokhov I. I., Petoukhov V. K., Stone P., Wang Z. Earth system models of intermediate complexity: closing the gap in the spectrum of climate system models // Climate Dynamics. 2002. V. 18. Pp. 579–586.

24. WMO: World Meteorological Organization. The Physical Basis of Climate and Climate Modelling // GARP Publications. WMO, Geneva. 1975. No. 16. (Физические основы теории климата и его моделирования. Пер. с англ. под ред. А. С. Моница. Л.: Гидрометеиздат, 1977.)

25. Дымников В. П., Лыкосов В. Н., Володин Е. М., Галин В. Я., Глазунов А. В., Грицун А. С., Дианский Н. А., Толстых М. А., Чав-

ро А. И. Моделирование климата и его изменений // В кн.: Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования, т. 2 Математическое моделирование. М.: Наука, 2005. С. 38–175.

26. Gage K. S., Nastrom G. D. On the spectrum of atmospheric velocity fluctuations seen by MST/ST radar and their interpretation // *Radio Sci.* 1990. V. 20. Pp. 1339–1347.

27. Володин Е. М., Дианский Н. А. Моделирование изменений климата в XX–XXII столетиях с помощью совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана // *Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана.* 2006. Т. 42. С. 291–306.

28. Дианский Н. А., Володин Е. М. Воспроизведение современного климата с помощью совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана // *Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана.* 2002. Т. 38. С. 824–840.

29. Володин Е. М. Модель общей циркуляции атмосферы и океана с углеродным циклом // *Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана.* 2007. Т. 43. С. 298–313.

30. Volodin E. M., Galin V. Ya., Gusev A. V., Diansky N. A., Smyshlyaev S. P., Iakovlev N. G. Earth system model of INM RAS // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 2010. V. 25, No. 5. Pp. 531–545.

31. Володин Е. М., Дианский Н. А., Гусев А. В. Воспроизведение современного климата с помощью совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана INMCM4.0. // *Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана.* 2010. Т. 46. С. 448–466.

32. Meehl G. A., Stocker T. F., Collins W. D., Friedlingstein P., Gaye A. T., Gregory J. M., Kitoh A., Knutti R., Murphy J. M., Noda A., Raper S., Watterson I., Weaver A. J., Zhao Z. Global climate projections // In: *Climate Change 2007. The physical science basis. Chapter 10.* Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

33. Kalnay E., Kanamitsu M., Kistler R., Collins W., Deaven D., Gandin L., Iredell M., Saha S., White G., Woollen J., Zhu Y., Leetmaa A., Reynolds B., Chelliah M., Ebisuzaki W., Higgins W., Janowiak J., Mo K. C., Ropelewski C., Wang J., Jenne R., Joseph D. The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project // *Bull. Amer. Met. Soc.* 1996. V. 77. Pp. 437–471.

34. Semenov V. A., Latif M., Dommenges D., Keenlyside N. S., Strehz A., Martin T., Park W. The impact of north Atlantic-Arctic

multidecadal variability on northern hemisphere surface air temperature // J. Climate. 2010. V. 23. Pp. 5668–5677.

35. Graham N. E. Decadal-scale climate variability in the tropical and North Pacific during the 1970s and 1980s: Observations and model results // Climate Dynamics. 1994. V. 10. Pp. 135–162.

36. Smyshlyaev S. P., Dvortsov V. L., Geller M. A., Yudin V. A. A two dimensional model with input parameters from a GCM: Ozone sensitivity to different formulation for the longitudinal temperature variation // J. Geophys. Res. 1998. V. 103. Pp. 28373–28387.

37. Галин В. Я., Смышляев С. П., Володин Е. М. Совместная химико-климатическая модель атмосферы // Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. 2007. Т. 43. С. 437–452.

38. Володин Е. М., Кострыкин С. В., Рябошапка А. Г. Моделирование изменения климата вследствие введения серосодержащих веществ в стратосферу // Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. 2011. Т. 47. С. 467–476.

39. Зубов В. А., Розанов Е. В., Розанова И. В., Егорова Т. А., Киселев А. А., Кароль И. Л., Шмутц В. Моделирование глобальных изменений озона и атмосферной динамики в XXI веке с помощью химико-климатической модели SOCOL // Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. 2011. Т. 47. С. 330–342.

40. Warner T. T. Numerical weather and climate prediction. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

41. Kobelkov G. M. Existence of a solution "in the large" for the 3D large-scale ocean dynamics equations // C. R. Acad. Sci. Paris. 2006. Ser. I 343. Pp. 283–286.

42. Shirikyan A. Exponential mixing for 2D Navier – Stokes equations perturbed by an unbounded noise // J. Math. Fluid. Mech. 2004. V. 6. Pp. 169–193.

43. Satoh M., Tomita H., Miura H., Iga S., Nasuno T. Development of a global cloud resolving model: A multi-scale structure of tropical convections // J. Earth Simulator. 2005. V. 3. Pp. 1–9.

44. Shukla J., Hagedorn R., Hoskins B., Kinter J., Marotzke J., Miller M., Palmer T. N., Slingo J. Revolution in climate prediction is both necessary and possible. A declaration at the World Modelling Summit for Climate Prediction // Bull. Amer. Met. Soc. 2009. V. 90. Pp. 175–178.

45. Tao W.-K., Chern J.-D., Atlas R., Randall D., Khairoutdinov M., Li J.-L., Waliser D. E., Hou A., Lin X., Peters-Lidard C., Lau W.,

Jiang J., Simpson J. A multiscale modeling system // Bull. Amer. Meteor. Soc. 2009. V. 90. Pp. 515–534.



ДИНАМИКА ОКЕАНА

О НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ОКЕАНИЧЕСКОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ¹

В последние годы выполнен ряд исследований по теории и методам решения нелинейных задач динамики бароклинического океана [1–4]. В данной работе дается дальнейшее развитие этой теории на основе метода расщепления сложных операторов задачи на простейшие. Методологической основой постановки задачи является построение уравнения для давления в океане, принципы которой уже изложены в линеаризированной модели [5]. Уравнения динамики океанических течений запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} - lv &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \Delta u, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + lu &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial v}{\partial z} + \mu \Delta v, \\
 \frac{\partial p}{\partial z} &= g\rho, \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{d\rho}{dt} + \Gamma w &= \frac{\partial}{\partial z} \nu_1 \frac{\partial \rho}{\partial z} + \mu_1 \Delta \rho.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u , v , w – компоненты вектора скорости; p и ρ – отклонения давления и плотности от стандартных значений \bar{p} и $\bar{\rho}$; $\Gamma = d\bar{\rho}/dz$;

¹ Доклады Академии наук СССР, 1967, т. 176, № 1, с. 80–84.

l – параметр Кориолиса. Заметим, что здесь ось z направлена от поверхности океана вглубь. Следуя работе [5], от уравнения для свободной поверхности ζ перейдем к условию, связывающему функции p и w :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + g\bar{\rho}w = Dp_0 - \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad \text{при } z = 0, \quad (2)$$

где $Dp_0 = \frac{\partial p_0}{\partial t} + u \frac{\partial p_0}{\partial x} + v \frac{\partial p_0}{\partial y}$; p_0 – атмосферное давление на уровне поверхности океана. К системе (1) присоединим условия

$$\nu \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\tau_{xz}}{\bar{\rho}}, \quad \nu \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\tau_{yz}}{\bar{\rho}}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = \gamma \quad \text{при } z = 0, \quad (3)$$

где τ_{xz} , τ_{yz} – заданные напряжения ветра на поверхности океана; γ – поток плотности за счет изменения температуры и солености поверхностного слоя воды – заданная функция координат и времени. На дне океана ставятся условия

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = H, \quad (4)$$

где $z = h(x, y)$ – уравнение поверхности дна океана, причем H – некоторая «средняя» глубина океана. Здесь предположено, что орография океана может быть учтена в рамках теории малых возмущений. Более полно вопрос учета орографии обсуждается в работе [1].

Предположим, что океан ограничен цилиндрической поверхностью S , на которой примем условие прилипания и равенства нулю потока плотности через границу S :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S, \quad (5)$$

где n – нормаль к поверхности S .

В качестве начальных данных примем

$$u = u^0, \quad v = v^0, \quad \rho = \rho^0 \quad \text{при } t = 0. \quad (6)$$

Решение задачи (1)–(6) будем искать при помощи разностного метода. С этой целью весь интервал $0 \leq t < T$ разобьем на частичные интервалы шириной $\Delta t = \tau$ и в пределах каждого такого интервала $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ рассматриваемую задачу приближенно представим в виде

двух. Сначала решим задачу о переносе субстанций u , v и ρ вдоль траекторий частиц

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (7)$$

при условии, что функции u , v и ρ заданы в тех точках границы, где вектор скорости направлен внутрь области D определения решения. В качестве начальных данных принимаются функции

$$u = u^j, \quad v = v^j, \quad \rho = \rho^j \quad \text{при } t = t_j. \quad (8)$$

Предположим, что решение задачи (7)–(8) в момент времени t_{j+1} найдено, и отметим его индексом $j + 1/3$. Тогда будем иметь $u^{j+1/3}$, $v^{j+1/3}$ и $\rho^{j+1/3}$. Затем полученные решения выберем в качестве начальных данных для решения задачи о нестационарной турбулентной диффузии на интервале $t_j \leq t \leq t_{j+1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \Delta u, & \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial v}{\partial z} + \mu \Delta v, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \nu_1 \frac{\partial \rho}{\partial z} + \mu_1 \Delta \rho \end{aligned} \quad (9)$$

при условиях на поверхности океана

$$\nu \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\tau_{xz}}{\bar{\rho}}, \quad \nu \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\tau_{yz}}{\bar{\rho}}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = \gamma \quad \text{при } z = 0 \quad (10)$$

и на дне

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = H. \quad (11)$$

На береговой поверхности S поставим условия

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S. \quad (12)$$

В качестве «начальных» данных при $t = t_j$ примем следующие:

$$u = u^{j+1/3}, \quad v = v^{j+1/3}, \quad \rho = \rho^{j+1/3} \quad \text{при } t = t_j. \quad (13)$$

Здесь предполагается, что

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u^j \frac{\partial}{\partial x} + v^j \frac{\partial}{\partial y} + w^j \frac{\partial}{\partial z},$$

u^j, v^j, w^j – известные функции координат.

После того как задача (7)–(8) решена и получены гидрологические характеристики u, v и ρ в момент времени t_{j+i} , которые обозначим $u^{j+2/3}, v^{j+2/3}, \rho^{j+2/3}$, примем эти значения теперь за «начальные» при $t = t_j$ для решения задачи об адаптации гидрологических полей. В результате приходим к новой задаче на том же временном интервале $t_j \leq t \leq t_{j+1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - lv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial t} + lu &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= g\rho, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \Gamma w &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

с условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + g\bar{\rho}w &= Dp_0 - u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{при } z = 0, \\ w &= u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{при } z = H \end{aligned} \quad (15)$$

и на поверхности S

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (16)$$

Начальные данные имеют вид

$$u = u^{j+2/3}, \quad v = v^{j+2/3}, \quad \rho = \rho^{j+2/3}. \quad (17)$$

В работе [6] в несколько более простой постановке доказана теорема о сходимости решения задач (7)–(8), (9)–(13) и (14)–(17) к точному решению задачи (1)–(6). Корректность задачи (7)–(8) и (9)–(13) хорошо исследована, а корректность задачи (14)–(17) была установлена в работе [5]. Уравнения (7) и (9) хорошо изучены, и решения этих уравнений при соответствующих граничных условиях и начальных данных находятся с помощью конечно-разностных методов, рассмотренных в литературе с достаточной полнотой.

Переходим к рассмотрению задачи динамического согласования полей (14)–(17). Систему уравнений (14) запишем в разностном виде, используя неявную аппроксимацию по t . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{u - u^{j+1/3}}{\tau} - lv &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{v - v^{j+1/3}}{\tau} + lu &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= g\rho, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\rho - \rho^{j+1/3}}{\tau} + \Gamma w &= 0.\end{aligned}\tag{18}$$

Здесь индекс $j + 1$ при неизвестных ради простоты опущен.

Из первых двух уравнений системы (18) выразим u и v через p . Тогда получим

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{1 + \alpha^2} \left[u^{j+1/3} + \alpha v^{j+1/3} - \frac{\tau}{\bar{\rho}} (p_x + \alpha p_y) \right], \\ v &= \frac{1}{1 + \alpha^2} \left[v^{j+1/3} - \alpha u^{j+1/3} - \frac{\tau}{\bar{\rho}} (p_y - \alpha p_x) \right],\end{aligned}\tag{19}$$

где $\alpha = \tau l$.

Из последних трех уравнений системы (18) найдем

$$\frac{1}{g\tau} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho^{j+1/3}}{\Gamma} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.\tag{20}$$

В уравнение (20) подставим u и v из (19) и учтем линейную зависимость параметра l от y . Тогда приходим к уравнению для p :

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial z} + m_0^2 \left(\Delta p + \beta \tau \frac{\partial p}{\partial x} \right) = f,\tag{21}$$

где

$$f = \frac{m_0^2}{\tau} \left[(u^{j+1/2} + \alpha v^{j+1/2})_x + (v^{j+1/2} - \alpha u^{j+1/2})_y \right] + g \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho^{j+1/2}}{\chi} \right),$$

$$m_0^2 = \frac{g\Gamma_0}{\bar{\rho}} \frac{\tau^2}{1 + \tau^2 l^2}, \quad \Gamma = \Gamma_0 \chi(z). \quad (22)$$

Граничными условиями для уравнения (21) будут следующие:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\bar{\rho}} p &= \delta^j \quad \text{при } z = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= g\rho^j - g\Gamma \left(u^j \frac{\partial h}{\partial x} + v^j \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad \text{при } z = H, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\delta^j = \frac{g}{\Gamma} \rho^j - \frac{1}{\bar{\rho}} \left[Dp_0 - \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right]^j. \quad (24)$$

На поверхности S поставим условия

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\bar{\rho}}{\tau} \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{u}^{j+1/3} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}^{j+1/3} \cdot \mathbf{s} \right). \quad (25)$$

После того как решение уравнения (21) при граничных условиях (23), (25) найдено, все необходимые гидрологические величины находятся при помощи уравнений системы (18) при уже известном давлении. Полученные на последнем этапе характеристики интерпретируются как приближенное решение задачи в момент времени t_{j+i} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян А. С. Основы теории и расчет океанических течений. 1966.
2. Михайлова Э. Н., Фельзенбаум А. И., Шапиро Н. Б. ДАН. 1966. Т. 168, № 4.
3. Stommel H. The Gulf-Stream a Physical and Dynamical Description. 1965.
4. Bryan K., Michael D. Tellus. 1966. V. 3.
5. Марчук Г. И. ДАН. 1967. Т. 173, № 6.
6. Демидов Г. В., Марчук Г. И. ДАН. 1966. Т. 170, № 5.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ОКЕАНИЧЕСКИХ ЦИРКУЛЯЦИЙ²

В последние годы в связи с интенсивным изучением динамики атмосферы и океана существенно повысился интерес к теории океанических циркуляций, основы которой заложены в ряде исследований. Наибольший интерес в настоящее время представляют собой исследования бароклинных моделей океана, которые более полно отражают главные особенности динамики морских течений. Наиболее содержательные математические модели течений в бароклинном океане рассмотрены в работах [1–3]. В настоящей работе предлагается метод численного решения задачи об океанических циркуляциях, основанный на расщеплении сложных операторов задачи на более простые.

Рассмотрим океан в форме цилиндра постоянной глубины H . Пусть в плоскости (x, y) береговая линия представляет собой полигон со сторонами, параллельными осям x и y : ось y направлена на север; x – на восток; z – вертикально вниз. Тогда в линеаризированной постановке приходим к следующей задаче [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - lv &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + lu &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= g\rho, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \Gamma w &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где p и ρ – отклонения давления и плотности от стандартных значений $\bar{p}(z)$, $\bar{\rho}(z)$, а $\Gamma = \frac{d\bar{p}}{dz}$ – заданная функция глубины. Остальные обозначения, используемые в (1), общеизвестны. Следуя работам [1–5], к системе уравнений (1) присоединим граничные условия

$$\frac{\partial p}{\partial t} + g\bar{\rho}w = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad w = 0 \quad \text{при } z = H,\tag{2}$$

² Доклады Академии наук СССР, 1969, т. 185, № 5, с. 1041–1044.

$$\mathbf{un} = 0 \quad \text{на } S, \quad (3)$$

где S – цилиндрическая поверхность с образующей – береговой линией, а \mathbf{n} – внешняя нормаль к S . В качестве начальных данных при $t = 0$ примем

$$u = u^0, \quad v = v^0, \quad p = p^0. \quad (4)$$

При сделанных выше предположениях решение задачи (1)–(4) будем искать при помощи метода ортогональных разложений [4]. С этой целью компоненты решения системы представим в виде рядов Фурье:

$$\begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p_m \\ u_m \\ v_m \end{pmatrix} \psi_m(z),$$

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} w_m \frac{1}{\Gamma} \frac{d\psi_m}{dz}, \quad (5)$$

$$\rho = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m \frac{d\psi_m}{dz},$$

где $\psi_m(z)$ – полный набор нетривиальных решений следующей спектральной задачи:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \frac{1}{\Gamma} \frac{d\psi}{dz} + \lambda \psi &= 0, \\ \frac{1}{\Gamma} \frac{d\psi}{dz} - \frac{1}{\bar{\rho}} \psi &= 0 \quad \text{при } z = 0; \\ \frac{1}{\Gamma} \frac{d\psi}{dz} &= 0 \quad \text{при } z = H. \end{aligned} \quad (6)$$

В работе [4] показано, что задача (6) определяет базис функций $\psi_m(z)$ и систему положительных собственных значений λ_m . В работе [5] приведены графики функций $\psi_m(z)$ для типичных случаев бароклинных стратификаций. Подставляя (5) в (1)–(4), приходим к набору задач для коэффициентов Фурье – функций u_m , v_m , w_m , p_m и ρ_m , уже не зависящих от z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m}{\partial t} - l v_m &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p_m}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_m}{\partial t} + l u_m &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p_m}{\partial y}, \\ \lambda_m \frac{\partial p_m}{\partial t} + \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} &= 0, \quad (m = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (7)$$

при граничных условиях

$$\mathbf{u}_m \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \sigma, \quad (8)$$

где σ – контур берега в плоскости xy , ограничивающий водоем. Начальными условиями будут

$$u_m = u_m^0, \quad v_m = v_m^0, \quad p_m = p_m^0. \quad (9)$$

Переходим к рассмотрению численного алгоритма решения задачи (7)–(9). С этой целью используем следующую аппроксимацию на интервале $0 \leq t \leq \bar{t}$ и, опуская индекс m , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{u - u^0}{\tau} - lv &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{v - v^0}{\tau} + lu &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \lambda \frac{p - p^0}{\tau} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь функции u , v и p без индексов сверху относятся к моменту времени $t = \tau$. Можно было бы воспользоваться аппроксимацией второго порядка точности по τ , однако это уже не связано с принципиальными трудностями. Исключая неизвестные u и v из системы (10) и предполагая l зависящей только от y , методами, развитыми в [6], приходим к уравнению

$$\Delta p + bp_x - \mu^2 p = -f, \quad (11)$$

где $f = \mu^2 p^0 - \frac{\bar{p}}{\tau}(D^0 + l\tau\Omega^0)$, $b = \tau \frac{dl}{dy}$, $\mu^2 = \lambda l^2 \bar{\rho} \frac{1+l^2\tau^2}{l^2\tau^2}$, $D^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y}$, $\Omega^0 = \frac{\partial v^0}{\partial x} - \frac{\partial u^0}{\partial y}$.

При выводе уравнения (11) использовался тот факт, что эффект изменения силы Кориолиса с широтой существен только для эволюции крупномасштабных и медленно протекающих процессов (6), т. е. при $l\tau \gg 1$. При помощи системы (10) граничное условие может быть записано в виде, разрешенном относительно p . В самом деле, на всех частях границы σ , параллельных оси y , имеем

$$p_x + l\tau p_y = p_x^0 \quad \text{на } \sigma_1, \quad (12)$$

а на частях, параллельных оси x ,

$$p_y - l\tau p_x = p_y^0 \quad \text{на } \sigma_2. \quad (13)$$

Для того чтобы граничные условия (12) и (13) были согласованы, предположим, что во всех угловых точках имеет место одновременное выполнение

$$p_x = 0, \quad p_y = 0. \quad (14)$$

Соотношения (14) выражают тот факт, что в окрестности угловых точек $u = v = 0$. Задача (11)–(14) является классической задачей Пуанкаре, которой при значительно более общих предположениях посвящен большой цикл исследований ([7–9] и др.). Нетрудно убедиться, что рассматриваемая задача имеет индекс дефекта, равный нулю, и, следовательно, принадлежит классу задач фредгольмового типа [8, 9]. Переходим к формулировке численного алгоритма. С этой целью область определения решения задачи (11)–(14) покроем равномерной квадратной сеткой с шагом $\Delta x = \Delta y = h$, предположив, что границы σ_1 и σ_2 совпадают с отрезками координатных линий данной сети. Далее продолжим наше решение за область определения решения на один шаг, предположив достаточную гладкость решения задачи. Поскольку давление на границе σ неизвестно, то его будем находить в результате решения задачи. Сначала исключим из рассмотрения точки, экстраполированные за область определения решения задачи. С этой целью будем поступать следующим образом. Зафиксируем некоторую узловую точку на границе и распишем в окрестности этой точки уравнение (11) в разностном виде, используя второй порядок аппроксимации. К этому уравнению присоединим разностный аналог граничного условия, второго порядка точности, также распианный для зафиксированной точки. Далее из полученной системы двух разностных уравнений исключим неизвестную в фиктивной точке. В результате приходим к разностному уравнению, которое содержит неизвестные в четырех соседних точках, включая три граничные. Аналогичным образом строятся разностные аналоги для уравнений в окрестности угловых точек. В этом случае к разностному уравнению присоединяются разностные аналоги второго порядка точности двух граничных условий (14) и затем производится исключение значений p в двух фиктивных точках. Важно отметить, что при таком построении разностных уравнений полностью сохраняется пятиточечная структура разностного аналога эллиптического оператора внутри

области определения и на границе, изменяются лишь коэффициенты при неизвестных при рассмотрении граничных точек области σ . В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\Lambda\varphi = g, \quad (15)$$

где φ и g – векторы, компонентами которых являются значения p во всех внутренних и граничных точках сеточной области, а Λ – матрица коэффициентов. Принципиально важным является тот факт, что матрица Λ может быть представлена в виде суммы двух матриц $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, где матрица Λ_1 , действуя на вектор φ , порождает набор независимых систем уравнений якобиева типа, каждое из которых объединяет лишь решения по каждой строке, а Λ_2 порождает системы решений только по столбцам, и обращение таких систем эффективно с помощью факторизации.

Таким образом, задача Пуанкаре в нашем случае редуцировалась к системе уравнений вида

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)\varphi = g. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь сеточное евклидово пространство векторов $\varphi \in R$ со скалярным произведением.

Лемма 1. Матрицы Λ_1 и Λ_2 положительные, т. е. $(\Lambda_1\varphi, \varphi) > 0$.

Решение уравнения (16) будем находить при помощи итерационного метода [4]:

$$B_j \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau_j} + \Lambda\varphi^j = g, \quad \varphi^0 = 0, \quad (17)$$

где

$$B_j = \left(E + \frac{\sigma_j}{2}\Lambda_1\right) \left(E + \frac{\sigma_j}{2}\Lambda_2\right),$$

а τ_j и σ_j – пока произвольные положительные параметры релаксационного процесса. Выбор параметра τ_j , при фиксированном σ_j осуществим на основе метода минимальных невязок [10], который модифицируем следующим образом. Введем в рассмотрение вектор невязки $\xi^j = \Lambda\varphi^j - g$. Тогда для невязки ξ^j получим уравнения

$$\xi^{j+1} = \xi^j - \tau_j \Lambda B_j^{-1} \xi^j, \quad \xi^0 = -g. \quad (18)$$

Рассмотрим теперь скалярное произведение (ξ^{j+1}, ξ^{j+1}) и с учетом (18) будем иметь

$$(\xi^{j+1}, \xi^{j+1}) = q_j(\xi^j, \xi^j), \quad (19)$$

где

$$q_j = 1 - 2\tau_j \frac{(\Lambda B_j^{-1} \xi^j, \xi^j)}{(\xi^j, \xi^j)} + \tau_j^2 \frac{(\Lambda B_j^{-1} \xi^j, \Lambda B_j^{-1} \xi^j)}{(\xi^j, \xi^j)}.$$

Из условия минимума $q_j(\tau)$ получим

$$\tau_j = \frac{(\Lambda B_j^{-1} \xi^j, \xi^j)}{(\Lambda B_j^{-1} \xi^j, \Lambda B_j^{-1} \xi^j)}. \quad (20)$$

Рассмотрим схему реализации итерационного процесса. Обозначим $y^{j+1} = B_j^{-1} \xi^j$, $z^{j+1} = \Lambda y^{j+1}$. Тогда по заданному ξ^j находится вспомогательная функция y^{j+1} из уравнения

$$B_j y^{j+1} = \xi^j. \quad (21)$$

Это уравнение редуцируется к системе

$$\left(E + \frac{\sigma_j}{2} \Lambda_1\right) y^{j+1/2} = \xi^j, \quad \left(E + \frac{\sigma_j}{2} \Lambda_2\right) y^{j+1} = y^{j+1/2}. \quad (22)$$

После этого находится вспомогательная функция z^{j+1} и параметр

$$\tau_j = \frac{(z^{j+1}, \xi^j)}{(z^{j+1}, z^{j+1})}. \quad (23)$$

Новое приближение для φ^{j+1} находится в виде

$$\varphi^{j+1} = \varphi^j - \tau_j y^{j+1}. \quad (24)$$

До сих пор предполагалось, что параметр σ_j произвольный. Выбор этого параметра целесообразно производить в виде $\sigma_j = \tau_{j-1}$. В качестве начального оператор B_0 выберем в форме, не зависящей от σ_1 : $B_0 = \Lambda_1 \Lambda_2$.

Теорема. С учетом леммы 1 итерационный процесс (17) сходится к точному решению системы (15).

Доказательство теоремы может быть проведено, следуя работам [10, 11].

Автор выражает благодарность Р. А. Кордзадзе за обсуждение некоторых аспектов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линейкин П. С. ДАН. 1955. Т. 105, № 6.
2. Саркисян А. С. Основы теории и расчет океанических течений. 1966.
3. Bryan K. J. Atmospheric Sci. 1963. V. 594.
4. Марчук Г. И. ДАН. 1967. Т. 173, № 6.
5. Марчук Г. И., Кочергин В. П. Метеорология и гидрология. 1968. № 2.
6. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Л., 1967.
7. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. 1948.
8. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. Новосибирск, 1967.
9. Хведелидзе В. В. Тр. Тбилисс. матем. инст. АН ГрузССР. 1956. Т. 23, № 3.
10. Красносельский М. А., Крейн С. Т. Матем. сборн. 1952. Т. 31(73), № 315.
11. Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А. ДАН. 1968. Т. 181, № 6.

О МЕТОДЕ ВЫДЕЛЕНИЯ БАРОТРОПНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ОКЕАНА³

В [1] сформулирован общий подход к решению задач динамики океана и атмосферы на основе метода выделения баротропной составляющей (метода ВБС), который оказался весьма эффективным при математическом моделировании различных задач динамики океана [1–3]. В данной работе на примере линеаризованных задач дается обоснование использования метода ВБС для нахождения приближенного решения и доказательства корректности задач гидротермодинамики океана.

1. Пусть $D \subset \{z = 0\}$ – область с границей $\gamma \in C^{2+\alpha}$ в пространстве переменных (x, y, z) . Направим ось z вертикально вниз и определим область $Q = D \times [0, 1]$ с боковой поверхностью $\Gamma = \gamma \times [0, 1]$ и функцию $H(x, y) \in C^{1+\alpha}(D) : \min_D H > 0$ – дно океанического бассейна.

³ Доклады Академии наук СССР, 1979, т. 248, № 4, с. 836–839. Совместно с М. А. Бубновым.

F -задача. В области $Q_T = Q \times [0, T]$ найти функции $w = (U, \rho, \zeta)$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений [1]

$$\frac{1}{gH}U_t + LU - (\nu U_z)_z - \mu \Delta U = -P(\zeta, \rho) + f, \quad (1)$$

$$H\rho_t + \delta H \int_z^1 \operatorname{div} U \, dz - z\delta \nabla H U - (\nu_1 \rho_z)_z - \mu_1 \Delta \rho = 0, \quad (2)$$

$$\zeta_t + \operatorname{div} \int_0^1 U \, dz = 0, \quad (3)$$

граничным и начальным условиям

$$\nu U_z|_{z=0} = \nu_1 \rho_z|_{z=0,1} = 0; \quad U|_{\Gamma} = \mu_1 \frac{\partial \rho}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0;$$

$$U|_{z=1} = 0 \quad \text{или} \quad U_z|_{z=1} = 0, \quad (4)$$

$$w|_{t=0} = (U^0, \rho^0, \zeta^0) = w^0 : \int_Q H \rho^0 \, dQ = \int_D \zeta^0 \, dD = 0. \quad (5)$$

В (1)–(5) $U = H(u, v)(x, y, z, t)$; $\nu, \mu, \nu_1, \mu_1, \delta(zH)$ – известные положительные величины класса $C^{1+\alpha}(Q)$;

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -l/gH \\ l/gH & 0 \end{bmatrix}; \quad l \in C^{1+\alpha}(D);$$

$$P(\zeta, \rho) = \nabla \zeta + \int_0^z (H \nabla \rho - z \nabla H \rho_z) \, dz;$$

$n = (n_1, n_2)$ – внешняя нормаль к γ ; операторы $\operatorname{div}, \nabla, \delta$ действуют по переменным x и y . Остальные обозначения соответствуют работе [1]. Удобно ввести число k :

$$k = \begin{cases} 2, & \text{если в (4) } U|_{z=1} = 0; \\ 1, & \text{если в (4) } U_z|_{z=1} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Методом ϵ -регуляризации [4] доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой $f \in L_2(Q_T)$ и $w^0 \in W_{2,Q}^1 \times W_{2,Q}^1 \times W_{2,D}^1$ существует единственное решение F -задачи (1)–(5) $w \in W_{2,Q_T}^{2,1} \times W_{2,Q_T}^{2,1} \times W_{2,D_T}^1$. Справедлива оценка

$$\|U\|_{2,1,Q_T}^2 + \|\rho\|_{2,1,Q_T}^2 + \|\zeta\|_{1,D_T}^2 \leq c (\|f\|_{Q_T}^2 + \|w^0\|_{1,Q}^2). \quad (7)$$

Доказательство. Добавим в левую часть (3) слагаемое $-\epsilon \Delta \zeta^\epsilon$, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, а в (4) – соответствующее граничное условие $-\epsilon \frac{\partial \zeta^\epsilon}{\partial n} \Big|_\gamma = 0$. Согласно результатам работы [5] при $\epsilon > 0$ существует единственное решение $w^\epsilon = (U^\epsilon, \rho^\epsilon, \zeta^\epsilon)$, получившейся ϵF -задачи. Сходимость w^ϵ при $\epsilon \rightarrow 0$ к решению F -задачи следует из равномерной по ϵ оценки

$$\|U^\epsilon\|_{2,1,Q_T}^2 + \|\rho^\epsilon\|_{2,1,Q_T}^2 + \|\zeta^\epsilon\|_{1,D_T}^2 + \epsilon \|\Delta \zeta^\epsilon\|_{Q_T}^2 \leq c. \quad (8)$$

Причем можно показать, что

$$\|U - U^\epsilon\|_{2,1,Q_T}^2 + \|\rho - \rho^\epsilon\|_{2,1,Q_T}^2 + \|\zeta - \zeta^\epsilon\|_{1,D_T}^2 \leq c\epsilon. \quad (9)$$

2. Воспользуемся методом ВБС и представим решение w в виде [1]

$$w = (\bar{U}, 0, \zeta) + (U', \rho, 0), \quad \bar{U} = \int_0^1 U dz, \quad U' = U - \bar{U}. \quad (10)$$

Нетрудно показать [1], что F -задача эквивалентна системе уравнений для баротропной составляющей $\bar{w} = (\bar{U}, \zeta)$:

$$\frac{1}{gH} \bar{U}_t + L\bar{U} + \nabla \zeta - \mu \Delta \bar{U} - \bar{f} = \nu U'_z|_{z=1} - \overline{P(0, \rho)} \equiv \bar{F}, \quad (11)$$

$$\zeta_t + \operatorname{div} \bar{U} = 0, \quad \bar{U}|_\gamma = 0, \quad \bar{w}|_{t=0} = (\bar{U}^0, \zeta^0) \equiv \bar{w}^0, \quad (12)$$

а также бароклиной составляющей $\bar{w} = (\bar{U}, \zeta)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{gH} U'_t + L U' - (\nu U'_z)_z - \mu \Delta \bar{U}' - f' = \\ \nu U'_z|_{z=1} + \overline{P(0, \rho)} - P(0, \rho), \end{aligned} \quad (13)$$

$$H\rho_t + \delta H \int_z^1 \operatorname{div}(U' + \bar{U}) dz + z\delta \nabla H(U' + \bar{U}) - (\nu_1 \rho_{z'})_z - \mu_1 \Delta \rho = 0, \quad (14)$$

$$\nu U'_z|_{z=0} = \nu_1 \rho_z|_{z=0,1} = 0; \quad U'_z|_{z=1} = -\bar{U} \quad \text{или} \quad \nu U'_z|_{z=1} = 0; \quad (15)$$

$$U'|_{\Gamma} = \mu_1 \frac{\partial \rho}{\partial n}|_{\Gamma} = 0; \quad w'|_{t=0} = (U^0, \rho^0) = w^0. \quad (16)$$

Разобьем интервал $[0, T]$ на J подынтервалов длиной τ : $\tau J = T$ и $Q_T = \cup_{j=0}^{J-1} Q(t_j, t_{j+1})$, где $Q(t_j, t_{j+1}) = Q \times [\tau j, \tau(j+1)]$. Определим в Q_T функции $w^\tau = (\bar{U}^\tau + U'^\tau, \rho^\tau, \zeta^\tau)$ – приближенное решение F -задачи, которое в каждом из цилиндров $Q(t_j, t_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, J-1$, определяется после последовательного решения двух задач. Сначала задачи (11)–(12), где $\bar{F}^\tau(t) = \bar{F}(t - \tau)$, причем $\bar{F}^\tau(t) = 0$ при $0 \leq t < \tau$, а затем задачи (13)–(16), где \bar{U}^τ – известная функция. Методы решения задач (11)–(12) и (13)–(16) изложены в [1].

Теорема 2. Пусть $f, f_t \in L_2(0, T; W_{2,Q}^1)$. Тогда определенная выше последовательность w^τ при $\tau \rightarrow 0$ сходится к решению F -задачи w . Причем

$$\|U - U^\tau\|_{2,1,Q_T}^2 + \|\rho - \rho^\tau\|_{2,1,Q_T}^2 + \|\zeta - \zeta^\tau\|_{1,D_T}^2 \leq c\tau^k, \quad (17)$$

где $c > 0$ не зависит от τ и k определено в (6).

Доказательство. Достаточно заметить, что функции $\tilde{w} = w - w^\tau$ решают F -задачу с правой частью

$$\tilde{f} = \bar{F}^\tau(t - \tau) - \bar{F}^\tau(t) = \int_t^{t-\tau} F_t^\tau dt$$

и нулевыми начальными условиями, а затем воспользоваться оценкой (7) для w_t^τ .

3. K -задача. При решении многих задач динамики океана в (1) можно полагать $\mu = 0$ [1, 2, 6]. Рассматривая билинейную форму, соответствующую F -задаче, и принимая во внимание оценку (20), можно показать, что решение F -задачи w^μ при $\mu \rightarrow 0$ сходится к функциям $w = (U, \rho, \zeta)$, удовлетворяющим уравнениям (1)–(3) при $\mu = 0$, начальным данным (5) и граничным условиям

$$\nu U_z|_{z=0} = \nu_1 \rho_z|_{z=0,1} = 0; \quad \int_0^1 U n dz = 0 \quad \text{на } \gamma; \quad (18)$$

$$\delta H \int_z^1 U n dz - \mu_1 \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \gamma; \quad U|_{z=1} = 0 \text{ или } U_z|_{z=1} = 0. \quad (19)$$

Задачу (1)–(3) ($\mu = 0$) (6), (18)–(19) назовем K -задачей.

Воспользовавшись методом ВБС, находим, что в данном случае функции $\bar{w} = (\bar{U}, \bar{\zeta})$ решают задачу (11), (12), где $\mu = 0$, и в (12) вместо $\bar{U}|_\gamma = 0$ имеем граничное условие $\bar{U}n|_\gamma = 0$. Функции $w' = (U', \rho)$ решают задачу (13)–(16), где $\mu = 0$ и граничное условие в (16) следует заменить на условие

$$\delta H \int_z^1 U' n dz - \mu_1 \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

Теорема 3. Пусть функции $\partial_t^n f \in L_2(0, T; W_{2,Q}^1)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$; $\partial_t^N f \in L_2(Q_T)$ и $w^0 \in W_{2,Q}^N \times W_{2,Q}^{2,N} \times W_{2,Q}^N$, $\nabla U_{zz}^0 \in L_2(Q)$, где $N = k$ таковы, что выполняются условия согласования до порядка N [5]. В этом случае существует единственное решение K -задачи $w \in W_{2,Q_T}^{1,k} \times W_{2,Q_T}^{2,k} \times W_{2,D_T}^{2,k}$, $\nabla U_{zz} \in L_2(Q_T)$, представимое в виде (10). Справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|\bar{U}\|_{1,k,D_T}^2 + \|\zeta\|_{2,k,D_T}^2 + \|U'\|_{1,k,Q_T}^2 + \|\nabla U'_{zz}\|_{Q_T}^2 + \|\rho\|_{2,k,Q_T}^2 \leq \\ & \leq c \left(\|f\|_{1,Q_T}^2 + \sum_{n=0}^k (\|\partial_t^n w|_{t=0}\|_Q^2 + \|\partial_t^n f\|_{Q_T}^2) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Доказательство. Первые оценки для $\partial_t^n w$, $n = 0, 1, \dots, k$, получаются из (1)–(3) методом энергетических неравенств [7, 8]. Действуя на уравнение (11) ($\mu = 0$) оператором rot , на уравнение (13) ($\mu = 0$) и соответствующие граничные условия – операторами rot и div , а затем исключая из полученных соотношений при помощи уравнения (14) член $\Delta \rho$, получим уравнения, связывающие функции $\bar{\Omega} = (\text{rot} \bar{U}, \text{div} \bar{U})$, $\Omega' = (\text{rot} U', \text{div} U')$, из которых с учетом первых оценок методом энергетических неравенств получаем оценки для Ω' и $\bar{\Omega}$ в $L_2(Q_T)$ и $L_2(D_t)$ соответственно. Если воспользоваться теперь результатами работ [7, 8], то получим неравенство (20). Существование решения K -задачи можно получить методом продолжения по параметру $\lambda \in [0, 1]$ [7] на основе равномерной оценки (20), при этом w^λ решение λK -задачи, для которой правая часть в (1) ($\mu = 0$) имеет вид

$-\nabla\zeta^\lambda - \lambda P(0, \rho^\lambda) + f$. Последовательная разрешимость двух задач при $\lambda = 0$ может быть доказана методом Галеркина (с выбором базиса из собственных функций оператора $-\partial_z \nu \partial_z$) на основании оценки (20) и результатов работы [9], а также на основании результатов работ [5, 7].

Как и в случае F -задачи, метод ВБС можно использовать для приближенного решения K -задачи.

Теорема 4. Пусть условия теоремы 3 выполнены для $N = k + 1$. В этом случае последовательность приближенных решений K -задачи w^τ , $0 < \tau < T$, полученная на основе метода ВБС (см. теорему 2 и выше) при $\tau \rightarrow 0$, сходится к решению K -задачи w . Причем

$$\begin{aligned} & \|\bar{U} - \bar{U}^\tau\|_{1,k,D_T}^2 + \|\zeta - \zeta^\tau\|_{2,k,D_T}^2 + \|U' - U'^\tau\|_{1,k,Q_T}^2 + \\ & + \|\nabla(U' - U'^\tau)_{zz}\|_{Q_T}^2 + \|\rho - \rho^\tau\|_{2,k,Q_T}^2 \leq c\tau^k. \end{aligned} \quad (21)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
2. Марчук Г. И., Залесный В. Б., Кузин В. И. Изв. АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1975. Т. 11, № 12. С. 1294.
3. Кордзадзе А. А. ДАН. 1977. Т. 237, № 1. С. 52.
4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
5. Солонников В. А. Тр. МИАН. 1965. Т. 83.
6. Кочергин В. П. Теория и методы расчета океанических течений. М.: Наука, 1978.
7. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
8. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
9. Friedrichs K. O. Comm. Pure and Appl. Math. 1954. V. 7, № 345.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПРИЛИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ В ОКРАИННЫХ МОРЯХ⁴

Предлагается новый метод расчета приливных колебаний уровня и осредненных по вертикали скоростей приливного течения. В его основе лежит использование метода расщепления, что позволяет свести решение системы уравнений движения, записанных с учетом горизонтального турбулентного трения, и уравнения неразрывности к системе одномерных уравнений, разрешимой методом прогонки. Приводятся исследование устойчивости алгоритма и пример расчета приливных движений в конкретных физико-географических условиях. Показано, что рассчитанные значения приливных колебаний уровня в различных пунктах побережья Северного моря удовлетворительно согласуются с данными наблюдений.

Введение

В практике приливных расчетов большое распространение получили численные методы интегрирования приливных уравнений. Среди них наиболее часто используются два метода.

Первый из этих методов [1, 2] сводится к интегрированию уравнения для амплитуд приливных колебаний уровня, полученного с помощью преобразований исходной системы уравнений движения и неразрывности. Это уравнение имеет однозначное решение в том случае, если внутри исследуемой области, на контуре которой приливные колебания уровня считаются заданными, определитель, составленный из коэффициентов уравнений движения, не обращается в нуль. Указанное требование может не выполняться, если исследуемое море, глубина которого превышает толщину придонного пограничного слоя, располагается в окрестности «критических» широт, где параметр Кориолиса совпадает по величине с угловой скоростью приливной волны. Как показано в [3, 4], возникшее затруднение можно преодолеть, если обобщить используемый метод на случай учета горизонтального турбулентного трения. К недостаткам этого метода можно отнести также необходимость задания приливных колебаний уровня на

⁴Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана, 1969, т. 5, № 7, с. 694–703. Совместно с Б. А. Каганом, Р. Э. Тамсалу.

твердом контуре, аппроксимирующем береговую линию. Тем самым существенно ограничивается область применения метода (в ряде случаев колебания уровня на берегу представляют основной интерес) и, кроме того, затрудняется проверка результатов расчета. Последнее обстоятельство, как известно, связано с тем, что в открытом море прямых измерений скорости и приливных колебаний уровня все еще недостаточно, а на берегу имеется довольно частая сеть пунктов мареографных измерений уровня.

Во втором методе [5, 6] значения приливных колебаний уровня и скорости приливного течения получаются как предельные решения исходной системы уравнений движения и неразрывности. Интегрирование уравнений производится с помощью метода стационарирования. Решение считается найденным, когда колебания уровня и скорости становятся периодическими. Это позволяет, во-первых, отказаться от задания условия периодичности изменения приливных движений во времени и, во-вторых, учесть эффект нелинейности.

Система уравнений движения (в которой сохраняются нелинейные члены, но отсутствуют члены, характеризующие горизонтальное турбулентное трение) и уравнение неразрывности образуют систему уравнений гиперболического типа. Она решается при следующих граничных условиях: на твердой части контура нормальная компонента средней по вертикали скорости полагается равной нулю, а на жидком контуре колебания уровня считаются заданными. Кроме того, в начальный момент времени компоненты скорости и колебания уровня считаются известными функциями пространственных координат.

В приливном потоке вектор скорости приливного течения меняет свое направление, так что в одни моменты времени он оказывается направленным внутрь исследуемой области, а через половину приливного периода – вне ее. В последнем случае значения приливных характеристик на жидком контуре нельзя считать заданными, так как они формируются под влиянием приливных движений внутри области и, следовательно, зависят от решения внутри области. Если не учитывать этого обстоятельства, то может возникнуть рассогласование граничных условий и приливных движений внутри исследуемой области, а это повлечет за собой появление паразитарных гравитационных волн [7, 8]. Для того чтобы исключить эти волны, приходится использовать сильное сглаживание, что соответствует введению большой искусственной вязкости. При этом могут отфильтроваться не только мелкомасштабные паразитарные возмущения, но и некоторые

реальные особенности пространственного распределения приливных движений.

В настоящей работе будет рассмотрен другой метод расчета приливных движений в окраинных морях, который позволяет рассчитывать поле приливных колебаний уровня (в том числе колебания уровня на берегу), а также поле осредненной по вертикали скорости приливного течения и который при этом свободен от указанного выше недостатка переопределения граничных условий.

Рассмотрим окраинное море небольшой пространственной протяженности так, чтобы эффектом приливообразующих сил можно было пренебречь. Зафиксируем начало координат на дне моря, ось x направим вдоль параллели на восток, ось y – вдоль меридиана на север и ось z – вертикально вверх.

В окраинном море формирование приливных движений происходит в результате взаимодействия сил горизонтального градиента давления, Кориолиса, инерции, придонного и горизонтального турбулентного трения. Поэтому, пренебрегая нелинейными членами, запишем уравнения движения и неразрывности в следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -gD \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{r}{D^2} |U^2 + V^2|^{1/2} U + A \nabla^2 U, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -gD \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{r}{D^2} |U^2 + V^2|^{1/2} V + A \nabla^2 V, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

где U и V – компоненты полного приливного потока в направлении осей x и y соответственно; ζ – вертикальное смещение уровня моря; D – глубина моря; r – коэффициент придонного трения; A – коэффициент горизонтальной турбулентной вязкости; f – параметр Кориолиса;

g – ускорение силы тяжести; t – время; ∇^2 – плоский оператор Лапласа⁴.

⁴Заметим, что при записи уравнений движения сделано предположение о пропорциональности напряжения придонного трения квадрату средней скорости приливного течения. Коэффициент пропорциональности (коэффициент трения), строго говоря, не является постоянной величиной. Он связан функциональной зависимостью с отношением скорости, измеренной на фиксированном горизонте в придонном слое, к осредненной в пределах всей толщи моря скорости приливного течения [9].

Откажемся от использования условия периодичности изменения U , V и ζ во времени и перейдем к решению задачи с начальными условиями. При этом будем считать, что в начальный момент времени (при $t = 0$) поля приливных течений и колебаний уровня известны. Это эквивалентно заданию следующего условия:

$$t = 0, \quad U = U^0, \quad V = V^0, \quad \zeta = \zeta^0, \quad (4)$$

где U^0 , V^0 и ζ^0 – заданные функции пространственных координат x , y .

Далее примем, что исследуемая область ограничена замкнутым контуром Γ , одна часть которого охватывает береговую линию, а другая – жидкую границу между данным и соседним водными бассейнами.

На твердой части контура Γ_1 удовлетворим условию прилипания

$$U|_{\Gamma_1} = 0, \quad V|_{\Gamma_1} = 0, \quad (5)$$

а на жидком контуре Γ_2 будем считать заданным расход жидкости

$$U|_{\Gamma_2} = U(x, y, t), \quad V|_{\Gamma_2} = V(x, y, t). \quad (6)$$

Во избежание накопления или убыли воды в бассейне потребуем, чтобы в среднем за приливной период общий расход жидкости через жидкий контур Γ_2 не отличался от нуля:

$$\int_0^T dt \int_{\Gamma_2} U_n dS = 0, \quad (7)$$

где U_n – нормальная к контуру компонента полного приливного потока; dS – элемент жидкого контура Γ_2 ; T – период прилива.

Это отношение, в свою очередь, зависит от внешних параметров, определяющих вертикальную структуру приливного потока: горизонтальных градиентов уровня, глубины, гидродинамической шероховатости морского дна, широты места и угловой скорости приливной волны. Так как перечисленные выше параметры могут меняться в пространстве и во времени, то их изменение должно, очевидно, повлечь за собой изменение коэффициента трения r . В настоящей работе это обстоятельство не учитывается. Для задания коэффициента придонного трения, так же как и коэффициента горизонтальной турбулентной вязкости, в работе используются значения этих коэффициентов, найденные в результате численных экспериментов в условиях Северного моря [10], на примере которого испытывается предлагаемый метод.

Построение алгоритма

Решение системы уравнений (1)–(3), удовлетворяющей краевым условиям (4)–(6) и интегральному соотношению (7), будем отыскивать с помощью метода расщепления [8]. Для этого разобьем исследуемый промежуток времени на частные интервалы τ . Обозначим номер шага через n и введем вспомогательный шаг $n + 1/2$. Тогда, расщепляя уравнения движения (1), (2) с учетом возможности дальнейшего использования неявной схемы интегрирования уравнений, получаем

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1/2} - U^n}{\tau} - \frac{f}{2} V^n = -\frac{gD}{2} \frac{\partial \zeta^n}{\partial x} - R^n U^n + \\ + \frac{A}{2} \left(\frac{\partial^2 U^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^{n+1/2}}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{V^{n+1/2} - V^n}{\tau} + \frac{f}{2} U^{n+1/2} = -\frac{gD}{2} \frac{\partial \zeta^n}{\partial y} - R^n V^n + \\ + \frac{A}{2} \left(\frac{\partial^2 V^{n+1/2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V^n}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{V^{n+1} - V^{n+1/2}}{\tau} + \frac{f}{2} U^{n+1/2} = -\frac{gD}{2} \frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial y} - R^{n+1/2} V^{n+1} + \\ + \frac{A}{2} \left(\frac{\partial^2 V^{n+1/2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V^{n+1}}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^{n+1/2}}{\tau} - \frac{f}{2} V^{n+1} = -\frac{gD}{2} \frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial x} - R^{n+1/2} U^{n+1} + \\ + \frac{A}{2} \left(\frac{\partial^2 U^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^{n+1/2}}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь целыми индексами отмечены значения функций на границах временных интервалов, а дробными – вспомогательные функции. Кроме того, в (8)–(11) введено следующее обозначение:

$$R = \frac{r}{2D^2} |U^2 + V^2|^{1/2}. \quad (12)$$

Для определения горизонтальных градиентов уровня в момент $n+1$ воспользуемся уравнением неразрывности (3), для чего продифференцируем его по x и y и представим оператор $\partial/\partial t$ в виде его разностного аналога. Тогда, относя производные от дивергенции полного

приливного потока к промежуточному моменту $n + 1/2$ и заменяя $\partial^2 U^{n+1/2}/\partial x^2$ и $\partial^2 V^{n+1/2}/\partial y^2$ соответственно на

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^n}{\partial x^2} \right) \text{ и } \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V^{n+1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V^n}{\partial y^2} \right),$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial x} &= \frac{\partial \zeta^n}{\partial x} - \tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^n}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 V^{n+1/2}}{\partial x \partial y} \right], \\ \frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial y} &= \frac{\partial \zeta^n}{\partial y} - \tau \left[\frac{\partial^2 U^{n+1/2}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V^{n+1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V^n}{\partial y^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим теперь соотношения (13) в (10), (11). В результате простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{V^{n+1} - V^{n+1/2}}{\tau} + \frac{f}{2} U^{n+1/2} &= -\frac{gD}{2} \left[\frac{\partial \zeta^n}{\partial y} - \tau \left(\frac{\partial^2 U^{n+1/2}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V^n}{\partial y^2} \right) \right] + \\ &+ \frac{A}{2} \frac{\partial^2 V^{n+1/2}}{\partial x^2} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{gD}{2} \tau + A \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - R^{n+1/2} \right] V^{n+1}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} - \frac{f}{2} V^{n+1} &= -\frac{gD}{2} \left[\frac{\partial \zeta^n}{\partial x} - \tau \left(\frac{\partial^2 V^{n+1/2}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U^n}{\partial x^2} \right) \right] + \\ &+ \frac{A}{2} \frac{\partial^2 U^{n+1/2}}{\partial y^2} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{gD}{2} \tau + A \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - R^{n+1/2} \right] U^{n+1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, систему уравнений (1)–(3) удалось представить в виде последовательности одномерных задач (8), (9), (14), (15), которые при заданных краевых условиях (4)–(6) легко решаются методом прогонки [11].

Решение исходной системы уравнений считается найденным, когда колебания уровня и скорости приливного течения становятся периодическими. Критерием установления периодического режима служит условие невыхода разности значений функции в два момента времени, отстоящие друг от друга на приливной период, за пределы требуемой точности.

Исследование устойчивости алгоритма

Уравнения (8), (9), (13)–(15) представляют собой систему нелинейных уравнений с переменными коэффициентами, удовлетворяющую на контуре области граничным условиям (5), (6). В настоящее время законченная теория исследования устойчивости таких систем отсутствует, поэтому для получения даже предварительных оценок критериев вычислительной устойчивости приходится мириться с заданием определенных упрощающих предположений.

Следуя принятой на практике процедуре исследования устойчивости, допустим, что $R = \text{const}$ и $D = \text{const}$. В этом случае уравнения линейны и имеют постоянные коэффициенты.

Далее, поскольку природа граничных условий (5), (6) такова, что их нельзя заменить условием периодичности, позволяющим при анализе устойчивости применить ряды Фурье, ограничимся рассмотрением моря бесконечной пространственной протяженности, когда применение рядов (или интегралов) Фурье является оправданным.

Кроме того, для упрощения анализа вместо выписанной выше системы уравнений рассмотрим эквивалентную ей, но вместе с тем более простую систему уравнений (8), (9), (14), (15), дополненную уравнением неразрывности. Последнее запишем в виде

$$\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\tau} = -\frac{\partial U^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial V^{n+1/2}}{\partial y}. \quad (16)$$

Введем пространственный шаг h и конечно-разностные горизонтальные координаты k и l , причем $x = kh$, $y = lh$. Заменяя дифференциальные операторы, содержащиеся в (8), (9), (14)–(16), их разностными аналогами, получаем систему линейных алгебраических уравнений, решение которой будем искать в виде ряда Фурье.

Пусть каждый член ряда можно представить в виде гармоники

$$\Phi^n = \bar{\Phi}^n e^{ik\alpha + il\beta}, \quad (17)$$

где Φ^n – любая из функций U , V , ζ ; $\bar{\Phi}^n$ – ее амплитуда.

Подставим (17) в (8), (9). В результате находим

$$\bar{U}^{n+1/2} = a_1 \bar{U}^n + b_1 \bar{V}^n + ic_1 \bar{\zeta}^n, \quad (18)$$

$$\bar{V}^{n+1/2} = a_2 \bar{V}^n + b_2 \bar{U}^n + ic_2 \bar{\zeta}^n, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1 - R\tau + 2\frac{A\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - 2\frac{A\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}; \\
 a_2 &= \frac{f\tau a_1}{2 \left(1 - 2\frac{A\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}; \\
 b_1 &= \frac{f\tau}{2 \left(1 - 2\frac{A\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)}; \\
 b_2 &= \frac{1 - R\tau + 2\frac{A\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\beta}{2} - \frac{f\tau}{2} b_1}{1 - 2\frac{A\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}; \\
 c_1 &= -\frac{gD\tau \sin \alpha}{2h \left(1 - 2\frac{A\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)}; \\
 c_2 &= -\frac{gD\tau \sin \beta + f\tau h c_1}{2h \left(1 - 2\frac{A\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

Теперь подставим (17) в (14)–(16) и с помощью соотношений (18), (19) исключим функции с дробным индексом. Тогда будем иметь

$$\bar{U}^{n+1} = A_1 \bar{U}^n + B_1 \bar{V}^n + iC_1 \bar{\zeta}^n, \quad (20)$$

$$\bar{V}^{n+1} = A_2 \bar{U}^n + B_2 \bar{V}^n + iC_2 \bar{\zeta}^n, \quad (21)$$

$$\bar{\zeta}^{n+1} = iA_3 \bar{U}^n + iB_3 \bar{V}^n + C_3 \bar{\zeta}^n. \quad (22)$$

Здесь

$$A_3 = -\frac{\tau}{h} (a_1 \sin \alpha + a_2 \sin \beta);$$

$$B_3 = -\frac{\tau}{h} (b_1 \sin \alpha + b_2 \sin \beta);$$

$$C_3 = 1 + \frac{\tau}{h} (c_1 \sin \alpha + c_2 \sin \beta).$$

$$A_2 = \frac{q_2 \left(1 + 2\frac{A\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) - a_1 \left(\frac{f\tau}{2} + \frac{gD}{2} \frac{\tau^2}{h^2} \sin \alpha \sin \beta\right)}{1 - 2\frac{\tau}{h^2} \left(\frac{gD}{2} \tau + A\right) \sin^2 \frac{\beta}{2} + R\tau};$$

$$B_2 = \frac{b_2 \left(1 + 2\frac{A\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) - b_1 \left(\frac{f\tau}{2} + \frac{gD}{2} \frac{\tau^2}{h^2} \sin \alpha \sin \beta\right) + \frac{gD}{h^2} \tau^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 - 2\frac{\tau}{h^2} \left(\frac{gD}{2} \tau + A\right) \sin^2 \frac{\beta}{2} + R\tau};$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{c_2 \left(1 + 2\frac{A\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) - c_1 \left(\frac{f\tau}{2} + \frac{gD}{2} \frac{\tau^2}{h^2} \sin \alpha \sin \beta\right) - \frac{gD}{2} \frac{\tau}{h} \sin \beta}{1 - 2\frac{\tau}{h^2} \left(\frac{gD}{2} \tau + A\right) \sin^2 \frac{\beta}{2} + R\tau}; \\
A_1 &= \frac{a_1 \left(1 + 2\frac{A\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right) + \frac{f\tau}{2} A_2 - \frac{gD}{2} \frac{\tau^2}{h^2} (a_2 \sin \alpha \sin \beta - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2})}{1 - 2\frac{\tau}{h^2} \left(\frac{gD}{2} \tau + A\right) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + R\tau}; \\
B_1 &= \frac{b_1 \left(1 + 2\frac{A\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right) + \frac{f\tau}{2} B_2 - \frac{gD}{2} \frac{\tau^2}{h^2} b_2 \sin \alpha \sin \beta}{1 - 2\frac{\tau}{h^2} \left(\frac{gD}{2} \tau + A\right) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + R\tau}; \\
C_1 &= \frac{c_1 \left(1 + 2\frac{A\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}\right) + \frac{f\tau}{2} C_2 - \frac{gD}{2} \frac{\tau}{h} (\sin \alpha + \frac{\tau}{h} c_2 \sin \alpha \sin \beta)}{1 - 2\frac{\tau}{h^2} \left(\frac{gD}{2} \tau + A\right) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + R\tau}.
\end{aligned}$$

Введем далее вектор-функцию

$$\Psi = \begin{vmatrix} \overline{U} \\ \overline{V} \\ \overline{\zeta} \end{vmatrix}$$

и матрицу

$$\Lambda = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & iC_1 \\ A_2 & B_2 & iC_2 \\ iA_3 & iB_1 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (20)–(22) можно переписать следующим образом:

$$\Psi^{n+1} = \Lambda \Psi^n. \quad (23)$$

Исследуем спектр матрицы Λ . С этой целью рассмотрим спектральную задачу

$$\Lambda \varphi = \lambda \varphi. \quad (24)$$

Собственные значения λ матрицы Λ можно найти, если приравнять нулю определитель алгебраической системы (24)

$$\Lambda = \begin{vmatrix} A_1 - \lambda & B_1 & iC_1 \\ A_2 & B_2 - \lambda & iC_2 \\ iA_3 & iB_3 & C_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

Раскрывая этот определитель, приходим к следующему характеристическому уравнению относительно λ :

$$(A_1 - \lambda)(B_2 - \lambda)(C_3 - \lambda) - B_1 C_2 A_3 - C_1 A_2 B_3 +$$

$$+ C_1(B_2 - \lambda)A_3 + (A_1 - \lambda)C_2B_3 - B_1A_2(C_3 - \lambda) = 0. \quad (26)$$

Уравнение (26) решалось численно методом последовательных приближений. Полученная в результате расчета зависимость $\tau_{\text{макс}}$ (максимального временного шага, при котором разностная схема остается устойчивой⁵) от пространственного шага сетки, нормированного на скорость распространения длинной волны, представлена на рис. 1. Заметим, что найденная здесь зависимость $\tau_{\text{макс}}$ от h/\sqrt{gD} соответствует наименее благоприятному в смысле вычислительной устойчивости случаю нулевых значений коэффициента придонного трения. Что касается коэффициента горизонтального турбулентного трения и параметра Кориолиса, то для них принимались следующие значения: $A = 10^8 \text{ см}^2/\text{с}$; $f = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$.

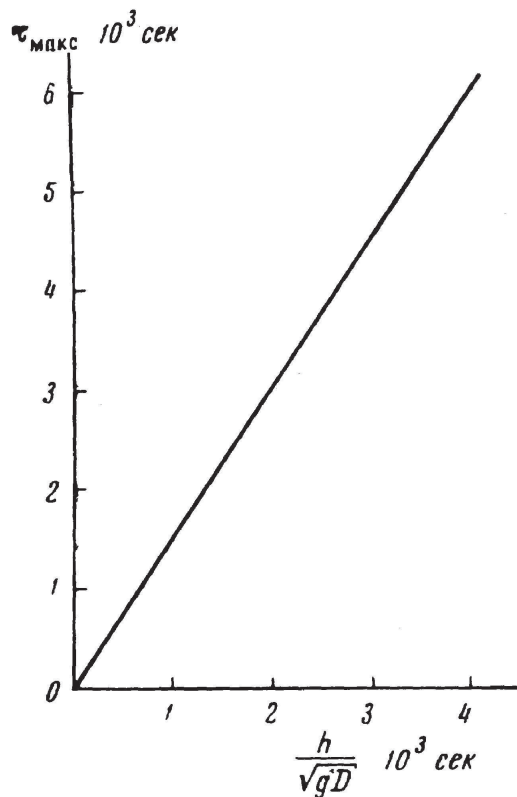


Рис. 1. $\tau_{\text{макс}}$ как функция h/\sqrt{gD}

⁵Необходимое условие вычислительной устойчивости состоит в том, что все λ , соответствующие различным значениям α и β , должны располагаться внутри или на круге единичного радиуса [12].

Из анализа рис. 1 следует, что рассмотренная схема является условно устойчивой. Нетрудно видеть, что эта схема имеет второй порядок точности по пространственным координатам и времени. По-видимому, эти свойства останутся верными и для схемы интегрирования системы уравнений (8), (9), (13)–(15).

Пример расчета приливных движений в Северном море

Результаты испытаний метода в конкретных физико-географических условиях представлены на рис. 2 и 3. На рис. 2 приводится карта изоамплитуд и котидальных линий главной лунной полусуточной волны прилива M_2 в Северном море. Анализ этой карты показал, что полученная картина приливных колебаний уровня близка к той, которая изображена на карте приливов Северного моря, построенной Загером [13] по данным всех имеющихся измерений. Что касается карты больших и малых осей эллипсов приливного течения (рис. 3), то она также неплохо согласуется с современными представлениями о географическом распределении скоростей приливного течения в Северном море.

В таблице представлены результаты сравнения рассчитанных и наблюдаемых амплитуд и фаз приливных колебаний уровня в 29 пунктах побережья Северного моря. Там же приводятся относительная погрешность расчета амплитуд и погрешность расчета фаз. Как видно, в большинстве пунктов измерений уровня совпадение данных расчета и наблюдений (последние заимствованы из [14]) получилось удовлетворительным.

Довольно заметные расхождения отмечаются лишь в Ханстантоне, Кромере и Дельфзейле. Они объясняются, по-видимому, влиянием местных условий. Об этом свидетельствует тот факт, что измерения уровня в этих пунктах производились в глубоко вдающихся в сушу заливах и в устьевых участках рек, горизонтальная протяженность которых значительно меньше принятого шага сетки. Поэтому естественно, что некоторые локальные особенности конфигурации береговой линии и рельефа морского дна оказались неучтенными.

Таблица 1. Сравнение рассчитанных и наблюдаемых приливных колебаний уровня в различных пунктах побережья Северного моря

Название пункта	Координаты		Амплитуда, см			Фаза, град.		
	λ°	$\varphi^\circ N$	рас- чет	наб- лю- де- ние	отн. по- греш- ность, %	рас- чет	наб- лю- де- ние	отн. по- греш- ность, ч.
Абердин	57°09'	2°05' W	113	131	21	30	25	0,17
Арброт	56°03'	2°35' W	130	155	16	65	44	0,7
Данбар	56°00'	2°31' W	147	161	9	75	56	0,6
Влайт	55°07'	1°21' W	160	160	0	87	87	0
Устье р. Тайн	55°01'	1°24' W	165	158	4	90	91	0,03
Устье р. Тис	54°36'	1°10' W	170	169	1	100	98	0,07
Уэйби	54°29'	0°37' E	175	165	6	105	103	0,07
Скегнесс	53°09'	0°21' E	150	213	30	180	169	0,37
Ханстантон	52°56'	0°29' E	130	218	40	204	180	0,80
Кромер	52°56'	1°18' E	105	159	34	235	189	1,54
Уинтертон	52°43'	1°41' E	86	102	16	233	211	0,74
Лоустофт	52°29'	1°46' E	75	70	7	285	259	0,87
Харвик	51°57'	1°17' E	138	130	6	325	326	0,03
Саутенд	51°31'	0°45' E	185	201	8	326	354	0,93
Рамсгет	51°20'	1°25' E	197	187	5	340	342	0,07
Остенд	51°14'	2°55' E	185	187	1	10	5	0,17
Зебрюгге	51°20'	3°12' E	157	169	7	20	15	0,17
Флиссинген	51°27'	3°36' E	135	172	22	35	32	0,10
Брауверсхавен	51°44'	3°54' E	98	115	15	55	57	0,07
Хок	51°59'	4°07' E	79	80	1	60	64	0,13
Катвик	52°12'	4°24' E	76	68	12	89	81	0,27
Эймейден	52°28'	4°35' E	65	68	4	110	106	0,13
Хелдер	52°58'	4°45' E	55	53	4	169	159	0,33
Терсхеллинг	53°22'	5°13' E	58	69	16	212	222	0,33
Делфзейл	53°20'	6°56' E	85	125	32	260	308	1,60
Гельголанд	54°11'	7°53' E	95	99	4	330	316	0,47
Точка откр. моря	53°51'	8°05' E	118	129	9	328	316	0,40
Есберг	55°29'	8°28' E	54	60	10	30	39	0,30
Листер	58°06'	6°36' E	7	4	75	58	51	0,23

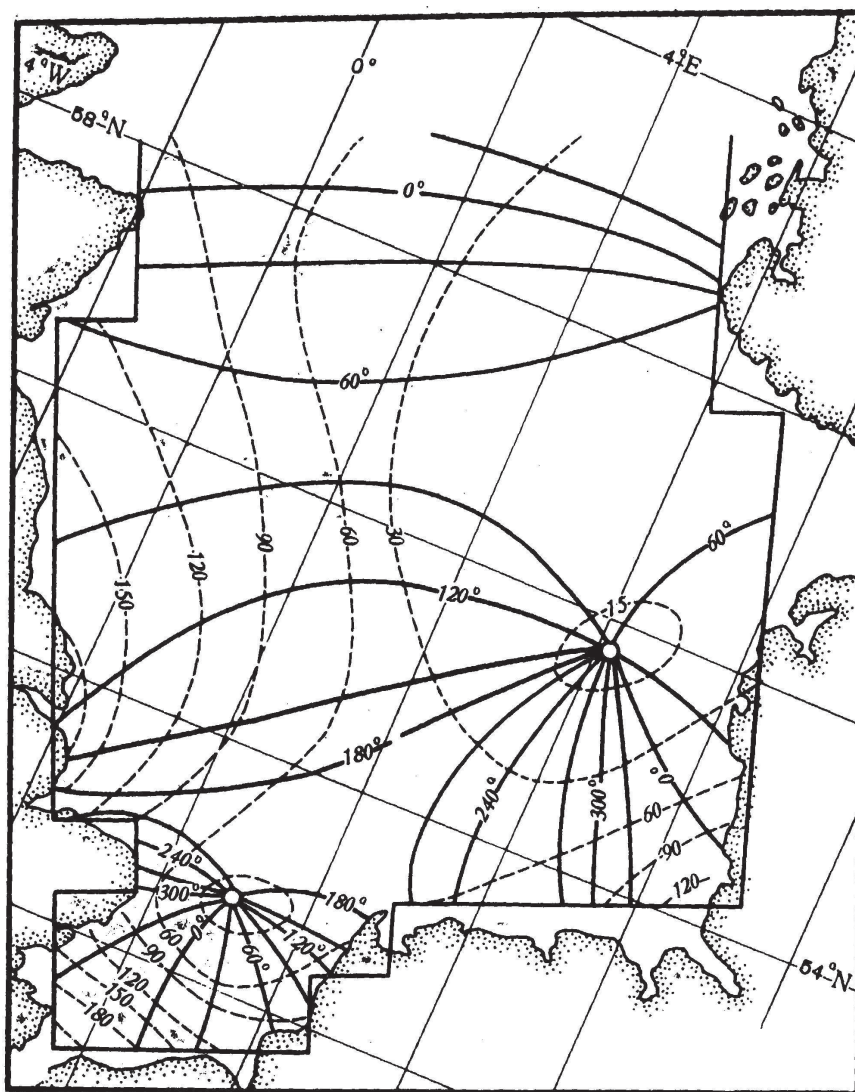


Рис. 2. Приливная карта Северного моря (волна M_2)

Шаг сетки, принятой в расчете, был принят равным 74 км, шаг по времени 12 минут, коэффициент горизонтальной турбулентной вязкости полагался равным 10^8 см²/с, коэффициент придонного трения составлял 3×10^{-3} , глубины во внутренних узлах сеточной области были взяты из работы [14]. Расчеты выполнены на ЭВМ «Минск-22».

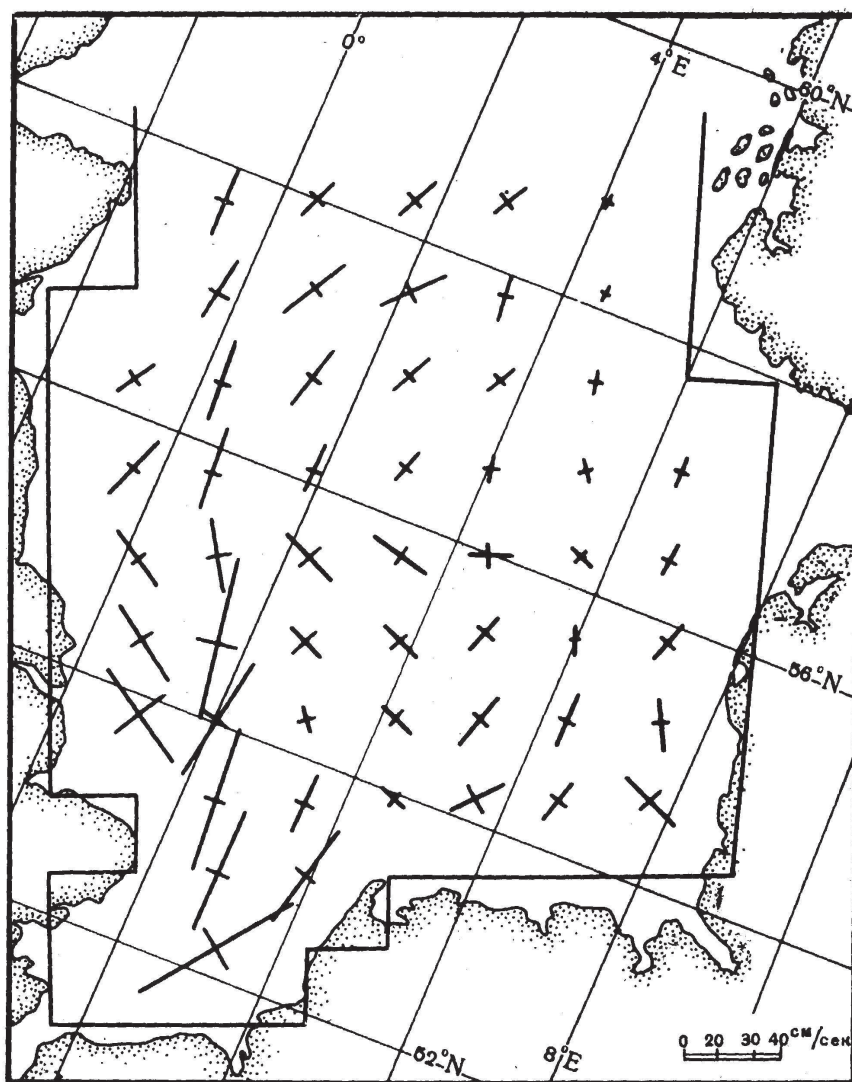


Рис. 3. Карта эллипсов приливного течения в Северном море (волна M_2)

ЛИТЕРАТУРА

1. Hansen W. Gezeiten und Gezeitenströme der halbtägigen Hauptmondtide M_2 in der Nordsee. Deutsch. Hydrogr. Zs., Erg. Heft 1, 1952.
2. Полукаров Г. В. Численные методы определения уровня прилива и скорости приливо-отливных течений // Тр. Гос. океанограф. ин-та. 1957. Вып. 38.

3. Каган Б. А., Некрасов А. В. Об учете горизонтального турбулентного обмена при расчетах приливных явлений методом краевых значений // Тр. Ленингр. гидрометеорол. ин-та. 1965. Вып. 20.

4. Каган Б. А. К вопросу об учете горизонтального турбулентного обмена при расчете приливных колебаний уровня методом краевых значений // Океанология. 1966. Т. 6, вып. 3.

5. Hansen W. Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und der Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen // Tellus. 1956. V. 8, No. 3.

6. Hansen W. Hydrodynamical methods applied to oceanographic problems. Proc. of the Symposium 1961, Mitt. Inst. Meereskunde Hamburg, 1962. Nr. 1.

7. Марчук Г. И. Численные методы решения задач прогноза погоды и теории климата. Новосибирск, 1965.

8. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Гидрометеоиздат, 1967.

9. Каган Б. А. Гидродинамические модели приливных движений в море. Гидрометеоиздат, 1968.

10. Brettschneider G. Modelluntersuchungen der Gezeiten der Nordsee unter Anwendung des Hydrodynamisch – numerischen Verfahrens. Mitt. Inst. Meereskunde Hamburg. 1967. Nr. 8.

11. Годунов С. П., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, 1962.

12. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, 1960.

13. Saeger G. Atlas der Elemente des Tidenhubs und der Gezeitenströme für die Nordsee, der Kanal und die Irische See. Rostok, 1963.

14. Brettschneider G. Anwendung des Hydrodynamisch – numerischen verfahrens zur Ermittlung der M_2 – Mitschwingungszeit der Nordsee. Mitt. Inst. Meereskunde Hamburg, 1967. Nr. 7.

ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В РЕАЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ОКЕАНЕ⁶

Построены собственные кривые и найдены собственные решения, соответствующие внутренним гравитационным вол-

⁶Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана, 1970, т. 6, № 4, с. 412–422. Совместно с Б. А. Каганом.

нам в реально стратифицированном океане. Показано, что высокочастотные колебания концентрируются в сравнительно тонком слое максимальных значений частоты Вайселя.

Исследованию внутренних гравитационных волн в океане посвящена обширная литература (см. обзор, приведенный в [1], а также [2–4]). В большинстве работ для описания вертикальной структуры поля плотности привлекались различные плотностные модели, более или менее правильно отображающие реальное распределение плотности в океане. Впервые задача с произвольным распределением плотности была решена Фьелдстадом [5, 6]. Однако это решение, как было показано Груном [7], применимо только в случае очень длинных волн, так что до настоящего времени различные участки спектра внутренних гравитационных волн в океане оказались изученными далеко не равнозначно.

В настоящей работе построены собственные кривые и найдены собственные решения, соответствующие внутренним гравитационным волнам в реально стратифицированном океане.

Рассмотрим случай горизонтально однородного, но стратифицированного по вертикали океана, который в стационарном состоянии находится в покое. Тогда, пренебрегая усложнениями, связанными с учетом кривизны поверхности Земли, линеаризованную систему уравнений для возмущений можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - lv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + lu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \beta \rho, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \beta^{-1} N^2 w = 0, \quad (5)$$

где u , v , w – возмущения составляющих скорости, направленных соответственно вдоль осей x , y , z ; ρ и p – возмущения плотности и давления; $\beta = g/\rho_0$ – параметр плавучести; $N = \sqrt{\beta \Gamma(z)}$ – частота Вайселя; $\Gamma(z)$ – вертикальный градиент средней плотности ρ_0 ; l – параметр Кориолиса; g – ускорение силы тяжести; t – время.

Заметим, что при написании системы уравнений (1)–(5) мы пренебрегли сжимаемостью жидкости (тем самым отфильтровали внутренние акустические волны), а в третьем уравнении движения сохранили член, характеризующий изменение вертикальной скорости во времени. Как известно [8], исключение этого члена может приводить к искажению высокочастотной части спектра внутренних гравитационных волн. Тогда, принимая, что атмосферное давление остается неизменным во времени, граничное условие на свободной поверхности запишем в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (6)$$

Если дно океана плоское, а трение в придонном слое отсутствует, то вертикальная скорость на дне океана должна обращаться в нуль. В этом случае второе граничное условие по вертикали можно представить следующим образом:

$$w = 0 \quad \text{при } z = D, \quad (7)$$

где D – глубина океана.

Начальных условий по t ставить не будем. Вместо этого примем, что характеристики внутренних волн изменяются во времени по простому гармоническому закону $e^{i\sigma t}$, где σ – частота колебаний.

Сведем систему уравнений (1)–(5) к одному уравнению для давления, следуя при этом методу исключения переменных, описанному в [5]. Однако в отличие от [5] при выводе уравнения для давления пренебрежем изменением параметра Кориолиса с широтой и тем самым исключим из спектра волновых движений гироскопические колебания – волны Россби. Тогда если отказаться от использования приближения Буссинеска, которое при увеличении глубин приводит к накоплению погрешностей, получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{g}{N^2 - \sigma^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{N^2}{N^2 - \sigma^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{g}{\sigma^2 - l^2} \nabla^2 \bar{p}. \quad (8)$$

Здесь и далее чертой обозначены амплитуды соответствующих характеристик.

Граничные условия (6), (7) переписутся в виде

$$\bar{p} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = D. \quad (10)$$

В соответствии с условиями задачи характеристика стратификации N является функцией только z . Поэтому система (8)–(10) допускает разделение переменных. Положим

$$\bar{p}(x, y, z) = \varphi(z)F(x, y), \quad (11)$$

где множители φ и F удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{g}{N^2 - \sigma^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{N^2}{N^2 - \sigma^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + h^{-1} \varphi = 0, \quad (12)$$

$$\nabla^2 F + \frac{\sigma^2 - l^2}{gh} F = 0. \quad (13)$$

Здесь h – постоянная разделения, называемая также глубиной динамически эквивалентного океана [10].

Величину h можно связать с параметрами внутренних гравитационных волн, если обратиться к уравнению (13), представляющему собой приливное уравнение Лапласа на плоскости. Пусть \bar{p} , а следовательно, и F являются гармоническими функциями горизонтальных координат, т. е. $F \sim e^{i(\alpha_x x + \alpha_y y)}$. Тогда на основании (13) находим

$$h = \frac{\sigma^2 - l^2}{g\alpha^2}, \quad (14)$$

где $\alpha = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}$ – горизонтальное волновое число.

Нас будет интересовать лишь внутренняя структура колебаний, которая описывается уравнением (12). Исключим из этого уравнения h с помощью (14) и перепишем (12) следующим образом:

$$\frac{d}{dz} \frac{\sigma^2 - l^2}{N^2 - \sigma^2} \frac{d\varphi}{dz} - \frac{N^2}{g} \frac{\sigma^2 - l^2}{N^2 - \sigma^2} \frac{d\varphi}{dz} + \alpha^2 \varphi = 0. \quad (15)$$

Решение этого уравнения должно, очевидно, удовлетворять граничным условиям

$$\varphi = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = D. \quad (17)$$

При заданном распределении N и фиксированном значении l уравнение (15) содержит два переменных параметра – σ и α . Уравнение (15) имеет решения, удовлетворяющие граничным условиям (16),

(17), только при определенном сочетании этих параметров. Следовательно, задача сводится к решению задачи (15)–(17) на собственные значения.

Коэффициент $\frac{\sigma^2 - l^2}{N^2 - \sigma^2}$, входящий в уравнение (15), определяет границы интервала частот внутренних гравитационных волн. Как известно [1, 7, 10], существование собственно внутренних волн связано с условием

$$\frac{\sigma^2 - l^2}{N^2 - \sigma^2} > 0. \quad (18)$$

Отсюда следует, что либо $\sigma > l$ и $N > \sigma$, либо $\sigma < l$ и $N < \sigma$. Однако поскольку верхней границей частот внутренних волн является частота свободных колебаний частицы жидкости⁷ (т. е. частота Вайсяля), то для собственно внутренних волн σ может быть только меньше N . Поэтому $\sigma > l$ и l является нижней границей частот свободных колебаний. Заметим, что этот вывод можно было получить, не прибегая к анализу неравенства (18). Действительно, нижней границей частот внутренних волн должна быть такая частота, которой соответствует $\alpha \rightarrow 0$ (длина волны стремится к бесконечности). Но $\alpha \rightarrow 0$, когда $\sigma \rightarrow l$, и, значит, внутренние гравитационные волны в океане заполняют интервал $l < \sigma < N$.

В реальных условиях частота Вайсяля N является переменной функцией глубины. Она имеет максимум в слое главного термоклина и уменьшается за пределами этого слоя до глубины 2000 м. Ниже указанного горизонта достоверных сведений о вертикальном профиле N не имеется. Это объясняется тем, что расчет частоты Вайсяля на глубинах, превышающих 2000 м, связан со значительными погрешностями. Последние обуславливаются, во-первых, весьма невысокой точностью измерений температуры и солёности и, во-вторых, отсутствием надежных сведений о величине коэффициента теплового расширения морской воды при больших давлениях и низких температурах [10]. Если, однако, учесть, что ниже глубины 2000 м стратификация в океане близка к безразличной (в этом случае диапазон частот внутренних волн превращается в точку [12]), то при исследовании свободных внутренних волн вполне допустимо рассматривать не всю толщу океана, а только его верхний бароклинный слой.

⁷Под частотой свободных колебаний частицы жидкости понимается частота ее колебательных движений под действием архимедовых сил при условии, что окружающие частицы остаются в состоянии покоя.

Однако может случиться так, что в пределах некоторой части этого слоя частота колебаний σ окажется больше N . Поскольку частота свободных внутренних волн, как было показано выше, не может превосходить частоты свободных колебаний частицы жидкости, то волны с такой частотой в этой части слоя возникать не будут. Здесь могут наблюдаться только нехарактерные внутренние волны, которые, также как и волны на глубокой воде, будут монотонно затухать по мере удаления от источников возбуждения. Последними в данном случае являются колебания, сосредоточенные в слое, где $\sigma < N$. Таким образом, для волновых движений с частотой σ слой океана, которому соответствуют значения N , меньшие σ , можно рассматривать как квазиоднородный. Это значит, что если не интересоваться распределением внутренних волн с убывающей амплитудой, то при описании собственно внутренних волн⁸ условия (16), (17) можно перенести на границы слоя z_1 и z_2 , в пределах которого $\sigma < N$ ⁹.

Введем теперь безразмерную частоту колебаний f , безразмерную частоту Вайсяля \bar{N} , безразмерное горизонтальное волновое число $\bar{\alpha}$ и безразмерную вертикальную координату ξ , используя в качестве характерного масштаба частоты параметр Кориолиса l и характерного масштаба длины толщину бароклинного слоя океана d . Тогда задача сведется к решению уравнения

$$\frac{d}{d\xi} \frac{f^2 - 1}{\bar{N}^2 - f^2} \frac{d\varphi}{d\xi} - \mu \bar{N}^2 \frac{f^2 - 1}{\bar{N}^2 - f^2} \frac{d\varphi}{d\xi} + \bar{\alpha}^2 \varphi = 0, \quad (19)$$

⁸Под собственно внутренними волнами здесь понимаются волны, имеющие максимальные амплитуды в пределах некоторого слоя конечной толщины. В частном случае, когда $\sigma < N_{\text{мин}}$, этот слой охватывает всю толщу океана.

⁹При этом, конечно, предполагается, что искажение собственно внутренних волн в исследуемой области $z_1 < z < z_2$ невелико. Это искажение, возникающее за счет использования условий (16), (17), можно было бы, по-видимому, уменьшить, если вместо них принять

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} - \gamma\varphi &= 0 \quad \text{при } z = z_1, \\ \frac{d\varphi}{dz} + \gamma\varphi &= 0 \quad \text{при } z = z_2, \end{aligned}$$

где $\gamma = \alpha \left(\frac{\sigma^2 - N^2}{\sigma^2 - l^2} \right)^2$.

Последние соотношения вытекают из (15) в предположении, что в квазиоднородных слоях, где $\sigma > N$, величина коэффициента $\frac{N^2 - \sigma^2}{\sigma^2 - l^2}$ остается постоянной, и здесь могут иметь место только внутренние волны с экспоненциально убывающей амплитудой.

удовлетворяющего следующим граничным условиям:

$$\varphi = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_1, \quad (20)$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_2. \quad (21)$$

Здесь μ – безразмерный параметр, равный $l^2 d/g$; ξ_1 и ξ_2 – верхняя и нижняя границы рассматриваемого слоя. Они считаются фиксированными для каждой частоты колебаний.

Так как уравнение (19) несамосопряженное, с помощью тождества Лагранжа

$$(\varphi^*, L\varphi + \bar{\alpha}^2 \varphi) = (\varphi, L^* \varphi^* + \bar{\alpha}^2 \varphi^*)$$

введем в рассмотрение сопряженную в смысле Лагранжа задачу для функции φ^* . Здесь L – дифференциальный оператор основной задачи (19)–(21); L^* – сопряженный по отношению к L оператор, а $(,)$ – скалярное произведение, которое для сопряженных функций φ и φ^* , заданных на интервале ξ от ξ_2 до ξ_1 , равно $\int_{\xi_1}^{\xi_2} \varphi \varphi^* d\xi$. Тогда, предполагая, что функции φ и φ^* вещественны, приходим к следующей сопряженной задаче:

$$\frac{d}{d\xi} \frac{f^2 - 1}{\bar{N}^2 - f^2} \frac{d\varphi^*}{d\xi} + \mu \frac{d}{d\xi} \bar{N}^2 \frac{f^2 - 1}{\bar{N}^2 - f^2} \varphi^* + \bar{\alpha}^2 \varphi^* = 0, \quad (22)$$

$$\varphi^* = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_1, \quad (23)$$

$$\frac{d\varphi^*}{d\xi} - \mu \bar{N}^2 \varphi^* = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_2. \quad (24)$$

Исследуем спектр собственных чисел основной и сопряженных задач. Для этого предварительно умножим все члены уравнения (19) на множитель $\exp \left[\int_{\xi_1}^{\xi} \bar{N}^2 d\xi \right]$. В результате оно сведется к самосопряженному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{f^2 - 1}{\bar{N}^2 - f^2} \exp \left(-\mu \int_{\xi_1}^{\xi} \bar{N}^2 d\xi \right) \frac{d\varphi}{d\xi} \right] + \\ + \bar{\alpha}^2 \exp \left(-\mu \int_{\xi_1}^{\xi} \bar{N}^2 d\xi \right) \varphi = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Так как коэффициенты этого уравнения вещественны и, кроме того, коэффициент при φ не меняет знака во всем интервале значений ξ от ξ_2 до ξ_1 , то все собственные значения задачи будут вещественными. Этот вывод можно получить также непосредственно из анализа исходной системы уравнений (1)–(5) и граничных условий (6), (7), которая не содержит источников и стоков энергии, поэтому не может иметь бесконечно растущих или затухающих решений.

Можно показать, что все собственные значения задачи положительны. Действительно, квадратичный функционал

$$K[\varphi, \varphi] = - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \varphi \frac{d}{d\xi} \frac{f^2 - 1}{\bar{N}^2 - f^2} \exp \left(-\mu \int_{\xi_1}^{\xi} \bar{N}^2 d\xi \right) \frac{d\varphi}{d\xi} d\xi$$

в соответствии с условиями (20), (21) равен

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{f^2 - 1}{\bar{N}^2 - f^2} \exp \left(-\mu \int_{\xi_1}^{\xi} \bar{N}^2 d\xi \right) \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 d\xi.$$

Поскольку для собственно внутренних волн коэффициент $\frac{f^2 - 1}{\bar{N}^2 - f^2}$ на всем отрезке ξ от ξ_2 до ξ_1 может быть только положительным, а множитель $\exp \left[-\mu \int_{\xi_1}^{\xi} \bar{N}^2 d\xi \right]$ всегда больше нуля, то для любой функции, не равной постоянной, $K[\varphi, \varphi]$ также больше нуля. Отсюда следует положительность всех собственных значений задачи (19)–(21).

Полнота системы собственных функций этой задачи, которая сводится к самосопряженной, доказана (см., например, [13]). Поэтому если принять, что сопряженная задача (22)–(24) также обладает этим свойством, то в принципе можно получить две полные системы собственных функций $\{\varphi_n\}$, $\{\varphi_m^*\}$, которые легко нормируются делением их на величину корня квадратного из скалярного произведения (φ_n, φ_m^*) . В результате задача сводится к отысканию биортогональных и нормированных систем собственных функций и соответствующей им системы собственных чисел.

Для их определения необходимо задать профиль частоты Вайселя в океане. Использование любой реальной зависимости для $\bar{N}(\xi)$ при решении задач (19)–(21) и (22)–(24) требует обращения к численным методам. Воспользуемся численным методом решения спектральных задач, предложенным в [14].

Разобьем интервал $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ на k отрезков. Границы между отрезками будем обозначать целыми индексами $0, 1, 2, \dots, j, \dots, k$. Уровень с индексом «0» отнесем к нижнему пределу диапазона изменения ξ – к ξ_1 , а уровень с индексом k расположим при $\xi = \xi_2$. В пределах каждого такого отрезка выделим еще средний уровень, который будем обозначать дробным индексом. Введем далее следующее обозначение:

$$I = r^2 \frac{d\varphi}{d\xi}, \quad (26)$$

где $r^2 = \frac{f^2 - 1}{N^2 - f^2}$. Интегрируя (26) в пределах $(j - 1, j)$ и предполагая, что I и r^2 принадлежат к классу непрерывных функций, приближенно находим

$$I_{j-1/2} = r_{j-1/2}^2 \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}}. \quad (27)$$

Аналогично

$$I_{j+1/2} = r_{j+1/2}^2 \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{\xi_{j+1} - \xi_j}. \quad (28)$$

Проинтегрируем теперь основное уравнение (19) от $\xi_{j+1/2}$ до $\xi_{j-1/2}$. Тогда предполагая, что φ также является непрерывной функцией, с учетом (27), (28) получаем

$$\begin{aligned} & r_{j+1/2}^2 \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{\xi_{j+1} - \xi_j} - r_{j-1/2}^2 \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}} - \mu(\bar{N}^2 r^2)_j \times \\ & \times (\varphi_{j+1/2} - \varphi_{j-1/2}) + \bar{\alpha}^2 \varphi_j (\xi_{j+1/2} - \xi_{j-1/2}) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Содержащиеся в этом уравнении функции φ с дробными индексами можно исключить из (29), если воспользоваться следующей интерполяционной формулой:

$$\varphi_{j+1/2} = \varphi_{j-1/2} + \frac{\xi_{j+1/2} - \xi_{j-1/2}}{\xi_{j+1} - \xi_{j-1}} (\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}).$$

Эту формулу легко получить с помощью разложения функции φ в ряд Тэйлора в окрестности точки с дробным индексом.

В результате приходим к трехточечному разностному уравнению

$$a_j \varphi_{j+1} + b_j \varphi_j - c_j \varphi_{j-1} = \bar{\alpha}^2 \varphi_j, \quad (30)$$

где

$$a_j = \frac{1}{\xi_{j+1/2} - \xi_{j-1/2}} \left[\frac{r_{j+1/2}^2}{\xi_{j+1} - \xi_j} - \mu(\bar{N}^2 r^2)_j \frac{\xi_{j+1/2} - \xi_{j-1/2}}{\xi_{j+1} - \xi_{j-1}} \right],$$

$$b_j = \frac{1}{\xi_{j+1/2} - \xi_{j-1/2}} \left[\frac{r_{j+1/2}^2}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \frac{r_{j-1/2}^2}{\xi_j - \xi_{j-1}} \right],$$

$$c_j = \frac{1}{\xi_{j+1/2} - \xi_{j-1/2}} \left[\frac{r_{j-1/2}^2}{\xi_j - \xi_{j-1}} + \mu(\bar{N}^2 r^2)_j \frac{\xi_{j+1/2} - \xi_{j-1/2}}{\xi_{j+1} - \xi_{j-1}} \right].$$

Систему разностных уравнений (30) необходимо замкнуть с учетом граничных условий (20), (21). Первому из них можно удовлетворить, положив в уравнении для уровня $j = 1$ $\varphi = 0$. Тогда уравнение для уровня $j = 1$ запишется в виде

$$-a_1\varphi_2 + b_1\varphi_1 = 0, \quad (31)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{\xi_{3/2} - \xi_{1/2}} \left[\frac{r_{3/2}^2}{\xi_2 - \xi_1} - \mu(\bar{N}^2 r^2)_j \frac{\xi_{3/2} - \xi_{1/2}}{\xi_2 - \xi_0} \right],$$

$$b_1 = \frac{1}{\xi_{3/2} - \xi_{1/2}} \left[\frac{r_{3/2}^2}{\xi_2 - \xi_1} + \frac{r_{1/2}^2}{\xi_1 - \xi_0} \right].$$

Чтобы удовлетворить второму граничному условию (21), поступим следующим образом: введем фиктивный уровень $k + 1/2$ и проинтегрируем уравнение (19) в пределах $(\xi_{k-1/2}, \xi_{k+1/2})$. Далее значение функции φ в точке с индексом $k + 1/2$ выразим через значение этой функции в точке с индексом $k - 1/2$ и производную от φ по ξ в точке с индексом k . Полагая в соответствии с (21) $\left. \frac{d\varphi}{d\xi} \right|_k = 0$, получаем

$$b_k\varphi_k - c_k\varphi_{k-1} = \bar{\alpha}^2\varphi_k, \quad (32)$$

где

$$b_k = c_k = \frac{1}{\xi_{k+1/2} - \xi_{k-1/2}} \left(\frac{r_{k-1/2}^2}{\xi_k - \xi_{k-1}} \right).$$

Система алгебраических уравнений (30)–(32) полна. Перепишем ее в матричной форме

$$\Lambda\varphi = \bar{\alpha}^2\varphi, \quad (33)$$

где матрица коэффициентов Λ имеет вид якобиевой матрицы:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} b_1 & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & b_2 & -a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{k-1} & b_{k-1} & -a_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix},$$

φ – вектор с компонентами $\{\varphi_i\}$.

Если теперь ввести сопряженное уравнение

$$\Lambda^* = \bar{\alpha}^2 \varphi^*, \quad (34)$$

где Λ^* – транспонированная по отношению к Λ матрица, то в результате решения уравнений (33), (34) с помощью стандартных методов [15] получаем биортогональную и нормированную систему функций $\{\varphi_n\}$ и $\{\varphi_n^*\}$ и систему собственных чисел $\bar{\alpha}^2$.

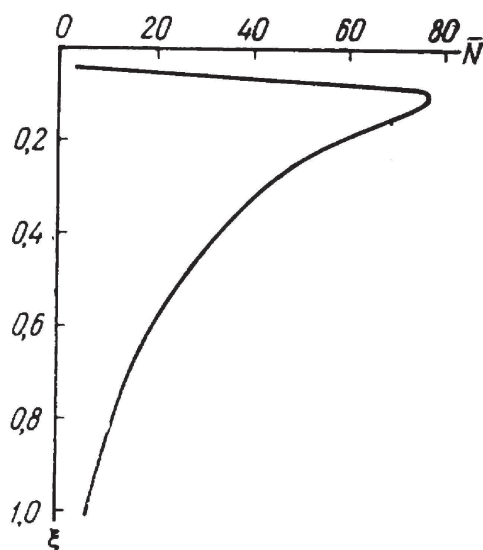


Рис. 1. Типичное распределение безразмерной частоты Вайсяля в океане (по Эккарту [10])

Воспользуемся типичным распределением частоты Вайсяля в океане, представленным на рис. 1. Наличие резких изменений функции

\bar{N} в области малых значений ξ диктует необходимость выбора достаточно частой сетки, по крайней мере, в интервале $0,05 \leq \xi \leq 0,5$. Поэтому при дискретизации оси ξ в интервале $0,05 \leq \xi \leq 0,2$ узловые точки располагались на расстоянии 0,003 друг от друга. Следующие пять узлов помещались в точках с координатами 0,204; 0,209; 0,215; 0,222; 0,230, после чего в диапазоне (0,230; 0,500) расстояние между узловыми точками $\Delta\xi_j$ принималось равным 0,010. Далее это расстояние снова равномерно увеличивалось вплоть до $\xi = 0,625$, а затем при $0,625 \leq \xi \leq 1,0$ $\Delta\xi_j$ полагалось равным 0,025. Весь интервал ξ от 1,0 до 0,05 содержал, таким образом, 105 узловых точек.

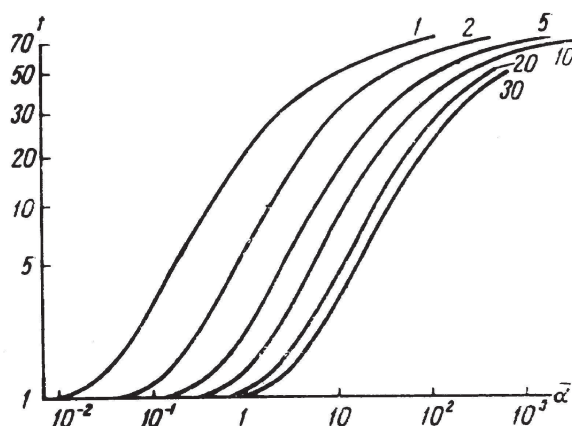


Рис. 2. Собственные кривые для реально стратифицированного океана. Цифры на кривых указывают число узлов у соответствующих собственных функций

Расчеты были выполнены на ЭВМ для десяти значений f : 1,1; 1,4; 2,8; 5,6; 10; 20; 30; 50; 70; 74. Ниже приводятся результаты расчетов собственных чисел, а также собственных функций только для двух значений f – 1,4 и 50. На рис. 2 изображены собственные кривые уравнения (19) в плоскости параметров – безразмерной частоты f и безразмерного горизонтального волнового числа $\bar{\alpha}$. Как видно, собственные кривые имеют тенденцию концентрироваться в области экстремальных значений частоты Вайселя. Это свидетельствует о том, что в реально стратифицированном океане высокочастотные колебания сосредоточены главным образом в слое главного термоклина. Этот вывод хорошо иллюстрируют также рис. 3 и 4, на которых представлены собственные функции, соответствующие низкочастотным и вы-

сокочастотным колебаниям. Если низкочастотные колебания (рис. 3) прослеживаются почти во всей толще бароклинного слоя океана, то высокочастотные колебания (рис. 4) сосредоточены в сравнительно тонком слое, за пределами которого они затухают. Таким образом, слой наибольших значений частоты Вэйсяля в океане играет роль своеобразного волновода для высокочастотных колебаний.

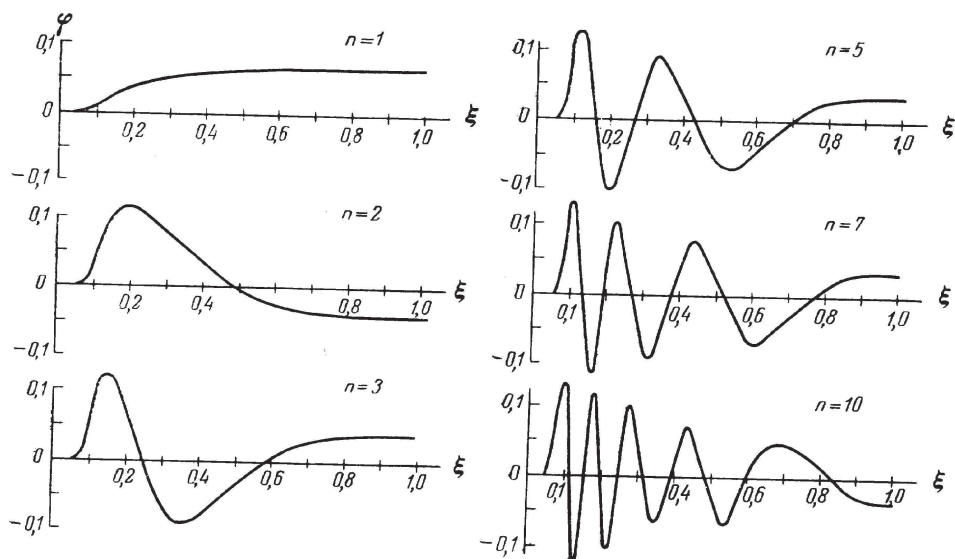


Рис. 3. Собственные функции поля давления при $f = 1, 4$ и различных значениях n (n – число узлов собственной функции)

Интересно сравнить рис. 2 с аналогичным рисунком Эккарта [11, рис. 51], построенного для случая скачкообразного изменения плотности в океане, заданного плотностной моделью. При таком сравнении прежде всего обнаруживается качественное подобие собственных кривых, изображенных на обоих рисунках¹⁰. Однако в количественном отношении сравниваемые рисунки существенно отличаются друг от друга. При одних и тех же значениях горизонтального волнового числа и числа узлов у соответствующих собственных функций частота колебаний, определяемая с помощью рис. 2, заметно меньше частоты колебаний по данным Эккарта.

¹⁰Скачки наклона собственных кривых, рассчитанных Эккартом [11] с использованием ВКБ-метода, не следует принимать во внимание. Они вызваны, как это указывается в [11], произвольным выбором значения дефекта порядка.

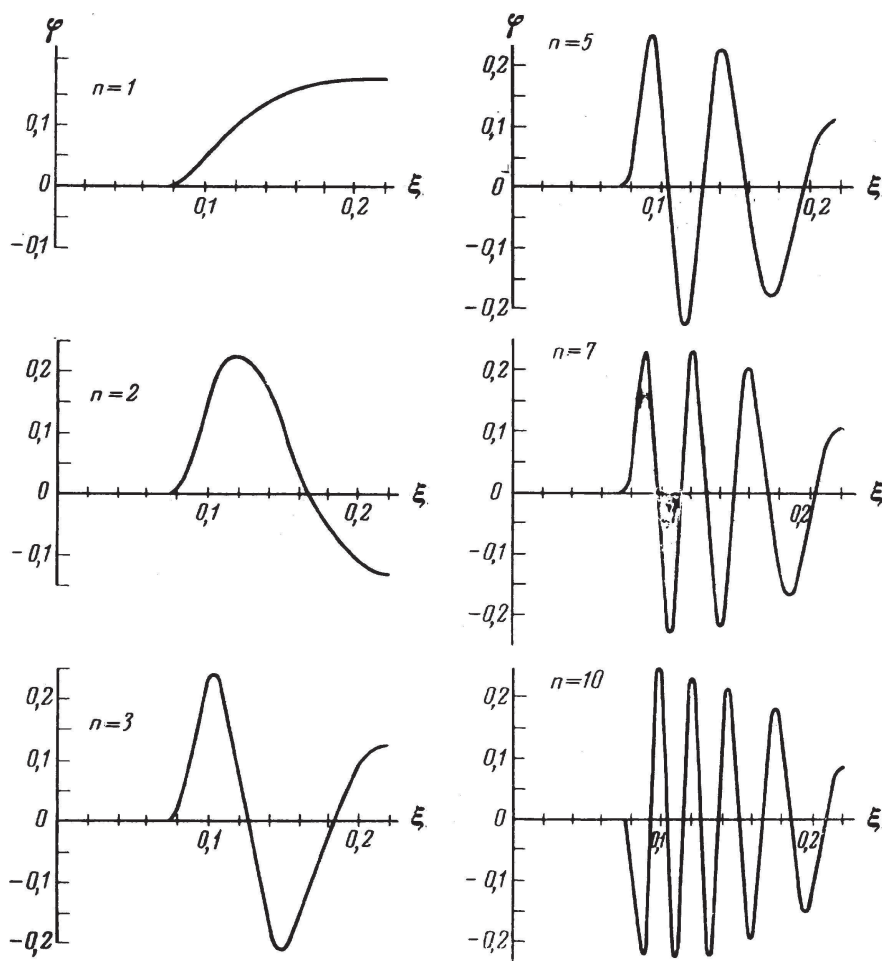


Рис. 4. Собственные функции поля давления при $f = 50$ и различных значениях n . Обозначения см. на рис. 3

Располагая полным набором собственных функций $\{\varphi_n\}$ и положительных собственных значений $\bar{\alpha}_n$, решение задачи (8)–(10) можно искать в виде ряда Фурье:

$$\bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\bar{x}, \bar{y}) \varphi_n(\xi), \quad (35)$$

где F_n – коэффициенты Фурье; \bar{x} , \bar{y} – безразмерные горизонтальные координаты.

Подставим ряд (35) в уравнение (8), записанное в безразмерных переменных, и результат скалярно помножим на φ_m^* . Тогда с учетом

условия ортонормировки приходим к следующей системе уравнений для коэффициентов Фурье:

$$\nabla^2 F_n + \bar{\alpha}_n^2 F_n = 0, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (36)$$

которую необходимо решать при соответствующих граничных условиях по горизонтали. Здесь ∇^2 – безразмерный оператор Лапласа.

Если коэффициенты Фурье F_n найдены, то остальные неизвестные функции – амплитуды горизонтальной и вертикальной компонент скорости и плотности – рассчитываются с помощью следующих разложений по собственным функциям φ_n и $d\varphi_n/d\xi$:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\bar{x}, \bar{y}) \varphi_n(\xi), \\ \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n(\bar{x}, \bar{y}) \varphi_n(\xi), \\ \bar{w}(\bar{x}, \bar{y}, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_n(\bar{x}, \bar{y}) \frac{d\varphi_n(\xi)}{d\xi}, \\ \bar{\rho}(\bar{x}, \bar{y}, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\rho}_n(\bar{x}, \bar{y}) \frac{d\varphi_n(\xi)}{d\xi}. \end{aligned} \quad (37)$$

При этом коэффициенты \bar{u}_n , \bar{v}_n , \bar{w}_n и $\bar{\rho}_n$ определяются на основании соотношений, найденных в результате преобразований записанной для амплитуд исходной системы уравнений (1)–(5):

$$\begin{aligned} \bar{u}_n &= -\frac{f\bar{\alpha}_x - i\bar{\alpha}_y}{f^2 - 1} \frac{F_n}{\rho_0 l d} \varphi_n, \\ \bar{v}_n &= -\frac{f\bar{\alpha}_y + i\bar{\alpha}_x}{f^2 - 1} \frac{F_n}{\rho_0 l d} \varphi_n, \\ \bar{w}_n &= \frac{if}{N^2 - f^2} \frac{F_n}{\rho_0 l d} \frac{d\varphi_n}{d\xi}, \quad \bar{\rho}_n = \frac{\bar{N}^2}{N^2 - f^2} \frac{F_n}{g d} \frac{d\varphi_n}{d\xi}, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\bar{\alpha}_x$ и $\bar{\alpha}_y$ – безразмерные горизонтальные волновые числа в направлении осей x и y .

Эти выражения вместе с полученными значениями собственных чисел и собственными функциями могут быть использованы для расчета

характеристик внутренних гравитационных волн в реально стратифицированном океане.

Авторы благодарны Ю. А. Кузнецову за помощь при выполнении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krauss W. Interne Wellen. Gebrüder Borntraeger. Berlin – Nikolassee, 1966 (рус. пер.: Внутренние волны. Гидрометеиздат, 1968).

2. Eckart C. Internal waves in the ocean // Phys. Fluids. 1961. V. 4, No. 7 (рус. пер.: Внутренние волны в океане // В сб. перев.: Внутренние волны / под ред. А. А. Иванова. Мир, 1964).

3. Фукс В. Р. Теория внутренних приливных волн // В кн.: Исследование приливных явлений в неоднородном море. Гидрометеиздат, 1965.

4. Тареев Б. А. К динамике внутренних гравитационных волн в непрерывно стратифицированном океане // Изв. АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1966. Т. 2, № 10.

5. Fjeldstad J. E. Interne Wellen // Geofys. Publik. 1938. V. 10, No. 6.

6. Fjeldstad J. E. Internal waves of tidal origin. Part 1. Theory and analysis of observations // Geofys. Publik. 1964. V. 25, No. 5.

7. Groen P. Contribution to the theory of internal waves // Mededelingen en verhandelingen. 1948. Ser. B. 2, No. 11 (рус. пер.: Некоторые вопросы теории внутренних волн // В сб. перев.: Внутренние волны / под ред. А. А. Иванова. Мир, 1964).

8. Munk W., Phillips N. Coherence and band structure of inertial motions in the sea // Rev. Geophys. 1968. V. 6, No. 4.

9. Марчук Г. И. Об уравнениях динамики бароклинного океана // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 6.

10. Дикий Л. А. Теория колебаний земной атмосферы. Гидрометеиздат, 1969.

11. Eckart C. Hydrodynamics of oceans and atmospheres. Pergamon Press, 1960 (рус. пер.: Гидродинамика океана и атмосферы. Мир, 1963).

12. Монин А. С. Прогноз погоды как задача физики. Наука, 1969.

13. Collatz L. Eigenwertaufgaben mit Technischen anwendungen. Acad. verlag., 1963 (рус. пер.: Задачи на собственные значения. Наука, 1968).

14. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Гидрометеиздат, 1967.

15. Фаддеев Д. Ф., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, 1960.

О МЕТОДАХ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ВЕТРОВОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ОКЕАНА¹¹

Рассматриваются две численные модели решения уравнения для интегральной функции тока. Схемы основаны на использовании методов конечных разностей и конечных элементов. Общим свойством данных схем является недиссипативная аппроксимация кососимметрической части дифференциального оператора задачи. Численные эксперименты выполнены для бассейна Мирового океана в случаях постоянной и переменной глубины. Получено хорошее качественное и количественное согласие результатов. Основные отличия численных решений вызваны улучшением аппроксимации береговой линии при использовании метода конечных элементов.

1. Необходимость получения количественных характеристик океанических циркуляций в бассейнах с реальным очертанием берегов, связанная с созданием в настоящее время совместных моделей океана и атмосферы, стимулировала появление нескольких численных моделей в нашей стране [1–7] и за рубежом [8, 9]. Начиная с пионерских работ Саркисяна [1] до наиболее полных в физическом отношении моделей Брайена [8], везде при дискретизации дифференциального оператора задачи использовался метод конечных разностей. В связи с этим во всех работах береговой контур океанического бассейна аппроксимировался ломаной, составленной из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Несомненно, это может явиться существенным недостатком при попытках прецизионного моделирования пограничных режимов океанической циркуляции, что весьма важно с точки зрения долгосрочных прогнозов погоды. Однако в моделях со слабым пространственным разрешением (которое диктуется возможностями существующих ЭВМ), используемых в целях описания

¹¹ Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана, 1975, т. 11, № 12, с. 1294–1300. Совместно с В. Б. Залесным, В. И. Кузиным.

крупномасштабных характеристик океана там, где можно на первом этапе пренебречь их локальными особенностями, полигональная аппроксимация океанического бассейна может оказаться достаточной.

В данной работе проводится сравнение двух численных решений задачи о крупномасштабном поведении интегральной функции тока, полученных с помощью конечно-разностного метода в полигональной области и метода конечных элементов в области, составленной из треугольников.

2. Перед тем как перейти к сравнительному описанию принятых в работе численных схем, кратко остановимся на их качественных характеристиках. Все схемы, использующиеся для решения подобных задач динамики океана, можно разделить на два типа: диссипативные и недиссипативные. К диссипативным относятся, например, схема направленных разностей, схема [10], схема, полученная в [11]; к недиссипативным – схема Аракавы и схемы, использующиеся в работах авторов [5, 6]. Основное отличие схем, принадлежащих различным типам, заключается в характере аппроксимаций кососимметрической части дифференциального оператора задачи. В случае недиссипативных схем она аппроксимируется в виде кососимметрической матрицы, тогда как в случае диссипативных – суммой кососимметрической и симметрической положительно определенной.

Как правило, все диссипативные схемы обладают привлекательным качеством – свойством монотонности. Данное свойство позволяет эффективно решать широкий круг задач динамики океана (характеризующихся тем, что кососимметрическая часть входит с большим весом в полный оператор краевой задачи) на сетках со слабым пространственным разрешением. Это, в свою очередь, существенно снижает требования к мощностям ЭВМ.

Однако при использовании высокопроизводительных ЭВМ, позволяющих выбирать нужное разрешение по пространству, основное качество диссипативных схем – монотонность перестает играть столь важную роль. Более того, диссипация, возникающая при аппроксимации кососимметрической части дифференциального оператора, искажает энергетический баланс исходной модели и налагает дополнительные трудности при изучении процессов трения и энергообмена, ответственных за формирование пограничных слоев в океане. Это свойство схем данного типа едва ли может быть отчетливо оправдано с физической точки зрения.

Перспективным поэтому представляется получение разностных схем, не обладающих, может быть, безусловной монотонностью, однако сохраняющих в разностном виде аналог основного энергетического соотношения, присущего дифференциальной модели. Следует отметить, что в случае стационарной задачи для интегральной функции тока это имеет скорее методологическую ценность, однако при переходе к нестационарным нелинейным бароклиным моделям это свойство численных схем будет определяющим при анализе их устойчивости [5, 14, 15].

В связи с этим основным принципом, принятым при построении разностных схем в данной работе как на основе метода конечных разностей, так и метода конечных элементов, явился принцип недиссипативной аппроксимации кососимметрической части дифференциального оператора. Это, по мнению авторов, является весьма важным, поскольку позволяет наилучшим образом осуществить основную цель работы – исследование различий в поведении функции тока при двух видах аппроксимации океанического бассейна, не затушевывая их побочными эффектами схемной вязкости.

3. При построении численных схем решения задачи об интегральной циркуляции океана широко используются два подхода. Это либо замена уравнений движения и неразрывности системой разностных соотношений и дальнейшее получение разностного уравнения для функции тока эквивалентными алгебраическими преобразованиями, либо аппроксимация собственно уравнения для функции тока, полученного в дифференциальном виде путем применения операции вихря к исходной системе.

Реализуем первый подход для построения численной модели стационарной ветровой циркуляции океана на основе метода конечных разностей. Имеем следующую систему уравнений, записанную для простоты в декартовой системе координат:

внутри области Ω

$$\begin{aligned} -lv &= gH \frac{\partial \zeta}{\partial x} - Ru + \tau_x, \\ lu &= gH \frac{\partial \zeta}{\partial y} - Rv + \tau_y, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0; \end{aligned} \tag{1}$$

на границе области Γ

$$u_n = 0,$$

где u, v – компоненты вектора полных потоков; ζ – превышение уровня; $l(y)$ – параметр Кориолиса; $H(x, y)$ – рельеф дна; $R > 0$ – коэффициент трения; g – ускорение силы тяжести; τ_x, τ_y – касательные напряжения трения ветра на поверхности океана; Ω – область, составленная из прямоугольников, аппроксимирующая реальный бассейн; Γ – береговой контур.

Определим сеточные вектор-функции следующим образом (рис. 1): u^h, τ_x^h – в точках (х); v^h, τ_y^h – в точках (□); H^h – в точках (х), (□).

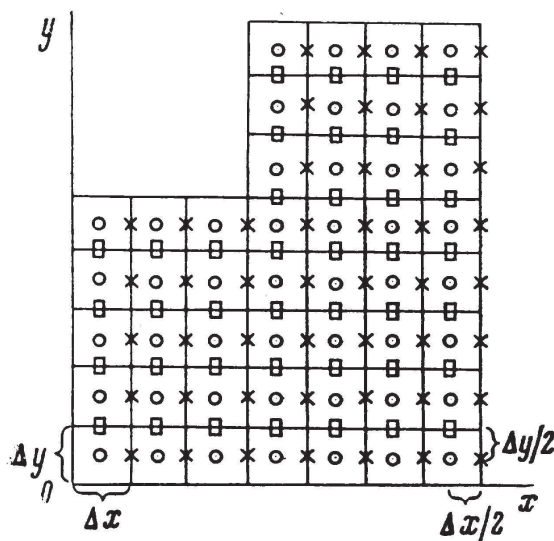


Рис. 1. Часть сеточной области. Метод конечных разностей

Конечно-разностная аппроксимация 2-го порядка уравнений (1) имеет вид (индекс h далее всюду опущен)

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \left[l_{j+1/2} \overline{\left(\frac{v}{H} \right)^x}_{ij+1/2} + l_{j-1/2} \overline{\left(\frac{v}{H} \right)^x}_{ij-1/2} \right] = \\
 & g(\zeta_{ij})_x - R \left(\frac{u}{H} \right)_{i+1/2j} + \left(\frac{\tau_x}{H} \right)_{i+1/2j}, \\
 & \frac{l_{j+1/2}}{2} \left[\overline{\left(\frac{u}{H} \right)^y}_{i+1/2j} + \overline{\left(\frac{u}{H} \right)^x}_{i-1/2j} \right] =
 \end{aligned}$$

$$g(\zeta_{ij})_y - R \left(\frac{v}{H} \right)_{ij+1/2} + \left(\frac{\tau_y}{H} \right)_{ij+1/2}, \quad (2)$$

$$(u_{i+1/2j})_{\bar{x}} + (v_{ij+1/2})_{\bar{y}} = 0,$$

где

$$(a_{ij})_x = \frac{a_{i+1j} - a_{ij}}{\Delta x}, \quad (a_{ij})_{\bar{x}} = \frac{a_{ij} - a_{i-1j}}{\Delta x}, \quad \overline{(a_{ij})^x} = \frac{a_{ij} + a_{i+1j}}{2};$$

аналогично записываются a_y , $a_{\bar{y}}$, \bar{a}^y .

Введем разностную функцию тока с учетом третьего соотношения (2):

$$(\varphi_{i+1/2j+1/2})_{\bar{y}} = u_{i+1/2j}, \quad (\varphi_{i+1/2j+1/2})_{\bar{x}} = -v_{ij+1/2}.$$

Тогда после алгебраических преобразований сводим (2) к уравнению для φ_{mn} ($m = i + 1/2$, $n = j + 1/2$):

$$a_{mn}^1 \varphi_{mn-1} + a_{mn}^2 \varphi_{mn} + a_{mn}^3 \varphi_{mn+1} + a_{mn}^4 \varphi_{m-1n} + a_{mn}^5 \varphi_{m+1n} +$$

$$+ a_{mn}^6 \varphi_{m-1n-1} + a_{mn}^7 \varphi_{m+1n+1} + a_{mn}^8 \varphi_{m-1n+1} + a_{mn}^9 \varphi_{m+1n-1} = F_{mn}, \quad (3)$$

где

$$a_{mn}^1 = -R \frac{1}{H_{mj}(\Delta y)^2} - \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left(\frac{l_n}{H_{i+1n}} - \frac{l_{n-1}}{H_{in-1}} + \frac{l_{n-1}}{H_{i+1n-1}} - \frac{l_n}{H_{in}} \right),$$

$$a_{mn}^2 = R \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \left(\frac{1}{H_{i+1n}} + \frac{1}{H_{in}} \right) + \frac{1}{(\Delta y)^2} \left(\frac{1}{H_{mj+1}} + \frac{1}{H_{mj}} \right) \right],$$

$$a_{mn}^3 = -R \frac{1}{H_{mj+1}(\Delta y)^2} + \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left(\frac{l_n}{H_{i+1n}} + \frac{l_{n+1}}{H_{i+1n+1}} - \frac{l_{n+1}}{H_{in+1}} - \frac{l_n}{H_{in}} \right),$$

$$a_{mn}^4 = -R \frac{1}{H_{in}(\Delta x)^2},$$

$$a_{mn}^5 = -R \frac{1}{H_{i+1n}(\Delta x)^2},$$

$$a_{mn}^6 = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left(\frac{l_n}{H_{in}} - \frac{l_{n-1}}{H_{in-1}} \right),$$

$$a_{mn}^7 = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left(\frac{l_{n+1}}{H_{i+1n+1}} - \frac{l_n}{H_{i+1n}} \right),$$

$$a_{mn}^8 = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left(\frac{l_{n+1}}{H_{in+1}} - \frac{l_n}{H_{in}} \right),$$

$$a_{mn}^9 = -\frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left(\frac{l_n}{H_{i+1n}} - \frac{l_{n-1}}{H_{i+1n-1}} \right),$$

$$F_{mn} = - \left[\frac{\tau_x}{H_{mj}} \right]_y + \left[\frac{\tau_y}{H_{in}} \right]_x.$$

Считаем, что в оператор уравнения (3) включены разностные граничные соотношения $\varphi^h|_{\Gamma} = 0$.

4. Второй подход к дискретизации исходной физической модели предполагает рассмотрение уравнения для интегральной функции тока в дифференциальном виде. Получение сеточных уравнений осуществляется на основе применения метода конечных элементов [6]. Проведем краткое его описание. Имеем следующее уравнение для φ :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{R}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{R}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{l}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{l}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}, \quad \varphi|_{\Gamma} = 0. \quad (4)$$

Выпишем интегральное соотношение, определяющее обобщенное решение $\varphi \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ задачи (4)

$$D(\varphi, v) = - \int_{\Omega} \left(\tau_y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \tau_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\Omega \quad (5)$$

для любой функции где $v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, где $D(u, v)$ – билинейная форма вида

$$D(u, v) = \int_{\Omega} \left[\frac{R}{H} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{l}{H} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] d\Omega.$$

Применяем к уравнению (4) метод Галеркина. Координатные функции выбираем следующим образом: в области Ω строим равномерную сетку $\Omega^h \in \Omega$ с граничными точками Γ^h . Квадраты сетки триангулируем диагоналями положительного направления везде, за исключением, может быть, квадратов вблизи границы. Считаем, что область Ω может быть представлена как объединение таких треугольников. Координатными функциями будет набор функций $\omega_{mn}(x, y)$, соответствующий внутренним точкам сеточной области Ω^h кусочно-линейных на данной триангуляции, равных единице в точке (m, n) и нулю во всех

остальных точках сетки. В точках, не соседствующих с граничными, носителями этих функций будут шестиугольники, представленные на рис. 2. Приближенное решение представляется в виде линейной комбинации координатных функций

$$\varphi^N = \sum_{(m,n) \in \Gamma^h} \varphi_{mn} \omega_{mn}.$$

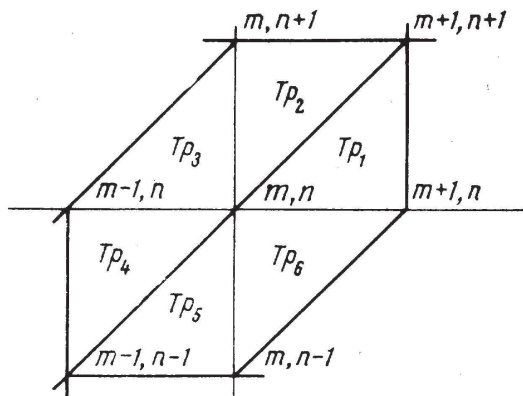


Рис. 2. Элементарная ячейка сеточной области.
Метод конечных элементов

Тогда уравнение для нахождения значений функции φ в точках сетки будет иметь вид

$$D(\varphi, \omega_{mn}) = - \int_{\Omega} \left(\tau_y \frac{\partial \omega_{mn}}{\partial x} - \tau_x \frac{\partial \omega_{mn}}{\partial y} \right) d\Omega.$$

После преобразований получим следующее сеточное уравнение, обладающее вторым порядком аппроксимации в регулярных точках области [6]:

$$\begin{aligned} & \sigma_{mn}^1 \varphi_{mn-1} + \sigma_{mn}^2 \varphi_{mn} + \sigma_{mn}^3 \varphi_{mn+1} + \sigma_{mn}^4 \varphi_{m-1n} + \\ & + \sigma_{mn}^5 \varphi_{m+1n} + \sigma_{mn}^6 \varphi_{m-1n-1} + \sigma_{mn}^7 \varphi_{m+1n+1} = F_{mn}^1 + F_{mn}^2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sigma_{mn}^1 = -\frac{1}{h^2} [(\bar{B}_5 - \bar{C}_5) + (\bar{B}_6 + \bar{C}_6)],$$

$$\sigma_{mn}^2 = \frac{1}{h^2} [\bar{B}_2 + \bar{B}_3 + \bar{B}_5 + \bar{B}_6 + \bar{A}_1 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4 + \bar{A}_6],$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{mn}^3 &= -\frac{1}{h^2} [(\overline{B}_2 - \overline{C}_2) + (\overline{B}_3 + \overline{C}_3)], \\
\sigma_{mn}^4 &= -\frac{1}{h^2} [(\overline{A}_3 - \overline{C}_3) + (\overline{A}_4 + \overline{C}_4)], \\
\sigma_{mn}^5 &= -\frac{1}{h^2} [(\overline{A}_6 - \overline{C}_6) + (\overline{A}_1 + \overline{C}_1)], \\
\sigma_{mn}^6 &= \frac{1}{h^2} (\overline{C}_4 - \overline{C}_3), \\
\sigma_{mn}^7 &= \frac{1}{h^2} (\overline{C}_1 - \overline{C}_2), \\
F_{mn}^1 &= \frac{1}{h} \left(\int_{Tp_1+Tp_2} \tau_y d\Omega - \int_{Tp_3+Tp_4} \tau_x d\Omega \right), \\
F_{mn}^2 &= \frac{1}{h} \left(\int_{Tp_2+Tp_3} \tau_y d\Omega - \int_{Tp_5+Tp_6} \tau_x d\Omega \right),
\end{aligned}$$

$A = B = R/H$, $C = l/H$, $\overline{A}_i = \int_{Tp_i} A d\Omega$ – интеграл по площади i -го треугольника (рис. 2).

5. Представим системы алгебраических уравнений, полученные рассмотренными методами в матричном виде:

$$RB_i\varphi_i + A_i\varphi_i = F_i, \quad (8)$$

где индекс $i = 1, 2$ указывает на способ построения системы. В обоих случаях матрицы B_i , A_i – квадратные, порядка $N_i \times N_i$, где N_i – число точек областей определения сеточных вектор-функций φ_i . Матрицы B_i – симметричные положительно-определенные, A_i – кососимметричные, и имеет место

$$\gamma'_i(\varphi_i, \varphi_i) \leq (B_i\varphi_i, \varphi_i) \leq \gamma''_i(\varphi_i, \varphi_i),$$

$$(A_i\varphi_i, \varphi_i) = 0,$$

$$\gamma'_i \geq \delta \geq 0, \quad \gamma''_i \geq \delta \geq 0;$$

конкретный вид γ'_i , γ''_i указан в [6]. Заметим, что при совпадении экстремальных значений непрерывной функции $R/H(x, y)$ в замкнутой области $\Omega + \Gamma$ и ее сеточного аналога, фигурирующего в системе уравнений (2), числовые характеристики γ'_i , γ''_i для обоих методов

тегральной функции тока для обеих моделей. Расположения центров основных циркуляционных систем совпадают с точностью до шага сетки. Количественный анализ, проведенный по сравнению расходов основных циркуляций, дает хорошее совпадение. Так, например, разница расходов Антарктического циркумполярного течения составляет в случае постоянного рельефа 3%, в случае реального – 25%. Наличие отдельных круговоротов у побережья Антарктиды связано с локальным распределением глубин и значением коэффициента трения R . Детальное изучение структуры течений в данном районе возможно на основе более тщательного численного анализа.

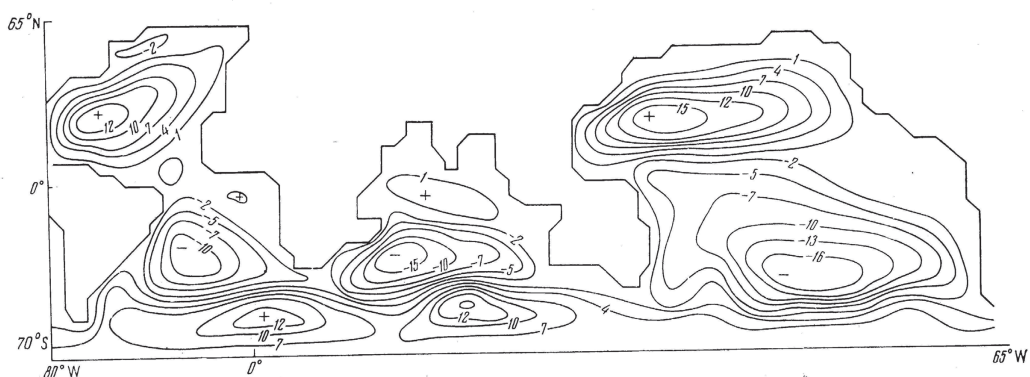


Рис. 4. Изолинии интегральной функции тока φ .
Метод конечных элементов. $V = 3,2 \cdot 10^{12} \text{ см}^3/\text{с}$

Как и следовало ожидать, наибольшие отличия в поведении функции тока наблюдаются у материковых границ. Особенно интересно в этом отношении сравнение решений в районе восточного побережья Африки (рис. 3, 4). Однако, как видно из рис. 3 и 4, локальные изменения прибрежных течений вследствие вариации границы расчетной области при данных входных параметрах (шаг, сетки, величина коэффициента трения R) не оказывают существенного влияния на систему глобальных крупномасштабных течений.

В заключение отметим, что хорошее качественное и количественное совпадение результатов расчетов, проведенное на основе схем, построенных методами конечных разностей и конечных элементов, в значительной степени обусловлено тем, что обе схемы удовлетворяют принципу недиссипативности. Наибольшие отличия течений на-

блюдаются у границ материков и обусловлены разницей в аппроксимации бассейна Мирового океана.

Результаты расчетов показали, что для описания глобальных особенностей океанических циркуляций достаточно пользоваться полигональной аппроксимацией бассейна. Однако при изучении среднемасштабной пространственно-временной эволюции прибрежных течений необходима более точная аппроксимация границы с помощью метода конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян А. С. Основы теории и расчет океанических течений. Гидрометеиздат, 1966. С. 123.
2. Ильин А. М., Каменкович В. М., Жугрина Т. Г., Силкина М. М. О расчете полных потоков в Мировом океане (стационарная задача) // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1969. Т. 5, № 11. С. 1160–1171.
3. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Гидрометеиздат, 1974. 303 с.
4. Кочергин В. П., Цветкова А. А. Численное моделирование течений Мирового океана // В сб. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1974. Т. 5, № 3. С. 39–53.
5. Марчук Г. И., Залесный В. Б. Численная модель крупномасштабной циркуляции в Мировом океане // В сб. Численные методы расчета океанических течений. Новосибирск, 1974. С. 3–20.
6. Кузин В. И. Стационарная ветровая циркуляция в Мировом океане // В сб. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1974. Т. 5, № 4. С. 71–84.
7. Marchuk G. I., Sarkisyan A. S., Kotchergin V. P. Numerical methods and results of calculation of flows in a baroclinic ocean // Geophys. Fluid Dyn. 1973. V. 5. Pp. 89–100.
8. Bryan K. A numerical method for the study of the circulation of the world ocean // J. Comp. Phys. 1969. V. 4, No. 3. Pp. 347–376.
9. Takano K., Mintz Y., Han Y. L. Numerical simulation of the seasonally varying baroclinic World ocean circulation. Preliminary draft, 1973. 33 p.
10. Ильин А. М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. 1969. Т. 6, вып. 2. С. 237–248.

11. Кузин В. И. Монотонная разностная схема для двумерной задачи Дирихле // В сб. Численные методы расчета океанических течений. Новосибирск, 1974. Т. 5.
12. Залесный В. Б. Численные модели приливов и океанических циркуляций: дис. ... канд. МГИ АН УССР, 1974.
13. Hellerman S. An updated estimate of wind stress on the World ocean // *Monthly Weather Rev.* 1968. V. 95, No. 9.
14. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Новосибирск: Наука, 1973.
15. Гидродинамическая модель общей циркуляции атмосферы и океана: информационное сообщение // ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1975. 214 с.

РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ЧЕРНОГО МОРЯ¹³

Излагается метод решения системы дифференциальных уравнений, представляющей собой трехмерную бароклинную модель динамики моря. Применяется двуциклический метод покомпонентного расщепления основного оператора разностной задачи на элементарные операторы. Показывается эффективность этого метода на примере расчета динамики вод Черного моря.

Численный расчет течений в бароклинном океане или море как задача вычислительной математики имеет специфические трудности, обусловленные сложным видом дифференциальных операторов. До последнего времени для большинства исследований в этом направлении было характерно упрощение основного оператора задачи путем опускания в уравнениях менее важных членов. Однако введение метода расщепления позволяет избежать нежелательного упрощения задачи. Исследования, посвященные этой проблеме, изложены в [1, 2].

В предлагаемой работе применяется двуциклический метод покомпонентного расщепления оператора, дающий второй порядок точности по времени в случае невыполнения коммутативного закона для расщепленных операторов. В результате решение одной нестационарной

¹³Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана, 1975, т. 11, № 4, с. 379–393. Совместно с А. А. Кордзадзе, Ю. Н. Скибой.

задачи со сложным оператором сводится к решению совокупности более простых задач.

1. Основные уравнения

Рассмотрим ограниченную область Ω цилиндрической формы с боковой поверхностью σ . Ось x направлена на восток; ось y – на север; ось z – вертикально вниз. Следуя монографии [1], систему дифференциальных уравнений, описывающую нестационарное движение бароклинной жидкости, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}u) - lv + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial x} &= \mu_1 \Delta u + \nu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}v) + lu + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial y} &= \mu_1 \Delta v + \nu_1 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial P'}{\partial z} &= g\rho', \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}T') + \gamma_T w &= \mu_2 \Delta T' + \nu_2 \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial S'}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}S') + \gamma_S w &= \mu_3 \Delta S' + \nu_3 \frac{\partial^2 S'}{\partial z^2}, \\ \rho' &= \alpha_T T' + \alpha_S S', \end{aligned} \tag{1.1}$$

где u, v, w – компоненты вектора скорости \mathbf{u} ; T', S', P' и ρ' – отклонения физических величин температуры, солёности, давления и плотности от средних значений по глубине $\bar{T}(z), \bar{S}(z), \bar{P}(z)$ и $\bar{\rho}(z)$; Δ – оператор Лапласа по горизонтальным переменным; μ_i, ν_i – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной вязкости ($i = 1$), диффузии тепла ($i = 2$) и солей ($i = 3$).

В качестве граничных и начальных условий примем следующее:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial T'}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial S'}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \sigma, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\tau_{xz}}{\bar{\rho}\nu_1}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\tau_{yz}}{\bar{\rho}\nu_1}, \quad T' = T^*, \quad S' = S^*, \\ w &= 0 \quad \text{при } z = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad T' = 0, \quad S' = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } z = H, \tag{1.4}$$

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad T' = T^0, \quad S' = S^0 \quad \text{при } t = 0. \quad (1.5)$$

Здесь \mathbf{n} – вектор внешней нормали к σ ; T^* , S^* , τ_x , τ_y – известные функции на уровне $z = 0$, где τ_x , τ_y – компоненты напряжения ветра. Теорема единственности решения задачи (1.1)–(1.5) в случае $\bar{\rho} = \text{const}$, $g\alpha_T/\gamma_T > 0$, $g\alpha_S/\gamma_S > 0$ доказана в [4].

Исключим из (1.1) функцию ρ' и линеаризуем полученную систему уравнений на интервале времени $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+i}$. Тогда ее можно записать в операторном виде (штрихи у функций T , S и P для простоты записи опускаем)

$$B \frac{\partial \Phi}{\partial t} + A \Phi = 0 \quad (1.6)$$

с начальными данными при $t = 0$

$$B\Phi = BF. \quad (1.7)$$

Здесь

$$\Phi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ P \\ T \\ S \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} R_1 & -l\bar{\rho} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ l\bar{\rho} & R_1 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -g\alpha_T & -g\alpha_S \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\alpha_T & 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & g\alpha_S & 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ 0 \\ 0 \\ T^0 \\ S^0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g\alpha_T}{\gamma_T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g\alpha_S}{\gamma_S} \end{pmatrix},$$

а операторы R_i имеют следующий вид:

$$R_i = D_0 + D_i, \quad D_i = -\bar{\rho} \left(\mu_i \Delta + \nu_i \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \quad (1.8)$$

$$D_0 = \text{div } \vec{\mathbf{u}}^j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь предполагается, что решение задачи (1.6)–(1.7) принадлежит гильбертову подпространству непрерывно-дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям (1.2)–(1.4). Скалярное

произведение введем соотношением

$$(Q, \Phi) = \sum_{i=1}^6 \int_{\Omega} Q_i \Phi_i d\Omega.$$

Нетрудно показать, что на функциях из этого подпространства оператор A является неотрицательным. Заметим также, что исходная задача (1.1)–(1.5) может быть сведена к эволюционной (см. [1]).

2. Аппроксимация уравнений

Проведем разностную аппроксимацию приведенных в п. 1 операторов. Рассмотрим сеточную область Ω_h боковой поверхностью σ_h . Разностные сетки в горизонтальной плоскости и по вертикали приведены на рис. 1. Здесь k – номер узла равномерной сетки по оси x ; l – по оси y ; m – по оси z ($0 \leq k \leq K$, $0 \leq l \leq L$, $0 \leq m \leq M$). Все разностные операторы будем строить так, чтобы в них были учтены аппроксимированные граничные условия дифференциальной задачи (1.2)–(1.4).

Пусть $D_0^h = \sum_{i=1}^3 D_{0,i}^h$ – разностный оператор, аппроксимирующий D_0 , где

$$\begin{aligned} (D_{0,1}^h \varphi)_k &= \frac{u_{k+1/2}^j \varphi_{k+1} - u_{k-1/2}^j \varphi_{k-1}}{2\Delta x}, \\ (D_{0,2}^h \varphi)_l &= \frac{u_{l+1/2}^j \varphi_{l+1} - u_{l-1/2}^j \varphi_{l-1}}{2\Delta y}, \\ (D_{0,3}^h \varphi)_m &= \frac{u_{m+1/2}^j \varphi_{m+1} - u_{m-1/2}^j \varphi_{m-1}}{2\Delta z}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

а φ – любая из сеточных функций u^h, v^h, T^h и S^h . Если компоненты вектора \mathbf{u}^j и решение φ имеют ограниченные производные третьего порядка по x, y и z , то при выполнении соотношения

$$\frac{u_{k+1}^j - u_{k-1}^j}{2\Delta x} + \frac{v_{l+1}^j - v_{l-1}^j}{2\Delta y} + \frac{w_{m+1}^j - w_{m-1}^j}{2\Delta z} = O(h^2), \quad (2.2)$$

где $h = \max\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$, D_0^h аппроксимирует оператор D_0 с точностью $O(h^2)$.

Введем скалярное произведение в гильбертовом пространстве сеточных функций $a, b \in G(\Omega_h)$:

$$(a, b) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M a_{klm} b_{klm} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (2.3)$$

Тогда при выполнении условий

$$u_{1/2}^j = u_{K-1/2}^j = 0, \quad v_{1/2}^j = v_{L-1/2}^j = 0, \quad w_{1/2}^j = w_{M-1/2}^j = 0 \quad (2.4)$$

операторы $D_{0,i}^h$ ($i = 1, 2, 3$), а следовательно, и оператор D_0^h являются кососимметрическими, т. е.

$$(D_{0,i}^h \varphi, \varphi) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

Далее проведем разностную аппроксимацию операторов D_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} D_i^h &= \sum_{n=1}^3 D_{i,n}^h, \\ (D_{i,1}^h \varphi)_k &= -\bar{\mu}_i \frac{\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1}}{\Delta x^2}, \\ (D_{i,2}^h \varphi)_l &= -\bar{\mu}_i \frac{\varphi_{l+1} - 2\varphi_l + \varphi_{l-1}}{\Delta y^2}, \\ (D_{i,3}^h \varphi)_m &= -\bar{\nu}_i \frac{\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1}}{\Delta z^2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\bar{\mu}_i = \mu_i \bar{\rho}, \quad \bar{\nu}_i = \nu_i \bar{\rho}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.7)$$

где $D_{i,n}^h$ ($i = 1, 2, 3$) – самосопряженные и неотрицательные операторы на сеточных вектор-функциях φ из $G(\Omega_h)$, удовлетворяющих на границе области разностным условиям (1.2)–(1.4), т. е.

$$(D_{i,n}^h \varphi, \varphi) \geq 0, \quad i, n = 1, 2, 3. \quad (2.8)$$

Итак, приходим к разностной аппроксимации операторов R_i :

$$R_i^h = D_0^h + D_i^h, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

Введем также разностные аппроксимации операторов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$:

$$\nabla_x^+ \varphi_k = \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\Delta x}, \quad \nabla_x^- \varphi_k = \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\Delta x},$$

$$\begin{aligned}\nabla_y^+ \varphi_l &= \frac{\varphi_{l+1} - \varphi_l}{\Delta y}, & \nabla_y^- \varphi_l &= \frac{\varphi_l - \varphi_{l-1}}{\Delta y}, \\ \nabla_z^+ \varphi_m &= \frac{\varphi_{m+1} - \varphi_m}{\Delta z}, & \nabla_z^- \varphi_m &= \frac{\varphi_m - \varphi_{m-1}}{\Delta z}.\end{aligned}\quad (2.10)$$

В результате основной оператор A аппроксимируется следующим:

$$A^h = A_1^h + A_2^h,$$

где матрицы

$$A_1^h = \begin{pmatrix} R_1^h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1^h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_2^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_3^h \end{pmatrix},$$

$$A_2^h = \begin{pmatrix} 0 & -l\bar{\rho}E & 0 & \nabla_x^+ & 0 & 0 \\ l\bar{\rho}E & 0 & 0 & \nabla_y^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_z^+ & -g\alpha_T E & -g\alpha_S E \\ \nabla_x^- & \nabla_y^- & \nabla_z^- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\alpha_T E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\alpha_S E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеют своими элементами квадратные матрицы размерности вектора $\varphi = \{\varphi_{klm}\}$; E – единичная матрица. В итоге приходим к разностной задаче

$$B^h \frac{\partial \Phi^h}{\partial t} + A^h \Phi^h = 0, \quad (2.11)$$

с начальными условиями

$$B^h \Phi^h = B^h F^h, \quad (2.12)$$

в которой уже учтены краевые условия. Здесь

$$F^h = \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ 0 \\ 0 \\ T^0 \\ S^0 \end{pmatrix}, \quad B^h = \begin{pmatrix} \bar{\rho}E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho}E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g\alpha_T}{\gamma_T} E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g\alpha_S}{\gamma_S} E \end{pmatrix}.$$

Из вида матриц A_1^h и A_2^h нетрудно убедиться, что

$$(A_1^h \Phi^h, \Phi^h) \geq 0, \quad (A_2^h \Phi^h, \Phi^h) = 0 \quad (2.13)$$

и, следовательно,

$$(A^h \Phi^h, \Phi^h) \geq 0. \quad (2.14)$$

Отсюда непосредственно следует устойчивость решения задачи (2.11), (2.12). Действительно, умножая скалярно уравнение (2.12) на вектор Φ^h и используя соотношение (2.14), приходим к неравенству, из которого следует условие устойчивости решения задачи

$$(B^h \Phi^h, \Phi^h) \leq (B^h \Phi_0^h, \Phi_0^h), \quad (2.15)$$

где Φ_0^h – начальный вектор.

3. Расщепление задачи (2.11), (2.12)

Переходим к физическому расщеплению задачи на основе двуциклического метода, изложенного в [2]. С этой целью предположим, что весь временной интервал $0 \leq t \leq T$ разбит на равные интервалы $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ шириной $t_j - t_{j-1} = \tau$, и для реализации двуциклического метода расщепления рассмотрим расширенный интервал $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$.

Поскольку операторы A_1^h и A_1^h зависят от времени, то для получения второго порядка точности по τ вектор-функция u^j берется одной и той же для всего расширенного интервала времени. Тогда на первом этапе в интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ решается система уравнений (в дальнейшем индекс h будем опускать ради простоты записи)

$$B \frac{d\Phi_1}{dt} + A_1 \Phi_1 = 0, \quad B\Phi_1^{j-1} = B\Phi^{j-1}; \quad (3.1)$$

на втором этапе в интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$ – система

$$B \frac{d\Phi_2}{dt} + A_2 \Phi_2 = 0, \quad B\Phi_2^{j-1} = B\Phi_1^j; \quad (3.2)$$

на третьем этапе в интервале $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ – система

$$B \frac{d\Phi_3}{dt} + A_1 \Phi_3 = 0, \quad B\Phi_3^j = B\Phi_2^{j+1}. \quad (3.3)$$

Системы уравнений (3.1), (3.2) и (3.3) представляют собой разностные по геометрическим переменным аналоги дифференциальных систем, описывающих процессы переноса субстанций физических элементов вдоль траекторий с учетом турбулентной вязкости и диффузии и адаптации полей гидрологических элементов соответственно.

Используя соотношение (2.9) и равенства

$$D_0^h = \sum_{n=1}^3 D_{0,n}^h, \quad D_i^h = \sum_{n=1}^3 D_{i,n}^h, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.4)$$

представим операторы R_i^h и A в виде суммы трех одномерных операторов:

$$R_i^h = \sum_{n=1}^3 R_{i,n}^h, \quad (i = 1, 2, 3), \quad A_1 = \sum_{n=1}^3 A_{i,n}, \quad (3.5)$$

$$R_i^n = D_{0,n}^h + D_{i,n}^h, \quad (i, n = 1, 2, 3), \quad (3.6)$$

$$\Lambda_{1,n} = \left\| \begin{array}{cccccc} R_{1,n}^h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{1,n}^h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{2,n}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{3,n}^h \end{array} \right\|, \quad (n = 1, 2, 3),$$

где $\Lambda_{1,n}$ – некоммутативные операторы. Из свойств операторов $R_{1,n}^h$ ($i, n = 1, 2, 3$) непосредственно следует

$$(\Lambda_{i,n}\varphi, \varphi) \geq 0, \quad (n = 1, 2, 3). \quad (3.7)$$

Применяя для решения системы (3.1) на интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ двуциклический метод покомпонентного расщепления, приходим к совокупности одномерных задач (эффективно решаемых методом факторизации):

а) на интервале времени $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1/2}$

$$B \frac{d\Phi_{1,\alpha}}{dt} + \Lambda_{1,\alpha} \Phi_{1,\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (3.8)$$

$$B\Phi_{1,1}^{j-1} = B\Phi^{j-1}, \quad B\Phi_{1,\alpha}^{j-1} = B\Phi_{1,\alpha-1}^{j-1/2} \quad (\alpha > 1), \quad \Phi_1^{j-1/2} = \Phi_{1,3}^{j-1/2};$$

б) на интервале времени $t_{j-1/2} \leq t \leq t_j$

$$B \frac{d\Phi_{1,\alpha}}{dt} + \lambda_{1,4-\alpha} \Phi_{1,\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (3.9)$$

$$B\Phi_{1,1}^{j-1/2} = B\Phi_1^{j-1/2}, \quad B\Phi_{1,\alpha}^{j-1/2} = B\Phi_{1,\alpha-1}^j \quad (\alpha > 1), \quad \Phi_1^j = \Phi_{1,3}^j.$$

Для аппроксимации одномерных задач (3.8), (3.9) по времени используется схема Кранка – Николсон. Задача (3.3) решается аналогично на интервале $t_j \leq t \leq t_{j+1}$.

Переходим к решению задачи (3.2). Выделим баротропную Φ_2 и бароклинную Φ'_2 части решения задачи Φ_2 :

$$\Phi_2 = \bar{\Phi}_2 + \Phi'_2, \quad (3.10)$$

где

$$\bar{\Phi}_2 = (\bar{u}_2, \bar{v}_2, 0, \bar{P}_2, 0, 0)^*, \quad \Phi'_2 = (u'_2, v'_2, w'_2, P'_2, T_2, S_2)^*,$$

* – операция транспонирования, а операция осреднения определяется следующим образом:

$$\bar{(\cdot)} = \frac{1}{H} \int_0^H (\cdot) dz.$$

Подставляя (3.10) в (3.2), приходим к двум задачам на полном интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$:

а) для баротропной составляющей решения $\bar{\Phi}_2$

$$B \frac{d\bar{\Phi}_2}{dt} + A_2 \bar{\Phi}_2 = 0, \quad A \bar{\Phi}_2^{j-1} = B \bar{\Phi}_1^j, \quad (3.11)$$

где $\bar{\Phi}_1^j = (\bar{u}_1^j, \bar{v}_1^j, 0, 0, 0, 0)^*$;

б) бароклинной составляющей решения Φ'_2

$$B \frac{d\Phi'_2}{dt} + A_2 \Phi'_2 = 0, \quad B \Phi_2^{j-1} = B \left(\Phi_1^j - \bar{\Phi}_1^j \right). \quad (3.12)$$

Для решения задачи (3.11) применяем схему Кранка – Николсон и вводим в рассмотрение разностную функцию тока $\psi_k = \psi_{k,l}^j$:

$$\frac{\bar{u}_2^{j+1} - \bar{u}_2^{j-1}}{2} = -\nabla_y^- \psi^j, \quad \frac{\bar{v}_2^{j+1} - \bar{v}_2^{j-1}}{2} = \nabla_x^- \psi^j. \quad (3.13)$$

Тогда решение задачи (3.11) сводится к решению уравнения для функции, которое имеет вид

$$\nabla_y^+ (\nabla_y^- \psi^j) + \nabla_x^+ (\nabla_x^- \psi^j) + \frac{\tau\beta}{2} (\nabla_x^+ + \nabla_x^-) \psi^j = \nabla_x^+ \bar{v}_2^{j-1} - \nabla_y^+ \bar{u}_2^{j-1},$$

$$\psi^j|_{\Gamma} = 0, \quad (3.14)$$

где Γ – контур, полученный в пересечении поверхности σ_h с плоскостью $z = 0$. Уравнение (3.14) решается методом верхней релаксации.

Рассмотрим далее оператор A_2 задачи (3.12). Представим его в виде суммы трех операторов:

$$A_2 = \sum_{n=1}^3 \Lambda_{2,n}, \quad (3.15)$$

$$\Lambda_{2,1} = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & -l\bar{\rho}E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l\bar{\rho}E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$\Lambda_{2,2} = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \nabla_x^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\nabla_z^+ & -\frac{g\alpha_T}{2}E & -\frac{g\alpha_S}{2}E \\ \nabla_x^- & 0 & \frac{1}{2}\nabla_z^- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g\alpha_T}{2}E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g\alpha_S}{2}E & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$\Lambda_{2,3} = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_y^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\nabla_z^+ & -\frac{g\alpha_T}{2}E & -\frac{g\alpha_S}{2}E \\ 0 & \nabla_y^- & \frac{1}{2}\nabla_z^- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g\alpha_T}{2}E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g\alpha_S}{2}E & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Операторы $\Lambda_{2,n}$ ($n = 1, 2, 3$) – кососимметрические, т. е.

$$(\Lambda_{2,n}\varphi, \varphi) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.16)$$

Заметим также, что они не являются коммутативными, поэтому будем пользоваться двуциклическим методом покомпонентного расщепления. В результате приходим к решению следующих задач (штрих у функции Φ_2 опускаем):

а) на интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_j$

$$B \frac{d\Phi_{2,\alpha}}{dt} + \Lambda_{2,\alpha}\Phi_{2,\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$B\Phi_{2,1}^{j-1} = B\left(\Phi_1^j - \bar{\Phi}_1^{j-1}\right), \quad B\Phi_{2,\alpha}^{j-1} = B\Phi_{2,\alpha-1}^j \quad (\alpha > 1), \quad (3.17)$$

$$\Phi_2^j = \Phi_{2,3}^j;$$

б) на интервале $t_j \leq t \leq t_{j+1}$

$$B \frac{d\Phi_{2,\alpha}}{dt} + \Lambda_{2,4-\alpha} \Phi_{2,\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$B\Phi_{2,1}^j = B\Phi_2^j, \quad B\Phi_{2,\alpha}^j = B\Phi_{2,\alpha-1}^{j+1} \quad (\alpha > 1), \quad (3.18)$$

$$\Phi_2^{j+1} = \Phi_{2,3}^{j+1}.$$

Для решения задач (3.17), (3.18) применяется схема Кранка – Николсон. Решение первой из задач (3.17) и последней из (3.18) элементарно. Переходя к численному решению второй задачи в (3.17), введем в рассмотрение разностную функцию тока

$$u_{2,2}^{j-1/2} = -\frac{1}{2} \nabla_z^- \psi^{j-1/2}, \quad w_{2,2}^{j-1/2} = \nabla_x^- \psi^{j-1/2}. \quad (3.19)$$

Здесь

$$\psi^{j-1/2} = \frac{1}{2} (\varphi^j + \varphi^{j-1}).$$

В результате приходим к уравнению для $\psi^{j-1/2}$:

$$\begin{aligned} \nabla_z^+ (\nabla_z^- \psi^{j-1/2}) + \frac{\tau^2 \gamma g}{4\bar{\rho}} \nabla_x^+ (\nabla_x^- \psi^{j-1/2}) &= -2f^{j-1/2}, \\ \psi^{j-1/2}|_{\Gamma_l} &= 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$f^{j-1/2} = \nabla_z^+ u_{2,2}^{j-1/2} - \frac{\tau g}{2\bar{\rho}} \nabla_x^+ (\alpha_T T_{2,2}^{j-1} + \alpha_S S_{2,2}^{j-1}),$$

где Γ_l – контур, полученный в пересечении границы области Ω_h с плоскостью $y = y_l$.

После того как решение уравнения (3.20) найдено, искомые компоненты решения рассматриваемой задачи получим с помощью соотношений

$$\begin{aligned} u_{2,2}^j &= -\nabla_z^- \psi^{j-1/2} - u_{2,2}^j, \quad v_{2,2}^j = v_{2,2}^{j-1}, \\ T_{2,2}^j &= T_{2,2}^{j-1} - \frac{\tau \gamma T}{2} \nabla_x^- \psi^{j-1/2}, \\ S_{2,2}^j &= S_{2,2}^{j-1} - \frac{\tau \gamma S}{2} \nabla_x^- \psi^{j-1/2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Остальные задачи (3.17), (3.18) решаются аналогично. Таким образом, алгоритм решения задачи адаптации сформулирован полностью. Заметим, что предложенный метод может быть применен для областей с произвольным рельефом дна.

4. Численные эксперименты

С применением изложенного выше метода решения проводились численные эксперименты по расчету течений и термохалинной структуры вод для бассейна Черного моря. Они включали в себя выбор по возможности наибольшего допустимого временного шага. С этой целью трехмерная бароклинная задача решалась при разных значениях временного шага сроком на двое суток. Результаты этих исследований приведены в [5]. Расчеты по Черному морю проводились с временным шагом $\tau = 6$ ч.

Информация о напряжении ветра над бассейном Черного моря была получена с довольно грубых карт господствующих месячных ветров за июль и январь по формулам

$$\tau_{xz} = \gamma u |\mathbf{u}|, \quad \tau_{yz} = \gamma v |\mathbf{u}|, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{u} = (u, v)$ – скорость ветра; $\gamma = 3,25 \cdot 10^{-6}$ г/см³.

При расчетах использовались также среднемесячные данные о распределении полей температуры и солёности за июль и январь на поверхности Черного моря.

Бассейн Черного моря был покрыт равномерной в плоскости (x, y) сеткой. Шаг сетки $\Delta x = \Delta y = 40$ км; по оси x бралось 28 шагов, по оси y – 14. По данным температуры T и солёности S на поверхности моря значения T^* и S^* определялись по формулам

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{k,l} T_{k,l}, \quad \bar{S} = \frac{1}{N} \sum_{k,l} S_{k,l}, \quad (4.2)$$

$$T^* = T - \bar{T}, \quad S^* = S - \bar{S}, \quad (4.3)$$

где N – число внутренних и граничных узлов сетки на уровне $z = 0$, по которым ведется суммирование в (4.2).

После решения задачи по полученным отклонениям T' и S' значения полей T , S и ρ находились по формуле

$$\varphi = \varphi_0 + \gamma_\varphi z + \varphi', \quad (4.4)$$

где φ_0 – среднее по области значение φ ; φ' – отклонение φ от $\bar{\varphi} = \varphi_0 + \gamma_\varphi z$; φ – в конкретном случае либо T , либо S , либо ρ .

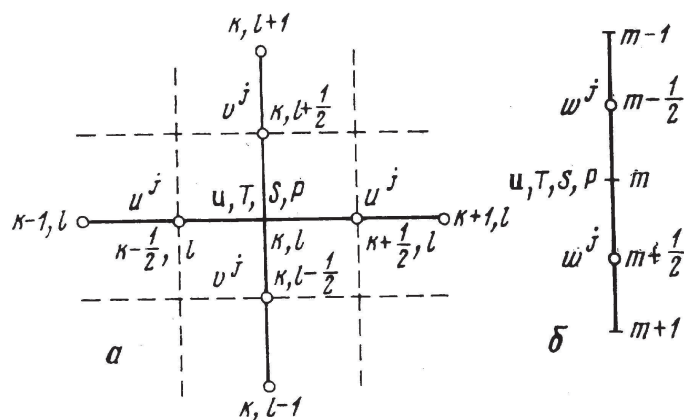


Рис. 1. Разностные сетки

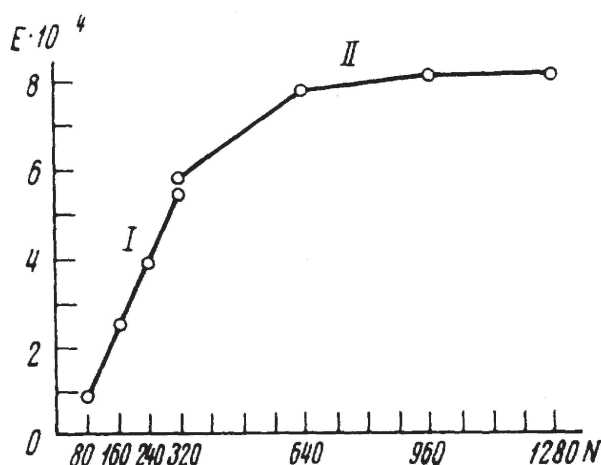


Рис. 2. Поведение кинетической энергии $E = \sum_{klm} \frac{u_{klm}^2 + v_{klm}^2}{2}$ (см²/с²) в задачах о термохалинной и ветровой циркуляции Черного моря: (I) – $H = 2000$ м; (II) – $H = H(x, y)$; N – количество шагов по времени

В численных экспериментах T_0 и S_0 вычислялись по формулам (4.2), значения постоянных параметров брались следующими: $\rho = 1$ г/см³; $\mu_i = 10^6$ см²/с; $\nu_i = 10^2$ см²/с, ($i = 1, 2, 3$); $\alpha_T = -0,16 \cdot 10^{-3}$ г/град · см²; $\alpha_S = 0,82 \cdot 10^{-3}$ г/град · см²; $l = l_0 + \beta y$; $l_0 = 0,25 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹; $\beta = 10^{-13}$ см⁻¹с⁻¹, а значения констант $\nu_T = d\bar{T}/dz$ и $\gamma_S = d\bar{S}/dz$ вычислялись в зависимости от рассчитываемого варианта.

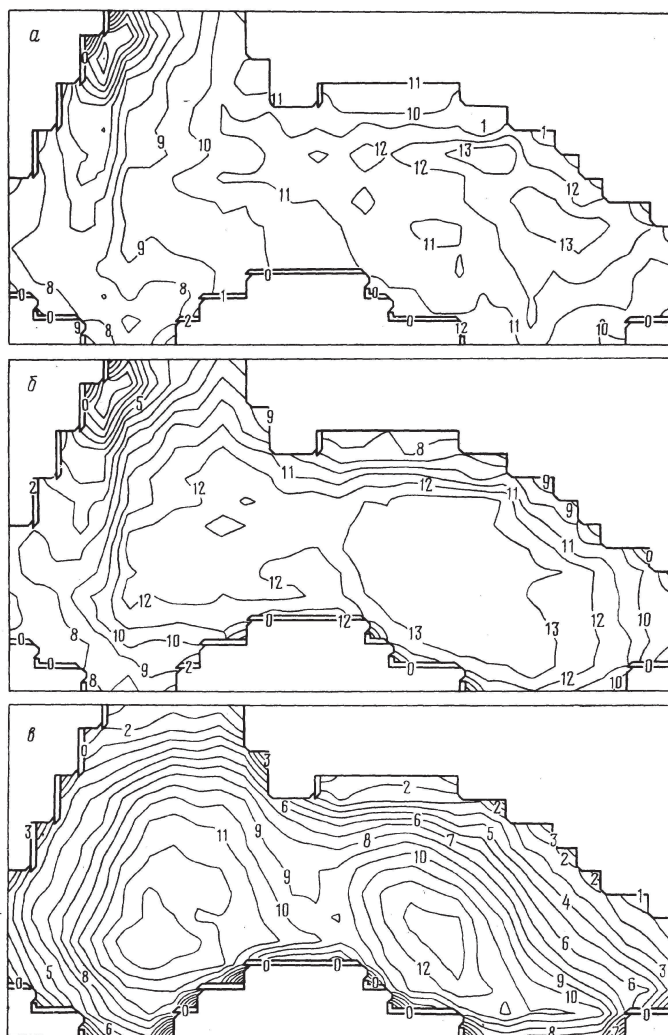


Рис. 3. Распределение температуры (а), солёности (б) и плотности (в) на глубине 200 м. а: 0 – $T_{\min} = 6,6^\circ$, 13 – $T_{\max} = 9,9^\circ$; б: 0 – $S_{\min} = 18,9\text{‰}$, 13 – $S_{\max} = 19,7\text{‰}$; в: 0 – $\rho_{\min} = 1,0163 \text{ г/см}^3$, 13 – $\rho_{\max} = 1,0168 \text{ г/см}^3$. Входные данные за январь, $H = 500 \text{ м}$

В рамках шестиуровневой по оси z модели были подсчитаны несколько вариантов с постоянным и переменным дном. Результаты этих расчетов на ЭВМ БЭСМ-6 приведены в [6]. Расчеты показали эффективность предложенного метода решения и позволили установить, что при указанных значениях входных параметров решение задачи выходит на стационарный режим приблизительно за один год (рис. 2).

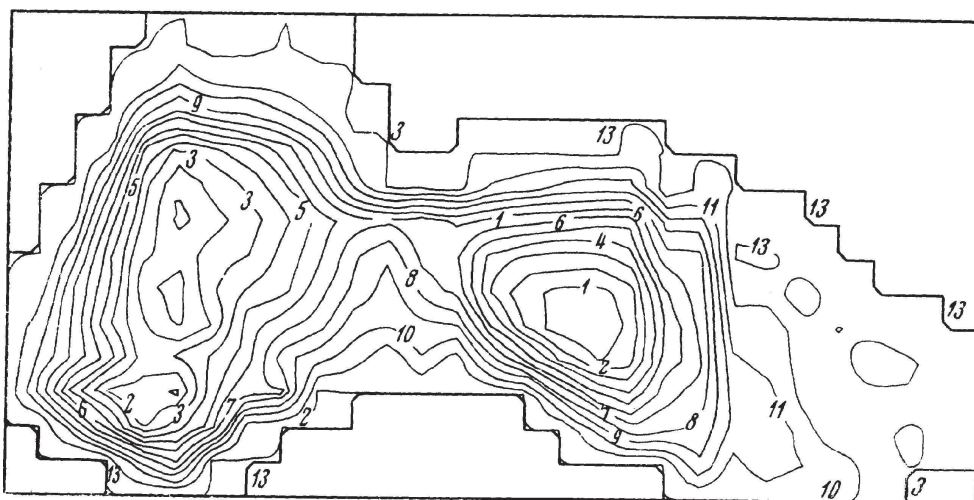


Рис. 4. Интегральная функция тока баротропной составляющей задачи. Входные данные за январь, $H = 500$ м: $0 - \psi_{\min} = -0,8 \cdot 10^8$; $13 - \psi_{\max} = 0,1 \cdot 10^8$

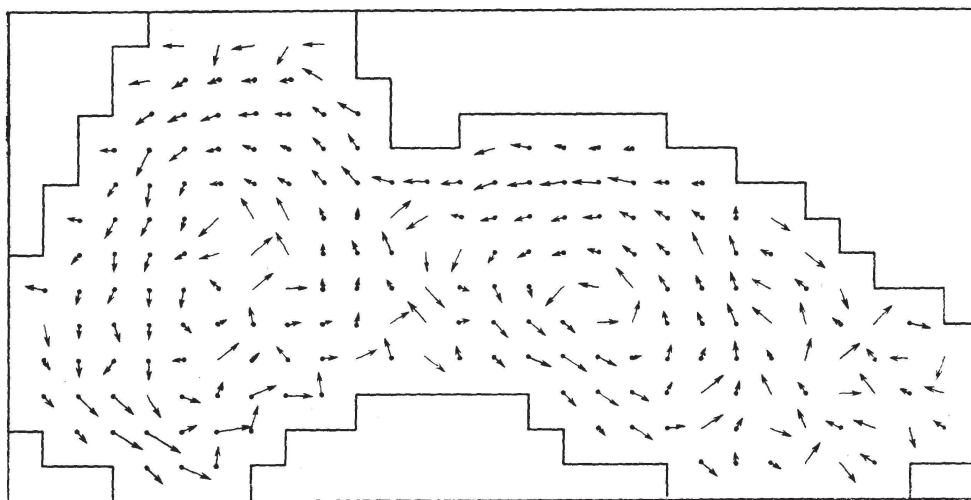


Рис. 5. Поле скорости на глубине 200 м. Входные данные за январь, $H = 500$ м. Стрелки с точкой соответствуют скоростям от 10 до 35 см/с; без точки – от 0 до 10 см/с

Несмотря на довольно грубую входную информацию, не позволившую получить более точные количественные результаты, можно сде-

лать ряд интересных выводов. Особый интерес представляет вариант расчета термохалинной циркуляции (напряжения ветра отсутствуют, рис. 3–5). Оказалось, что только за счет неравномерного притока тепла и переменной солености морской воды в Черном море могут возникать течения, достигающие значений до 35 см/с. Это говорит о важности процессов теплового и солевого обмена в формировании течений. На наличие ярко выраженного термоклина в верхних 200–300 м Черного моря указывается в [7], что послужило поводом принять $H = 500$ м в данном варианте. На рисунках, изображающих поля скоростей, стрелки, имеющие точку в своем начале, представляют большие по модулю значения скоростей, чем стрелки, не имеющие точки.

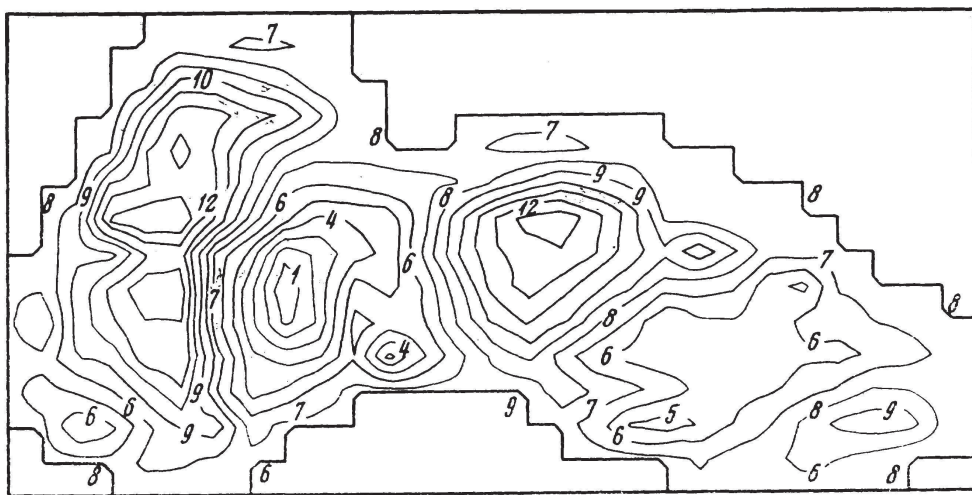


Рис. 6. Интегральная функция тока баротропной составляющей задачи. Входные данные за июль, $H = 500$ м: $0 - \psi_{\min} = -0,2 \cdot 10^9$;
 $13 - \psi_{\max} = 0,19 \cdot 10^9$

Вариант расчета чисто ветровой циркуляции ($T' = S' = 0$ всюду в Ω) привел к полям течений достаточно однородным по высоте (рис. 6, 7). Картины течений всех горизонтов, за исключением поверхности моря, близки друг к другу. Этот результат также физически обоснован. При анализе результатов расчета двух однотипных вариантов, отличающихся только тем, что в одном из них глубина дна $H = 2000$ м, а в другом – $H = H(x, y)$, установлена важность рельефа дна при расчете температуры, солености и течений, на которую ука-

зано в [3]. Таким образом, влияние рельефа дна на гидрологию моря так же велико, как и на гидрологию океана (рис. 8, 9).

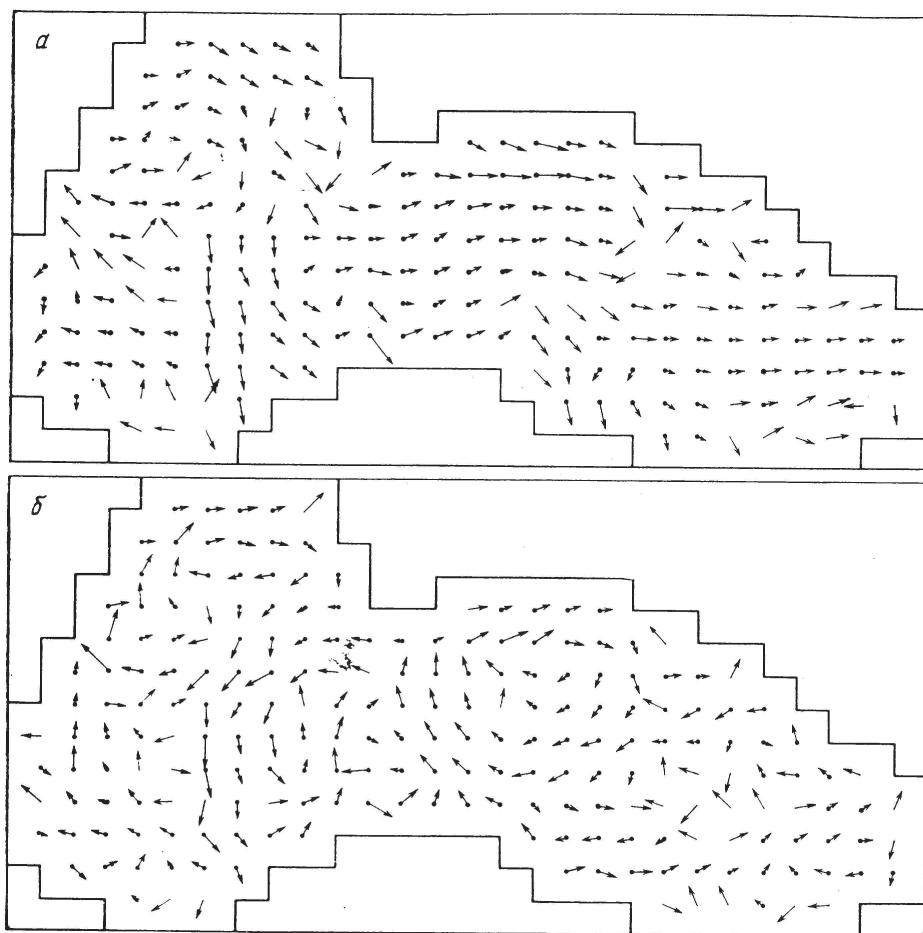


Рис. 7. Поле скорости: *a* – на поверхности; *б* – на глубине 200 м.

Входные данные за июль, $H = 500$ м. Стрелки с точкой соответствуют скоростям от 10 до 42 см/с (*a*) и от 10 до 40 см/с (*б*), без точки – от 0 до 10 см/с

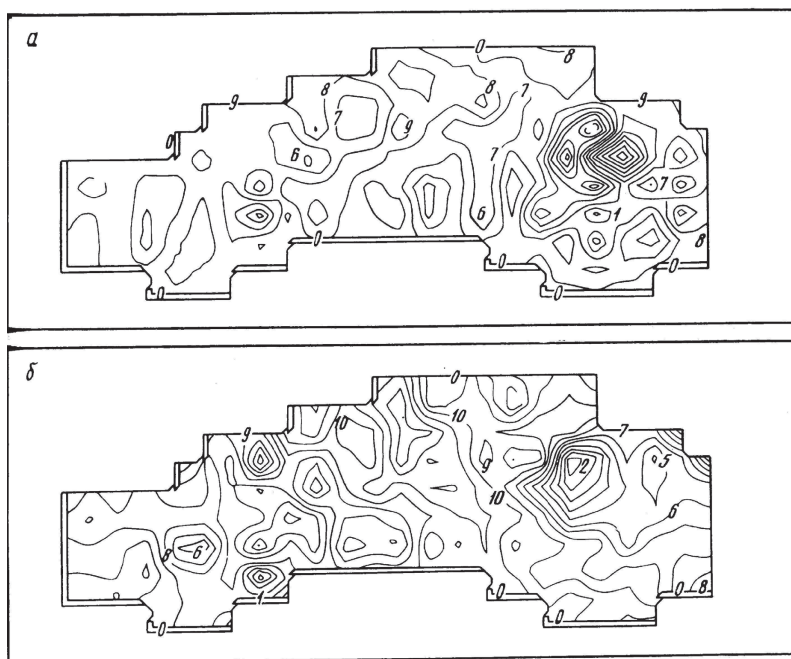


Рис. 8. Распределение температуры (а) и солености (б) на глубине 1600 м в задаче о термохалинной и ветровой циркуляции. Входные данные за январь, $H = H(x, y)$. а: 0 – $T_{\min} = 8,91^\circ$, 13 – $T_{\max} = 9,04^\circ$; б: 0 – $S_{\min} = 19,3\text{‰}$, 13 – $S_{\max} = 21,9\text{‰}$

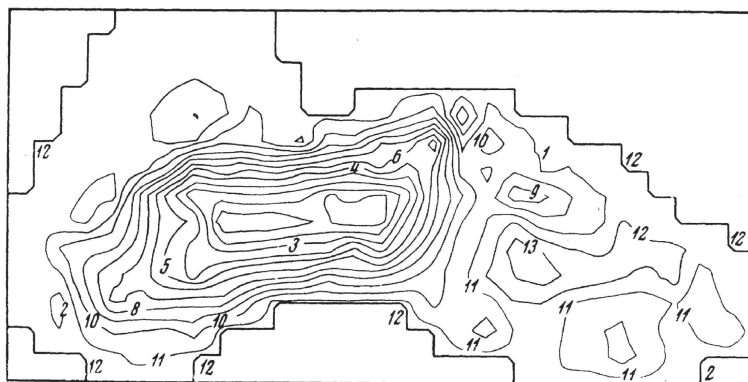


Рис. 9. Интегральная функция тока баротропной составляющей решения в задаче о термохалинной и ветровой циркуляции. Входные данные за январь, $H = H(x, y)$. 0 – $\psi_{\min} = -0,58 \cdot 10^9$, 13 – $\psi_{\max} = 0,44 \cdot 10^9$

Из анализа полученных картин распределения изолиний температуры и плотности по слоям, показавшего заметное отличие этих полей друг от друга, можно сделать вывод о том, что расчет скоростей течений в Черном море по одному только уравнению притока тепла без учета уравнения притока солей может привести к недостаточно полным результатам. Например, на рис. 10 картины полей солёности и плотности качественно согласуются лучше, чем картины полей температуры и плотности.

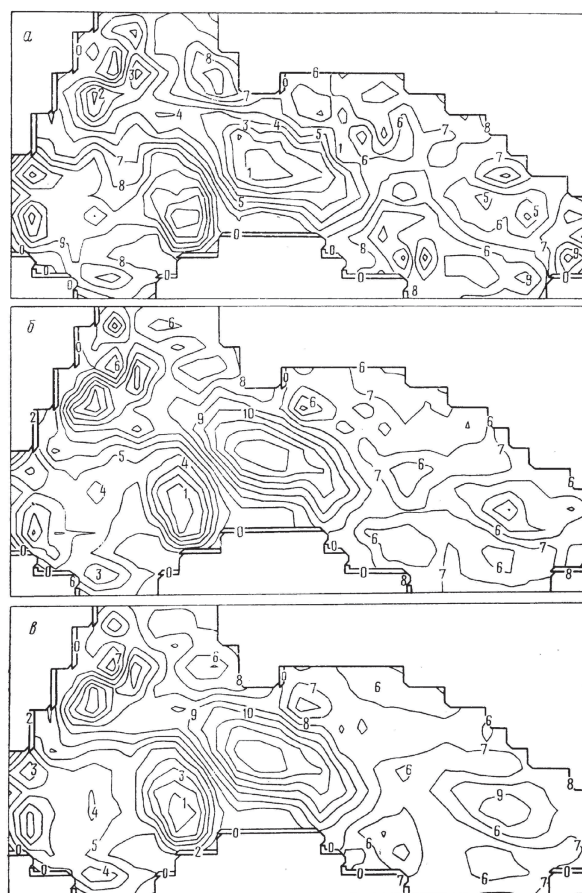


Рис. 10. Распределение температуры (а), солёности (б) и плотности (в) на глубине 400 м в задаче о термохалинной и ветровой циркуляции; входные данные за июль, $H = 2000$ м.

а: $0 - T_{\min} = 18,1^{\circ}$, $13 - T_{\max} = 19,0^{\circ}$; б: $0 - S_{\min} = 18,2\text{‰}$,
 $13 - S_{\max} = 18,7\text{‰}$; в: $0 - \rho_{\min} = 1,0168 \text{ г/см}^3$,
 $13 - \rho_{\max} = 1,0171 \text{ г/см}^3$.

В процессе анализа результатов расчета обнаружился также ряд эффектов, который требует, по-видимому, специального исследования: активизация циркуляции в северо-западном и юго-восточном районах бассейна Черного моря; переход крупномасштабной циркуляции в поверхностных слоях в мелкомасштабную на большой глубине (что подтверждается экспериментальными данными [7]); существенная зависимость течений от поля ветра над бассейном моря.

Установлена возможность образования на глубинах областей обратного течения, связанного с бароклинными эффектами. Это обстоятельство может быть использовано, в частности, для проведения специальных экспериментальных исследований в Черном море. В заключение отметим, что приведенные в настоящей работе рис. 3–10 выполнены на графопостроителе системы Venson.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана на основе метода расщепления. Новосибирск: Наука, 1972.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Новосибирск: Наука, 1972.
3. Саркисян А. С. Основы теории и расчет океанических течений. Гидрометеиздат, 1966.
4. Кордзадзе А. А. О единственности решения квазилинейной задачи динамики океана. Препринт; ВЦ СО АН СССР, 1974.
5. Кордзадзе А. А. Расчет основных характеристик циркуляции бароклинного моря: дис. ... канд. Новосибирск, 1973.
6. Кордзадзе А. А., Скиба Ю. Н. Численные расчеты основных характеристик Черного моря в рамках трехмерной модели. Препринт; ВЦ СО АН СССР, 1973.
7. Филиппов Д. М. Циркуляция и структура вод Черного моря. М.: Наука, 1968.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ БАРОКЛИННОГО ОКЕАНА ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ¹³

Изучается асимптотическая устойчивость состояния равновесия устойчиво стратифицированной жидкости. Получаются оценки на скорость затухания начальных возмущений под действием диссипативных факторов. Исследуется влияние граничных условий на скорость затухания.

В настоящее время при решении многих задач динамики океана используется принцип стационарирования [1–6], согласно которому при решении нестационарной задачи со стационарной или квазистационарной правой частью начальные возмущения затухают и решение выходит на установившийся режим. Настоящая работа посвящена качественному изучению и обоснованию принципа стационарирования в линейных задачах динамики бароклинного океана. Полученные результаты можно интерпретировать как доказательство асимптотической устойчивости состояния равновесия устойчиво стратифицированной жидкости при наличии диссипативных факторов.

1. В плоскости $z = 0$ трехмерного пространства (x, y, z) рассмотрим область D с границей γ . Пусть дно океанического бассейна $H(x, y)$ – функция, определенная в D , такова, что $\min_D H = H_0 > 0$. Направим ось z вертикально вниз и определим область \tilde{Q} – океанический бассейн:

$$\tilde{Q} = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \quad 0 \leq z \leq H(x, y)\}. \quad (1.1)$$

Пусть $U = (u, v)(x, y, z, t)$ – вектор скорости; $\rho(x, y, z, t)$ – отклонение плотности от стандартного значения $\bar{\rho}(z) > 0$ [1]; $\zeta(x, y, t)$ – смещение уровня океана относительно плоскости $z = 0$.

Сделаем замену зависимых и независимых переменных [7]:

$$(U', \rho', \zeta') = (HU, \rho, \zeta), \quad (x', y', z', t') = \left(x, y, \frac{z}{H}, t\right). \quad (1.2)$$

Замена независимых переменных (1.2) преобразует область \tilde{Q} в цилиндрическую область $Q = D \times [0, 1]$ с боковой поверхностью

¹³Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана, 1980, т. 16, № 3, с. 211–218. Совместно с М. А. Бубновым.

$S = \gamma \times [0, 1]$. В новых переменных уравнения динамики бароклинного океана, линеаризованные относительно состояния покоя, могут быть записаны следующим образом [1, 7] (для удобства штрихи над обозначениями функций и переменных опускаем):

$$\begin{aligned} \frac{1}{gH}U_t + KU - (\nu U_z)_z + \nabla\zeta + \int_0^z (H\nabla\rho - z\nabla H\rho_z) \equiv \\ \equiv \frac{1}{gH}U_t + L_1(U, \rho, z) = f, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} H\rho_t + H\Gamma \int_z^1 \operatorname{div} U \, dz + z\Gamma\nabla HU - \operatorname{div}(\kappa\nabla\rho) - (\mu\rho_z)_z \equiv \\ \equiv H\rho_t + L_2(U, \rho) = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\zeta_t + \int_0^1 \operatorname{div} U \, dz = 0. \quad (1.5)$$

Функции U , ρ , ζ должны удовлетворять граничным условиям при $z = 0, 1$:

$$U_z = \rho_z = 0 \text{ при } z = 0, \quad U = \rho_z = 0 \text{ при } z = 1, \quad (1.6)$$

а также одному из следующих наборов граничных условий на S и γ [1, 7]:

$$H\Gamma \int_z^1 U n \, dz = \kappa \frac{\partial \rho}{\partial n} \text{ на } S, \quad \int_0^1 U n \, dz = 0 \text{ на } \gamma, \quad \text{задача 1}, \quad (1.7)$$

$$H\Gamma \int_z^1 U n \, dz = \kappa \frac{\partial \rho}{\partial n} \text{ на } S, \quad \zeta = \tilde{\zeta} \text{ на } \gamma, \quad \text{задача 2}. \quad (1.8)$$

Для каждой задачи 1, 2 задаем начальные данные

$$(U, \rho, \zeta)|_{t=0} = (U^0, \rho^0, \zeta^0). \quad (1.9)$$

Причем для задачи 1 требуем

$$\int_Q H\rho^0 \, dQ = \int_D \zeta^0 \, dD = 0, \quad (1.10)$$

а для задачи 2

$$\int_Q H \rho^0 dQ = 0. \quad (1.11)$$

Нетрудно проверить, что следствием условий (1.10), (1.11), уравнений (1.4), (1.5) и граничных условий являются следующие соотношения:

$$\int_Q H \rho dQ = \int_D \zeta dD = 0, \quad t > 0 \quad \text{задача 1}; \quad (1.12)$$

$$\int_D \zeta dD = 0, \quad t > 0 \quad \text{задача 2}. \quad (1.13)$$

В (1.3)–(1.5) $\Gamma = \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}(zH) > 0$, $\nu > 0$, $\kappa > 0$, $\mu > 0$ – известные функции, определенные в Q ; матрица K имеет следующий вид:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -l/gH \\ l/gH & 0 \end{bmatrix},$$

где $l(y)$ – параметр Кориолиса; $n = (n_1, n_2)$ – вектор внешней нормали γ ; операторы div , ∇ , δ действуют по переменным x и y .

В силу линейности уравнений для обоснования принципа стационаризации достаточно установить асимптотическую устойчивость нулевого решения задачи 1–2. Поэтому будем считать, что в (1.3), (1.8) $f = \tilde{\zeta} = 0$.

2. Умножим уравнение (1.3) на вектор-функцию $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \Phi|_{z=1} = 0$. Уравнение (1.4), умноженное на функцию $q(x, y, z, t)/\Gamma$, сложим с уравнением (1.5), умноженным на $\eta(x, y, t)$. Интегрируя полученные соотношения по частям и области $Q_T = Q \times [0, T]$, приходим к тождествам

$$\int_{Q_T} \left(\frac{1}{gH} U_t + KU \right) \Phi dQ_T + \int_{Q_T} \nu U_z \Phi_z dQ_T = \int_{Q_T} P(\zeta, \rho) \Phi dQ_T, \quad (2.1)$$

$$\int_{Q_T} \left(\frac{H}{\Gamma} \rho_t q + \zeta_t \eta \right) dQ_T + \int_0^T \left[- \int_Q U P(\eta, q) dQ + L(\rho, q) \right] dt = 0, \quad (2.2)$$

где $P(\zeta, \rho)$, $L(\rho, q)$ – следующие выражения:

$$P(\zeta, \rho) \equiv \nabla \zeta + \int_0^z (H \nabla \rho - z \nabla H \rho_z) dz,$$

$$L(\rho, q) \equiv \int_Q \left[\frac{\mu}{\Gamma} \nabla \rho \nabla q + \frac{\nu}{\Gamma} \rho_z q_z - \frac{H \Gamma_z}{\Gamma^2} \left(\mu z \frac{\nabla H}{H} \nabla \rho + \nu \rho_z \right) q \right] dQ. \quad (2.3)$$

Непосредственные выкладки показывают, что при выполнении условий

$$\frac{\nu}{\kappa} + \frac{|\nabla H|}{H} < 1, \quad \frac{|\Gamma_z|}{\Gamma} < \frac{\beta}{H}, \quad (2.4)$$

где $\beta > 0$ – постоянная, зависящая от размеров области, справедливо неравенство [7]

$$L(\rho, \rho) \geq c \int_Q (|\nabla \rho|^2 + \rho_z^2) dQ. \quad (2.5)$$

В (2.4) и всюду ниже через c будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от решения. Предположим также, что условия (2.4) выполняются.

Запишем уравнение (1.3):

$$-(\nu U_z)_z + KU = F, \quad (2.6)$$

где $F = -P(\zeta, \rho) - \frac{U_t}{gH}$. Воспользовавшись уравнением (2.6) и граничными условиями (1.6), находим [8]

$$U = -B \left[P(\zeta, \rho) + \frac{1}{gH} U_t \right], \quad (2.7)$$

где B – некоторый интегральный оператор. Подставляя это выражение для U в (2.2), после некоторых преобразований получим тождество

$$\int_Q \left(\frac{H}{\Gamma} \rho_t q + \zeta_t \eta \right) dQ_T + \int_0^T dt \left[\int_Q BP(\zeta, \rho) P(\eta, q) dQ + L(\rho, q) \right] dQ =$$

$$= \int_{Q_T} \frac{1}{\sigma H} B U_t P(\eta, q) dQ_T. \quad (2.8)$$

Обозначим $I(\eta, q) = \int_Q BP(\eta, q)P(\eta, q) dQ + L(q, q)$. В работе [7] установлено следующее неравенство:

$$I(\eta, q) \geq \delta \left[\int_Q (|\nabla q|^2 + q_z^2) dQ + \int_D |\nabla \eta|^2 dD \right], \quad (2.9)$$

где $\delta > 0$ – постоянная, не зависящая от η и q .

3. Нам потребуются некоторые энергетические оценки решений задачи 1–2, при получении которых удобно пользоваться следующими обозначениями [8]:

$$\begin{aligned} \|q\|_G^2 &= \int_G q^2 dG, \quad \|q\|_S^2 = \int_S q^2 dS, \\ \|q\|_{r,G}^2 &= \sum_{n_1+n_2+n_3 \leq r} \left\| \frac{\partial^{n_1+n_2+n_3}}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} \partial z^{n_3}} q \right\|_0^2, \quad r = 1, 2, \end{aligned}$$

где G – какая-либо из областей Q или D , а функция q определена в G :

$$w = (U, \rho, \zeta), \quad \|w\|_Q^2 = \|U\|_Q^2 + \|\rho\|_Q^2 + \|\zeta\|_D^2,$$

$$w_k = (U_k, \rho_k, \zeta_k) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} (U, \rho, \zeta), \quad w \equiv w_0, \quad (3.1)$$

$$(U_k, \rho_k, \zeta_k)|_{t=0} = (\bar{U}_k, \bar{\rho}_k, \bar{\zeta}_k) = \bar{w}_k, \quad k \geq 0. \quad (3.2)$$

Дифференцируя k раз по t уравнения (1.3)–(1.5) и граничные условия (1.6)–(1.8), находим, что w_k решают задачу 1–2 с начальными данными w_k и, следовательно, удовлетворяют тождествам (2.1), (2.2), (2.8). Для решения задачи 1–2 справедливы следующие энергетические неравенства:

$$\begin{aligned} T^n \|w_k\|_Q^2 + \int_0^T t^n (\|U_{kz}\|_Q^2 + \|\rho_k\|_{1Q}^2) dt &\leq \\ &\leq \begin{cases} c \|\bar{w}_k\|_Q^2, & n = 0, \\ cn \int_0^T t^{n-1} \|w_k\|_Q^2 dt, & n > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
T^n(\|U_k\|_Q^2 + \|\rho_k\|_{1,Q}^2) + \int_0^T t^n(\|U_{k+1}\|_Q^2 + \|U_{kzz}\|_Q^2 + \|\rho_{k+1}\|_Q^2) dt \leq \\
\leq \int_0^T t^n \|\zeta_k\|_{1,D}^2 dt + \\
+ \begin{cases} c(\|\bar{U}_{kz}\|_Q^2 + \|\bar{\rho}_k\|_{1,Q}^2 + \|\bar{w}_k\|_Q^2), & n > 0, \\ cn \int_0^T t^{n-1}(\|U_{kz}\|_Q^2 + \|\rho_k\|_{1,Q}^2 + \|w_k\|_Q^2) dt, & n > 0, \end{cases} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

$$T^n \|\rho_{kz}\|_Q^2 + \int_0^T t^n \|\rho_{kz}\|_{1,Q}^2 dt \leq \begin{cases} c\|\bar{w}_k\|_Q^2, & n = 0, \\ cn \int_0^T t^{n-1} \|w_k\|_Q^2 dt, & n > 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
T^n(\|\zeta_k\|_D^2 + \|\rho_k\|_Q^2) + \int_0^T t^n(\|\zeta_k\|_{1,D}^2 + \|\rho_k\|_{1,Q}^2) dt \leq c \int_0^T t^n \|U_{k+1}\|_Q^2 dt + \\
+ \begin{cases} c\|\bar{w}_k\|_Q^2, & n = 0, \\ cn \int_0^T t^{n-1} \|w_k\|_Q^2 dt, & n > 0. \end{cases} \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Неравенство (3.3) следует из тождеств (2.1), (2.2) при $(\Phi, q, \eta) = t^n(U_k, \rho_k, \zeta_k)$ после интегрирования по частям в области Q_T с учетом (2.5).

Умножая уравнения (1.3) и (1.4) соответственно на

$$t^n(U_{kt} - U_{kzz}) = t^n(U_{k+1} - U_{kzz}), \quad t^n \rho_{kt} = t^n \rho_{k+1},$$

складывая, интегрируя по частям в Q_T и принимая во внимание (3.3), получаем неравенство (3.4). Интегрируя по частям уравнение (1.4), умноженное на $-t^n \rho_{kzz}$ и принимая во внимание (3.3), получаем неравенство (3.5). Полагая в (2.8) $(\eta, q) = t^n(\zeta_k, \rho_k)$ и принимая во внимание (2.9), (3.3), получаем неравенство (3.6). Обозначим через

$$a(t) = \|U_z\|_Q^2 + \|\rho\|_{1,Q}^2 + \|\zeta\|_D^2 + \|w_t\|_Q^2. \quad (3.7)$$

Из оценок (3.3)–(3.6) при $k = 0$ для $a(t)$ нетрудно вывести следующее соотношение при $n > 0$:

$$T^n a(T) + \int_0^T t^n a(t) dt \leq cn \int_0^T t^{n-1} a(t) dt + c \int_0^T t^{n-1} (nR_1 + tR_2) dt, \quad (3.8)$$

где $R_1(t) = \|w_t\|_Q^2$, $R_2(t) = \|U_t\|_Q^2 + \|U_{tt}\|_Q^2$.

Опуская в левой части (3.8) первое слагаемое и итерируя получившуюся оценку, находим

$$\int_0^T t^n a(t) dt \leq n!c^n \int_0^T a(t) dt + \sum_{s=0}^n \frac{n!c^s}{(n-s)!} \int_0^T t^{n-s} (R_1 + R_2) dt. \quad (3.9)$$

Индукцией по n с последовательным применением неравенств (3.3), (3.6) получаем

$$\int_0^T t^n \|w\|_Q^2 dt \leq n!c^n \sum_{s=0}^{n+1} \|\bar{w}_{k+s}\|_Q^2. \quad (3.10)$$

Опуская в левой части (3.8) второе слагаемое и оценивая правую часть согласно неравенствам (3.10), (3.3)–(3.6), получаем

$$T^n a(T) \leq (n+3)!c^{n+3} \sum_{s=0}^{n+3} \|\bar{w}_s\|_Q^2. \quad (3.11)$$

Таким образом, мы получили оценку на скорость затухания начальных возмущений в однородной задаче 1–2:

$$\|w\|_{W_Q}^2 \equiv \|U_z\|_Q^2 + \|\rho_z\|_{1,Q}^2 + \|\zeta_z\|_D^2 \leq (n+3)!c^{n+3} R_n(w^0) t^{-n},$$

$$t > 0, \quad (3.12)$$

где

$$R_n(w^0) = \sum_{s=0}^{n+3} \|\bar{w}_s\|_Q^2,$$

из которой следует асимптотическая устойчивость нулевого решения задачи 1–2. Из (3.12) также следует, что скорость затухания начальных возмущений зависит от гладкости начальных данных.

Пусть теперь $\lambda > 0$ – произвольная постоянная. Деля обе части неравенства (3.12) на $n!(c\lambda)^n t^{-n}$ и суммируя по n полученные соотношения, находим

$$\|w\|_{W_Q}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{c\lambda} \right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{\lambda^n} R_n(w^0) = \bar{R}(\lambda, w^0). \quad (3.13)$$

Если λ и w^0 таковы, что $\bar{R}(\lambda, w^0) < +\infty$, то в этом случае

$$\|U\|_Q^2 + \|\rho\|_{1,Q}^2 + \|\zeta\|_D^2 \leq \bar{R}(\lambda, w^0) e^{-t/\lambda c}. \quad (3.14)$$

Можно, например, показать, что для w^0 вида $\exp(ikx + imy + inz)$ при $(k^2 + m^2 + n^2)^{1/2}/\lambda < 1$ имеем $\bar{R}(\lambda, w^0) < +\infty$. Согласно (3.14), длинноволновые возмущения затухают быстрее коротковолновых.

4. Исследуем влияние граничных условий Дирихле на скорость затухания начальных возмущений. Пусть w – решение однородной задачи 2. Применяя к уравнениям (1.3) операторы rot и div для функций

$$u_{kx} + v_{ky} = \omega_k^1 = \text{div } U_k, \quad u_{ky} - v_{kx} = \omega_k^2 = \text{rot } U_k, \quad (4.1)$$

получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{gH} \omega_{kt}^1 + l\omega_k^2 - (\nu\omega_{kz}^1)_z &= -\Delta\zeta_k - H \int_0^z \Delta\rho_k dz + I_1(U_k, U_{k+1}, U_{kz}, U_{kzz}, \nabla\rho_k), \\ \frac{1}{gH} \omega_{kt}^2 - l\omega_k^1 - (\nu\omega_{kz}^2)_z &= I_2(U_k, U_{k+1}, U_{kz}, U_{kzz}, \nabla\rho_k), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где I_1, I_2 – выражения, содержащие линейные комбинации своих аргументов.

Умножив уравнения (4.2) соответственно на $t^n \omega_k^1$, $t^n \omega_k^2$, сложим и проинтегрируем по частям в области Q_T

$$\begin{aligned} \frac{T^n}{2} \int_Q \frac{1}{gH} |\omega_k|^2 dQ + \int_{Q_T} t^n |\omega_{kz}|^2 dQ_T = \\ = \frac{n}{2} \int_{Q_T} t^{n-1} |\omega_k|^2 dQ - \int_{D_T} t^n \Delta\zeta_k \int_0^1 \omega_k^1 dz - \end{aligned}$$

$$- \int_{Q_T} t^n \Delta \rho_k \int_z^1 \omega_k^1 dz + \int_{Q_T} t^n (I_1 \omega_k^1 + I_2 \omega_k^2) dQ_T. \quad (4.3)$$

Из уравнений (1.5) и (1.4) находим

$$\int_0^1 \omega_k^1 dz = \zeta_{kt}, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} -\Delta \rho_k = \frac{1}{\kappa} \left[-H \rho_{kt} - H \Gamma \int_z^1 \omega_k^1 dz - z \Gamma \nabla H U_k - \right. \\ \left. - \nabla \kappa \nabla \rho_k - (\mu \rho_{kz})_z \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Подставляя эти выражения в третий и четвертый интегралы правой части (4.3), интегрируя по частям (с учетом граничного условия $\zeta_k = 0$ на γ) и принимая во внимание неравенства (3.3)–(3.6), получаем

$$\begin{aligned} T^n (\|\omega_k\|_Q^2 + \|\zeta_k\|_{1,D}^2) + \int_0^T t^n \left(\|\omega_{kz}\|_Q^2 + \left\| \int_z^1 \omega_k^1 dz \right\|_Q^2 \right) dt \leq \\ \leq c \int_0^T t^n \|\zeta_{k+1}\|_D^2 + cn \int_0^T t^{n-1} (\|\omega_k\|_Q^2 + \|\zeta_k\|_{1,D} + \|\rho_k\|_Q^2) dt. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Записывая (1.4) в виде эллиптического уравнения для функции ρ_k с правой частью $-\rho_{k+1} - H \Gamma \int_z^1 \omega_k^1 dz - z \nabla H U_k \Gamma$ и граничными условиями (1.6), (1.8), а также воспользовавшись результатами работы [8], получаем следующую оценку:

$$\|\rho_k\|_{2,Q}^2 \leq c \left(\|\rho_{k+1}\|_Q^2 + \|\omega_k^1\|_Q^2 + \|U_k\|_Q^2 + \left\| \int_z^1 U_k n dz \right\|_S^2 \right). \quad (4.7)$$

Воспользовавшись оценкой, справедливой для дифференцируемой вектор-функции Φ [9]

$$\|\Phi n\|_S^2 \leq c (\|\operatorname{div} \Phi\|_Q^2 + \|\operatorname{rot} \Phi\|_Q^2 + \|\Phi\|_Q^2), \quad (4.8)$$

из (4.7) получим неравенство

$$\|\rho_k\|_{2,Q}^2 \leq c (\|\rho_{k+1}\|_Q^2 + \|\omega_k\|_Q^2 + \|U_k\|_Q^2). \quad (4.9)$$

Воспользовавшись, наконец, оценками на решение задачи Гильберта [9, 10], из (4.1) получаем неравенство

$$\|\nabla U_k\|_Q^2 + \|\nabla v_k\|_Q^2 \leq c (\|\omega_k\|_Q^2 + \|U_k n\|_S^2) \leq c (\|\omega_k\|_Q^2 + \|U_k\|_Q^2). \quad (4.10)$$

Здесь мы вновь использовали неравенство (4.8). Обозначив

$$a(t) = \|U_z\|_Q^2 + \|\omega\|_Q^2 + \|\rho\|_{1,Q}^2 + \|\zeta\|_{1,D}^2 + \|w_t\|_Q^2, \quad (4.11)$$

из неравенств (3.3)–(3.6), (4.6) при $k = 0$ получаем для $a(t)$ соотношение (3.8), из которого, как и раньше, следует

$$T^n a(T) \leq (n+3)! c^{n+3} R_n(w^0), \quad n > 0. \quad (4.12)$$

Из неравенств (4.9), (4.10), (4.12) для произвольного начального состояния при $n > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|w\|_{W_Q^1}^2 &\equiv \|U\|_{1,Q}^2 + \|U_{zz}\|_Q^2 + \|\rho\|_{2,Q}^2 + \|\zeta\|_{1,D}^2 + \|w_t\|_Q^2 \leq \\ &\leq (n+3)! c^{n+3} R_n(w^0) t^{-n}, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

тогда как для w^0 вида $\exp(ikx + imy + inz)$, $(k^2 + m^2 + n^2)^{1/2}/\lambda < 1$ следует неравенство

$$\|U\|_{1,Q}^2 + \|U_{zz}\|_Q^2 + \|\rho\|_{2,Q}^2 + \|\zeta\|_{1,D}^2 + \|w_t\|_Q^2 \leq \bar{R}(w^0, \lambda) e^{-t/\lambda c}. \quad (4.14)$$

Сравнивая (3.12), (3.14) с аналогичными неравенствами (4.13), (4.14), заключаем, что замена естественного граничного условия $\int_0^1 U n dz = 0$ на условие Дирихле $\zeta = 0$ приводит к асимптотической устойчивости нулевого решения задачи 2 в более сильной норме, что в конечном итоге ведет к более быстрой сходимости решения задачи 2 к стационарному решению. Этот факт неоднократно отмечался различными исследованиями [1–5] в связи с численным решением задач динамики океана.

Пусть в (1.3) и (1.8) f и ζ не зависят от t . Покажем, что, например, решение задачи 2 $w^0 = 0$ сходится к стационарному решению задачи 2. Продифференцировав уравнения (1.3)–(1.5) и граничные условия (1.6), (1.8) по t , находим, что w_t решает однородную задачу 2 с начальными данными

$$w_t|_{t=0} = (gHf, 0, 0).$$

Согласно неравенству (4.13) для $n > 0$

$$\|w_t\|_{W_Q^1} \leq c(n)R_nt^{-n}, \quad t > 0. \quad (4.15)$$

Поскольку $w = \int_0^t w_t dt$, из неравенства (4.15) при $n > 0$ следует, что существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} w = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 w_t dt = \bar{w}$, причем \bar{w} имеет все старшие обобщенные производные, входящие в систему дифференциальных уравнений (1.3)–(1.5), и

$$\begin{aligned} \|w - \bar{w}\|_{W_Q^1} &= \left\| \int_t^\infty w_t dt \right\|_{W_Q^1} \leq \int_t^\infty \|w_t\|_{W_Q^1} dt \leq R_n c(n) \int_t^\infty t^{-n/2} dt = \\ &= \frac{2c(n)}{n} R_n t^{-n/2+1}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для $n > 2$, $w_t \rightarrow 0$, $w \rightarrow \bar{w}$ при $t \rightarrow +\infty$. Переходя к пределу $t \rightarrow +\infty$ в уравнениях (1.3)–(1.5) и граничных условиях (1.6)–(1.8), заключаем, что \bar{w} – решение стационарной задачи 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
2. Марчук Г. И., Каган Б. А. Океанские приливы. Л.: Гидрометеиздат, 1977.
3. Кочергин В. П. Теория и методы расчета океанических течений. М.: Наука, 1978.
4. Саркисян А. С. Численный анализ и прогноз морских течений. Л.: Гидрометеиздат, 1977.
5. Bryan K., Cox M. D. A numerical investigation of the oceanic general circulation // Tellus. 1967. V. 19, No. 1.

6. Ильин А. М. Об асимптотике решения одной краевой задачи // Матем. заметки. 1970. Т. 8, вып. 3.
7. Марчук Г. И., Бубнов М. А. О методе выделения баротропной составляющей в задачах динамики океана // Докл. АН СССР. 1979, Т. 248, № 4.
8. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
9. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.
10. Бубнов М. А., Кажихов А. В. Однозначная разрешимость основной краевой задачи линейной теории океанической циркуляции // Докл. АН СССР. 1971. Т. 198, № 4.
11. Кордзадзе А. А. О разрешимости одной задачи динамики бароклинного океана // Докл. АН СССР. 1977. Т. 222, № 2.
12. Гущин А. К., Михайлов В. П., Муравей Л. А. О стабилизации решений нестационарных граничных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных // В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 23. Новосибирск, 1975.

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПРИЛИВОВ И ЦИРКУЛЯЦИЙ В БАРОКЛИННОМ ОКЕАНЕ¹⁴

Строятся и обосновываются разностные схемы решения задач теории приливов и океанических циркуляций, полученные на основе метода конечных элементов. Рассматриваются итерационные методы решения возникающих при таком подходе систем алгебраических уравнений высокой размерности.

В последнее время вариационно-разностный метод, широко использующийся при построении разностных схем решения различных задач математической физики [1–3], успешно применяется для получения репрезентативных численных моделей приливных течений и крупномасштабных циркуляций в океане [4–6]. В силу того, что задачи дина-

¹⁴Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана, 1981, т. 17, № 6, с. 614–624. Совместно с М. А. Бубновым.

мики океана, как правило, относятся к неклассическим задачам математической физики, возникает необходимость в исследовании и обосновании полученных вариационно-разностных схем. В работе излагаются результаты, полученные авторами при построении, обосновании и исследовании итерационных методов решения вариационно-разностных схем для задач динамики приливов и циркуляций в бассейнах с переменным рельефом дна. Представленные в работе методы и алгоритмы были использованы при создании численной модели приливных течений в Мировом океане с реальным распределением глубин и очертаний берегов в рамках бароклинной модели.

1. Рассмотрим линеаризованную модель, описывающую приливы и циркуляции в бароклинном океане (П-задача) [5–10]. Пусть $D \subset \{z = 0\}$ – область с кусочно-гладкой границей γ в пространстве переменных (x, y, z) . Направим ось z вертикально вниз и определим область $Q = D \times [0, 1]$ с боковой поверхностью $S = \gamma \times [0, 1]$ и функцию $H(x, y)$ ($\min_D H > 0$) – дно океанического бассейна. Пусть $U = H(u, v)$, где u, v – гармонические составляющие горизонтальной компоненты вектора скорости; ρ – гармоническая составляющая отклонения плотности от стандартного значения $\bar{\rho}(z) > 0$ [7]; ζ – гармоническая составляющая уровня поверхности.

П-задача. В области Q найти функции U, ρ, ζ удовлетворяющие краевой задаче

$$\frac{i\sigma}{gH}U + LU - (\nu U_z)_z = P(\zeta, \rho) + f, \quad (1.1)$$

$$i\sigma H\rho + H\Gamma \int_z^1 \operatorname{div} U \, dz + z\Gamma \nabla H U - \operatorname{div}(\mu_1 \nabla \rho) - (\nu_1 \rho_z)_z = 0, \quad (1.2)$$

$$i\sigma \zeta + \operatorname{div} \int_0^1 U \, dz = 0, \quad (1.3)$$

$$\nu U_z|_{z=0} = \tau, \quad \nu_1 \rho_z|_{z=0} = r, \quad (1.4)$$

$$\nu U|_{z=1} = 0 \text{ (или } \nu U_z|_{z=1} = 0), \quad \nu_1 \rho_z|_{z=1} = r, \quad (1.5)$$

$$H\Gamma \int_z^1 U n \, dz - \mu_1 \frac{\partial \rho}{\partial n} = \beta \rho \quad \text{на } S, \quad \int_0^1 U n \, dz = \alpha \zeta \quad \text{на } \gamma. \quad (1.6)$$

В (1.1)–(1.6) $\nu, \mu, \mu_1, \Gamma(zH)$ – известные положительные, а $\beta(x, y, z), \alpha(x, y)$ – известные неотрицательные функции; i – комплексная единица; σ – приливная частота; матрица $L = \begin{bmatrix} 0 & -l/gH \\ l/gH & 0 \end{bmatrix}$, где $l(y)$ – параметр Кориолиса;

$$P(\zeta, \rho) = \nabla \zeta + \int_0^z (H \nabla \rho - z \nabla H \rho_z) dz;$$

$\tau = (\tau_1, \tau_2)$ и r – заданные функции; $n = (n_1, n_2)$ – вектор внешней нормали к γ ; операторы $\nabla, \operatorname{div}, \Delta$ действуют по переменным x и y . В случае если $\alpha \equiv 0$ или $\beta \equiv 0$ функции ζ и ρ должны удовлетворять условиям нормировки

$$\int_D \zeta dD = 0 \quad \text{или} \quad \int_Q H \rho dQ = 0.$$

Заметим, что уравнения (1.1)–(1.3) получены после исключения функций давления и вертикальной составляющей вектора скорости в исходной линеаризированной модели приливов и циркуляций в океане в результате замены переменных (спрямления дна) $z \rightarrow z/H$ [6, 10]. Значение $\sigma = 0$ отвечает стационарной линеаризированной модели океанических циркуляций.

2. Определим обобщенное решение П-задачи. При этом без ограничения общности будем считать, что $\tau = r = \alpha = \beta = 0$. Умножим уравнение (1.1) на функцию $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \Phi|_{z=1} = 0$ (или $\Phi_z|_{z=1} = 0$). Уравнение (1.2), умноженное на функцию q/Γ , сложим с уравнением (1.3), умноженным на функцию η . Интегрируя полученные соотношения по частям в Q , получим тождества

$$\begin{aligned} \int_Q \left(\frac{i\sigma}{gH} U + LU \right) \Phi dQ + \int_Q \nu U_z \Phi_z dQ = \\ = - \int_Q \Phi (P(\zeta, \rho) - f) dQ, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$i\sigma \int_Q \left(\frac{H}{\Gamma} \rho q + \eta \zeta \right) dD - \int_Q UP(\eta, q) dQ + K(\rho, q) = 0, \quad (2.2)$$

где билинейная форма $K(\rho, q)$ имеет вид

$$K(\rho, q) = \int_Q \frac{1}{\Gamma} (\mu_1 \nabla \rho \nabla q + \nu_1 \rho_z q_z) dQ - \\ - \int_Q \frac{H \Gamma_z}{\Gamma^2} \left(\mu_1 \frac{z \nabla H}{H} + \nabla \rho + \nu_1 \rho_z \right) q dQ. \quad (2.3)$$

Определим пространства функций [2, 11]

$$\widetilde{W}_{2,Q}^1 = \left\{ q \in W_{2,Q}^1 : \int_Q H q dQ = 0 \right\}, \\ \widetilde{W}_{2,D}^1 = \left\{ \eta \in W_{2,D}^1 : \int_D \eta dD = 0 \right\}.$$

Можно показать, что при выполнении условий

$$\frac{|\nabla H|}{H} + \frac{\nu_1}{\mu_1} < 1, \quad \frac{|\Gamma_z|}{\Gamma} < H c_1, \quad (2.4)$$

где c_1 – постоянная из неравенства Фридрихса [2, 11], для функций $\widetilde{W}_{2,Q}^1$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} K(q, q^*) \geq c_2 \|q\|_{1,Q}, \quad (2.5)$$

где q^* – функция, комплексно-сопряженная к q .

Полагая в (2.1), (2.2) $(\Phi, q, \eta) = (U^*, \rho^*, \zeta^*)$, складывая, отделяя вещественную часть и учитывая (2.5), получаем

$$\|U_z\|_Q^2 + \|\rho\|_{1,Q} \leq c \|f\|_Q^2. \quad (2.6)$$

Из (2.6), уравнений (1.2), (1.3) и граничных условий следует, что П-задача имеет единственное решение за исключением случая $\sigma = 0$ и $U_z|_{z=1} = 0$, когда $U = \Psi' \cdot \left(-\left(\frac{l}{H}\right)_y, \left(\frac{l}{H}\right)_x \right)$, где Ψ – произвольная функция одного переменного.

При построении вариационно-разностных схем решения П-задачи рассмотрим два подхода. В первом случае (П-задача с граничным

условием скольжения $U_z|_{z=1} = 0$) мы сведем нашу задачу к построению вариационно-разностной схемы для системы эллиптических уравнений второго порядка в области D с естественными граничными условиями относительно ζ и коэффициентов разложения ρ в ряд по собственным функциям «вертикального» оператора.

Во втором случае (II-задача с граничным условием прилипания $U|_{z=1} = 0$), воспользовавшись методом Галеркина со специально подобранными кусочно-линейными и кусочно-постоянными финитными базисными функциями [1, 2, 5], который будем применять к исходной трехмерной непреобразованной системе дифференциальных уравнений, построим проекционно-разностные схемы, полученные ранее на основе метода конечных разностей и часто использующиеся при численном решении задач динамики океана [4, 6–8].

3. При построении вариационно-разностной схемы решения II-задачи с условием скольжения $U_z|_{z=1} = 0$ рассмотрим первые ортонормированные собственные функции задач:

$$\begin{aligned} -(\nu\psi_{kz})_z &= \lambda_k\psi_k, & \psi_{kz}|_{z=0,1} &= 0, & k &= \overline{0, N}, \\ -(\nu_1\pi_{kz})_z &= \varkappa_k\pi_k, & \pi_{kz}|_{z=0,1} &= 0, & k &= \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$0 = \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1}, \quad \psi_0 = 1, \quad \int_0^1 \psi_k dz = 0, \quad k \geq 1,$$

причем

$$0 = \varkappa_0 < \varkappa_k < \varkappa_{k+1}, \quad \pi_1 = 1, \quad \int_0^1 \pi_k dz = 0, \quad k > 1.$$

Схему решения II-задачи будем строить в два этапа. Сначала ищем решение по методу Галеркина:

$$U_N = \sum_{k=0}^N U^k \psi_k, \quad \rho_N = \sum_{k=1}^N \rho^k \pi_k, \quad \xi = \zeta_N. \quad (3.2)$$

Функции (3.2) удовлетворяют тождествам (2.1), (2.2) при $\Phi = \varphi(x, y)\psi_s$ ($s = \overline{0, N}$), где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in L_2(D)$, $q = \bar{q}(x, y)\pi_s \in \widetilde{W}_{2,Q}^1$ ($s = \overline{1, N}$) и $\eta \in W_{2,D}^1$ (в первом интеграле левой части (2.2)

Γ приближенно заменим на $\Gamma_N = \sum_{k=1}^N \pi_k(\pi_k, \Gamma)$).

Из (2.1) следует, что для $U^k(x, y)$ ($k = \overline{0, N}$) справедливы тождества

$$\int_D \left(\left(\frac{i\sigma}{gH} + \lambda_k \right) U^k + LU^k + P^k(\zeta_N, \rho_N) \right) \varphi dD = \int_D f_k \varphi dD, \quad (3.3)$$

где

$$(\cdot, \psi_k) \equiv \int_0^1 \cdot \psi_k dz, \quad P^k(\zeta_N, \rho_N) = (\psi_k, P(\zeta_N, \rho_N)), \quad f_k = (f, \psi_k).$$

Из (3.3) с учетом произвола в выборе φ следует

$$U^k = -M_k(\psi_k, P(\zeta_N, \rho_N) - f), \quad (k = \overline{0, N}), \quad (3.4)$$

где $M_k = \left(\frac{i\sigma}{gH} + \lambda_k \right) E + L^{-1}$, для любого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ справедливы неравенства ($k = \overline{0, N}$)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_k |\xi|^2}{|\Delta_k|^2} \left[\lambda_k^2 + \left(\frac{l - \sigma}{gH} \right)^2 \right] &\leq \operatorname{Re}(M_k, \xi, \xi^*) \leq \\ &\leq \frac{\lambda_k |\xi|^2}{|\Delta|^2} \left[\lambda_k^2 + \left(\frac{l + \sigma}{gH} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\Delta_k = \det M_k$ ($k = \overline{0, N}$). Подставляя значения U^k ($k = \overline{0, N}$) из (3.4) в (2.2), получаем тождество

$$G_N(\zeta_N, \rho_N, \eta, q) = \sum_{k=0}^N \int_D M_k f_k P^k(\eta, q) dD, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} G_N(\zeta_N, \rho_N, \eta, q) &= i\sigma \int_Q \left(\frac{H}{\Gamma_N} \rho_N q + \zeta_N \eta \right) dQ + \\ &+ \sum_{k=0}^N \int_D M_k P^k(\zeta_N, \rho_N) P^k(\eta, q) dD + K(\rho_N, q). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Заметим, что тождество (3.6) представляет собой билинейную форму для некоторой несамосопряженной системы эллиптических уравнений второго порядка относительно функций ζ_N и ρ^k ($k = \overline{1, N}$) в области D с естественными граничными условиями. Нетрудно получить вид этой системы. Полагая в (3.6) $q = 0$, находим

$$\begin{aligned} \int_D (i\sigma\zeta_N\eta + M_0\nabla\zeta_N\nabla\eta) dD + \int_D M_0P^0(0, \rho_N)\nabla\eta dD = \\ = \int_D M_0f_0\nabla\eta_0 dD. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Предполагая, что функции ρ^k ($k = \overline{1, N}$) и ζ_N имеют достаточное число старших обобщенных производных, и принимая во внимание (3.2), находим из (3.8)

$$\begin{aligned} \int_D \left[i\sigma\zeta_N - \operatorname{div} M_0\nabla\zeta_N - \sum_{s=1}^N \operatorname{div} M_0 (H\bar{c}_s\nabla\rho^s - \nabla H\bar{d}_s\rho^s - f_0) \right] \eta dD + \\ + \int_{\gamma} (M_0\nabla\zeta_N n) \eta d\gamma + \\ + \int_{\gamma} [M_0 (H\bar{c}_s\nabla\rho^s - \nabla H\bar{d}_s\rho^s - f_0) n] \eta d\gamma = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\bar{c}_s = \left(\psi_0, \int_0^z \pi_s ds \right), \quad \bar{d}_s = \left(\psi_0, \int_0^z z\pi_{sz} dz \right), \quad s = \overline{1, N}.$$

Воспользовавшись произволом в выборе η , получаем из (3.9) уравнение для ζ_N :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{00}\zeta_N + \sum_{s=1}^N \mathcal{L}_{0s}\rho^s = F_0 \quad \text{в } D, \\ \mathcal{L}_{00}^\gamma\zeta_N + \sum_{s=1}^N \mathcal{L}_{0s}^\gamma\rho^s = F_0^\gamma \quad \text{на } \gamma, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где операторы задачи и граничных условий однозначно определяются тождеством (3.9). Аналогично полагая в (3.6) $\eta = 0$, при $q =$

$\bar{q}(x, y)\pi_s$, $s = \overline{1, N}$ получаем уравнения и граничные условия для функций ρ^k , $k = \overline{1, N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N \mathcal{L}_{ks} \rho^s + \mathcal{L}_{k0} \zeta_N &= F_k \quad \text{в } D, \\ \sum_{s=1}^N \mathcal{L}_{ks}^\gamma \rho^s + \mathcal{L}_{k0}^\gamma \zeta_N &= F_k^\gamma \quad \text{на } \gamma. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Можно показать [6], что если σ не является точкой спектра приливных баротропных уравнений Лапласа (3.16), то при достаточно больших $N > N_0$ задача (3.10), (3.11) однозначно разрешима, причем

$$\|\zeta_N\|_{2,D}^2 + \sum_{k=1}^N \|\rho^k\|_{2,D}^2 \leq c \|f\|_{1,Q}^2, \quad (3.12)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от N . Функции U^k ($k = \overline{0, N}$) находятся из соотношений (3.4). Покажем, что функции (3.2) при $N \rightarrow +\infty$ сходятся к решению П-задачи. Пусть $M > N$. Обозначим $\tilde{\rho} = \rho_M - \rho_N$, $\tilde{\xi} = \xi_M - \xi_N$ и составим разность двух тождеств (3.6) для ρ_M и ρ_N . Полагая $q = \tilde{\rho}^*$, $\eta = \tilde{\zeta}^*$, отделяя в полученном соотношении вещественную часть, находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_D \frac{\lambda_k}{|\Delta_k|^2} \left[\lambda_k^2 + \left(\frac{l - \sigma}{gH} \right)^2 \right] |P^k(0, \tilde{\rho})|^2 dD + \operatorname{Re} K(\tilde{\rho}, \tilde{\rho}^*) \leq \\ \leq \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=N+1}^M \int_D M_k (f_k - P^k(0, \rho_M)) P^k(0, \tilde{\rho}^*) dD \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь мы воспользовались неравенством (3.5) и тем, что $\lambda_0 = 0$. Обозначим $I_k = f_k - P^k(0, \rho_M)$, $J_k = P^k(0, \tilde{\rho}^*)$, $k \geq 0$. Принимая во внимание (3.5) и пользуясь оценками для собственных чисел задачи (3.1) [11], оценим правую часть (3.13), обозначенную через R :

$$R \leq c \sum_{k=N+1}^M \frac{1}{\lambda_k} \int_D |I_k| |J_k| dD \leq c \lambda_N^{-1} \left(\sum_{k=N+1}^M \int_D |I_k|^2 dD \right)^{1/2} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sum_{k=N+1}^M \int_D |J_k|^2 dD \right)^{1/2} \leq c \lambda_N^{-1} \lambda_N^{-1/2} \left(\sum_{k>N} \int_D \lambda_k |I_k|^2 dD \right)^{1/2} \times \\
& \quad \times \lambda_N^{-1/2} \left(\sum_{k>N} \int_D \lambda_k |J_k|^2 dD \right)^{1/2} \leq \\
& \leq c \lambda_N^{-2} \left(\int_D \|f - P(0, \rho_M)\|_{1,(0,1)}^2 dD \right)^{1/2} \times \\
& \quad \times \left(\int_D \|P(0, \tilde{\rho}^*)\|_{1,(0,1)}^2 dD \right)^{1/2} \leq \\
& \leq c N^{-1} (\|f\|_Q^2 + \|f_c\|_Q^2)^{1/2} \|\tilde{\rho}\|_{1,Q}. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\sum_{k \geq 0} \lambda_k |(\psi_k, P)|^2 \leq c \|F\|_{1,(0,1)}^2$, справедливым для функций $F \in W_{2,(0,1)}^1$ [11]. Опуская в левой части (3.13) первое слагаемое и принимая во внимание (2.5), найдем, что

$$\|\rho - \rho_N\|_{1,Q} \leq c N^{-4} (\|f\|_Q^2 + \|f_z\|_Q^2)^{1/2}. \tag{3.15}$$

Из (2.1), (2.2) следует теперь, что функции $U^0 = (\psi_0, U^N) = \int_0^1 U_N dz$ и ζ_N удовлетворяют задаче

$$\begin{aligned}
& \frac{i\sigma}{gH} U^0 + L U^0 + \nabla \zeta_N = (\psi_0 f - P(0, \rho_N)) \equiv \bar{F}, \\
& i\sigma \zeta_N + \operatorname{div} U^0 = 0, \quad U^0 n|_\gamma = 0, \tag{3.16}
\end{aligned}$$

для решения которой справедлива оценка [6]

$$\|U^0\|_{1,D}^2 + \|\zeta_N\|_{1,D}^2 \leq c (\|\bar{F}\|_D^2 + \|\operatorname{rot} \bar{F}\|_D^2). \tag{3.17}$$

Очевидно, что задаче (3.16) удовлетворяют и функции $\bar{U} = \int_0^1 U dz$, ρ и ζ , которые являются решением П-задачи. Вычитая из уравнений

(3.16) соответствующие уравнения для функций \bar{U} , ρ , ζ , пользуясь оценкой (3.17) и принимая во внимание (3.15), находим

$$\|\bar{U} - U^0\|_{1,D}^2 + \|\zeta - \zeta_N\|_{1,D}^2 \leq cN^{-8} (\|f\|_Q^2 + \|f_z\|_Q^2). \quad (3.18)$$

Из представления (3.4) и оценок (3.12), (3.15), (3.18) можно получить неравенство

$$\|U' - U'_N\|_Q^2 \leq cN^{-8} (\|f\|_Q^2 + \|f_z\|_Q^2), \quad (3.19)$$

где $U' = U - \bar{U}$, $U'_N = U_N - U^0$.

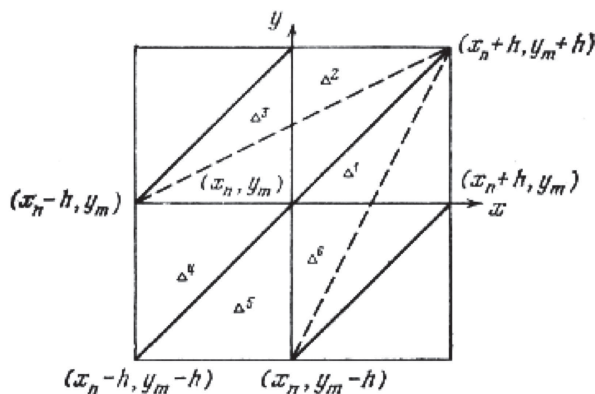


Рис. 1.

Для завершения построения вариационно-разностной схемы покроем область (x, y) равномерной разностной сеткой с шагом h и узлами $(x_n, y_m) = (nh, mh)$, $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (рис. 1). Каждый квадрат сетки разобьем диагональю на два треугольника. Пусть D^h – минимальная область, состоящая из треугольников, такая, что $D \subset D^h$. Обозначим через G^h – множество всех узлов $(x_n, y_m) \in D^h$. Пусть $\{\omega_n(x, y)\}_{G^h}$ – базис кусочно-линейного восполнения сеточных функций, определенных в G^h [1, 2]. Будем искать функции ρ_N и ζ_N , удовлетворяющие тождеству (3.6), по методу Галеркина в виде

$$\rho^{k,h} = \sum_{G^h} \tilde{\rho}^k(x_n, y_m) \omega_{nm}, \quad k = \overline{1, N}, \quad \zeta_N^h = \sum_{G^h} \tilde{\zeta}(x_n, y_m) \omega_{nm},$$

$$\rho_N^h = \sum_{k=1}^N \rho^{k,h} \pi_k, \quad (3.20)$$

где $\{\tilde{\rho}^k(x_n, y_m)\}_{G^h}$ ($k = \overline{1, N}$) и $\{\tilde{\zeta}(x_n, y_m)\}_{G^h}$ – сеточные функции, определенные в узлах G^h . Функции (3.20) должны удовлетворять тождеству (3.6) при произвольных q и η вида (3.20). Вводя в пространстве сеточных функций скалярное произведение

$$(\tilde{\eta}, \tilde{\xi}) = h^2 \sum_{G^h} \tilde{\eta}(x_n, y_m) \tilde{\xi}^*(x_n, y_m) \quad (3.21)$$

и рассматривая тождество (3.6) как билинейный функционал в пространстве сеточных функций со скалярным произведением (3.21), стандартным способом [1, 2] получаем разностные уравнения для функций $\tilde{\rho}^k$ ($k = \overline{1, N}$) и $\tilde{\zeta}$:

$$\mathcal{L}_{00}^h \tilde{\zeta} + \sum_{s=1}^N \mathcal{L}_{0s}^h \tilde{\rho}^s = \tilde{F}_0, \quad \sum_{s=1}^N \mathcal{L}_{ks}^h \tilde{\rho}^s + \mathcal{L}_{k0}^h \tilde{\zeta} = F_k, \quad (3.22)$$

где \mathcal{L}_{ks}^h ($k, s = \overline{0, N}$) – разностные аналоги дифференциальных операторов задачи (3.10), (3.11).

Так как задача (3.10), (3.11) однозначно разрешима для всех $F_k \in L_2(D)$, $F_k^\gamma \in W_{2,\gamma}^{1/2}$ и справедлива оценка (3.12), то, воспользовавшись результатами работы [2] по разрешимости и сходимости вариационно-разностных схем для несамосопряженных краевых задач, можно показать, что существует такое $h_0 > 0$, что при $h < h_0$ система разностных уравнений (3.22) однозначно разрешима и имеет место оценка

$$\|\zeta_N - \zeta_N^h\|_{1,D}^2 + \sum_{k=1}^N \|\rho^k - \rho^{k,h}\|_{1,D}^2 \leq ch^2 \|f\|_{1,Q}^2, \quad (3.23)$$

где $c > 0$ не зависит от $h < h_0$ и $N > N_0$.

Сопоставляя оценки (3.15), (3.18), (3.19) и (3.23), находим, что

$$\|\zeta_N - \zeta_N^h\|_{1,D}^2 + \|\rho - \rho_N^h\|_{1,Q}^2 \leq c(h^2 + N^{-8}) \|f\|_{1,Q}^2. \quad (3.24)$$

Пусть $U^{0,h}$ и $U_N'^h$ – функции, получающиеся из формулы (3.4) при подстановке в них ζ_N^h , ρ_N^h . Тогда, учитывая оценки (3.18), (3.19) и (3.24), имеем

$$\|\bar{U} - U^{0,h}\|_D^2 + \|\bar{U}' - U_N'^h\|_Q^2 \leq c(h^2 + N^{-8}) \|f\|_{1,Q}^2. \quad (3.25)$$

4. Рассмотрим итерационный метод решения системы разностных уравнений (3.22). Для этого введем сеточные функции, зависящие от

дискретного временного аргумента $t_j = j\tau$, $\tau > 0$ $j = 0, 1, 2, \dots$, $\tilde{\zeta}^{(j)} = \tilde{\zeta}(t_j)$, $\tilde{\rho}^{k(j)} = \tilde{\rho}^k(t_j)$ ($k = \overline{1, N}$), и обозначим $\tilde{\rho}_t^{k(j)} = \frac{\tilde{\rho}^{k(j)} - \tilde{\rho}^{k(j-1)}}{\tau}$.

Решение задачи (3.22) находим при помощи следующего итерационного процесса:

$$\mathcal{L}_{00}^h \tilde{\zeta}^{(j)} + \sum_{s=1}^N \mathcal{L}_{0s}^h \tilde{\rho}^{s(j-1)} = \tilde{F}_0, \quad (4.1)$$

$$B \tilde{\rho}_t^{k(j)} + \sum_{s=1}^N \mathcal{L}_{ks}^h \tilde{\rho}^{s(j)} + \mathcal{L}_{k0}^h \tilde{\zeta}^{(j)} = \tilde{F}_h, \quad (4.2)$$

$$\tilde{\rho}^{k(0)} = \tilde{\rho}^{0k}, \quad k = \overline{1, N}, \quad j \geq 1.$$

В (4.2) B – регуляризатор, имеющий, например, вид $B = E$ или $B = -\Delta^h + \bar{\lambda}E$, $\bar{\lambda} > 0$, где $E = \text{diag} \left\{ e_{nm} = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^6 \int_{\Delta^s \cap D} dD + \frac{1}{4} \int_{\Delta^s \cup \Delta^s} dD \right\}$, Δ^s $s = \overline{1, 6}$ – треугольники, составляющие носитель функции $\omega_{nm}(x, y)$ и Δ^h – разностный аналог оператора Лапласа [1–3].

Поскольку мы считаем, что σ не является точкой спектра оператора задачи (3.16), то существует такое h_0 , что при $h < h_0$ оператор \mathcal{L}_{00}^h имеет обратный [2]. Исключая из (4.1), (4.2) функцию $\tilde{\zeta}^{(j)}$, получаем уравнение для определения функций $\tilde{\rho}^{k(j)}$ $k = \overline{1, N}$. Рассматривая эти уравнения как двухслойную разностную схему и учитывая неравенства (2.5), (3.5), методами, развитыми в работах [1, 2, 11–13], получаем достаточные условия сходимости итерационного процесса (4.1), (4.2) в виде

$$\tau < \begin{cases} \frac{c}{R^2(h^{-2} + \lambda_N)}, & \text{при } B = E, \\ \frac{c}{R}, & \text{при } B = -\Delta^h + \bar{\lambda}E, \end{cases}$$

где постоянные $R = R(M_0, H) > 0$, $c = c(H, l, c_2)$ не зависят от h и N .

При определении $\tilde{\rho}^{k(j)}$ ($k = \overline{1, N}$) на каждом шаге итерационного процесса (4.1), (4.2) необходимо использовать внутренние итерации. Для этого можно воспользоваться методом Гаусса – Зейделя, обобщенным на случай операторных уравнений [14]. Таким образом, для реализации указанного процесса надо уметь вычислять

$(\mathcal{L}_{kk}^h)^{-1}$, $k = \overline{0, N}$. Эту задачу можно эффективно решить на основе прямого модифицированного метода Хаусхолдера [6, 15].

5. Построим вариационно-разностную схему решения П-задачи с условием прилипания $U|_{z=1} = 0$. Решение этой задачи ищем на основе тождеств (2.1), (2.2) по методу Галеркина в виде (3.2), где ψ_k ($k = \overline{0, N}$) – собственные функции оператора $-(\nu\psi_{kz})_z$ с граничными условиями $\psi_{kz}|_{z=0} = \psi_k|_{z=1} = 0$ и, следовательно, $\lambda_0 > 0$. Как и в случае П-задачи с условием скольжения, находим, что функции ρ_N и ζ_N удовлетворяют тождеству (3.6), причем в данном случае в силу того, что $\lambda_0 > 0$, справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} G_N(\eta, q, \eta^*, q^*) \geq m (\|\eta\|_{1,D}^2 + \|q\|_{1,Q}^2) \quad (5.1)$$

($m > 0$ не зависит от N , q и η), откуда следует, что в случае П-задачи с условием прилипания $U|_{z=1} = 0$ система дифференциальных уравнений (3.10), (3.11) сильно эллиптическая, а граничные условия удовлетворяют условию Лопатинского [11, 16]. Из результатов работ [11, 16] следует однозначная разрешимость задачи (3.10), (3.11). Можно показать, что для приближений Галеркина (3.2) справедлива следующая равномерная по N оценка:

$$\begin{aligned} & \|U_N\|_{1,Q}^2 + \|U_{Nz}\|_{1,Q}^2 + \|\nabla U_{Nzz}\|_Q^2 + \|\rho_N\|_{2,Q}^2 + \\ & \|\zeta_N\|_{2,D}^2 \leq c \|f\|_{1,Q}^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Учитывая неравенство (5.2), стандартными рассуждениями [1] можно доказать сходимость галеркинских приближений (3.2) к решению П-задачи с условием прилипания. Для того чтобы оценить скорость сходимости, так же как и в случае П-задачи с условием скольжения, получим из (3.6) для разности двух решений $\tilde{\rho} = \rho_M - \rho_N$, $\tilde{\zeta} = \zeta_M - \zeta_N$ тождество

$$G_N(\tilde{\zeta}, \tilde{\rho}, \eta, q) = \sum_{k=N+1}^M \int_D M_k (f_k - P^k(\zeta_M, \rho_M)) P^k(\eta, q) dD.$$

Полагая $\eta = \tilde{\zeta}^*$, $q = \tilde{\rho}^*$, отделяя вещественную часть, принимая во внимание (3.5), (5.1), (5.2) и переходя к пределу при $M \rightarrow \infty$, получаем

$$\|\zeta - \zeta_N\|_{1,D}^2 + \|\rho - \rho_N\|_{1,Q}^2 \leq cN^{-4} \|f\|_{1,Q}^2. \quad (5.3)$$

Из (3.4) следует оценка

$$\|U - U_N\|_Q \leq cN^{-2}\|f\|_Q. \quad (5.4)$$

Для построения вариационно-разностной схемы решения П-задачи с условием прилипания определим два множества

$$G_u^h = \left\{ (x_n, y_m) \in G^h : \left(x_n + \frac{h}{2}, y_m \right) \in \overline{D}^h \right\},$$

$$G_v^h = \left\{ (x_n, y_m) \in G^h : \left(x_n, y_m + \frac{h}{2} \right) \in \overline{D}^h \right\}$$

и введем наряду с базисом кусочно-линейного восполнения $\{\omega_{nm}\}_{G^h}$ кусочно-постоянные функции

$$a_{nm}^s = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Pi_{nm}^s, \\ 0, & (x, y) \notin \Pi_{nm}^s, \end{cases} \quad s = 1, 2, \quad (5.5)$$

где $\Pi_{nm}^1 = \Delta^1 \cup \Delta^6$, $\Pi_{nm}^2 = \Delta^2 \cup \Delta^3$. Видно, что функции (5.5) составляют ортогональные базисы в конечномерных подпространствах пространств $L_2 \left(D_u^h = \bigcup_{G_u^h} \Pi_{nm}^1 \right)$ и $L_2 \left(D_v^h = \bigcup_{G_v^h} \Pi_{nm}^2 \right)$.

Ищем функции $(u^k v^k) = U^k$ ($k = \overline{0, N}$) и ρ_N, ζ_N по методу Галеркина в виде

$$u^{k,h} = \sum_{G_u^h} u_{nm}^k a_{nm}^1, \quad v^{k,h} = \sum_{G_v^h} v_{nm}^k a_{nm}^2, \quad (k = \overline{0, N}),$$

$$\rho^{k,h} = \sum_{G^h} \rho_{nm}^k \omega_{nm}, \quad (k = \overline{1, N}), \quad \zeta_N^h = \sum_{G^h} \zeta_{nm} \omega_{nm}, \quad (5.6)$$

где, например, $u_{nm}^h \equiv \tilde{u}^k(x_n, y_m)$. Функции (5.6) и $\rho_N^h = \sum_{k=1}^N \rho^{k,h} \pi_k$, удовлетворяют тождествам (2.2) и (3.3). Полагая в (3.3) $\varphi = (a_{nm}^1, a_{nm}^2)$, получаем разностные аналоги уравнений движения (1.1):

$$u_{nm}^h \int_D \left(\frac{i\sigma}{gH} + \lambda_k \right) a_{nm}^1 dD - L^1 v_{nm}^k = - (1, \psi_k) \nabla_1^+ \zeta_{nm} -$$

$$- \sum_{s=1}^N c_{ks} \tilde{\nabla}_1^+ \rho_{nm}^s + \sum_{s=1}^N d_{ks,nm}^1 \rho_{nm}^s + f_{k,nm}^1 \quad (5.7)$$

для всех узлов $(x_n, y_m) \in G_u^h$, $k = \overline{0, N}$;

$$\begin{aligned} v_{nm}^h \int_D \left(\frac{i\sigma}{gH} + \lambda_k \right) a_{nm}^2 dD + L^2 u_{nm}^k = - (1, \psi_k) \nabla_2^+ \zeta_{nm} - \\ - \sum_{s=1}^N c_{ks} \tilde{\nabla}_2^+ \rho_{nm}^s + \sum_{s=1}^N d_{ks, nm}^2 \rho_{nm}^s + f_{k, nm}^2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

для всех узлов $(x_n, y_m) \in G_v^h$, $k = \overline{0, N}$.

В (5.7), (5.8) ∇_1^+ , ∇_2^+ , $\tilde{\nabla}_1^+$, $\tilde{\nabla}_2^+$ – операторы разностного дифференцирования «вперед» [1, 7], например:

$$\nabla_1^+ \zeta_{nm} = \frac{\zeta_{n+1, m} - \zeta_{n, m}}{h} \int_D a_{nm}^1 dD,$$

и операторы L^1 , L^2 :

$$L^1 v_{nm}^k = v_{n+1, m}^k \int_{D \cap \Delta^1} \frac{l}{gH} dD + v_{n, m-1}^k \int_{D \cap \Delta^6} \frac{l}{gH} dD.$$

Из тождества (2.2) получаем разностные аналоги уравнений (1.2) и (1.3) $k = \overline{1, N}$, (x_n, y_m)

$$\begin{aligned} i\sigma \int_Q \frac{H}{\Gamma} \rho_N^h \omega_{nm} \pi_k dQ + \sum_{s=0}^N c_{sh} \left(\tilde{\nabla}_1^- u_{nm}^s + \tilde{\nabla}_2^- v_{nm}^s \right) + \\ + \sum_{s=0}^N \left(d_{sh, nm}^1 u_{nm}^s + d_{sh, nm}^2 v_{nm}^s \right) + K(\rho_N^h, \omega_{nm} \pi_k) = c_3 e_{nm}^k, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$i\sigma \int_D \zeta_N^h \omega_{nm} dD + \sum_{s=0}^N (1, \psi_k) (\nabla_1^- u_{nm}^k + \nabla_2^- v_{nm}^k) = 0. \quad (5.10)$$

Здесь $\tilde{\Gamma} = \sum_{k=1}^N \sum_{G^h} \Gamma(z_n H(x_n, y_m)) \omega_{nm} \pi_k$; $e_{nm}^k = \int_Q H \pi_k \omega_{nm} dQ$; постоянная c_3 находится из условия $\rho_N^h \in \widetilde{W}_{2, Q}^1$ и равна

$$c_3 = \left[- \int_Q U_N^h P(0, \tilde{\Gamma}) dQ + K(\rho_N^h, \tilde{\Gamma}) \right] / \int_Q H \tilde{\Gamma} dQ;$$

$\nabla_1^-, \nabla_2^-, \tilde{\nabla}_1^-, \tilde{\nabla}_2^-$ – операторы разностного дифференцирования «назад», например:

$$\nabla_1^- u_{nm}^s = \frac{u_{nm}^s}{h} \int_D H a_{nm}^1 dD - \frac{u_{n-1,m}^s}{h} \int_D H a_{nm}^2 dD.$$

Последнее слагаемое в левой части (5.9) может быть представлено в виде оператора разностного дифференцирования второго порядка [1, 2].

Заметим, что если значения $\tilde{u}^k(x_n, y_m) = u_{nm}^k$ и $\tilde{u}^k(x_n, y_m) = v_{nm}^k$ ($k = \overline{0, N}$) отождествлять соответственно с центрами четырехугольников $\Pi_{nm}^1(x_n + \frac{h}{2}, y_m)$ и $\Pi_{nm}^2(x_n, y_m + \frac{h}{2})$, то разностные уравнения (5.8)–(5.10) аналогичны конечно-разностной схеме уравнений динамики океана, полученной на так называемых сдвинутых сетках [4, 6].

Можно показать, что для решения задачи (5.8)–(5.10) справедлива равномерная по h и N оценка

$$\|\tilde{\zeta}\|_{1,D}^2 + \|\tilde{\rho}\|_{1,Q}^2 \leq c \|f\|_Q^2, \quad (5.11)$$

из которой следует однозначная разрешимость уравнений (5.8)–(5.10). Основываясь на оценке (5.11) и принимая во внимание неравенства (5.1)–(5.4) и результаты теории аппроксимации [2, 11], получаем следующие оценки для скорости сходимости приближенного решения П-задачи с условием прилипания к решению исходной задачи [5]:

$$\begin{aligned} \|\zeta - \zeta_N^h\|_{1,D}^2 + \|\rho - \rho_N^h\|_{1,Q}^2 &\leq c (h^2 + N^{-4}) \|f\|_{1,Q}^2, \\ \|U - U_N^h\|_Q^2 &\leq c (h^2 + N^{-4}) \|f\|_{1,Q}^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Для численного решения вариационно-разностных уравнений (5.8)–(5.10) можно, например, воспользоваться методом стационарирования [10, 13]. Для этого нужно добавить в уравнения (5.8)–(5.10) разностные производные по $t_j = \tau_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, а затем рассмотреть какие-либо двухслойные схемы. Возникающие при таком подходе вопросы, связанные с выбором параметра τ , устойчивостью и сходимостью решения «нестационарной» задачи к искомому решению, можно решить на основе результатов работ [1, 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 454 с.
2. Оганесян Л. А., Руховец Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: АН АрмССР, 1979. 234 с.
3. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
4. Марчук Г. И., Залесный В. Б., Кузин В. И. О методе конечных элементов и конечных разностей в задачах глобальной океанической циркуляции // Изв. АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1975. Т. 11, № 12. С. 1294–1300.
5. Марчук Г. И., Бубнов М. А. Вариационно-разностный метод решения задачи динамики приливов в стратифицированном океане. Новосибирск: Препринт; ВЦ СО АН СССР, 1977. 18 с.
6. Марчук Г. И., Кочергин В. П., Саркисян А. С. и др. Математические циркуляции в океане. Новосибирск: Наука, 1980. 284 с.
7. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974. 303 с.
8. Марчук Г. И., Каган Б. А. Океанские приливы. Л.: Гидрометеиздат, 1977. 295 с.
9. Кочергин В. П. Теория и методы расчета океанических течений. М.: Наука, 1978. 126 с.
10. Бубнов М. А. Качественное исследование разностной модели приливов в бароклинном океане // В кн.: Численные методы расчета океанических течений. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1974. С. 180–197.
11. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
12. Марчук Г. П., Кузнецов Ю. А. Итерационные методы и квадратичные функционалы. Новосибирск: Наука, 1972. 206 с.
13. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 653 с.
14. Красносельский М. А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.
15. Протасов А. В. Приближенный метод решения задачи о свободных колебаниях Мирового океана в баротропном приближении // Метеорология и гидрология. 1979. № 6. С. 57–66.

16. Солонников В. А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса – Л. Ниренберга. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28, № 3. С. 665–706.

ПРОГРАММА «РАЗРЕЗЫ» И МОНИТОРИНГ МИРОВОГО ОКЕАНА¹⁵

Рассматриваются основные направления, проблемы и задачи программы «Разрезы» по изучению роли Мирового океана в короткопериодных колебаниях климата. Наиболее подробно анализируются теоретические и экспериментальные работы, направленные на выяснение условий формирования аномалии поверхностной температуры океана (аномалий теплосодержания в энергоактивных зонах океана). Рекомендуются использование информации о Мировом океане, получаемой в рамках программ «Разрезы», TOGA, WOCE, при реализации программы физического мониторинга Мирового океана.

Задачу изучения роли океана в короткопериодных колебаниях климата (как известно, эта задача является основной для программы «Разрезы») условно можно разбить на две:

- проблему формирования аномалий поверхностной температуры океана (или аномалий теплосодержания верхнего деятельного слоя океана, в частности, в энергоактивных зонах океана – ЭАЗО);
- проблему изучения отклика атмосферной циркуляции на аномалии поверхностной температуры океана.

Подробно цели и задачи программы «Разрезы» изложены в [2], и мы не будем на них детально останавливаться. В настоящей работе мы остановимся более подробно на теоретических и экспериментальных работах, касающихся первой из сформулированных выше задач. Прежде чем перейти к основной части работы, кратко остановимся на некоторых направлениях, развиваемых в рамках программы «Разрезы» и касающихся второй из сформулированных выше задач.

¹⁵Метеорология и гидрология, 1984, № 8, с. 9–17. Совместно с В. П. Дымниковым, Г. П. Курбаткиным, А. С. Саркисяном. Основное содержание доклада на I Международном симпозиуме «Комплексный глобальный мониторинг Мирового океана» (Таллин, 2–10 октября 1983 г.).

Первая часть работы здесь связана с диагнозом современного климата, расчетом как средних климатических значений метеорологических параметров, так и их изменчивости (в частности, межгодовой). Очень показательным с точки зрения целей и задач программы «Разрезы» является распределение климатических источников тепла в атмосфере, а также статистика их изменчивости. (Ясно, что промежуточным звеном здесь является связь между аномалиями поверхностной температуры океана и аномалиями источников нагревания.)

Источники тепла в атмосфере могут быть рассчитаны как остаточный член в уравнении притока тепла, например, с использованием спектральной квазисоленоидальной модели [7].

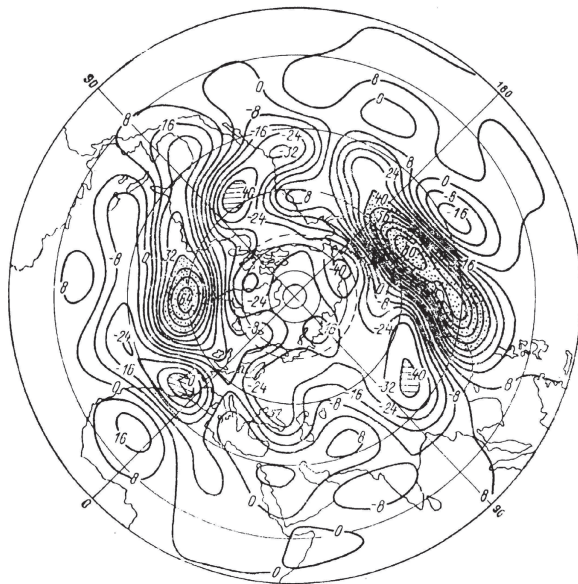


Рис. 1. Среднее зимнее распределение проинтегрированных по вертикали источников нагревания в атмосфере \tilde{Q}_I (в условных единицах)

В качестве примера на рис. 1 показано среднее зимнее распределение проинтегрированных по вертикали источников тепла в атмосфере. Однако не всякий приток тепла в атмосферу действует как локальный источник доступной потенциальной энергии. Надежные оценки временной и пространственной корреляции между притоками тепла и температурой воздуха могли бы дать важную информацию о роли притоков тепла в региональной и глобальной энергетике. На рис. 2 приведено проинтегрированное по вертикали распределение средних

многолетних корреляций аномалий притоков тепла и аномалий температуры воздуха $\widetilde{Q}_T''\widetilde{T}''$. Области слабых положительных корреляций наблюдаются лишь у восточных берегов океанов и над континентами.

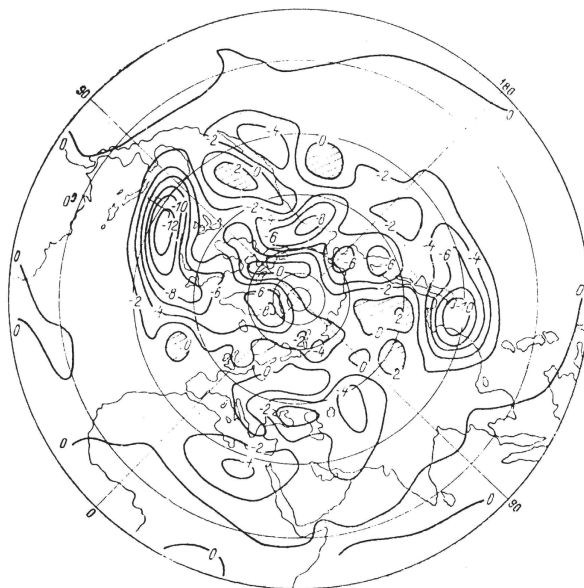


Рис. 2. Проинтегрированное по вертикали распределение средних многолетних корреляций аномалий притоков тепла и аномалий температуры воздуха $\widetilde{Q}_T''\widetilde{T}''$ (в условных единицах)

Остановимся вкратце на моделировании отклика атмосферной циркуляции на аномалии поверхностной температуры океана в средних широтах.

В серии работ, посвященных этой проблеме, было показано, что отклик атмосферы на аномалии источников нагревания становится планетарным, если источник помещен в слабый зональный поток (в зимнее время – в субтропиках, а в летнее – в средних широтах). Такая реакция объясняется, по-видимому, в первую очередь тем, что при одной и той же аномалии источника нагревания в сильном зональном потоке (или с сильным вертикальным сдвигом ветра) аномалия завихренности будет, по существу, меньше [6].

Здесь мы покажем некоторые результаты изучения отклика аномалий зимней атмосферной циркуляции на аномалии поверхностной температуры океана, полученные в экспериментах по чувствительности с глобальной моделью общей циркуляции атмосферы.

Известно, что одной из основных трудностей исследования отклика атмосферы на аномалии поверхностной температуры океана с помощью моделей общей циркуляции атмосферы является выделение сигнала на фоне шума, обусловленного внутренней изменчивостью модели.

Поскольку уровень шума в модели (и, по-видимому, в атмосфере) обусловлен процессами гидродинамической неустойчивости и нелинейным каскадом энергии по спектру, можно предполагать, что распределение отношения сигнала к шуму по спектру будет неравномерным, т. е. будут существовать при определенной форме сигнала спектральные окна, где это отношение будет максимальным. Одной из основных целей описываемых ниже численных экспериментов будет проверка этой гипотезы.

В качестве модели была взята модель общей циркуляции атмосферы, подробно описанная в работах [1, 3]. В данных экспериментах использовался шестиуровневый вариант модели с горизонтальным разрешением $\Delta\lambda = \Delta\varphi = 5^\circ$. Моделировалась среднеянварская циркуляция при заданном склонении Солнца и заданном январском распределении температуры поверхности океана. Границы паковых льдов считались также заданными. Проводились три эксперимента: контрольный (6.1) и два эксперимента с аномалиями поверхностной температуры океана, расположенными в районе бермудской энергоактивной зоны океана ($-80^\circ \leq \lambda \leq -60^\circ$, $25^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ$) – эксперимент 6.1А и в районе исландского минимума ($-40^\circ \leq \lambda \leq -20^\circ$, $50^\circ \leq \varphi \leq 70^\circ$) – эксперимент 6.9А. В обоих аномалия принималась равной $+3^\circ\text{C}$. Результаты аномальных экспериментов осреднялись за последние 30 сут, и затем рассчитывались отклонения этих средних от модельного климата, полученного в контрольном эксперименте.

Приведенные на рис. 3 поля аномалий геопотенциала имеют ярко выраженный волновой характер как по долготе, так и по широте. Подобная структура имеет место для поля геопотенциала не только в «аномальных» экспериментах, но и характеризует внутреннюю изменчивость модельной («контрольной») циркуляции (ее «шум»), при оценке которой по данным эксперимента 6.1 рассчитывались отклонения выборочных средних от модельного климата. Вертикальные профили как отклика, так и «шума» модельной циркуляции (точнее, их квазистационарных компонентов) имеют квазибаротропную структуру.

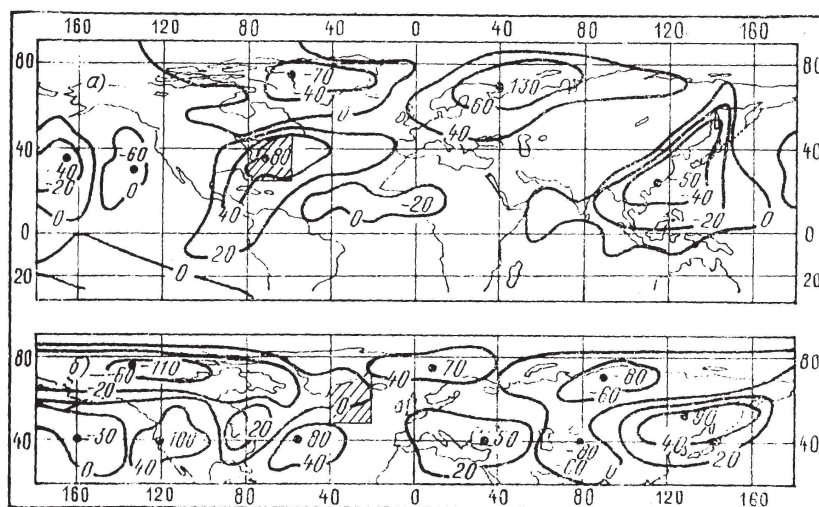


Рис. 3. Поле аномалий геопотенциала в Северном полушарии на поверхности 300 мб: (а) – эксперимент 6.1А, (б) – эксперимент 6.9А

Рассмотрим спектральную структуру отклика и «шума». На рис. 4 приведены зависимости a_n , b_n и A_n от широты для $n = 3$ и $n = 6$. (a_n , b_n – коэффициенты разложения по синусам и косинусам соответственно, $A_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$, n – зональное волновое число.)

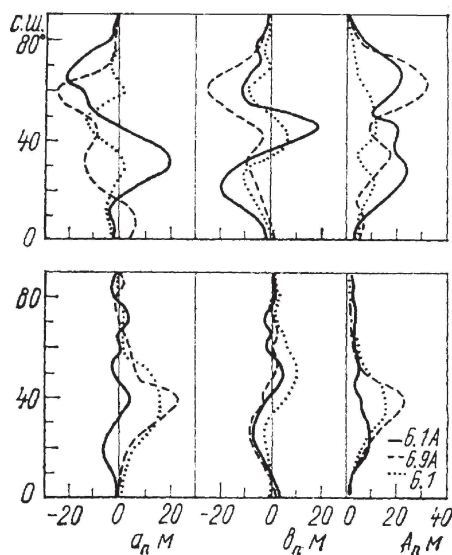


Рис. 4. Спектральная структура отклика и «шума» в поле высоты поверхности 300 мб для $n = 3$ (верх) и $n = 6$ (низ)

Легко видеть из этих рисунков, что как в спектре отклика атмосферы, так и в спектре «шума» в средних широтах происходит своеобразное «расщепление» длинноволновой и коротковолновой частей – основной вклад приходится на длинные планетарные волны.

В длинноволновой части оказалось спектральное «окно» $n = 3$, в котором для средних широт имеет место заметное отделение «сигнала» от «шума». При этом в эксперименте с аномалией в районе исландского минимума следует признать, что отклик статистически более значим, чем в эксперименте с аномалией в районе бермудской энергоактивной зоны.

Перейдем теперь к проблеме формирования аномалий поверхностной температуры океана (или аномалий теплосодержания верхнего деятельного слоя), в частности, к задаче оценки роли динамики океана в формировании аномалий теплосодержания деятельного слоя в некотором районе Мирового океана. Весьма удобно в связи с этим использовать аппарат теории сопряженных уравнений. Действительно, линеаризуя уравнение притока тепла в океане относительно климатических скоростей, получим

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} T' = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial T'}{\partial z} + \epsilon,$$

$$\left(\nu \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_{1,2} = \Pi_{1,2}, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = H, \quad \bar{u}_n = 0 \quad \text{на } S,$$

где u – вектор климатических скоростей,

$$\epsilon = -\operatorname{div} \vec{u} \bar{T},$$

\bar{T} – климатическое поле температуры.

Для сформулированной выше задачи поставим в соответствие сопряженную задачу

$$-\frac{\partial T^*}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{u} T^* = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial T^*}{\partial z} + f^*,$$

$$\nu \frac{\partial T^*}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, H, \quad \bar{u}_n = 0 \quad \text{на } S$$

с начальным условием $T^*(\bar{t}, x, y, z) = 0$. Функцию f^* зададим следующим образом:

$$f^* = \frac{1}{\bar{t}} \quad \text{при } x, y, z \in Q, \quad t \in [0, \bar{t}];$$

$$f^* = 0 \quad \text{при } x, y, z \notin Q, \quad t \notin [0, \bar{t}].$$

Отметим, что решение этой задачи определяется только климатическими параметрами океана. Используя решение сопряженной задачи, можно построить функционал, отражающий изменение теплосодержания в данном объеме океана:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{t}} \int_0^{\bar{t}} \int_Q T' dQ dt &= (T', T^*)_0 - \\ &- \int_0^{\bar{t}} \int_{S_1} \nu \frac{\partial T}{\partial z} \bigg|_0 dS_1 dt + \int_0^{\bar{t}} \int_{Q_1} \epsilon_1 T^* dQ_1 dt. \end{aligned}$$

В этом соотношении первый член в правой части означает вклад начальных данных, второй – вклад потока тепла из атмосферы в океан, а третий – изменения скоростей потока в изменении теплосодержания исследуемого объема океана. Уже эта задача показывает, что для изучения роли динамики в изменении теплосодержания отдельных районов океана необходимо знание климатических значений скоростей и температуры для значительно больших районов, содержащих исследуемый район. К такому же выводу мы приходим при попытке анализа данных океанографических наблюдений в ЭАЗО.

Самым надежным элементом для непосредственного анализа данных наблюдений является поле температуры. Используя гидрологические съемки ЭАЗО или даже разрезы, можно проследить за изменением, т. е. осуществить мониторинг теплосодержания. Эта простейшая операция выполняется регулярно. В качестве примера на рис. 5 приводятся карты, демонстрирующие сезонный ход изменения геострофических течений в ЭАЗО Куро시오.

Следующий этап анализа – это расчеты геострофических течений динамическим методом или одним из так называемых обратных методов (например, метод β -спирали), необходимые для оценки адвекции тепла в ЭАЗО. Эти методы приводят к более или менее надежным полям горизонтальной циркуляции только в верхних слоях океана. С глубиной они теряют точность, следовательно, интегральная (по высоте) адвекция тепла, вычисленная этими методами, неточна.

Вертикальный компонент скорости течения этими методами либо вычисляется неточно (метод β -спирали), либо его вовсе нельзя вычислить (динамический метод). Квазигеострофический диагностический

метод [4, 8] устраняет ряд недостатков динамического метода и позволяет получить горизонтальные и вертикальный компоненты чисто дрейфовых и градиентных течений с учетом рельефа дна, граничных условий и т. д. Это следующий шаг после динамического метода, превращающий задачу исследования локальных процессов в глобальную.

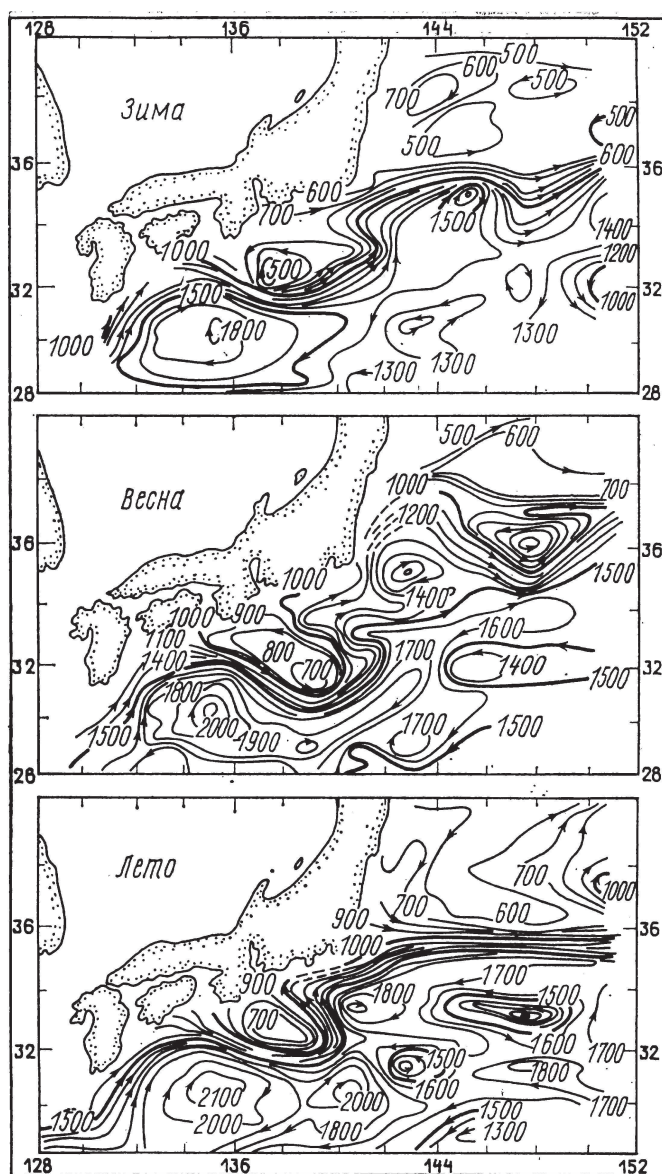


Рис. 5. Сезонные изменения поверхностных геострофических течений в энергоактивной зоне Курошио

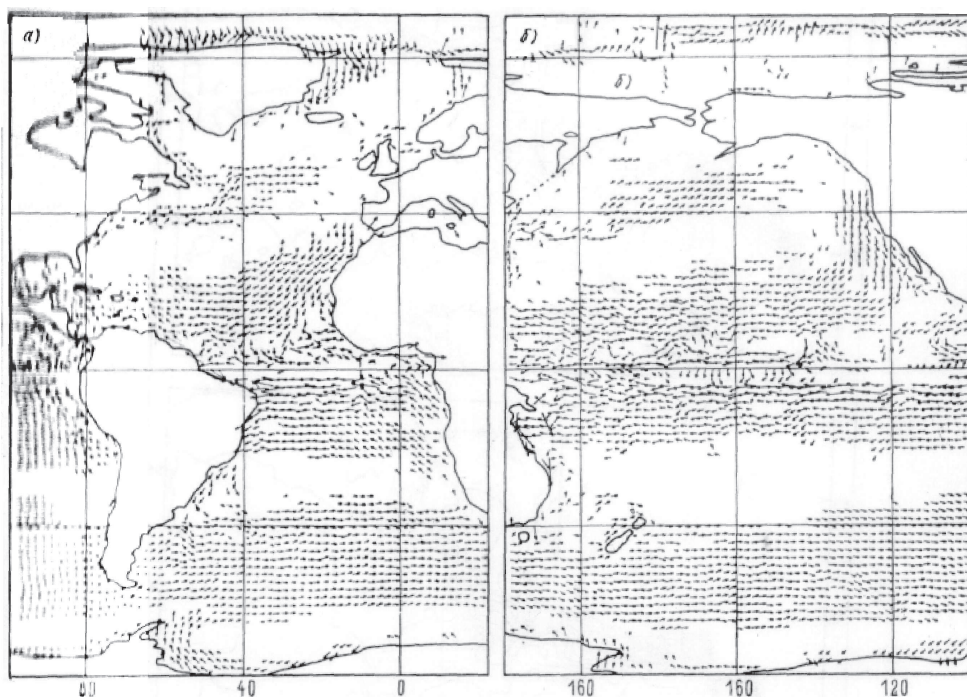


Рис. 6. Поверхностные течения Атлантического (а) и Тихого (б) океанов за летний сезон

На рис. 6 демонстрируются поверхностные климатические течения Атлантического океана, полученные диагностическим методом. Но квазигеострофический метод неприменим в окрестности экватора. Для экваториальной полосы (экватор $\pm 3-5^\circ$) соответствующие расчеты выполняются на основе более громоздкой модели, основанной на «примитивных» уравнениях [4, 5, 8].

Итак, диагностические модели позволяют рассчитать климатическую циркуляцию (горизонтальную и вертикальную) и, следовательно, адвекцию тепла на основе климатической информации о температуре и солёности. Однако все вышеперечисленные методы расчета океанских течений обладают одним общим недостатком: поле плотности в них, вообще говоря, не приспособлено к полям ветра и рельефа дна, поэтому адвекция тепла вычисляется с существенной погрешностью. Примером модели, в которой производится такое приспособление, может служить модель К. Брайена [10]. Другим методом является применяемый одним из авторов этой статьи метод, при котором процесс адаптации прекращается задолго до установления процес-

са при помощи определенных математических критериев [9]. Полученные при этом поля температуры, солёности и течений оптимально адаптированы к полям ветра и рельефа дна. Такого рода расчеты, названные автором квазидиагностическими, являются следующим и необходимым шагом после обычных диагностических. Благодаря таким расчетам можно получить уже поля, вполне удовлетворительно описывающие климат океана, в том числе и адвекцию масс, тепла, солей. Примером такой адаптации могут служить карты рис. 7.

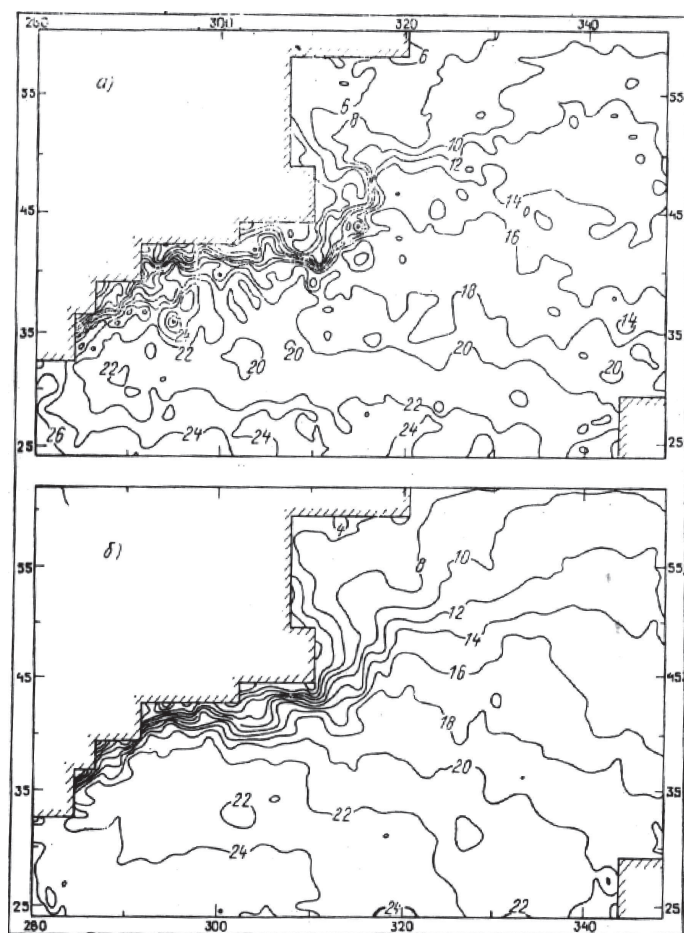


Рис. 7. Климатические поля температуры на горизонте 50 м (лето):
(а) – по данным наблюдения, (б) – после модельного согласования
через 65 сут модельного времени

Имея такую более или менее надежную информацию о климате океана, можно приступить к следующему этапу исследований – мо-

ниторингу климатических изменений, происходящих в океане вообще и в ЭАЗО в частности. Для этой цели можно использовать и данные программы «Разрезы». Однако эта информация недостаточна для моделирования нестационарной циркуляции (годового хода или межгодовой изменчивости). Необходимо использовать информацию о температуре поверхности океана. Среднепентадные, декадные или месячные поля температуры поверхности океана сами по себе являются надежной информацией для качественного мониторинга температуры поверхностных вод. Для количественного мониторинга формирования и изменения теплосодержания океана необходимо разрабатывать динамико-стохастические модели для усвоения этой информации. Именно четырехмерный анализ, основанный на оптимальном сочетании моделей и данных наблюдений, должен привести к мониторингу физических процессов в океане.

В последние годы метеорологи и океанологи разрабатывают и реализуют крупные многонациональные и международные проекты. Помимо программы «Разрезы» к таким проектам относятся TOGA (Тропический океан и глобальная атмосфера), WOCE (Эксперимент по циркуляции Мирового океана) и некоторые другие. Нам представляется, что в ближайшем будущем основной объем информации о Мировом океане будет получен в рамках таких крупных проектов, поэтому именно этот объем данных должен стать основой при реализации программы физического мониторинга Мирового океана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дымников В. П., Лыкосов В. Н. Спектральный анализ квазистационарного отклика атмосферной циркуляции на аномалии поверхностной температуры океана. М.: Препринт ОВМ СССР. 1983. № 61.
2. Итоги науки и техники. Атмосфера, океан, космос – программа «Разрезы». Т. 1. Программа исследований взаимодействий атмосферы и океана в целях изучения короткопериодных изменений климата (программа «Разрезы») / под ред. академика Г. И. Марчука. М., 1983.
3. Марчук Г. И., Дымников В. П. и др. Глобальная модель общей циркуляции атмосферы // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. Т. 15, № 5.
4. Саркисян А. С. Численный анализ и прогноз морских течений. Л.: Гидрометеиздат, 1977.
5. Demin J. L., Sarkisyan A. S. Calculation of equatorial currents // J. Mar. Res. 1977. No. 2.

6. Hoskins B. J., Karoly D. J. The steady linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing // J. Atmos. Sci. 1981. V. 38.

7. Kurbatkin G. P., The Role of Middle Latitude Oceanic Areas on Short-Term Climate Variability // WCRP Publications Series. 1983, June. No. 1.

8. Sarkisyan A. S. The diagnostic calculations of a large-scale oceanic circulation // The Sea. 1976. V. 6.

9. Sarkisyan A. S. Monitoring large-scale ocean circulation with the aid of time series WCRP // Papers Presented at the Meeting on Time Series of Ocean Measurements (Tokyo, May 11–15, 1981). 1982.

10. Sarmiento J. L., Bryan K. An ocean transport model for the North Atlantic // J. Geophys. Res. 1982. V. 87, No. C1.

СХЕМА РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В КОМБИНАЦИИ С МЕТОДОМ РАСЩЕПЛЕНИЯ¹⁶

Введение

Настоящее исследование является естественным развитием работ, посвященных методу расщепления [1–6] и его применению для решения эволюционных уравнений с использованием метода Галеркина [10–12].

В работе предлагается новый метод расщепления для сеточного оператора метода конечных элементов, аппроксимирующего двумерное параболическое уравнение второго порядка.

Уравнение имеет смешанные производные специального вида, который является естественным для широкого класса задач океанологии, динамики атмосферы и др. Решение уравнения аппроксимируется на триангулированной области с помощью кусочно-линейных функций. Расщепление сеточного оператора в этом случае производится не по двум координатным направлениям, а по четырем направлениям, включающим диагональные направления ячеек сетки.

В случае конечно-разностного подхода на равномерных сетках аналогичный алгоритм был предложен в [21].

¹⁶М.: Препринт; ОВМ АН СССР, 1982. № 28. 59 с. Совместно с В. И. Кузиным.

Раздел 1 статьи посвящен предварительным определениям и описанию слабых решений. В разделе 2 получены оценки для полудискретного метода Галеркина. В разделе 3 рассмотрены свойства сеточного оператора, полученного в результате применения метода Галеркина к пространственному оператору задачи. Метод расщепления для решения задач по времени формулируется и обосновывается в разделе 4. В разделе 5 представлены результаты по решению уравнений Галеркина методом расщепления на неравномерных сетках. Раздел 6 посвящен описанию численного примера, рассчитанного по описанной методике.

1. Постановка задачи

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T]$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} B \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} G \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} Z \frac{\partial u}{\partial x} = F. \quad (1)$$

Ω – ограниченная односвязная область пространства R^2 с границей $S \in C^2$. Коэффициенты $A, B, G, Z \in C^2(\Omega)$ являются функциями x, y $F = f(x, y, t)$.

Для уравнения (1) задаются начальные условия

$$u(x, y, 0) = 0 \quad (2)$$

и два типа граничных условий

$$u|_S = 0 \quad (3)$$

и

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_S = 0, \quad (4)$$

причем для задачи с граничными условиями (4) дополнительно потребуем выполнения соотношения $\int_{\Omega} F dx dy = 0$, что приводит к выполнению для решения соотношения вида

$$\int_{\Omega} u dx dy = 0.$$

Везде в дальнейшем будет подразумеваться, что для задачи с граничными условиями (4) решения выбираются из класса функций, удовлетворяющих этим условиям.

В соотношении (4) $\partial/\partial\nu$ – производная по конормали к кривой S , задаваемая формулой

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = \cos(nx)A\frac{\partial}{\partial x} + \cos(ny)B\frac{\partial}{\partial y} + \cos(nx)G\frac{\partial}{\partial y} + \cos(ny)Z\frac{\partial}{\partial x},$$

где n – внешняя нормаль к границе S .

Условия (2), (3), (4) для простоты взяты однородными, однако это ограничение не является принципиальным.

Перепишем уравнение (1), разделяя симметрическую и кососимметрическую части дифференциального оператора со смешанными производными на основе представления

$$C = (G - Z)/2, \quad D = (G + Z)/2.$$

Тогда уравнение (1) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}A\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}B\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}D\frac{\partial u}{\partial y} - \\ - \frac{\partial}{\partial y}D\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}C\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}C\frac{\partial u}{\partial x} = F. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения вида (1), (5) возникают в океанологии, в частности, при расчетах распределений в морях и океанах различных субстанций [13]. В этом случае искомая функция u имеет смысл концентрации примеси в воде; F – интенсивность источника примеси; члены уравнения, содержащие коэффициенты A , B , D , описывают турбулентную диффузию примеси в водном бассейне, а кососимметрические члены уравнения (5) описывают адвекцию примеси течения. Коэффициент C в этом случае имеет смысл функции тока. Для задач такого рода кососимметрический член удобно оставлять в виде оператора второго порядка, так как при этом аппроксимирующий конечно-разностный оператор остается кососимметрическим и для него в разностном виде сохраняется закон сохранения субстанции.

Введем далее обозначения

$$\begin{aligned} (u, v) = \int_{\Omega} uv \, d\Omega, \quad \|u\|_{L_2(\Omega)} = (u, u)^{1/2}, \\ \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L_2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

$$\|u\|_{L_2(0,T;X)}^2 = \int_0^T \|u\|_X^2 dt, \quad \|u\|_{L_\infty(0,T;X)}^2 = \sup_{t \in [0,T]} \|u\|_X^2,$$

$$\|u\|_{W_2^{1,2}(Q)}^2 = \|u\|_{L(0,T;W_2^{2,1}(\Omega))}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L(0,T;L_2(\Omega))}^2.$$

Здесь $W_2^P(\Omega)$, ($P = 1, 2$) – пространства Соболева [14]; $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ – подпространство, образованное замыканием в $W_2^1(\Omega)$ функцией $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых и равных нулю на S ; $W_2^{2,1}(Q)$ – пространство Соболева – Слободецкого [15]. Если предположить, что для коэффициентов уравнения (5) выполняются условия

$$\begin{aligned} A, B, C, D &\in C^2(\Omega), \quad F \in C^1(\Omega) \times C^0(0, T], \quad A, B \geq \gamma_2, \\ 0 < \gamma_0 (\xi_1^2 + \xi_2^2) &\leq A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + 2D\xi_1\xi_2 \leq \gamma_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2) < \infty, \quad (6) \\ A, B, |D|, |C| &\leq \gamma_3, \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0, \end{aligned}$$

то существует норма, порождаемая билинейной формой, соответствующей оператору задачи

$$\begin{aligned} \|u\|_e^2 &= I(u, u), \\ I(u, v) &= \int_\Omega \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + D \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + D \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + C \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - C \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

и эта норма является эквивалентной норме $\|\cdot\|_{W_2^1(\Omega)}$. Иными словами:

$$\gamma_4 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \|u\|_e \leq \gamma_5 \|u\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \gamma_4, \gamma_5 > 0.$$

Здесь u принадлежит $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ или $W_2^1(\Omega)$. Везде в дальнейшем мы будем пользоваться эквивалентностью этих норм без каких-либо дополнительных замечаний.

Вопросы существования и единственности решений задач (2), (3), (5), (14) были рассмотрены в работах [16, 17]. Из теорем, представленных в этих работах, следует, что если коэффициенты уравнения

(5) удовлетворяют условиям (6), то существует единственное решение $u \in W_2^{1,2}(Q)$ задач (2), (3), (5) и (2), (5) и (4), удовлетворяющих оценке $\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \|F\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}$.

Для дальнейшего удобно ввести слабую форму по пространственным переменным рассмотренных задач. Слабым решением задачи (2), (3), (5) будем называть функцию $\tilde{u} \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$, такую, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &\in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)), \\ \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, v \right) + I(\tilde{u}, v) &= (F, v), \quad \forall v \in W_2^1(\Omega), \quad t \in (0, T], \\ (\tilde{u}(x, y, 0), v) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Слабое решение задачи (2), (4), (5) определим как функцию $\hat{u} \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$, такую, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} &\in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)), \\ \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}, v \right) + I(\hat{u}, v) &= (F, v), \quad \forall v \in W_2^1(\Omega), \quad t \in (0, T], \\ (\hat{u}(x, y, 0), v) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для приближенного решения задач (7), (8) наложим на область Ω прямоугольную сетку, узлы которой образованы пересечением линий $x_i = x_0 + h \cdot i$, $y_j = y_0 + r \cdot j$. Здесь h, r – числовые параметры, обозначающие расстояние между линиями, причем $O(h/r) = O(1)$. Прямоугольники сетки триангулируются диагоналями в зависимости от знака величины:

$$J_{i+1,j+1}^{i,j} = \int_{\delta_{i+1,j+1}^{i,j}} D \, dx \, dy,$$

$$\delta_{i+1,j+1}^{i,j} = \{(x, y) : (x, y) \in \bar{\Omega}, x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_i \leq y \leq y_{i+1}\}.$$

Если $J_{i+1,j+1}^{i,j} \geq 0$ – ячейка $\delta_{i+1,j+1}^{i,j}$ триангулируется диагонально с положительным наклоном; если $J_{i+1,j+1}^{i,j} < 0$ – диагональю с отрицательным наклоном.

Определим область $\hat{\Omega} \supset \Omega$ с границей \hat{S} как наименьшее объединение треугольников T_k ; содержащее $\bar{\Omega}$ множество пар индексов (i, j)

узлов (x_i, y_j) , принадлежащих $\hat{\Omega}$ обозначим \hat{R}^h , а множество индексов (i, j) , принадлежащих \hat{S} , – $\hat{\Gamma}^h$.

Рассмотрим также область $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ с границей \tilde{S} – наибольшее объединение треугольников, принадлежащих Ω . Множество пар индексов (i, j) узлов сетки, принадлежащих $\tilde{\Omega}$, обозначим \tilde{R}^h , а множество индексов, соответствующих граничным узлам \tilde{S} – $\tilde{\Gamma}^h$. В дальнейшем будем предполагать, что

$$\int_{T_p \cap \Omega} dx dy \geq shr, \quad s = \text{const} > 0,$$

для любого треугольника

$$T_p \subset \hat{\Omega}.$$

Определим также области Ω_1, Ω_2 соотношениями

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ (x, y) : (x, y) \in \bigcup_{i,j} \delta_{i+1,j+1}^{i,j} \cap \Omega, J_{i+1,j+1}^{i,j} \geq 0 \right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ (x, y) : (x, y) \in \bigcup_{i,j} \delta_{i+1,j+1}^{i,j} \cap \Omega, J_{i+1,j+1}^{i,j} < 0 \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Границы Ω_1 и Ω_2 обозначим S_1 и S_2 соответственно. Кроме того обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1^h &= \left\{ (i, j) : (i, j) \in \tilde{R}^h, (x_i, y_i) \in \Omega_1 \right\}, \\ \tilde{R}_2^h &= \left\{ (i, j) : (i, j) \in \tilde{R}^h, (x_i, y_i) \in \Omega_2 \right\}, \\ \hat{R}_1^h &= \left\{ (i, j) : (i, j) \in \hat{R}^h, (x_i, y_i) \in \Omega_1 \right\}, \\ \hat{R}_2^h &= \left\{ (i, j) : (i, j) \in \hat{R}^h, (x_i, y_i) \in \Omega_2 \right\}. \end{aligned}$$

Соответствующие множества индексов граничных точек обозначим $\tilde{\Gamma}_1^h, \tilde{\Gamma}_2^h, \hat{\Gamma}_1^h, \hat{\Gamma}_2^h$.

Определим теперь для каждого узла $(i, j) \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h$ непрерывную в Ω функцию $\omega_{i,j}(x, y)$ с конечным носителем $k_{i,j}$ линейную на каждом треугольнике области $\hat{\Omega} \cup \hat{S}$, такую, что

$$\omega_{i,j}(x_m, y_n) = \begin{cases} 1, & (i, j) = (m, n), \\ 0, & (i, j) \neq (m, n), \end{cases} \quad (i, j), (m, n) \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h. \quad (10)$$

Пусть далее $\Phi = \{\phi_{i,j}(t)\}$ – сеточная функция, определенная в узлах (x_i, y_j) .

Рассмотрим функции

$$\tilde{\phi}(x, y, t) = \sum_{(i,j) \in \tilde{R}^h} \phi_{i,j}(t) \omega_{i,j}(x, y), \quad (11)$$

$$\hat{\phi}(x, y, t) = \sum_{(i,j) \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h} \phi_{i,j}(t) \omega_{i,j}(x, y). \quad (12)$$

Множество функций вида (11) обозначим $\overset{\circ}{H}^h$, а вида (12) – H^h . Кроме того обозначим

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{M}^h &= \text{Span} \left\{ \omega_{m,n} : (m, n) \in \tilde{R}^h \right\} \subset \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \\ M^h &= \text{Span} \left\{ \omega_{m,n} : (m, n) \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h \right\} \subset W_2^1(\Omega). \end{aligned}$$

Приближенным решением задачи (7) назовем функцию $\tilde{\phi}(x, y, t) \in \overset{\circ}{H}^h$, которая удовлетворяет интегро-дифференциальному соотношению

$$\left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}, v \right) + I(\tilde{\phi}, v) = (F, v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{M}^h, \quad (13)$$

$$(\tilde{\phi}(x, y, 0), v) = 0. \quad (14)$$

Приближенное решение задачи (8) определим как функцию $\hat{\phi}(x, y, t) \in H^h$, удовлетворяющую интегро-дифференциальному соотношению

$$\left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t}, v \right) + I(\hat{\phi}, v) = (F, v), \quad \forall v \in M^h, \quad (15)$$

$$(\hat{\phi}(x, y, 0), v) = 0. \quad (16)$$

2. Метод Галеркина

Получим оценки для разностей $\tilde{u} - \tilde{\phi}$, $\hat{u} - \hat{\phi}$ решений задачи (7), (13) и (8), (15) соответственно, следуя [18].

Определим функции \tilde{U}, \hat{U} как проекции решений \tilde{u}, \hat{u} на подпространство $\overset{\circ}{H}^h, H^h$:

$$\tilde{U} = \left\{ \tilde{u}(x_i, y_j, t) : (i, j) \in \tilde{R}^h; \tilde{U}(x, y, t) \in \overset{\circ}{H}^h \right\}, \quad (17)$$

$$\hat{U} = \left\{ \hat{u}(x_i, y_j, t) : (i, j) \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h; \hat{U}(x, y, t) \in H^h \right\}. \quad (18)$$

Рассмотрим разности $\tilde{u} - \tilde{U} = \tilde{\eta}$ и $\hat{u} - \hat{U} = \hat{\eta}$. Они оцениваются на основе теоремы аппроксимации 2.3.1* работы [8]. Оценки могут быть записаны в виде

$$\|\tilde{\eta}\|_{L_2(0,T;\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))} \leq ch_0^{1/2} \|\tilde{u}\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}, \quad h_0 = \max(h, r), \quad (19)$$

$$\|\hat{\eta}\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leq ch_0 \|\hat{u}\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}. \quad (20)$$

Аналогичные оценки можно выписывать для производных

$$\left\| \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))} \leq ch_0^{1/2} \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}, \quad (21)$$

$$\left\| \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leq ch_0 \left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}. \quad (22)$$

Снижение порядка точности в задаче с граничными условиями Дирихле является следствием «переноса» граничных условий с границы S на границу \tilde{S} . Если граница S такова, что расстояние от S до \tilde{S} имеет порядок h_0^2 , то оценки (19), (21) будут иметь порядок h_0 [8].

Перейдем к оценке разностей решений задач (7), (13) и (8), (15) соответственно, используя оценки (19)–(22). Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} &= \tilde{u} - \tilde{\phi}, & \tilde{\eta} &= \tilde{u} - \tilde{V}, & \tilde{\xi} &= \tilde{V} - \tilde{\phi}, \\ \hat{\zeta} &= \hat{u} - \hat{\phi}, & \hat{\eta} &= \hat{u} - \hat{V}, & \hat{\xi} &= \hat{V} - \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $\tilde{V} \in \overset{\circ}{H}^h$, $\hat{V} \in H^h$ – некоторые произвольные функции. Рассмотрим задачи (7), (13). Из (7) следует

$$\left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}, v \right) + I(\tilde{V}, v) = - \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t}, v \right) - I(\tilde{\eta}, v) + (F, v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{M}^h. \quad (24)$$

Вычитая из (24) уравнение (13), получим

$$\left(\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t}, v \right) + I(\tilde{\xi}, v) = - \left(\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t}, v \right) - I(\tilde{\eta}, v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{M}^h. \quad (25)$$

Выбирая в (25) $v = \tilde{\xi}(\cdot, t) \in \mathring{M}^h$ и используя (6), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \tilde{\xi} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_1 \left\| \xi \right\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{c_0}{\varepsilon} \left\| \nabla \tilde{\eta} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \left\| \tilde{\xi} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_0 \varepsilon \left\| \nabla \tilde{\xi} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (26)$$

Последнее можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \tilde{\xi} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + (c_1 - c_2 \varepsilon) \left\| \xi \right\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq c_3 \left\| \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_4 \left\| \tilde{\eta} \right\|_{W_2^1(\Omega)}^2. \quad (27)$$

Выбирая $\varepsilon = (c_1 + 1)/c_2$ и, интегрируя по τ от 0 до t , получим

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{\xi}(t) \right\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \xi \right\|_{L_2(0,t; \mathring{W}_2^1(\Omega))} \leq \\ & \leq c_5 \left(\left\| \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \right\|_{L_2(0,t; \mathring{W}_2^1(\Omega))} + \left\| \tilde{\eta} \right\|_{L_2(0,t; \mathring{W}_2^1(\Omega))} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{\xi} \right\|_{L_\infty(0,T; L_2(\Omega))} + \left\| \xi \right\|_{L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(\Omega))} \leq \\ & \leq c_6 \left(\left\| \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(\Omega))} + \left\| \tilde{\eta} \right\|_{L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(\Omega))} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Из соотношений (29) получим неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{\zeta} \right\|_{L_\infty(0,T; L_2(\Omega))} + \left\| \tilde{\zeta} \right\|_{L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(\Omega))} \leq \\ & \leq c_7 \left(\left\| \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(\Omega))} + \left\| \tilde{\eta} \right\|_{L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(\Omega))} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

При получении (30) использовано неравенство треугольника и оценка

$$\left\| \eta \right\|_{L_\infty(0,T; L_2(\Omega))} \leq c \left(\left\| \tilde{\eta} \right\|_{L_2(0,T; L_2(\Omega))} + \left\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T; L_2(\Omega))} \right).$$

В (30) можно выбрать $\tilde{V} = \tilde{U}$. Тогда с учетом (19), (21) получим

$$\begin{aligned} & \|\tilde{\zeta}\|_{L_\infty(0,T;\mathring{W}_2^1(\Omega))} + \|\tilde{\zeta}\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(\Omega))} \leq c_8 h_0^{1/2}, \\ c_8 = c & \left(\|\tilde{u}\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} + \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогичным образом получается оценка для $\hat{\zeta} = \hat{u} - \hat{\phi}$:

$$\|\hat{\zeta}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|\hat{\zeta}\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leq c_9 h_0. \quad (32)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть для параметров задач (7), (8) выполняются условия (6), тогда приближенные решения, задаваемые соотношениями (13), (15) соответственно отклоняются от точных решений на величины, удовлетворяющие оценкам (31), (32).

3. Разностный оператор

Исследуем более детально вид дифференциально-разностных уравнений (13), (14) и проведем некоторые преобразования. Прежде всего, отметим, что сеточный оператор, стоящий при производной по времени будем вычислять, используя "lumping" метод. При этом порядок оценок (31), (32) сохраняется [20].

С учетом этого факта и того, что наборы функций $\{\omega_{m,n}\}$, $(m,n) \in \tilde{R}^h$ и $\{\omega_{m,n}\}$, $(m,n) \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h$ являются базисами \mathring{M}^h и M^h соответственно, соотношения (13), (15) можно записать в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi_{m,n}}{\partial t} \int_{\Omega} \omega_{m,n} dx dy + I(\tilde{\phi}, \omega_{m,n}) = (F, \omega_{m,n}), \\ & \tilde{\phi} \in \mathring{H}^h, \quad (m,n) \in \tilde{R}^h, \quad \phi_{m,n}(0) = 0; \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi_{m,n}}{\partial t} \int_{\Omega} \omega_{m,n} dx dy + I(\hat{\phi}, \omega_{m,n}) = (F, \omega_{m,n}), \\ & \hat{\phi} \in H^h, \quad (m,n) \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h, \quad \phi_{m,n}(0) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Для дальнейшего системы уравнений (33), (34) удобно записывать в операторном виде. Предварительно введем обозначения. Будем говорить, что сеточная функция $\Phi(t) = \{\phi_{m,n}(t)\}$ принадлежит классу $\overset{\circ}{Q}^h$, если

$$\Phi = \left\{ \phi_{m,n} : (m,n) \in \tilde{R}^h \cup \tilde{\Gamma}^h; \phi_{m,n} = 0, (m,n) \in \tilde{\Gamma}^h \right\},$$

и классу Q^h , если

$$\Phi = \left\{ \phi_{m,n} : (m,n) \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h \right\}.$$

Тогда системы дифференциальных уравнений (33), (34) формально запишем в виде одного уравнения

$$\theta \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Lambda \Phi = f. \quad (35)$$

В случае задачи (33) $\Phi \in \overset{\circ}{Q}^h$, в случае задачи (34) $\Phi \in Q^h$. Оператор θ в узлах сетки (m,n) имеет вид

$$[\theta \Phi]_{m,n} = \phi_{m,n} \int_{\Omega} \omega_{m,n} dx dy,$$

причем для задачи (33) $(m,n) \in \tilde{R}^h$, а для задачи (34) $(m,n) \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h$. Оператор Λ в точке (m,n) задается соотношениями

$$\begin{aligned} [\Lambda \varphi]^{m,n} = & \alpha_{m,n}^{m,n} \phi_{m,n} - \alpha_{m+1,n}^{m,n} \phi_{m+1,n} - \alpha_{m-1,n}^{m,n} \phi_{m-1,n} - \alpha_{m,n+1}^{m,n} \phi_{m,n+1} - \\ & - \alpha_{m,n-1}^{m,n} \phi_{m,n-1} - \alpha_{m+1,n+1}^{m,n} \phi_{m+1,n+1} - \alpha_{m-1,n-1}^{m,n} \phi_{m-1,n-1} - \\ & - \alpha_{m-1,n+1}^{m,n} \phi_{m-1,n+1} - \alpha_{m+1,n-1}^{m,n} \phi_{m+1,n-1} - \\ & + \beta_{m+1,n}^{m,n} \phi_{m+1,n} + \beta_{m-1,n}^{m,n} \phi_{m-1,n} + \beta_{m,n+1}^{m,n} \phi_{m,n+1} - \\ & + \beta_{m,n-1}^{m,n} \phi_{m,n-1} + \beta_{m+1,n+1}^{m,n} \phi_{m+1,n+1} + \beta_{m-1,n-1}^{m,n} \phi_{m-1,n-1} - \\ & + \beta_{m-1,n+1}^{m,n} \phi_{m-1,n+1} + \beta_{m+1,n-1}^{m,n} \phi_{m+1,n-1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Коэффициенты α, β получаются подстановкой представлений (11), (12) для $\tilde{\phi}, \hat{\phi}$ в билинейную форму $I(\phi, \omega_{m,n})$ и имеют вид

$$\begin{aligned}
\alpha_{m,n}^{m,n} &= \int_{\Omega_1 \cap k_{m,n}} A \left(\frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial x} \right)^2 dx dy + \int_{\Omega_1 \cap k_{m,n}} B \left(\frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial y} \right)^2 dx dy - \\
&- \int_{\Omega_1 \cap k_{m,n}} \left[-2D \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial x} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial y} \right] dx dy + \int_{\Omega_2 \cap k_{m,n}} A \left(\frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial x} \right)^2 dx dy + \\
&+ \int_{\Omega_2 \cap k_{m,n}} B \left(\frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial y} \right)^2 dx dy + \int_{\Omega_2 \cap k_{m,n}} 2D \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial x} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial y} dx dy, \\
\alpha_{m\pm 1,n}^{m,n} &= \int_{\Omega_1 \cap k_{m\pm 1,n} \cap k_{m,n}} A \left[-\frac{\partial \omega_{m\pm 1,n}}{\partial x} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial x} \right] dx dy - \\
&- \int_{\Omega_1 \cap k_{m\pm 1,n} \cap k_{m,n}} D \left[\frac{\partial \omega_{m\pm 1,n}}{\partial y} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{m\pm 1,n}}{\partial x} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial y} \right] dx dy + \\
&+ \int_{\Omega_2 \cap k_{m\pm 1,n} \cap k_{m,n}} A \left[-\frac{\partial \omega_{m\pm 1,n}}{\partial x} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial x} \right] dx dy + \\
&+ \int_{\Omega_2 \cap k_{m\pm 1,n} \cap k_{m,n}} D \left[\frac{\partial \omega_{m\pm 1,n}}{\partial y} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{m\pm 1,n}}{\partial x} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial y} \right] dx dy, \\
\alpha_{m,n\pm 1}^{m,n} &= \int_{\Omega_1 \cap k_{m,n\pm 1} \cap k_{m,n}} B \left[-\frac{\partial \omega_{m,n\pm 1}}{\partial y} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial y} \right] dx dy - \\
&- \int_{\Omega_1 \cap k_{m,n\pm 1} \cap k_{m,n}} D \left[\frac{\partial \omega_{m,n\pm 1}}{\partial y} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{m,n\pm 1}}{\partial x} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial y} \right] dx dy + \\
&+ \int_{\Omega_2 \cap k_{m,n\pm 1} \cap k_{m,n}} B \left[-\frac{\partial \omega_{m,n\pm 1}}{\partial y} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial y} \right] dx dy + \\
&+ \int_{\Omega_2 \cap k_{m,n\pm 1} \cap k_{m,n}} D \left[\frac{\partial \omega_{m,n\pm 1}}{\partial y} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{m,n\pm 1}}{\partial x} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial y} \right] dx dy, \quad (37) \\
\alpha_{m\pm 1,n\pm 1}^{m,n} &= \int_{\Omega_1 \cap k_{m\pm 1,n\pm 1} \cap k_{m,n}} \times \\
&\times D \left[-\frac{\partial \omega_{m\pm 1,n\pm 1}}{\partial y} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_{m\pm 1,n\pm 1}}{\partial x} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial y} \right] dx dy, \\
\alpha_{m\pm 1,n\pm 1}^{m,n} &= - \int_{\Omega_2 \cap k_{m\pm 1,n\pm 1} \cap k_{m,n}} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times D \left[\frac{\partial \omega_{m\pm 1, n\pm 1}}{\partial y} \frac{\partial \omega_{m, n}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{m\pm 1, n\pm 1}}{\partial x} \frac{\partial \omega_{m, n}}{\partial y} \right] dx dy, \\
& \beta_{m\pm 1, n}^{m, n} = \int_{\Omega \cap k_{m\pm 1, n} \cap k_{m, n}} \times \\
& \times C \left[\frac{\partial \omega_{m\pm 1, n}}{\partial y} \frac{\partial \omega_{m, n}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_{m\pm 1, n}}{\partial x} \frac{\partial \omega_{m, n}}{\partial y} \right] dx dy, \\
& \beta_{m, n\pm 1}^{m, n} = \int_{\Omega \cap k_{m, n\pm 1} \cap k_{m, n}} \times \\
& \times C \left[\frac{\partial \omega_{m, n\pm 1}}{\partial y} \frac{\partial \omega_{m, n}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_{m, n\pm 1}}{\partial x} \frac{\partial \omega_{m, n}}{\partial y} \right] dx dy, \\
& \beta_{m\pm 1, n\pm 1}^{m, n} = \int_{\Omega \cap k_{m\pm 1, n\pm 1} \cap k_{m, n}} \times \\
& \times C \left[\frac{\partial \omega_{m\pm 1, n\pm 1}}{\partial y} \frac{\partial \omega_{m, n}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_{m\pm 1, n\pm 1}}{\partial x} \frac{\partial \omega_{m, n}}{\partial y} \right] dx dy, \\
& \beta_{m\pm 1, n\mp 1}^{m, n} = \int_{\Omega \cap k_{m\pm 1, n\mp 1} \cap k_{m, n}} \times \\
& \times C \left[\frac{\partial \omega_{m\pm 1, n\mp 1}}{\partial y} \frac{\partial \omega_{m, n}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_{m\pm 1, n\mp 1}}{\partial x} \frac{\partial \omega_{m, n}}{\partial y} \right] dx dy.
\end{aligned}$$

Для задачи (33) в формулах (36), (37) для определения $\Lambda(m, n) \in \overset{\circ}{R}^h$, $\Phi \in \overset{\circ}{Q}^h$, а для задачи (34) – $(m, n) \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h$, $\Phi \in Q^h$. Из формул (37) следует, что коэффициенты обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
\alpha_{m, n}^{m, n} &= -(\alpha_{m+1, n}^{m, n} + \alpha_{m-1, n}^{m, n}) - (\alpha_{m, n+1}^{m, n} + \alpha_{m, n-1}^{m, n}) - \\
&- (\alpha_{m+1, n+1}^{m, n} + \alpha_{m-1, n-1}^{m, n}) - (\alpha_{m+1, n-1}^{m, n} + \alpha_{m-1, n+1}^{m, n}), \\
\alpha_{m\pm 1, n}^{m, n} &= \alpha_{m, n}^{m\pm 1, n}, \quad \alpha_{m, n\pm 1}^{m, n} = \alpha_{m, n}^{m, n\pm 1}, \\
\alpha_{m\pm 1, n\pm 1}^{m, n} &= \alpha_{m, n}^{m\pm 1, n\pm 1}, \quad \alpha_{m\pm 1, n\mp 1}^{m, n} = \alpha_{m, n}^{m\pm 1, n\mp 1}, \\
\beta_{m\pm 1, n}^{m, n} &= -\beta_{m, n}^{m\pm 1, n}, \quad \beta_{m, n\pm 1}^{m, n} = -\beta_{m, n}^{m, n\pm 1}, \\
\beta_{m\pm 1, n\pm 1}^{m, n} &= -\beta_{m, n}^{m\pm 1, n\pm 1}, \quad \beta_{m\pm 1, n\mp 1}^{m, n} = -\beta_{m, n}^{m\pm 1, n\mp 1}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Получим теперь выражения для α для двух основных типов конечного носителя $k_{m,n}$ функции $\omega_{m,n}$, а именно: когда $k_{m,n} \in \Omega_1$, $k_{m,n} \in \Omega_2$ и узлы не соседствуют с граничными точками. Тогда конечные носители имеют вид, представленный на рис. 1.

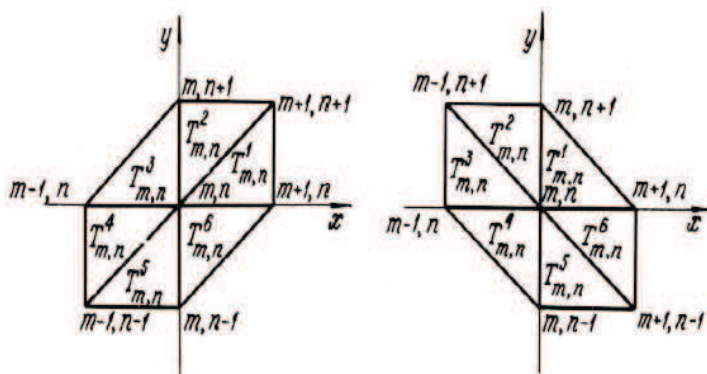


Рис. 1.

Вычисляя производные от функций $\omega_{i,j}$ в выражениях (37), получим формулы для α [19]:

$(x_m, y_n) \in \Omega_1$:

$$\begin{aligned} \alpha_{m\pm 1, n}^{m, n} &= \int_{\Omega_1 \cap k_{m\pm 1, n} \cap k_{m, n}} \left[\frac{A}{h^2} - \frac{D}{hr} \right] dx dy, \\ \alpha_{m, n\pm 1}^{m, n} &= \int_{\Omega_1 \cap k_{m, n\pm 1} \cap k_{m, n}} \left[\frac{B}{r^2} - \frac{D}{hr} \right] dx dy, \\ \alpha_{m\pm 1, n\pm 1}^{m, n} &= \frac{1}{hr} \int_{\Omega_1 \cap k_{m\pm 1, n\pm 1} \cap k_{m, n}} D dx dy, \\ \alpha_{m\pm 1, n\mp 1}^{m, n} &= 0; \end{aligned} \quad (39)$$

$(x_m, y_n) \in \Omega_2$:

$$\begin{aligned} \alpha_{m\pm 1, n}^{m, n} &= \int_{\Omega_2 \cap k_{m\pm 1, n} \cap k_{m, n}} \left[\frac{A}{h^2} + \frac{D}{hr} \right] dx dy, \\ \alpha_{m, n\pm 1}^{m, n} &= \int_{\Omega_2 \cap k_{m, n\pm 1} \cap k_{m, n}} \left[\frac{B}{r^2} + \frac{D}{hr} \right] dx dy, \end{aligned}$$

$$\alpha_{m\pm 1, n\pm 1}^{m, n} = 0,$$

$$\alpha_{m\pm 1, n\mp 1}^{m, n} = -\frac{1}{hr} \int_{\Omega_2 \cap k_{m\pm 1, n\mp 1} \cap k_{m, n}} D \, dx \, dy. \quad (40)$$

Отметим, что для практического вычисления интегралов в выражениях (39), (40) при $A, B, C, D \in C^2(\Omega)$ можно использовать для коэффициентов кусочно-линейное представление на данной триангуляции Ω . При этом порядок точности схемы (35) сохраняется [8].

Рассмотрим теперь выражение (36) для оператора Λ . Нетрудно заметить, что с учетом первого из соотношений (38) оператор Λ может быть представлен в виде суммы четырех одномерных разностных операторов

$$\Lambda = \Lambda_{xx} + \Lambda_{yy} + \Lambda_{xy} + \Lambda_{yx}, \quad (41)$$

имеющих вид:

$$\begin{aligned} [\Lambda_{xx}\Phi]_{m, n} &= -\alpha_{m+1, n}^{m, n} \phi_{m+1, n} + (\alpha_{m+1, n}^{m, n} + \alpha_{m-1, n}^{m, n}) \phi_{m, n} - \\ &\quad - \alpha_{m-1, n}^{m, n} \phi_{m-1, n} + \beta_{m+1, n}^{m, n} \phi_{m+1, n} + \beta_{m-1, n}^{m, n} \phi_{m-1, n}, \\ [\Lambda_{yy}\Phi]_{m, n} &= -\alpha_{m, n+1}^{m, n} \phi_{m, n+1} + (\alpha_{m, n+1}^{m, n} + \alpha_{m, n-1}^{m, n}) \phi_{m, n} - \\ &\quad - \alpha_{m, n-1}^{m, n} \phi_{m, n-1} + \beta_{m, n+1}^{m, n} \phi_{m, n+1} + \beta_{m, n-1}^{m, n} \phi_{m, n-1}, \\ [\Lambda_{xy}\Phi]_{m, n} &= -\alpha_{m+1, n+1}^{m, n} \phi_{m+1, n+1} + (\alpha_{m+1, n+1}^{m, n} + \alpha_{m-1, n-1}^{m, n}) \phi_{m, n} - \\ &\quad - \alpha_{m-1, n-1}^{m, n} \phi_{m-1, n-1} + \beta_{m+1, n+1}^{m, n} \phi_{m+1, n+1} + \beta_{m-1, n-1}^{m, n} \phi_{m-1, n-1}, \\ [\Lambda_{yx}\Phi]_{m, n} &= -\alpha_{m+1, n-1}^{m, n} \phi_{m+1, n-1} + (\alpha_{m+1, n-1}^{m, n} + \alpha_{m-1, n+1}^{m, n}) \phi_{m, n} - \\ &\quad - \alpha_{m-1, n+1}^{m, n} \phi_{m-1, n+1} + \beta_{m+1, n-1}^{m, n} \phi_{m+1, n-1} + \beta_{m-1, n+1}^{m, n} \phi_{m-1, n+1}. \end{aligned} \quad (42)$$

Исследуем свойства операторов $\Lambda_{xx}, \Lambda_{yy}, \Lambda_{yx}, \Lambda_{xy}$. Введем скалярные произведения в сеточных пространствах $\overset{\circ}{Q}^h, Q^h$:

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_0 = \sum_{(i, j) \in \tilde{R}^h} \phi_{i, j} \psi_{i, j}, \quad \Phi, \Psi \in \overset{\circ}{Q}^h,$$

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{(i, j) \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h} \phi_{i, j} \psi_{i, j}, \quad \Phi, \Psi \in Q^h.$$

Рассмотрим функционалы

$$\begin{aligned} &\langle \Lambda_{xx}\Phi, \Phi \rangle_0, \quad \langle \Lambda_{xx}\Phi, \Phi \rangle, \quad \langle \Lambda_{yy}\Phi, \Phi \rangle_0, \quad \langle \Lambda_{yy}\Phi, \Phi \rangle, \\ &\langle \Lambda_{xy}\Phi, \Phi \rangle_0, \quad \langle \Lambda_{xy}\Phi, \Phi \rangle, \quad \langle \Lambda_{yx}\Phi, \Phi \rangle_0, \quad \langle \Lambda_{yx}\Phi, \Phi \rangle. \end{aligned}$$

На основе соотношений (42)

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{xx} \Phi, \Phi \rangle_0 = & \sum_{(m,n) \in \tilde{R}^h} (-\alpha_{m+1,n}^{m,n} \phi_{m+1,n} + (\alpha_{m+1,n}^{m,n} + \alpha_{m-1,n}^{m,n}) \phi_{m,n} - \\ & - \alpha_{m-1,n}^{m,n} \phi_{m-1,n}) \phi_{m,n} + \\ & + \sum_{(m,n) \in \tilde{R}^h} (\beta_{m+1,n}^{m,n} \phi_{m+1,n} + \beta_{m-1,n}^{m,n} \phi_{m-1,n}) \phi_{m,n}. \end{aligned} \quad (43)$$

Используя в (43) свойства (39), получаем, что вторая сумма равна нулю. Для первой суммы используем (38), перегруппируем члены. Тогда получим

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{xx} \Phi, \Phi \rangle_0 = & \sum_{(m,n) \in \tilde{R}^h \cup \tilde{\Gamma}_1^x} \alpha_{m+1,n}^{m,n} (\phi_{m,n} - \phi_{m+1,n})^2 + \\ & + \sum_{(m,n) \in \tilde{R}^h \cup \tilde{\Gamma}_2^x} \alpha_{m+1,n}^{m,n} (\phi_{m,n} - \phi_{m+1,n})^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_1^x = & \left\{ (m,n) : (m,n) \in \tilde{\Gamma}_1^h; (m-1,n) \in \tilde{R}_1^h \cup \tilde{\Gamma}_1^h \right\}, \\ \tilde{\Gamma}_2^x = & \left\{ (m,n) : (m,n) \in \tilde{\Gamma}_2^h; (m-1,n) \in \tilde{R}_2^h \cup \tilde{\Gamma}_2^h \right\}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения, используя (40), получим

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{xx} \Phi, \Phi \rangle_0 = & \sum_{(m,n) \in \tilde{R}_1^h \cup \tilde{\Gamma}_1^x} \int_{k_{m+1,n} \cap k_{m,n} \cap \Omega_1} \left[\frac{A}{h^2} - \frac{D}{hr} \right] \times \\ & \times dx dy (\phi_{m,n} - \phi_{m+1,n})^2 + \sum_{(m,n) \in \tilde{R}_2^h \cup \tilde{\Gamma}_2^x} \int_{k_{m+1,n} \cap k_{m,n} \cap \Omega_2} \left[\frac{A}{h^2} + \frac{D}{hr} \right] \times \\ & \times dx dy (\phi_{m,n} - \phi_{m+1,n})^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Аналогичным образом для $\langle \Lambda_{xx} \Phi, \Phi \rangle$ получаются соотношения

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{xx} \Phi, \Phi \rangle = & \sum_{(m,n) \in \hat{R}_1^h \cup \hat{\Gamma}_1^x} \int_{k_{m+1,n} \cap k_{m,n} \cap \Omega_1} \left[\frac{A}{h^2} - \frac{D}{hr} \right] \times \\ & \times dx dy (\phi_{m,n} - \phi_{m+1,n})^2 + \sum_{(m,n) \in \hat{R}_2^h \cup \hat{\Gamma}_2^x} \int_{k_{m+1,n} \cap k_{m,n} \cap \Omega_2} \left[\frac{A}{h^2} + \frac{D}{hr} \right] \times \end{aligned}$$

$$\times dx dy (\phi_{m,n} - \phi_{m+1,n})^2, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_1^x &= \left\{ (m, n) : (m, n) \in \hat{\Gamma}_1^h; (m-1, n) \notin \hat{R}_1^h \right\}, \\ \hat{\Gamma}_2^x &= \left\{ (m, n) : (m, n) \in \hat{\Gamma}_2^h; (m-1, n) \notin \hat{R}_2^h \right\}. \end{aligned}$$

Из вида (44), (45) следует, что достаточным условием выполнения неравенства

$$\langle \Lambda_{xx} \Phi, \Phi \rangle_0 \geq 0, \quad \langle \Lambda_{xx} \Phi, \Phi \rangle \geq 0 \quad (46)$$

является условие

$$\int_{T_{m,n}^p \cap \Omega} A dx dy \geq \frac{h}{r} \left| \int_{T_{m,n}^p \cap \Omega} D dx dy \right| \quad (47)$$

для любого треугольника $T_{m,n}^p \in \hat{\Omega}$. Таким же образом выполняются условия положительной полуопределенности сеточного оператора на классы сеточных функций $\overset{\circ}{Q}^h, Q^h$:

$$\langle \Lambda_{yy} \Phi, \Phi \rangle_0 \geq 0, \quad \langle \Lambda_{yy} \Phi, \Phi \rangle \geq 0. \quad (48)$$

Условие имеет вид

$$\int_{T_{m,n}^p \cap \Omega} B dx dy \geq \frac{r}{h} \left| \int_{T_{m,n}^p \cap \Omega} D dx dy \right| \quad (49)$$

и должно выполняться для любого треугольника $T_{m,n}^p \in \hat{\Omega}$.

Перейдем к рассмотрению разностного функционала

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{xy} \Phi, \Phi \rangle_0 &= \sum_{(m,n) \in \tilde{R}^h} \left(-\alpha_{m+1,n+1}^{m,n} \phi_{m+1,n+1} + (\alpha_{m+1,n+1}^{m,n} + \alpha_{m-1,n-1}^{m,n}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \phi_{m,n} - \alpha_{m-1,n-1}^{m,n} \phi_{m-1,n-1} \right) \phi_{m,n} + \\ &+ \sum_{(m,n) \in \tilde{R}^h} \left(\beta_{m+1,n+1}^{m,n} \phi_{m+1,n+1} + \beta_{m-1,n-1}^{m,n} \phi_{m-1,n-1} \right) \phi_{m,n}. \end{aligned} \quad (50)$$

Использование (38), (39) дает

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{xy} \Phi, \Phi \rangle_0 &= \sum_{(m,n) \in \tilde{R}_1^h \cup \hat{\Gamma}_1^{xy}} \alpha_{m+1,n+1}^{m,n} (\phi_{m,n} - \phi_{m+1,n+1})^2, \\ \tilde{\Gamma}_1^{xy} &= \left\{ (m, n) : (m, n) \in \Gamma_1^h; (m-1, n-1) \notin \tilde{R}_1^h \cup \tilde{\Gamma}_1^h \right\}. \end{aligned}$$

Здесь учтен тот факт, что

$$\alpha_{m\pm 1, n\pm 1}^{m, n} = 0, \quad (k_{m\pm 1, n\pm 1} \cap k_{m, n}) \in \Omega_2.$$

Далее, подставляя выражения для $\alpha_{m+1, n+1}^{m, n}$ из (40), получим

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{xy} \Phi, \Phi \rangle_0 = & \sum_{(m, n) \in \tilde{R}_1^h \cup \tilde{\Gamma}_1^{xy}} \frac{1}{rh} \int_{k_{m+1, n+1} \cap k_{m, n} \cap \Omega_1} \times \\ & \times D \, dx \, dy (\phi_{m, n} - \phi_{m+1, n+1})^2. \end{aligned} \quad (51)$$

Так как построению сеточной области

$$\int_{k_{m+1, n+1} \cap k_{m, n} \cap \Omega_1} D \, dx \, dy \geq 0, \quad (k_{m+1, n+1} \cap k_{m, n}) \in \Omega_1, \quad (52)$$

то из (51) следует

$$\langle \Lambda_{xy} \Phi, \Phi \rangle_0 \geq 0. \quad (53)$$

Аналогично

$$\langle \Lambda_{yx} \Phi, \Phi \rangle \geq 0. \quad (54)$$

Функционал $\langle \Lambda_{yx} \Phi, \Phi \rangle$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{yx} \Phi, \Phi \rangle_0 = & \sum_{(m, n) \in \tilde{R}_2^h \cup \tilde{\Gamma}_2^{yx}} \left(-\frac{1}{hr} \int_{k_{m+1, n-1} \cap k_{m, n} \cap \Omega_2} D \, dx \, dy \right) \times \\ & \times (\phi_{m, n} - \phi_{m+1, n-1})^2, \end{aligned}$$

$$\tilde{\Gamma}_2^{yx} = \left\{ (m, n) : (m, n) \in \Gamma_2^h; (m-1, n+1) \in \tilde{R}_2^h \cup \tilde{\Gamma}_2^h \right\}.$$

Так как

$$\int_{k_{m+1, n-1} \cap k_{m, n} \cap \Omega_2} D \, dx \, dy < 0, \quad (k_{m+1, n-1} \cap k_{m, n}) \in \Omega_2, \quad (55)$$

то

$$\langle \Lambda_{yx} \Phi, \Phi \rangle_0 \geq 0. \quad (56)$$

Таким же образом получаем оценку для Λ_{yx} на классе сеточных функций Q^h :

$$\langle \Lambda_{yx} \Phi, \Phi \rangle \geq 0. \quad (57)$$

Для дальнейшего представляет интерес получить оценки сверху для операторов $\Lambda_{xx}, \Lambda_{yy}, \Lambda_{xy}, \Lambda_{yx}$. Для $\langle \Lambda_{xx} \Phi, \Phi \rangle_0$, используя ранее полученные соотношения (44), легко получить неравенство

$$\langle \Lambda_{xx} \Phi, \Phi \rangle_0 \leq 4 \max_{(x,y) \in \Omega} \left(\frac{A}{h^2} - \frac{|D|}{hr} \right) \langle \Phi, \Phi \rangle_0 hr.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{xx} \Phi, \Phi \rangle &\leq 4 \max_{\Omega} \left(\frac{A}{h^2} - \frac{|D|}{hr} \right) \langle \Phi, \Phi \rangle hr, \\ \langle \Lambda_{yy} \Phi, \Phi \rangle_0 &\leq 4 \max_{\Omega} \left(\frac{B}{r^2} - \frac{|D|}{hr} \right) \langle \Phi, \Phi \rangle_0 hr, \\ \langle \Lambda_{yy} \Phi, \Phi \rangle &\leq 4 \max_{\Omega} \left(\frac{B}{r^2} - \frac{|D|}{hr} \right) \langle \Phi, \Phi \rangle hr, \\ \langle \Lambda_{xy} \Phi, \Phi \rangle_0 &\leq 4 \max_{\Omega_1} D \langle \Phi, \Phi \rangle_0, \\ \langle \Lambda_{xy} \Phi, \Phi \rangle &\leq 4 \max_{\Omega_1} D \langle \Phi, \Phi \rangle, \\ \langle \Lambda_{yx} \Phi, \Phi \rangle_0 &\leq 4 \max_{\Omega_2} D \langle \Phi, \Phi \rangle_0, \\ \langle \Lambda_{yx} \Phi, \Phi \rangle &\leq 4 \max_{\Omega_2} D \langle \Phi, \Phi \rangle. \end{aligned} \quad (58)$$

В заключение настоящего пункта докажем оценку снизу для оператора на классах сеточных функций $\overset{\circ}{Q}^h, Q^h$. Рассмотрим функционал

$$\langle \theta \Phi, \Phi \rangle_0 = \sum_{(m,n) \in \tilde{R}^h} \phi_{m,n}^2 \int_{k_{m,n}} \omega_{m,n} dx dy \geq \frac{2}{3} rh \langle \Phi, \Phi \rangle_0. \quad (59)$$

При получении (59) использован тот факт, что минимальное число треугольников, вершинами которых может быть узел $(m, n) \in \tilde{R}^h$, равно четырем. Для сеточных функций $\Phi \in Q^h$ оценка зависит от минимальной площади пересечения треугольников $T_{m,n}^p \subset \hat{\Omega}$ с областью Ω . Так как по предложению она не меньше shr , то

$$\langle \theta \Phi, \Phi \rangle \geq shr \langle \Phi, \Phi \rangle. \quad (60)$$

Итак, резюмируя результаты, полученные в настоящем разделе, можно отметить, что дифференциально-разностные уравнения (33),

(34) могут быть представлены в виде операторных уравнений типа (35), где θ – положительно определенный сеточный оператор, удовлетворяющий оценкам (59), (60) на классах функций $\overset{\circ}{Q}^h, Q^h$ соответственно, а разностные операторы Λ при выполнении условий (47), (49), (52), (55) представляются в виде суммы четырех положительно определенных операторов $\Lambda_{xx}, \Lambda_{yy}, \Lambda_{xy}, \Lambda_{yx}$, для которых на классах сеточных функций $\overset{\circ}{Q}^h$ и Q^h справедливы оценки (46), (48), (53), (3.22), (56)–(58) соответственно.

4. Метод расщепления

Результаты раздела 3 позволяют использовать для решения задач (33), (34) по времени методы расщепления. В частности, может быть применен двуциклический метод расщепления, рассмотренный в [5].

Итак, рассмотрим задачу

$$\theta \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Lambda \Phi = f, \quad \Phi(0) = 0 \quad (61)$$

на интервале $(0, T]$. В настоящем разделе мы не будем разделять задачи (33) и (34), так как метод расщепления строится аналогично для обеих задач.

Используемая в данном разделе норма $\|\cdot\|_h$ порождается скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ или $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в зависимости от вида задачи.

Оператор θ в (61) положительно определен и для него выполняется оценка (59) или (60). Оператор Λ представим в виде

$$\Lambda = \Lambda_{xx} + \Lambda_{yy} + \Lambda_{xy} + \Lambda_{yx}, \quad (62)$$

где

$$\Lambda_{xx} \geq 0, \quad \Lambda_{yy} \geq 0, \quad \Lambda_{xy} \geq 0, \quad \Lambda_{yx} \geq 0.$$

Разобьем интервал $(0, T]$ на подинтервалы $t_j \leq t \leq t_{j+1}$, $(\tau = t_{j+1} - t_j)$. Следуя [5] построим на интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$ систему разностных уравнений, состоящих из последовательности схем Кранка – Николсона для операторов $\Lambda_{xx}, \Lambda_{yy}, \Lambda_{xy}, \Lambda_{yx}, \Lambda_{yx}, \Lambda_{xy}, \Lambda_{yy}, \Lambda_{xx}$. Схема имеет вид

$$(\theta + (\tau/2) \Lambda_{xx}) \Phi_{\tau}^{j-(3/4)} = (\theta - (\tau/2) \Lambda_{xx}) \Phi_{\tau}^{j-1},$$

$$(\theta + (\tau/2) \Lambda_{yy}) \Phi_{\tau}^{j-(1/2)} = (\theta - (\tau/2) \Lambda_{yy}) \Phi_{\tau}^{j-(3/4)},$$

$$\begin{aligned}
(\theta + (\tau/2) \Lambda_{xy}) \Phi_{\tau}^{j-(1/4)} &= (\theta - (\tau/2) \Lambda_{xy}) \Phi_{\tau}^{j-(1/2)}, \\
(\theta + (\tau/2) \Lambda_{yx}) (\Phi_{\tau}^j - \tau f^j) &= (\theta - (\tau/2) \Lambda_{yx}) \Phi_{\tau}^{j-(1/4)}, \\
(\theta + (\tau/2) \Lambda_{yx}) \Phi_{\tau}^{j+(1/4)} &= (\theta - (\tau/2) \Lambda_{yx}) (\Phi_{\tau}^j - \tau f^j), \\
(\theta + (\tau/2) \Lambda_{xy}) \Phi_{\tau}^{j+(1/2)} &= (\theta - (\tau/2) \Lambda_{xy}) \Phi_{\tau}^{j+(1/4)}, \\
(\theta + (\tau/2) \Lambda_{yy}) \Phi_{\tau}^{j+(3/4)} &= (\theta - (\tau/2) \Lambda_{yy}) \Phi_{\tau}^{j+(1/2)}, \\
(\theta + (\tau/2) \Lambda_{xx}) \Phi_{\tau}^{j+1} &= (\theta - (\tau/2) \Lambda_{xx}) \Phi_{\tau}^{j+(3/4)}. \tag{63}
\end{aligned}$$

Здесь $f^j = f(t_j)$.

Исключая в (63) функции $\Phi_{\tau}^{j+(\alpha/4)}$ ($\alpha = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$), схему (63) можно переписать в виде

$$\Phi_{\tau}^{j+1} = L \Phi_{\tau}^{j-1} + 2\tau L_{xx} L_{yy} L_{xy} L_{yx} f^j, \tag{64}$$

где

$$\begin{aligned}
L &= L_{xx} L_{yy} L_{xy} L_{yx} L_{yx} L_{xy} L_{yy} L_{xx}, \\
L_{xx} &= (\theta + (\tau/2) \Lambda_{xx})^{-1} (\theta - (\tau/2) \Lambda_{xx}), \\
L_{yy} &= (\theta + (\tau/2) \Lambda_{yy})^{-1} (\theta - (\tau/2) \Lambda_{yy}), \\
L_{xy} &= (\theta + (\tau/2) \Lambda_{xy})^{-1} (\theta - (\tau/2) \Lambda_{xy}), \\
L_{yx} &= (\theta + (\tau/2) \Lambda_{yx})^{-1} (\theta - (\tau/2) \Lambda_{yx}). \tag{65}
\end{aligned}$$

Исследуем точность схемы (64) по времени. Подставим решение задачи (61) в (64) обозначая $\Phi^j = \Phi(t_j)$. Предположим далее, что шаг по времени τ таков, что выполняются условия

$$\begin{aligned}
(\tau/2) \|\theta^{-1} \Lambda_{xx}\|_h &< 1, \quad (\tau/2) \|\theta^{-1} \Lambda_{yy}\|_h < 1, \\
(\tau/2) \|\theta^{-1} \Lambda_{xy}\|_h &< 1, \quad (\tau/2) \|\theta^{-1} \Lambda_{yx}\|_h < 1. \tag{66}
\end{aligned}$$

Конкретные числовые значения допустимых τ легко получаются на основе оценок (58), (59), (60) с учетом (6). Тогда, разлагая операторы $L_{xx}, L_{yy}, L_{xy}, L_{yx}$ в ряды по степеням τ , получим

$$\begin{aligned}
\Phi^{j+1} &= \left[E - 2\tau \theta^{-1} \Lambda - ((2\tau)^2/2) (\theta^{-1} \Lambda)^2 \right] \Phi^{j-1} + \\
&+ 2\tau \theta^{-1} [E + \tau \theta^{-1} \Lambda] f^j + O(\tau^3), \tag{67}
\end{aligned}$$

или в ином представлении

$$\theta \frac{\Phi^{j+1} - \Phi^{j-1}}{2\tau} + \Lambda (E - \tau \theta^{-1} \Lambda) \Phi^{j-1} = (E - \tau \theta^{-1} \Lambda) f^j. \tag{68}$$

В (67), (68) E – тождественный оператор. Исключим функцию Φ^{j-1} из второго члена левой части (68), используя разложение

$$\Phi^j = \Phi^{j-1} + (\partial\Phi/\partial t)^{j-1} \tau + O(\tau^2). \quad (69)$$

Для $(\partial\Phi/\partial t)^{j-1}$ с точностью до величин порядка $O(\tau)$ выполняется соотношение

$$(\partial\Phi/\partial t)^{j-1} = -\theta^{-1}\Lambda\Phi^{j-1} + \theta^{-1}f^j + O(\tau). \quad (70)$$

Подставляя (70) в (69), получим

$$\theta \Phi^j = (\theta - \tau\Lambda) \Phi^{j-1} + \tau f^j + O(\tau^2).$$

Следовательно,

$$(\theta - \tau\Lambda) \Phi^{j-1} = \theta \Phi^j - \tau f^j + O(\tau^2). \quad (71)$$

Подставляя (71) в (68), приходим к выражению

$$\theta \frac{\Phi^{j+1} - \Phi^{j-1}}{2\tau} + \Lambda\Phi^j = f^j + O(\tau^2).$$

Откуда получаем

$$\theta \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Lambda\Phi = f + O(\tau^2), \quad t = t_j. \quad (72)$$

Таким образом, рассмотренная схема имеет второй порядок точности по времени.

Рассмотрим устойчивость метода. Из (64) получим

$$\|\Phi_\tau^{j+1}\|_h \leq \|L\|_h \|\Phi^{j-1}\|_h + 2\tau \|L_{xx}\|_h \|L_{yy}\|_h \|L_{xy}\|_h \|L_{yx}\|_h \|f^j\|_h.$$

Оценивая нормы операторов L_{xx} , L_{yy} , L_{xy} , L_{yx} по лемме Келлога, получим

$$\|L_{xx}\|_h \leq 1, \quad \|L_{yy}\|_h \leq 1, \quad \|L_{xy}\|_h \leq 1, \quad \|L_{yx}\|_h \leq 1.$$

Тогда

$$\|L\|_h \leq \|L_{xx}\|_h \|L_{yy}\|_h \|L_{xy}\|_h \|L_{yx}\|_h \|L_{yx}\|_h \|L_{xy}\|_h \|L_{yy}\|_h \|L_{xx}\|_h \leq 1,$$

следовательно,

$$\|\Phi_\tau^{j+1}\|_h \leq \|\Phi_\tau^{j-1}\|_h + 2\tau \|f^j\|_h,$$

или, используя рекурсию,

$$\|\Phi_\tau^{j+1}\|_h \leq c\tau jG, \quad (73)$$

где

$$G = \max_j \|f^j\|_h.$$

Из (73) следует устойчивость схемы (63) на конечном интервале $(0, T]$.

5. Неравномерная сетка

Разложение сеточного оператора метода конечных элементов на сумму одномерных было получено для сеток, узлы которых образованы линиями, параллельными координатным осям. Представляет интерес рассмотреть возможность такого разложения на нерегулярных сетках.

Как будет показано, это возможно для нерегулярных сеток частного вида.

Рассмотрим уравнение (1) при $D \equiv 0$ в области $Q = \Omega \times (0, T]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} B \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} C \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} C \frac{\partial u}{\partial x} = F \quad (74)$$

с начальными условиями

$$u(x, y, 0) = 0 \quad (75)$$

и граничными условиями двух типов

$$u|_S = 0, \quad (76)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_S = 0, \quad (77)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \cos(nx)A \frac{\partial}{\partial x} + \cos(ny)B \frac{\partial}{\partial y} + \cos(nx)C \frac{\partial}{\partial y} - \cos(ny)C \frac{\partial}{\partial x}.$$

Для коэффициентов и правой части выполняются условия (6). Определим слабые решения задач (74)–(76) и (74), (75), (77) соотношениями

$$\tilde{u} \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)),$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, v\right) + I_1(\tilde{u}, v) = (F, v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega),$$

$$(\tilde{u}(x, y, 0), v) = 0 \quad (78)$$

и

$$\hat{u} \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)),$$

$$\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}, v\right) + I_1(\hat{u}, v) = (F, v), \quad \forall v \in W_2^1(\Omega),$$

$$(\hat{u}(x, y, 0), v) = 0, \quad (79)$$

где

$$I_1(u, v) = \int_{\Omega} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + C \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - C \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Предположим далее, что область Ω покрыта конечным числом четырехугольников Π_k , удовлетворяющих условиям:

- а) областью пересечения Π_k являются только их границы;
- б) Π_k – выпуклы;
- с) каждая вершина четырехугольника может быть вершиной только четырех четырехугольников.

Введем область $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ с границей \tilde{S} – наибольшее объединение четырехугольников, принадлежащее Ω , и область $\hat{\Omega} \supset \Omega$ с границей \hat{S} – наименьшее объединение четырехугольников, содержащее $\tilde{\Omega}$. Узлами сетки будем считать вершины четырехугольников, упорядоченные некоторым образом по индексу i .

Определим множества индексов $\tilde{R}^h, \tilde{\Gamma}^h, \hat{R}^h, \hat{\Gamma}^h$ соотношениями

$$\tilde{R}^h = \left\{ (i) : (x_i, y_i) \in \tilde{\Omega} \right\}, \quad \tilde{\Gamma}^h = \left\{ (i) : (x_i, y_i) \in \tilde{S} \right\},$$

$$\hat{R}^h = \left\{ (i) : (x_i, y_i) \in \hat{\Omega} \right\}, \quad \hat{\Gamma}^h = \left\{ (i) : (x_i, y_i) \in \hat{S} \right\}.$$

Разделим теперь каждый из четырехугольников Π_k одной из диагоналей на два треугольника T_k^1, T_k^2 и предположим, что площади областей $\Omega \setminus T_k^e$ не менее чем величина sh_0^2 для любого треугольника T_k^e . Здесь и далее h_0 – наибольшая из сторон треугольников в $\hat{\Omega}$, а s – некоторая константа. Для $i \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h$ определим непрерывные в Ω функции $\omega_i(x, y)$ линейные на каждом треугольнике $T_k^e \subset \hat{\Omega}$, такие, что

$$\omega_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h. \quad (80)$$

Введем также функции

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x, y, t) &= \sum_{i \in \tilde{R}^h} \phi_i(t) \omega_i(x, y), \\ \hat{\phi}(x, y, t) &= \sum_{i \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h} \phi_i(t) \omega_i(x, y),\end{aligned}\tag{81}$$

которые будем называть приближенными решениями задач (78), (79) соответственно, если для них выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}, \omega_i\right) + I_1(\tilde{\phi}, \omega_i) &= (F, \omega_i), \quad i \in \tilde{R}^h, \\ (\tilde{\phi}(x, y, 0), \omega_i) &= 0,\end{aligned}\tag{82}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t}, \omega_i\right) + I_1(\hat{\phi}, \omega_i) &= (F, \omega_i), \quad i \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h, \\ (\hat{\phi}(x, y, 0), \omega_i) &= 0.\end{aligned}\tag{83}$$

Оценки для разностей решений $\tilde{\zeta} = \tilde{u} - \tilde{v}$, $\hat{\zeta} = \hat{u} - \hat{v}$ получаются такие же, как и в случае равномерных сеток на основе теорем аппроксимации для неравномерных сеток, доказанных в [8], и имеют вид

$$\|\tilde{\zeta}\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))} + \|\tilde{\zeta}\|_{L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega))} \leq c_1 h_0,\tag{84}$$

$$\|\hat{\zeta}\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))} + \|\hat{\zeta}\|_{L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega))} \leq c_2 h_0.\tag{85}$$

Улучшение оценок (84) по порядку h_0 по сравнению с аналогичными оценками для равномерных сеток связано с использованием нерегулярной сетки, позволяющие аппроксимировать граничные условия (76) со степенью точности $O(h_0)$ [8].

Перейдем к рассмотрению свойств разностных операторов, определяемых соотношениями (82), (83). Проведение этого анализа в координатах (x, y) затруднительно. Для упрощения рассуждений воспользуемся идеей изопараметрических преобразований [9].

Введем кусочно-линейное преобразование $L : (x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$, удовлетворяющее условиям:

а) для каждого треугольника T_k^e преобразование L линейно;

б) L преобразует каждый четырехугольник Π_k в единичный квадрат P_k ;

с) L преобразует область Ω в область Δ , область $\tilde{\Omega}$ – в $\tilde{\Delta}$ и область $\hat{\Omega}$ – в $\hat{\Delta}$ таким образом, что топология областей $\tilde{\Omega}$ и $\hat{\Omega}$ сохраняется, то есть сохраняется упорядоченность квадратов P_k , а общие стороны и вершины Π_k остаются общими сторонами и вершинами P_k .

Если в каждом четырехугольнике Π_k упорядочить вершины против часовой стрелки так, чтобы индексом (1) обозначалась вершина, ближайшая к началу координат в плоскости (ξ, η) , то легко видеть, что вид преобразования L зависит от вида разбиения четырехугольника Π_k диагональю на треугольники. Рассмотрим последовательно оба случая разбиения:

(i) Диагональ соединяет точки (x_1, y_1) и (x_3, y_3) , как показано на рис. 2.

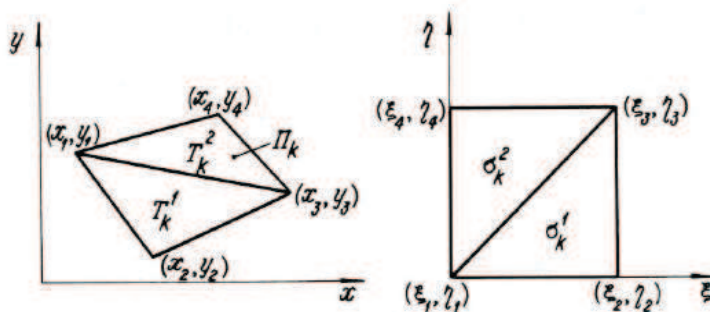


Рис. 2.

С учетом того, что $\xi_3 = \xi_2 = \xi_1 + 1 = \xi_4 + 1$, $\eta_3 = \eta_4 = \eta_1 + 1 = \eta_2 + 1$, преобразование имеет вид

$$T_k^1 : \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)(\xi - \xi_1) + (x_3 - x_2)(\eta - \eta_1), \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)(\xi - \xi_1) + (y_3 - y_2)(\eta - \eta_1), \end{cases} \quad (86)$$

$$T_k^2 : \begin{cases} x = x_1 + (x_3 - x_4)(\xi - \xi_1) + (x_4 - x_1)(\eta - \eta_1), \\ y = y_1 + (y_3 - y_4)(\xi - \xi_1) + (y_4 - y_1)(\eta - \eta_1). \end{cases} \quad (87)$$

(ii) В случае, когда четырехугольник триангулируется диагональю, соединяющей точки (x_2, y_2) и (x_4, y_4) на рис. 3, преобразование имеет вид

$$T_k^1 : \begin{cases} x = x_1 - (x_1 - x_2)(\xi - \xi_1) + (x_4 - x_1)(\eta - \eta_1), \\ y = y_1 - (y_1 - y_2)(\xi - \xi_1) + (y_4 - y_1)(\eta - \eta_1), \end{cases} \quad (88)$$

$$T_k^2 : \begin{cases} x = x_2 - (x_4 - x_3)(\xi - (\xi_1 + 1)) + (x_3 - x_2)(\eta - \eta_1), \\ y = y_2 - (y_4 - y_3)(\xi - (\xi_1 + 1)) + (y_3 - y_2)(\eta - \eta_1). \end{cases} \quad (89)$$

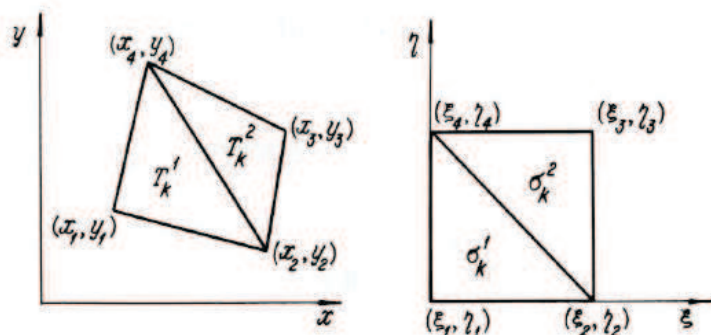


Рис. 3.

Уравнения Галеркина (82), (83) в координатах (ξ, η) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t}, w_i \right)_1 + I(\tilde{\psi}, w_i) &= (f, w_i)_1, \quad i \in \tilde{R}^h, \\ (\tilde{\psi}(\xi, \eta, 0), w_i)_1 &= 0, \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}, w_i \right)_1 + I(\hat{\psi}, w_i) &= (f, w_i)_1, \quad i \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h, \\ (\hat{\psi}(\xi, \eta, 0), w_i)_1 &= 0. \end{aligned} \quad (91)$$

В соотношениях (90), (91) использованы обозначения

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \int_{\Delta} \left(\tilde{A} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \tilde{B} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \tilde{D} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \tilde{D} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{C} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \tilde{C} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta, \\ (u, v)_1 &= \int_{\Delta} uv |J| d\xi d\eta, \\ w_i(\xi, \eta) &= \omega_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(\xi, \eta, t) &= \tilde{\phi}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t) = \sum_{i \in \hat{R}^h} \phi_i(t) w_i(\xi, \eta), \\
\hat{\psi}(\xi, \eta, t) &= \hat{\phi}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t) = \sum_{i \in \hat{R}^h \cup \hat{\Gamma}^h} \phi_i(t) w_i(\xi, \eta), \\
f(\xi, \eta, t) &= F(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t),
\end{aligned} \tag{92}$$

причем формулы преобразования $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ задаются на каждом треугольнике T_k^e одним из соотношений (86)–(89) в зависимости от способа триангуляции четырехугольника Π_k , которому принадлежит T_k^e . В зависимости от вида преобразования якобиан преобразования и коэффициенты имеют вид:

а) в случае триангуляции типа (i)

для T_k^1

$$\begin{aligned}
|J| &= |(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)|, \\
\tilde{A} &= A_1 = \frac{1}{|J|} [a(y_3 - y_2)^2 + b(x_3 - x_2)^2], \\
\tilde{B} &= B_1 = \frac{1}{|J|} [a(y_2 - y_1)^2 + b(x_2 - x_1)^2], \\
\tilde{D} &= D_1 = \frac{1}{|J|} [a(y_3 - y_2)(y_2 - y_1) + b(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)], \\
\tilde{C} &= C_1 = c,
\end{aligned} \tag{93}$$

для T_k^2

$$\begin{aligned}
|J| &= |(x_3 - x_4)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_3 - y_4)|, \\
\tilde{A} &= A_2 = \frac{1}{|J|} [a(y_4 - y_1)^2 + b(x_4 - x_1)^2], \\
\tilde{B} &= B_2 = \frac{1}{|J|} [a(y_3 - y_4)^2 + b(x_3 - x_4)^2], \\
\tilde{D} &= D_2 = \frac{1}{|J|} [a(y_3 - y_4)(y_4 - y_1) + b(x_3 - x_4)(x_4 - x_1)], \\
\tilde{C} &= C_2 = c;
\end{aligned} \tag{94}$$

б) в случае триангуляции типа (ii)

для T_k^1

$$\begin{aligned}
|J| &= |(x_4 - x_1)(y_1 - y_2) - (y_4 - y_1)(x_1 - x_2)|, \\
\tilde{A} &= A_1 = \frac{1}{|J|} [a(y_4 - y_1)^2 + b(x_4 - x_1)^2],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B} &= B_1 = \frac{1}{|J|} [a(y_1 - y_2)^2 + b(x_1 - x_2)^2], \\
\tilde{D} &= D_1 = \frac{1}{|J|} [a(y_4 - y_1)(y_1 - y_2) + b(x_4 - x_1)(x_1 - x_2)], \\
\tilde{C} &= C_1 = c,
\end{aligned} \tag{95}$$

для T_k^2

$$\begin{aligned}
|J| &= |(x_3 - x_2)(y_4 - y_3) - (y_3 - y_2)(x_4 - x_3)|, \\
\tilde{A} &= A_2 = \frac{1}{|J|} [a(y_3 - y_2)^2 + b(x_3 - x_2)^2], \\
\tilde{B} &= B_2 = \frac{1}{|J|} [a(y_4 - y_3)^2 + b(x_4 - x_3)^2], \\
\tilde{D} &= D_2 = \frac{1}{|J|} [a(y_3 - y_2)(y_4 - y_3) + b(x_3 - x_2)(x_4 - x_3)], \\
\tilde{C} &= C_2 = c.
\end{aligned} \tag{96}$$

В соотношениях (93)–(96) использовались обозначения

$$a = A(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad b = B(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad c = C(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)).$$

Следует отметить, что так как рассматриваемые четырехугольники Π_k выпуклы, то значения их углов ограничены в пределах $0 < \delta_0 \leq \alpha \leq \delta_1 < \pi$, где $\delta_0, \delta_1 > 0$ – некоторые константы, и, следовательно, якобиан $|J|$ преобразования (86)–(88) не обращается в нуль нигде в Ω [9]. В этом случае, если коэффициенты $A, B, C \in L_2(\Omega)$, то $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{D}, \tilde{C} \in L_2(\Delta)$. В частности, если коэффициенты A, B, C были аппроксимированы кусочно-линейными функциями на триангуляции области Ω , то коэффициенты $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ остаются линейными на каждом треугольнике $\sigma_k^e \subset \tilde{\Delta}$ и могут иметь только конечные разрывы в вершинах треугольников и вдоль сторон.

Кроме того, заметим, что из определения преобразования L следует, что в $\tilde{\Delta} = \bigcup_k P_k$ узлы сетки образуются пересечением линий, параллельных координатным осям $0\xi, 0\eta$ и отстоящих друг от друга на расстоянии, равном единице: $\xi_m = \xi_0 + m$, $\eta_n = \eta_0 + n$. Здесь m и n – номера линий по ξ и по η соответственно. Если начало координат выбрать так, чтобы $\xi_0 = \eta_0 = 0$, то m и n будут координатами узлов по ξ и η соответственно.

В области $\hat{\Omega}$ узлы были упорядочены по индексу i . В преобразованной области $\hat{\Delta}$ удобно изменить обозначения узловых точек, используя индексы-координаты узлов (m, n) , $(m = \xi_i, n = \eta_i)$. Тогда соотношение (92) примет вид

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(\xi, \eta, t) &= \sum_{(m,n) \in \tilde{\Delta}} \psi_{m,n}(t) w_{m,n}(\xi, \eta), \\ \hat{\psi}(\xi, \eta, t) &= \sum_{(m,n) \in \hat{\Delta} \cup \hat{S}} \psi_{m,n}(t) w_{m,n}(\xi, \eta), \\ \psi_{m,n}(t) &= \phi_i(t), \quad w_{m,n}(\xi, \eta) = w_i(\xi, \eta), \quad (\xi_i, \eta_i) = (m, n).\end{aligned}\quad (97)$$

где $w_{m,n}$ — это непрерывные в Δ функции, линейные на каждом треугольнике, такие, что

$$w_{m,n}(k, e) = \begin{cases} 1, & (m, n) = (k, e), \\ 0, & (m, n) \neq (k, e). \end{cases} \quad (98)$$

Тогда соотношения (90), (91) после использования “lumping” метода для вычисления матрицы масс запишутся

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_{m,n}}{\partial t} \int_{\Delta} w_{m,n} |J| d\xi d\eta + I(\tilde{\psi}, w_{m,n}) &= (f, w_{m,n}), \\ (m, n) &\in \tilde{\Delta}, \quad \psi_{m,n}(0) = 0,\end{aligned}\quad (99)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_{m,n}}{\partial t} \int_{\Delta} w_{m,n} |J| d\xi d\eta + I(\hat{\psi}, w_{m,n}) &= (f, w_{m,n}), \\ (m, n) &\in \hat{\Delta} \cup \hat{S}, \quad \psi_{m,n}(0) = 0.\end{aligned}\quad (100)$$

Заметим теперь, что задачи (99), (100) с точностью до обозначений совпадают с задачами (33), (34). То есть задачи (99), (100) приводятся к уравнениям вида (35) с коэффициентами оператора Λ определяемыми соотношениями (37) с точностью до обозначения и того факта, что в этом случае $\partial w_{m,n}/\partial \xi$, $\partial w_{m,n}/\partial \eta$ равны 1, 0 или -1 и $h = k = 1$. Тогда сеточный оператор Λ , аппроксимирующий дифференциальный пространственный оператор, может быть представлен в виде суммы четырех одномерных операторов:

$$\Lambda = \Lambda_{\xi\xi} + \Lambda_{\eta\eta} + \Lambda_{\xi\eta} + \Lambda_{\eta\xi}, \quad (101)$$

Для того чтобы в этом случае схема (63) была устойчива, необходимо, чтобы операторы $\Lambda_{\xi\xi}$, $\Lambda_{\eta\eta}$, $\Lambda_{\xi\eta}$, $\Lambda_{\eta\xi}$ были положительно полуопределены. Положительная определенность оператора, стоящего при производной по времени, очевидна. Условия положительной полуопределенности операторов $\Lambda_{\xi\xi}$, $\Lambda_{\eta\eta}$, $\Lambda_{\xi\eta}$, $\Lambda_{\eta\xi}$ получаются аналогично соотношениям (47), (49), (52), (55) соответственно. В случае триангуляции четырехугольников типа (i) эти условия могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_k^1 \cap \Delta} A_1 d\xi d\eta &\geq \int_{\sigma_k^1 \cap \Delta} D_1 d\xi d\eta, & \int_{\sigma_k^1 \cap \Delta} B_1 d\xi d\eta &\geq \int_{\sigma_k^1 \cap \Delta} D_1 d\xi d\eta, \\ \int_{\sigma_k^2 \cap \Delta} A_2 d\xi d\eta &\geq \int_{\sigma_k^2 \cap \Delta} D_2 d\xi d\eta, & \int_{\sigma_k^2 \cap \Delta} B_2 d\xi d\eta &\geq \int_{\sigma_k^2 \cap \Delta} D_2 d\xi d\eta, \\ \int_{\sigma_k^1 \cap \Delta} D_1 d\xi d\eta + \int_{\sigma_k^2 \cap \Delta} D_2 d\xi d\eta &\geq 0. \end{aligned} \quad (102)$$

В случае триангуляции типа (ii) для преобразований (88), (89) условия могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_k^1 \cap \Delta} A_1 d\xi d\eta &\geq - \int_{\sigma_k^1 \cap \Delta} D_1 d\xi d\eta, & \int_{\sigma_k^1 \cap \Delta} B_1 d\xi d\eta &\geq - \int_{\sigma_k^1 \cap \Delta} D_1 d\xi d\eta, \\ \int_{\sigma_k^2 \cap \Delta} A_2 d\xi d\eta &\geq - \int_{\sigma_k^2 \cap \Delta} D_2 d\xi d\eta, & \int_{\sigma_k^2 \cap \Delta} B_2 d\xi d\eta &\geq - \int_{\sigma_k^2 \cap \Delta} D_2 d\xi d\eta, \\ \int_{\sigma_k^1 \cap \Delta} D_1 d\xi d\eta + \int_{\sigma_k^2 \cap \Delta} D_2 d\xi d\eta &\leq 0. \end{aligned} \quad (103)$$

Подставляя в (102) выражения для коэффициентов A_1 , B_1 , D_1 , A_2 , B_2 , D_2 после алгебраических преобразований и перехода в систему координат (x, y) получаем

$$\begin{aligned} &\bar{A}_1[(y_3 - y_2)^2 + (y_3 - y_1)^2 - (y_2 - y_1)^2] + \\ &+ \bar{B}_1[(x_3 - x_2)^2 + (x_3 - x_1)^2 - (x_2 - x_1)^2] \geq 0, \\ &\bar{A}_1[(y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - (y_3 - y_2)^2] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{B}_1[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_1)^2 - (x_3 - x_2)^2] \geq 0, \\
& \quad \bar{A}_2[(y_4 - y_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - (y_4 - y_3)^2] + \\
& + \bar{B}_2[(x_4 - x_1)^2 + (x_3 - x_1)^2 - (x_4 - x_3)^2] \geq 0, \\
& \quad \bar{A}_2[(y_4 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2 - (y_4 - y_1)^2] + \\
& + \bar{B}_2[(x_4 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 - (x_4 - x_1)^2] \geq 0, \\
& \quad \bar{A}_2[(y_4 - y_3)^2 + (y_4 - y_1)^2 - (y_3 - y_1)^2] + \\
& + \bar{B}_2[(x_4 - x_3)^2 + (x_4 - x_1)^2 - (x_3 - x_1)^2] + \\
& + \bar{A}_1[(y_3 - y_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (y_3 - y_1)^2] + \\
& + \bar{B}_1[(x_3 - x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 - (x_3 - x_1)^2] \geq 0. \tag{104}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= \int_{T_k^1 \cap \Omega} A \, dx \, dy, & \bar{B}_1 &= \int_{T_k^1 \cap \Omega} B \, dx \, dy, \\
\bar{A}_2 &= \int_{T_k^2 \cap \Omega} A \, dx \, dy, & \bar{B}_2 &= \int_{T_k^2 \cap \Omega} B \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

Соотношения (104), как уже было указано, должны выполняться для всех $T_k^e \subset \Omega_1$.

Вычисляя конкретный вид условий (103), подставляем значения A_1 , B_1 , D_1 , A_2 , B_2 , D_2 , используя соотношения (95), (96). В результате приходим к неравенствам

$$\begin{aligned}
& \bar{A}_1 [(y_4 - y_1)^2 + (y_4 - y_2)^2 - (y_2 - y_1)^2] + \\
& + \bar{B}_1 [(x_4 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 - (x_2 - x_1)^2] \geq 0, \\
& \bar{A}_1 [(y_2 - y_1)^2 + (y_4 - y_2)^2 - (y_4 - y_1)^2] + \\
& + \bar{B}_1 [(x_2 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 - (x_4 - x_1)^2] \geq 0, \\
& \bar{A}_2 [(y_3 - y_2)^2 + (y_4 - y_2)^2 - (y_4 - y_3)^2] + \\
& + \bar{B}_2 [(x_3 - x_2)^2 + (x_4 - x_2)^2 - (x_4 - x_3)^2] \geq 0, \\
& \bar{A}_2 [(y_4 - y_3)^2 + (y_4 - y_2)^2 - (y_3 - y_2)^2] + \\
& + \bar{B}_2 [(x_4 - x_3)^2 + (x_4 - x_2)^2 - (x_3 - x_2)^2] \geq 0, \\
& \bar{A}_1 [(y_4 - y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (y_4 - y_2)^2] + \\
& + \bar{B}_1 [(x_4 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 - (x_4 - x_2)^2] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{A}_2 [(y_3 - y_2)^2 + (y_4 - y_3)^2 - (y_4 - y_2)^2] + \\
& + \bar{B}_2 [(x_3 - x_2)^2 + (x_4 - x_3)^2 - (x_4 - x_2)^2] \geq 0.
\end{aligned} \quad (105)$$

Условия (104), (105) имеют ясный геометрический смысл. Рассмотрим, например, соотношение (104). Если треугольники T_k^1 деформировать по оси x пропорционально $\sqrt{\bar{B}_1}$ и по оси y пропорционально $\sqrt{\bar{A}_1}$, а треугольники T_k^2 деформировать по оси x пропорционально $\sqrt{\bar{B}_2}$ и по оси y пропорционально $\sqrt{\bar{A}_2}$ (рис. 4), затем обозначить длины сторон полученных треугольников d_1, d_2, d_3 и e_1, e_4, e_3 , а углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и $\beta_1, \beta_4, \beta_3$ соответственно, то условие (104) запишется в виде

$$\begin{aligned}
d_1^2 + d_2^2 - d_3^2 &\geq 0, & d_3^2 + d_2^2 - d_1^2 &\geq 0, \\
e_3^2 + e_4^2 - e_1^2 &\geq 0, & e_1^2 + e_4^2 - e_3^2 &\geq 0, \\
d_3^2 + d_1^2 - d_2^2 + e_1^2 + e_3^2 - e_4^2 &\geq 0.
\end{aligned} \quad (106)$$

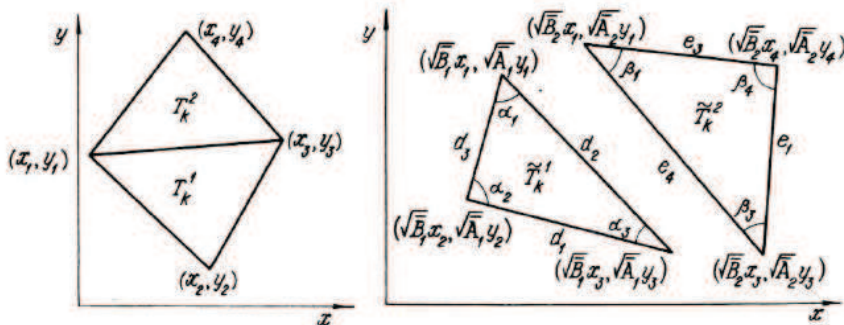


Рис. 4.

Вспоминая известные формулы

$$d_1^2 + d_2^2 - d_3^2 = 2d_2d_1 \cos \alpha_3, \dots, etc.,$$

перепишем (104) как условия для углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_4, \beta_3$,

$$\alpha_3 \leq \pi/2, \quad \alpha_1 \leq \pi/2, \quad \beta_1 \leq \pi/2, \quad \beta_3 \leq \pi/2,$$

$$d_1d_3 \cos \alpha_2 + e_1e_3 \cos \beta_4 \geq 0. \quad (107)$$

Таким образом, в треугольниках T_k^1, T_k^2 углы, прилежащие к общей стороне, должны быть не больше прямого, а один из противоположащих

к общей стороне углов может быть больше $\pi/2$, но при этом другой противолежащий угол должен быть настолько меньше $\pi/2$, чтобы выполнялось последнее из соотношений (76). Аналогичный смысл имеют условия (105), однако в этом случае противолежащими общей стороне углами являются углы при вершинах (x_2, y_2) и (x_4, y_4) .

Таким образом, необходимо триангулировать четырехугольники той диагональю, которая в деформированных треугольниках прилежит к острым углам. Противолежащие углы должны удовлетворять условиям, подобным последнему условию из (106). Если Π_k таков, что выполнение этих условий невозможно, то сетка должна быть перестроена.

6. Тестовые расчеты

Сходимость схемы расщепления (63) была доказана при условии, что $\tau \leq \tau_0$, где τ_0 определяется условиями (66) и имеет значения порядка $\tau \simeq O(\min(\Delta x_{\min}^2, \Delta y_{\min}^2))$. Это является сильным ограничением на шаг по времени, приближающим его значение к шагу для явной схемы. Возникает вопрос, какие практически удовлетворительные значения τ можно в предложенной схеме выбирать при заданных шагах по пространству. Попытаемся ответить на этот вопрос, проведя численные расчеты для конкретного уравнения, обладающего достаточно «плохими» свойствами: разрывными коэффициентами и решением с пограничным слоем. Рассмотрим уравнение

$$E \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} B \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} C \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} C \frac{\partial u}{\partial x} = f \quad (108)$$

в области Ω , ограниченной кривыми

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = H(x) \equiv 1 - (1/\pi) \sin \pi x \quad (109)$$

с граничными условиями

$$u|_S = 0. \quad (110)$$

Коэффициенты имеют вид

$$E = A = H^{-1}, \quad B = \gamma H - y^2 \cos^2 \pi x \cdot H^{-3}, \quad \gamma = 10, \quad C = -\beta y H^{-1},$$

$$\beta = \begin{cases} -50, & 0 \leq x < 1/2, \\ 0, & x = 1/2, \\ 50, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Правая часть f уравнения (108) выбирается в виде, соответствующему решению

$$u = \frac{\alpha}{\gamma\pi} e^{-\pi^2 t} \sin\left(\frac{\pi y}{1 - (1/\pi) \sin \pi x}\right) \phi(x),$$

$$\phi(x) = \begin{cases} pe^{a_1 x} + qe^{a_2 x} - 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ pe^{a_1(x-(1/2))} + qe^{a_2(x-(1/2))} - 1, & 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$q = \frac{e^{a_1/2} - 1}{e^{a_1/2} - e^{a_2/2}}, \quad p = 1 - q, \quad a_1 = -(\beta/2) + \sqrt{(\beta^2/4) + \pi^2 \gamma},$$

$$a_2 = -(\beta/2) - \sqrt{(\beta^2/4) + \pi^2 \gamma}, \quad \alpha = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ 0, & x = 1/2, \\ -1, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases} \quad (111)$$

Вид кусочно-линейного восполнения функции (111) в момент времени $t = 10^{-1}$ представлен на рис. 5. Функция обладает пограничным слоем в окрестности линии $x = 1/2$. Руководствуясь видом решения и геометрией области Ω , сетка выбирается нерегулярной. Она состоит из точек

$$x_i = x_{i+1} + \Delta x_i, \quad (\max \Delta x_i = 0,05, \quad \min \Delta x_i = 0,005),$$

$$y_{i,j} = z_j(1 - (1/\pi) \sin \pi x_i), \quad z_j = z_{j+1} + \Delta z, \quad \Delta z = 1/14.$$

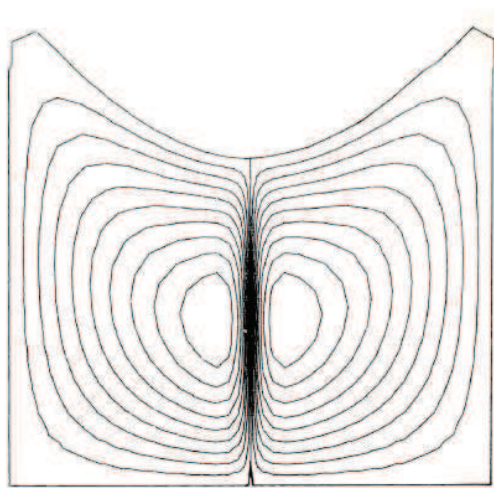


Рис. 5. Кусочно-линейное представление точного решения, $t = 0,1$

Ячейки сетки триангулированы, как показано на рис. 6. Расчеты проводились для значений $\tau = 2 \cdot 10^{-3}, 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-4}, 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-5}$. Во

всех вариантах расчетов максимум абсолютной ошибки концентрируется у линии разрыва коэффициентов $x = 1/2$.

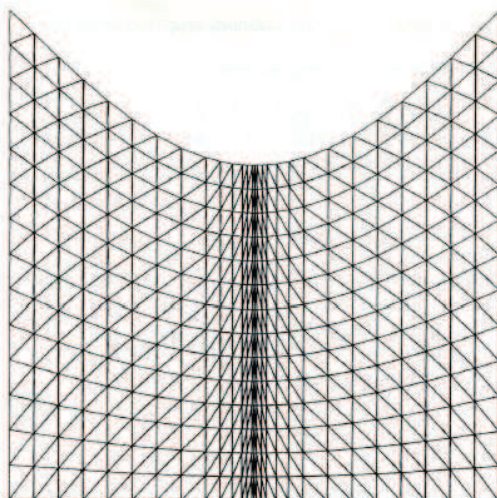


Рис. 6. Сеточная область

На рис. 7 представлено приближенное решение при $t = 0, 1$, $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$.

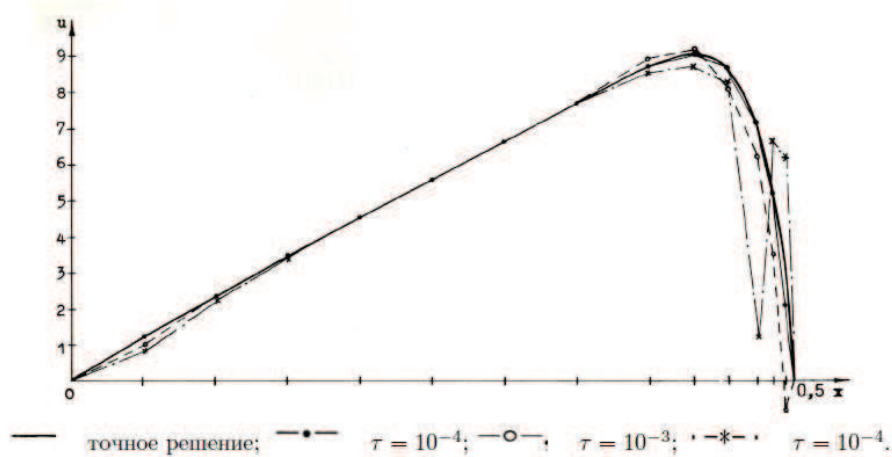


Рис. 7. Приближенное решение, $t = 0, 1$

При увеличении параметра τ ошибки в решении существенно увеличивают вблизи линии $x = 1/2$. На рис. 8 представлены графики приближенных решений при изменении τ на линии $y = 1/2(1 - (1/\pi) \sin \pi x)$. Так как картина антисимметрична относительно линии $x = 1/2$, на рисунке представлена только половина графика функции.

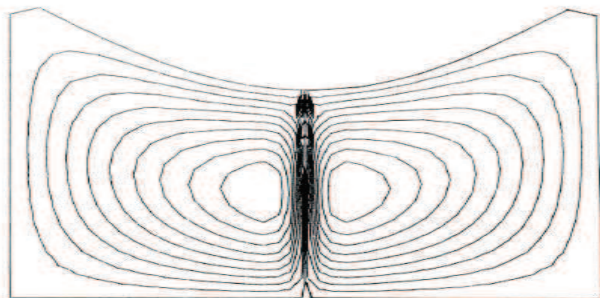


Рис. 8.

Из рис. 8 видно, что достаточно хорошо решение описывается при $\tau = 10^{-4}$.

Было рассчитано относительное отклонение σ приближенного решения от точного по формуле $\sigma = \|\bar{u} - u\|_h / \|u\|_h$. Расчеты показывают, что для $\tau = 2 \cdot 10^{-3}$, $\tau = 10^{-3}$, $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$, $\tau = 10^{-4}$ величина σ остается постоянной по времени. Для варианта $\tau = 10^{-5}$ значение σ на первых шагах возрастает со временем, затем ошибка выходит на асимптотическое значение, которое со временем не меняется. Этот факт связан с тем, что в этом случае на первых шагах по времени имеется влияние начальных условий, которые являются точными. При удалении от начальных условий их влияние затухает, и ошибка принимает значение, характеризующее точность схемы. Значения σ представлены в табл. 1.

Таблица 1.

τ	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$
σ	0,752	0,593	0,261	0,172	0,127

ЛИТЕРАТУРА

1. Douglas J., Rachford H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three variables // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1956. V. 82, No. 2.
2. Peasman D. W., Rachford H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // *SIAM J.* 1955. V. 3, No. 1.
3. Douglas J., Gann J. E. A general formulation of alternating direction methods. Part 1. Parabolic and hyperbolic problems // *Numer. Math.* 1964. V. 6, No. 5.
4. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов в решении многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967.
5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
7. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K. *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. N. Y.: McGraw-Hill, 1967.
8. Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А. Вариационно-разностные методы для решения эллиптических уравнений // *Тр. семинара Дифференц. уравнения и их прим.* 1978. Т. 5.
9. Strang G., Fix G. J. *An Analysis of Finite Element Method*. N. Y.: Prentice-Hall, 1973.
10. Douglas J., Dupont T. Alternating Direction Galerkin Methods on Rectangles. Numerical Solution of Partial Differential Eq. II. (B. Hubbard ed.). N. Y.: Acad. Press, 1971.
11. Dendy J. E., Fairweather G. Alternating-direction Galerkin methods for parabolic and hyperbolic problems on rectangular polygons // *SIAM J., Numer. Anal.* 1975. V. 12. Pp. 144–163.
12. Fairweather G. Finite element Galerkin methods for differential equations // *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. 1978. V. 34.
13. Marchuk G. I., Kuzin V. I., Obraztsov N. N. Numerical modelling of the distribution of pollution sources in a water basin // *Novosibirsk: Preprint*, 1979.
14. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. ЛГУ, 1950.
15. Слободетский Л. Н. Обобщенные решения параболических и эллиптических систем // *Изв. АН СССР*. 1957. Т. 21. С. 809–834.

16. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

17. Лионс Ж. Л., Маженес Э. Неоднородные граничные задачи. М.: Мир, 1971.

18. Douglas J., Dupont T. Galerkin methods for Parabolic Equation with Nonlinear Boundary Condition // Numer. Math. 1973. V. 3, No. B20. Pp. 213–238

19. Марчук Г. И., Кочергин В. П. и др. Математические модели циркуляции в океане. Новосибирск: Наука, 1980.

20. Акопян Ю. Р., Оганесян Л. А. Вариационно-разностный метод решения двумерных линейных параболических уравнений // ЖВМ и МФ. 1977. Т. 17, № 1. С. 109–119.

21. Софронов И. Д. Разностная схема с диагональными направлениями прогонок для решения уравнения теплопроводности // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 2.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОРСКИХ ТЕЧЕНИЙ, ПРИЛИВНЫХ ВОЛН И РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ¹⁷

1. Нестационарная модель динамики морских и океанических течений на основе полных уравнений

Рассмотрим нестационарную квазилинейную систему дифференциальных уравнений, которая описывает динамику течений и распределение температуры и солености морской воды в океаническом бассейне Ω цилиндрической формы глубиной H с боковой поверхностью σ и границей S [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - lv + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} &= \mu \Delta u + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + lu + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} &= \mu \Delta v + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial v}{\partial z}, \end{aligned}$$

¹⁷Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1983, с. 155–165. Совместно с М. А. Бубновым, В. Б. Залесным, А. А. Кордзадзе.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial z} &= g\rho, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T w &= \mu_T \Delta T + \frac{\partial}{\partial z} \nu_T \frac{\partial T}{\partial z}, \\
\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} + w\frac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S w &= \mu_S \Delta S + \frac{\partial}{\partial z} \nu_S \frac{\partial S}{\partial z}, \\
\rho &= \alpha_T T + \alpha_S S.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

В качестве граничных и начальных условий для системы (1.1) примем следующее:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\tau_x}{\nu\rho_0}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\tau_y}{\nu\rho_0}, \\
\frac{\partial T}{\partial z} &= f_1, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = f_2, \quad w = 0 \quad \text{при } z = 0, \\
\frac{\partial T}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } z = H, \\
u &= u_0, \quad v = v_0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \sigma, \\
u &= u^0, \quad v = v^0, \quad T = T^0, \quad S = S^0 \quad \text{при } t = t_j.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь f_1, f_2 – известные функции, непрерывные вместе со своими вторыми производными, а τ_x и τ_y – компоненты напряжения трения ветра на поверхности океана.

Для системы (1.1) с краевыми и начальными условиями (1.2)–(1.3) и при ряде других возможных постановок краевых условий имеет место единственность классического решения [2, 3].

Исключим из (1.1) функцию ρ и линеаризуем полученную систему уравнений на интервале времени $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$, тогда ее можно записать в операторном виде:

$$B \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = 0 \tag{1.4}$$

с начальными данными при $t = 0$

$$B\varphi = BF. \tag{1.5}$$

Здесь

$$A = \begin{vmatrix} R_1 l & -\rho_0 l & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \rho_0 l & R_2 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -g\alpha_T & -g\alpha_S \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\alpha_T & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & g\alpha_S & 0 & 0 & R_4 \end{vmatrix},$$

$$B = \text{diag}(\rho_0, \rho_0, 0, 0, g\alpha_T/\gamma_T, g\alpha_S/\gamma_S),$$

$$\varphi = (u, v, w, P, T, S), \quad F = (u^0, v^0, 0, 0, T^0, S^0),$$

$$R_i = D_0 + D_i; \quad D_0 = \text{div } \vec{w}^j,$$

$$D_1 = -\rho_0 \left(\mu \Delta + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad D_2 = D_1,$$

$$D_3 = -\frac{g\alpha_T}{\nu_T} \left(\mu_T \Delta + \frac{\partial}{\partial z} \nu_T \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$D_4 = -\frac{g\alpha_S}{\nu_S} \left(\mu_S \Delta + \frac{\partial}{\partial z} \nu_S \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Предполагается, что решение задачи (1.4)–(1.5) принадлежит гильбертову подпространству непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям (1.2). Скалярное произведение введем соотношением

$$(a, b) = \sum_{i=1}^6 \int_{\Omega} a_i b_i d\Omega,$$

где a_i и b_i – компоненты вектор-функций a и b . Можно убедиться, что на функциях из этого подпространства оператор A является неотрицательным. Заметим также, что исходная задача (1.1)–(1.3) может быть сведена к эволюционной [1].

Введем в рассмотрение матрицы

$$A_1 = \text{diag}(R_1, R_2, 0, 0, R_3, R_4),$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0 & -\rho_0 l & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \rho_0 l & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -g\alpha_T & -g\alpha_S \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\alpha_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\alpha_S & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

причем нетрудно убедиться, что

$$A = A_1 + A_2, \quad (A_1\varphi, \varphi) \geq 0, \quad (A_2\varphi, \varphi) = 0. \quad (1.6)$$

Рассмотрим теперь весь временный интервал $0 \leq t \leq T$, который разобьем на равные интервалы $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ шириной $t_j - t_{j-1} = \tau$, и на каждом расширенном интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$ для решения задачи (1.4)–(1.5) применим двухциклический метод расщепления. Тогда если предположить, что φ^{j-1} – решение задачи (1.1)–(1.3) в момент времени t_{j-1} , то на первом интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ имеем

$$B \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + A_1 \varphi_1 = 0, \quad B \varphi_1^{j-1} = B \varphi^{j-1}, \quad (1.7)$$

на втором интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$ имеем

$$B \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + A_2 \varphi_2 = 0, \quad B \varphi_2^{j-1} = B \varphi_1^j, \quad (1.8)$$

а на последнем интервале $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ решаем задачу

$$B \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + A_1 \varphi_3 = 0, \quad B \varphi_3^j = B \varphi_2^{j+1}. \quad (1.9)$$

Заметим, что в уравнениях (1.1) после линеаризации значения функций u^j , v^j и w^j берутся одними и теми же для всего рассматриваемого интервала $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$. Только в этом случае двухциклический метод приводит к решению второго порядка точности по τ [1].

В покомпонентной форме задача (1.7) примет следующий вид: на интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_j$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u}^j u_1 &= \mu \Delta u_1 + \frac{\partial}{\partial z} \nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u}^j v_1 &= \mu \Delta v_1 + \frac{\partial}{\partial z} \nu_1 \frac{\partial v_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u}^j T_1 &= \mu_T \Delta T_1 + \frac{\partial}{\partial z} \nu_T \frac{\partial T_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial S_1}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u}^j S_1 &= \mu_S \Delta S_1 + \frac{\partial}{\partial z} \nu_S \frac{\partial S_1}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.10)$$

при условии $\operatorname{div} \vec{u}^j = 0$, а также при краевых условиях (1.2) и начальных данных

$$u_1^{j-1} = u^{j-1}, \quad v_1^{j-1} = v^{j-1}, \quad T_1^{j-1} = T^{j-1}, \quad S_1^{j-1} = S^{j-1}; \quad (1.11)$$

на втором интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} - l v_2 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_2}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + l u_2 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_2}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial P_2}{\partial z} &= g(\alpha_T T_2 + \alpha_S S_2), \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} + \gamma_T w_2 &= 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial t} + \gamma_S w_2 = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

при условии

$$w_2|_{z=0} = 0, \quad w_2|_{z=H} = 0, \quad (u_2)_n = 0 \quad \text{на } \sigma \quad (1.13)$$

и начальных данных

$$u_2^{j-1} = u_1^j, \quad v_2^{j-1} = v_1^j, \quad T_2^{j-1} = T_1^j, \quad S_2^{j-1} = S_1^j. \quad (1.14)$$

На последнем шаге расщепления ($t_j \leq t \leq t_{j+1}$) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{w}^j u_3 &= \mu \Delta u_3 + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial u_3}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{w}^j v_3 &= \mu \Delta v_3 + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial v_3}{\partial z}, \\ \frac{\partial T_3}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{w}^j T_3 &= \mu_T \Delta T_3 + \frac{\partial}{\partial z} \nu_T \frac{\partial T_3}{\partial z}, \\ \frac{\partial S_3}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{w}^j S_3 &= \mu_S \Delta S_3 + \frac{\partial}{\partial z} \nu_S \frac{\partial S_3}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.15)$$

при условии

$$\operatorname{div} \vec{w}^j = 0,$$

а также при краевых условиях (1.2) и начальных данных

$$u_3^j = u_2^{j+1}, \quad v_3^j = v_2^{j+1}, \quad T_3^j = T_2^{j+1}, \quad S_3^j = S_2^{j+1}. \quad (1.16)$$

Решение задачи (1.10)–(1.11) с краевыми условиями (1.2) достаточно подробно изложено в ряде работ [1, 4–6].

Переходим теперь к решению задачи (1.12)–(1.14), или, что то же самое, (1.8). Для этой цели область Ω покрываем сеткой Ω_h , причем через k, l, m будем обозначать узловые точки по координатам x, y и z соответственно. Рассмотрим следующую аппроксимацию задачи (1.12)–(1.14) по геометрическим координатам (здесь и в дальнейшем

индекс 2 при компонентах решения будем опускать ради простоты записи):

$$\begin{aligned}
 \rho_0 \frac{du_{k+1/2,l,m}}{dt} - \rho_0 D_{k+1/2} v + \nabla_k^+ P &= 0, \\
 \rho_0 \frac{dv_{k,l+1/2,m}}{dt} - \rho_0 D_{l+1/2} u + \nabla_l^+ P &= 0, \\
 \nabla_m^+ P &= g \rho_{k,l,m+1/2}, \\
 \nabla_k^- u + \nabla_l^- v + \nabla_m^- w &= 0, \\
 \frac{g \alpha_T}{\nu_T} \frac{dT_{k,l,m+1/2}}{dt} + g \alpha_T w_{k,l,m+1/2} &= 0, \\
 \frac{g \alpha_S}{\nu_S} \frac{dS_{k,l,m+1/2}}{dt} + g \alpha_S w_{k,l,m+1/2} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Здесь воспользовались следующими обозначениями:

$$\nabla_P^+ \Phi = \frac{\Phi_{P+1} - \Phi_P}{\Delta x_{P+1/2}}, \quad \nabla_P^- \Phi = \frac{\Phi_{P+1/2} - \Phi_{P-1/2}}{\Delta x_P},$$

где x_P – любая из координат (x_k, y_l, z_m) ; $D_{k+1/2} v = \frac{l_l}{2} (v_{k+1,l+1/2,m} + v_{k,l-1/2,m})$; $D_{l+1/2} u = \frac{1}{2} (l_{l+1} u_{k+1/2,l+1,m} + l_l u_{k-1/2,l,m})$. Систему ОДУ (1.17) будем решать при начальных условиях (1.14).

Пусть теперь a и b – вектор-функции с компонентами a_i, b_i ($i = 1, \dots, 6$) соответственно в точках выбранной сеточной области. Введем в рассмотрение скалярное произведение

$$(a, b) = \sum_{i=1}^6 (a_i, b_i)_i, \tag{1.18}$$

где

$$(a_1, b_1)_1 = \sum_{k,l,m} a_1 b_i dD_{k+1/2},$$

$$(a_2, b_2)_2 = \sum_{k,l,m} a_2 b_2 dD_{l+1/2},$$

$$(a_3, b_3)_3 = \sum_{k,l,m} a_3 b_3 dD_{m+1/2},$$

$$(a_4, b_4)_4 = \sum_{k,l,m} a_4 b_4 dD,$$

$$(a_5, b_5)_5 = \sum_{k,l,m} a_5 b_5 dD_{m+1/2},$$

$$(a_6, b_6)_6 = \sum_{k,l,m} a_6 b_6 dD_{m+1/2},$$

$$\partial D_{k+1/2} = \Delta x_{k+1/2} \Delta y_l \Delta z_m,$$

$$\partial D_{l+1/2} = \Delta x_k \Delta y_{l+1/2} \Delta z_m,$$

$$\partial D_{m+1/2} = \Delta x_k \Delta y_l \Delta z_{m+1/2},$$

$$\partial D = \Delta x_k \Delta y_l \Delta z_m.$$

Тогда если умножим уравнения системы (1.17) соответственно на

$$u_{k+1/2,l,m} \partial D_{k+1/2}, \quad v_{k,l+1/2,m} \partial D_{l+1/2}, \quad w_{k,l,m+1/2} \partial D_{m+1/2},$$

$$P_{k,l,m} \partial D, \quad T_{k,l,m+1/2} \partial D_{m+1/2}, \quad S_{k,l,m+1/2} \partial D_{m+1/2},$$

результат сложим и проинтегрируем по всем индексам из выбранной сеточной области, то с учетом (1.13) будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (D\varphi, \varphi) = 0,$$

где вектор-функция φ – решение задачи (1.17) с компонентами $\{u, v, w, P, T, S\}$ в точках сеточной области, а B – матрица, определенная, как и в (1.5). Здесь предполагается, что

$$\partial D_{k+1/2} = \partial D_{l+1/2}.$$

Далее, прежде чем применить метод расщепления к системе (1.17), выделим баротропную $\bar{\varphi}$ и бароклинную φ' части решения задачи φ :

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi', \tag{1.19}$$

где

$$\bar{\varphi} = (\bar{u}, \bar{v}, 0, \bar{P}, 0, 0)^T, \quad \varphi' = (u', v', w', P', T', S')^T,$$

и операция осреднения определяются следующим образом:

$$(\bar{\cdot}) = \frac{1}{H} \int_0^H (\cdot) dz.$$

Подставляя (1.19) в (1.18), приходим к двум задачам на полном интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$ [1]:

а) для баротропной составляющей решения $\bar{\varphi}$

$$B \frac{d\bar{\varphi}}{dt} + \Lambda \bar{\varphi} = 0, \quad B \bar{\varphi}^{j-1} = B \bar{\varphi}_1^j, \quad (1.20)$$

где $\bar{\varphi}_1^j = (u_1^j, v_1^j, 0, 0, 0, 0)$;

б) для бароклининой составляющей решения φ'

$$B \frac{d\varphi'}{dt} + \Lambda \varphi' = 0, \quad B \varphi'^{j-1} = B (\varphi_1^j - \bar{\varphi}_1^j). \quad (1.21)$$

Разностный оператор Λ аппроксимирует A_2 и имеет следующий вид:

$$\Lambda = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & -\rho_0 D_{k+1/2} & 0 & \nabla_k^+ & 0 & 0 \\ \rho_0 D_{l+1/2} & 0 & 0 & \nabla_l^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_m^+ & -g\alpha_T & -g\alpha_S \\ \nabla_k^- & \nabla_l^- & \nabla_m^- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\alpha_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\alpha_S & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

где элементы Λ есть квадратные матрицы размерности вектора $\varphi = \{\varphi_{k,l,m}\}$, а E – единичная матрица.

Применим схему Кранка – Николсон к задаче (1.20) и рассмотрим разностную функцию тока в виде

$$\frac{\bar{u}^{j+1} + \bar{u}^{j-1}}{2} = -\nabla_l^- \psi^j,$$

$$\frac{\bar{v}^{j+1} + \bar{v}^{j-1}}{2} = \nabla_k^- \psi^j.$$

Предположим теперь, что шаг по координатам x и y является постоянным. После соответствующих преобразований приходим к разностному уравнению для функций тока ψ^j :

$$\begin{aligned} & \nabla_l^+ (\nabla_l^- \psi^j) + \nabla_k^+ (\nabla_k^- \psi^j) + \\ & + \tau [D_{k+1/2} (\nabla_l^+ (\nabla_k^- \psi^j)) - D_{l+1/2} (\nabla_k^+ (\nabla_l^- \psi^j))] = \\ & = \nabla_k^+ \bar{v}^{j-1} - \nabla_l^+ \bar{u}^{j-1} \end{aligned} \quad (1.22)$$

с условием $\psi^j|_{\sigma_0} = 0$, где σ_0 – контур, полученный в пересечении поверхности o с плоскостью $z = 0$. Данное уравнение можно решить итерационным методом верхней релаксации.

Рассмотрим далее задачу (1.21). Представим оператор Λ в виде суммы трех операторов:

$$\Lambda = \sum_{n=1}^3 \Lambda_n,$$

$$\Lambda_1 = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & -\rho_0 D_{k+1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_0 D_{l+1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$\Lambda_2 = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \nabla_k^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \nabla_m^+ & \frac{-g\alpha_T}{2} & \frac{-g\alpha_S}{2} \\ \nabla_k^- & 0 & \frac{1}{2} \nabla_m^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g\alpha_T}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g\alpha_S}{2} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$\Lambda_3 = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_l^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \nabla_m^+ & \frac{-g\alpha_T}{2} & \frac{-g\alpha_S}{2} \\ 0 & \nabla_l^- & \frac{1}{2} \nabla_m^- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g\alpha_T}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g\alpha_S}{2} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Операторы Λ_n ($n = 1, 2, 3$) кососимметрические, т. е. $(\Lambda_n, \varphi, \varphi) = 0$, $n = 1, 2, 3$. Нетрудно убедиться, что эти операторы не являются коммутативными, поэтому и здесь применим двуциклический метод покомпонентного расщепления. В результате будем иметь (штрихи у вектор-функции φ опускаем):

а) на интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_j$

$$B \frac{d\varphi_\alpha}{dt} + \Lambda_\alpha \varphi_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned}
B\varphi_1^{j-1} &= B(\varphi_1^j - \bar{\varphi}_1^{j-1}) \\
B\varphi_\alpha^{j-1} &= B\varphi_{\alpha-1}^j \quad (\alpha > 1), \quad \varphi^j = \varphi_3^j;
\end{aligned} \tag{1.23}$$

б) на интервале $t_j \leq t \leq t_{j+1}$

$$\begin{aligned}
B \frac{d\varphi_\alpha}{dt} + \Lambda_{4-\alpha} \varphi_\alpha &= 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\
B\varphi_1^j &= B\varphi^j, \\
B\varphi_\alpha &= B\varphi_{\alpha-1}^{j+1} \quad (\alpha > 1), \quad \varphi^{j+1} = \varphi_3^{j+1}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Для решения задачи (1.23), (1.24) используем схему Кранка – Николсона. Решение первой из задач (1.23) и последней из (1.24) не представляет трудности.

Переходя к численному решению второй задачи в (1.23), введем в рассмотрение разностную функцию тока:

$$u^{j-1/2} = -\frac{1}{2} \nabla_m^- \psi^{j-1/2}, \quad w_2^{j-1/2} = \nabla_k^- \psi^{j-1/2},$$

где $\varphi^{j-1/2} = \frac{1}{2}(\varphi^j + \varphi^{j-1})$. В результате приходим к уравнению для $\psi^{j-1/2}$ [1]:

$$\begin{aligned}
\nabla_m^+ \nabla_m^- \psi^{j-1/2} + \frac{\tau^2 \gamma}{4\rho_0} \nabla_k^+ \nabla_k^- \psi^{j-1/2} &= -2f^{j-1/2}, \\
\psi^{j-1/2} \Big|_{\sigma_l} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.25}$$

где σ_l – контур, полученный в пересечении границы области Ω_k , с плоскостью $y = y_l$. После того как решение уравнения (1.25) найдено, искомые компоненты получим с помощью соотношений:

$$\begin{aligned}
u_2^j &= -\nabla_m^- \psi^{j-1/2} - u_2^{j-1}, \quad v_2^j = v_2^{j-1}, \\
T_2^j &= T_2^{j-1} - \frac{\tau \gamma T}{2} \nabla_k^- \psi^{j-1/2}, \\
S_2^j &= S_2^{j-1} - \frac{\tau \gamma S}{2} \nabla_k^- \psi^{j-1/2}.
\end{aligned}$$

Остальные задачи в (1.23), (1.24) решаются аналогично.

Заметим, что при построении вычислительного алгоритма мы воспользовались тем фактом, что коэффициенты u^j , v^j и w^j на каждом

временном интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$ расщепления должны удовлетворять уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial u^j}{\partial x} + \frac{\partial v^j}{\partial y} + \frac{\partial w^j}{\partial z} = 0,$$

а также разностному аналогу уравнения неразрывности в виде (1.17).

Нетрудно убедиться в справедливости выполнения этих требований, если предположить, что

$$\begin{aligned} u^j &= \frac{\bar{u}^{j+1} + \bar{u}^{j-1}}{2} + u_2^{j-1/2} + u_3^{j+1/2}, \\ v^j &= \frac{\bar{v}^{j+1} + \bar{v}^{j-1}}{2} + v_3^{j-1/2} + v_4^{j+1/2}, \\ w^j &= \frac{1}{2} \left(w_2^{j-1/2} + w_3^{j-1/2} + w_4^{j+1/2} + w_5^{j+1/2} \right), \end{aligned}$$

которые считаются одними и теми же на всем интервале $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$ и определяются на предыдущем интервале $t_{j-3} \leq t \leq t_{j-1}$.

Здесь мы сосредоточили свое внимание на изучении одной квазилинейной задачи гидродинамики океана, не ставя своей целью достаточно полное изложение моделей и методов их анализа для проблем теории морских и океанических движений.

В заключение лишь отметим, что изложенный здесь метод может быть использован как для моделирования динамики океана, так и при построении совместных моделей взаимодействия атмосферы и океана [7, 8].

2. Модель приливов в бароклинном океане

Рассмотрим задачу о нахождении гармонических составляющих приливов в бароклинном океане.

Пусть D – плоское сечение океанического бассейна; u, v – горизонтальные составляющие вектора скорости; ξ и ρ – соответственно уровенная поверхность и отклонение плотности от некоторого стандартного значения $\bar{\rho}(z)$.

Для гармонических составляющих всех неизвестных величин получаем следующую задачу. В области

$$Q = \{(x, y, z), \quad (x, y) \in D, \quad 0 \leq z \leq H(x, y)\}$$

найти решение системы дифференциальных уравнений

$$i\sigma u - lv - (\nu u_z)_z = -g\xi_x - g \int_0^z \rho_x dz + f_1, \quad (2.1)$$

$$i\sigma v + lu - (\nu v_z)_z = -g\xi_y - g \int_0^z \rho_y dz + f_2, \quad (2.2)$$

$$i\sigma \rho + \Gamma \int_z^H (u_x + v_y) dz - \operatorname{div}(\mu \nabla \rho) - (\nu_1 \rho_z)_z = 0, \quad (2.3)$$

$$i\sigma \xi + \int_0^H (u_x + v_y) dz = 0, \quad (2.4)$$

где $\Gamma = \frac{d\rho}{dz} > 0$ – параметр стратификации; σ – приливная частота, с граничными условиями

$$\nu u_z = \nu v_z = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad \nu_1 \rho_z = 0 \quad \text{при } z = 0, H, \quad (2.5)$$

$$u = v = 0 \quad (\text{или } \nu u_z = \nu v_z = 0) \quad \text{при } z = H, \quad (2.6)$$

$$\Gamma \int_z^H (u_{n_1} + v_{n_2}) dz = \mu \frac{\partial \rho}{\partial n} \quad \text{на } S, \quad (2.7)$$

$$\int_0^H (u_{n_1} + v_{n_2}) dz = 0 \quad \text{на } \gamma. \quad (2.8)$$

Здесь $\gamma = \partial D$ – граница области D ; (n_1, n_2) – вектор нормали; S – боковая поверхность области Q ; f_1, f_2 – приливообразующие силы [12].

Прежде чем переходить к рассмотрению численного алгоритма решения поставленной задачи, отметим, что, используя метод выделения баротропной составляющей [1] и основываясь на априорных оценках решения и методах современной теории дифференциальных уравнений [13, 17], можно показать, что при выполнении условий

$$\frac{|\nabla H|}{H} + \frac{\nu_1}{\mu} < 1, \quad \frac{|\Gamma_z|}{\Gamma} < H_c, \quad (2.9)$$

где c – некоторая постоянная, определяемая геометрией области, существует единственное решение задачи (1)–(8), обладающее всеми обобщенными производными, входящими в систему дифференциальных уравнений.

При получении разностного аналога задачи (1)–(8) удобно прежде всего перейти от области Q с переменным дном к цилиндрической области $Q' = D \times [0, 1]$. Это достигается заменой независимых переменных:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z/H. \quad (2.10)$$

Совершая необходимые преобразования в уравнениях (2.1)–(2.4), получим задачу в цилиндрической области. Умножим теперь уравнение (3) на произвольную функцию $q(x, y, z)$, а уравнение (2.4) – на $\eta(x, y)$, сложим получившиеся соотношения и проинтегрируем по частям в области $D \times [0, 1]$. В результате получим билинейную форму:

$$i\sigma \int_{Q'} \left(\frac{H}{\Gamma} \rho q + \eta \xi \right) dQ' - \int_{Q'} U P(\eta, q) dQ' + K(\rho, q) = 0, \quad (2.11)$$

где $U = (u, v)$, $P(\eta, q) = \nabla \eta + \int_0^z (H \nabla q - z \nabla H q_z) dz$, а билинейная форма $K(q, \rho)$ порождается эллиптическим оператором второго порядка в уравнении (2.3).

Схему решения поставленной задачи будем строить в два этапа. Сначала будем искать решение по методу Галеркина в виде

$$U_N = \sum_{k=0}^N U^k(x, y) \psi_k(z),$$

$$\rho_N = \sum_{k=1}^N \rho^k(x, y) \pi_k(z), \quad \xi = \xi_N, \quad (2.12)$$

где $U^k = (u^k, v^k)$, $k = \overline{0, N}$; $\{\psi_k\}_{k=0}^N$ и $\{\pi_k\}_{k=1}^N$ – первые собственные функции «вертикальных» операторов

$$-(\nu \psi_{kz})_z = \lambda_k \psi_k, \quad -(\nu \pi_{kz})_z = \epsilon_k \pi_k$$

с соответствующими граничными условиями.

Нетрудно видеть, что из уравнений (2.1)–(2.2) после применения метода Галеркина получаем соотношения

$$U^k = -M^k(\psi_k, P(\xi_N, \rho_N) - f), \quad k = \overline{0, N}, \quad (2.13)$$

где M_k – матрица второго порядка:

$$M_k = \left[\left(\frac{i\sigma}{gH} + \lambda_k \right) E + L \right]^{-1}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & -l/gH \\ l/gH & 0 \end{bmatrix}.$$

Подставляя значения U^k , $k = \overline{0, N}$, в соотношение (2.11), записанное относительно функций (2.12), получаем тождество

$$G_N(\xi_N, \rho_N, \eta, q) = \sum_{k=0}^N \int_D M_k f P^k(\eta, q) dD, \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} G_N(\xi_N, \rho_N, \eta, q) &= i\sigma \int_{Q'} \left(\frac{H}{\Gamma} \rho_N q + \xi_N \eta \right) dQ' + \\ &+ \sum_{k=0}^N \int_D M_k P^k(\xi_N, \rho_N) P(\eta, q) + K(\rho_N, q), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$P^k(\eta, q) = \int_0^1 \psi_k P(\eta, q) dz, \quad k = \overline{0, N}.$$

Заметим, что тождество (2.14) представляет собой билинейную форму для некоторой несамосопряженной системы эллиптических уравнений второго порядка относительно функций ξ_N , ρ^k , $k = \overline{1, N}$, в области D с естественными граничными условиями. Воспользуемся этим обстоятельством и будем искать функции ξ_N , ρ^k , $k = \overline{1, N}$, по методу конечных элементов в виде

$$\begin{aligned} \rho^{k,h} &= \sum_{n,m} \tilde{\rho}^k(x_n, y_m) w_{n,m}(x_n, y_m), \quad k = \overline{1, N}, \\ \rho_N^h &= \sum_{k=1}^N \rho^{k,h} \pi_k, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $\{\tilde{\rho}^k(x_n, y_m)\}_{n,m}^{k=\overline{1, N}}$, $\{\tilde{\xi}(x_n, y_m)\}_{n,m}$ – сеточные функции, определенные в узлах триангуляции области D ; $\{w_{n,m}(x, y)\}_{n,m}$ – базисные функции кусочно-линейного восполнения на заданной триангуляции области D . Функции (2.16)–(2.17) должны удовлетворять тождеству (14) при произвольных q_N^h , η вида (2.16)–(2.17).

Рассматривая тождество (14) как билинейный функционал в пространстве сеточных функций, стандартным способом получаем разностные уравнения для функций

$$L_{0,0}^h \tilde{\xi} + \sum_{S=1}^N L_{0,S}^h \tilde{\rho}^S = F_0,$$

$$\sum_{S=1}^N L_{k,S} \tilde{\rho}^S + L_{k,0}^h \tilde{\xi} = F_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (2.18)$$

где $L_{k,S}$ – разностные аналоги некоторых дифференциальных операторов второго порядка. Таким образом, для каждого N и шага $h > 0$ разностной сетки, покрывающей область D , мы получили систему разностных уравнений относительно сеточных функций $\tilde{\xi}(x_n, y_m)$, $\tilde{\rho}^k(x_n, y_m)$, $k = \overline{1, N}$. Воспользовавшись результатами, полученными при исследовании корректности задачи (2.1)–(2.8), а также результатами по разрешимости и сходимости вариационно-разностных схем для несамосопряженных краевых задач [10], можно показать, что существует такое $h_0 > 0$, что при $h < h_0$ система разностных уравнений (2.18) однозначно разрешима, а для галеркинских приближений (2.16)–(2.17) имеет место следующая оценка для скорости сходимости:

$$\|\xi - \xi_N^h\|_{1,D}^2 + \|\rho - \rho_N^h\|_{1,Q'}^2 \leq c(h^2 + N^{-\alpha}) \|f\|_{1,Q'}^2,$$

где $\alpha = 4$ в случае граничного условия прилипания $U|_{z=H} = 0$ и $\alpha = 8$ в случае условия скольжения $U_z|_{z=H} = 0$.

Рассмотрим теперь итерационный метод решения системы разностных уравнений (2.18). Для этого введем сеточные функции, зависящие от дискретного временного аргумента $t_j = j\tau$, $\tau > 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$,

$$\tilde{\xi}^{(j)} = \tilde{\xi}(t_j), \quad \tilde{\rho}^{k,(j)} = \tilde{\rho}^k(t_j), \quad k = \overline{1, N},$$

а также обозначим

$$\tilde{\rho}_t^{k,(j)} = \frac{\tilde{\rho}^{k,(j)} - \tilde{\rho}^{k,(j-1)}}{\tau}.$$

Решение задачи (18) будем находить при помощи следующего итерационного процесса:

$$L_{0,0}^h \tilde{\xi}^{(j)} + \sum_{S=1}^N L_{0,S}^h \tilde{\rho}^{S,(j-1)} = F_0, \quad (2.20)$$

$$B\tilde{\rho}_t^{k,(j)} + \sum_{S=1}^N L_{k,S}^h \tilde{\rho}^{S,(j)} + L_{k,0}^h \tilde{\xi}^{(j)} = F_k, \quad (2.21)$$

$$\tilde{\rho}^{k,(0)} = \tilde{\rho}^{0,k}, \quad k = \overline{1, N}, \quad j \geq 1.$$

В (2.21) B – регуляризатор, имеющий, например, вид $B = E$ или $B = -\Delta^h + \bar{\lambda}E$, $\bar{\lambda} > 0$, где E – единичная матрица и Δ^h – разностный аналог оператора Лапласа. Будем считать, что α по является точкой спектра оператора баротропной составляющей задачи (2.1)–(2.8). В этом случае существует такое $h_0 > 0$, что при $h < h_0$ оператор $L_{0,0}^h$ имеет обратный. Исключая из (2.21) функцию $\tilde{\xi}^{(j)}$, получаем уравнение для определения функций $\tilde{\rho}^{k,(j)}$, $k = \overline{1, N}$. Рассматривая эти уравнения как двухслойную разностную схему методами, развитыми в работах Марчука [9] и Самарского [14], получаем достаточные условия сходимости итерационного процесса (2.20)–(2.21) в виде

$$\tau < \begin{cases} \frac{C}{R^2(h^{-2} + \bar{\lambda}_N)}, & \text{если } B = E, \\ \frac{C}{R}, & \text{если } B = -\Delta^h + \bar{\lambda}E, \end{cases}$$

где постоянные R и C не зависят от h и N .

При определении $\tilde{\rho}^{k,(j)}$, $k = \overline{1, N}$, на каждом шаге итерационного процесса необходимо использовать внутренние итерации. Для этого можно воспользоваться методом Гаусса – Зейделя, обобщенным на случай операторных уравнений [15]. Таким образом, для реализации указанного процесса надо уметь вычислять. Эту задачу можно эффективно решить на основе прямого модифицированного метода Хаусхолдера [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
2. Кордзадзе А. А. О единственности решения одной квазилинейной задачи динамики океана // ДАН СССР. 1974. Т. 219, № 4. С. 856–859.
3. Кордзадзе А. А. К единственности решения квазилинейных задач динамики океана // В кн.: Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1975. С. 77–89.
4. Марчук Г. И., Кордзадзе Л. А., Скиба Ю. Н. Расчет основных гидрологических полей Черного моря на основе метода расщепления // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1975. Т. 11, № 4.

5. Марчук Г. И., Кордзадзе А. А., Залесный В. Б. Проблемы математического моделирования морских и океанических течений // В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Краевые задачи. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1979. С. 195–228.

6. Марчук Г. И., Кочергин В. П., Саркисян А. С. и др. Математическая модель циркуляции в океане. Новосибирск: Наука, 1980.

7. Математическое моделирование динамики океана: сб. науч. трудов. Ч. 1. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1980.

8. Гидродинамическая модель общей циркуляции атмосферы и океана. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975.

9. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 454 с.

10. Оганесян Л. А., Руховец Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1979. 234 с.

11. Марчук Г. И., Бубнов М. А. Вариационно-разностный метод решения задачи динамики приливов в стратифицированном океане. Препринт № 37. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977. 18 с.

12. Марчук Г. И., Каган Б. А. Океанические приливы. Л.: Гидрометеиздат, 1977. 205 с.

13. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 107 с.

14. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука. 653 с.

15. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Паука, 1969. 455 с.

16. Протасов А. В. Приближенный метод решения задачи о свободных колебаниях Мирового океана в баротропном приближении // Метеорология и гидрология. 1979. № 6. С. 57–66.

17. Солонников В. А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса – Л. Ниренберга. I // Известия АН СССР. Серия: Математика. 1964. Т. 28, № 3. С. 665–706.

SPLITTING NUMERICAL TECHNIQUE WITH APPLICATION TO THE HIGH RESOLUTION SIMULATION OF THE INDIAN OCEAN CIRCULATION¹⁸

The aim of this paper is twofold : To present an efficient numerical technique for the simulation of the ocean general circulation (OGC) and to apply it to the simulation of the Indian Ocean dynamics with high spatial resolution. To solve model equations we use the splitting method by physical processes and space coordinates. We select the main parts of the model operator and then perform their numerical treatment independently of one another. We describe the general methodology and some special aspects of this approach. Numerical treatment of the monsoon circulation is performed on the basis of the sigma-coordinate primitive equation model, which was developed at the Institute of Numerical Mathematics (Moscow, Russia). We present and briefly analyze the results of the numerical experiment with high spatial resolution $1/8^\circ$ along latitude, $1/12^\circ$ along longitude, and with 21 vertical sigma levels.

1. Introduction

The monsoon atmosphere circulation is a key process of the natural environment in the Indo-Asian region (Singh et al, 1990; Shukla and Paolino, 1983). The peculiarities of the monsoon circulation affect all aspects of life in the countries situated on the coast of the Indian Ocean. The monsoon precipitation regime above India, the time at which the rainy season begins, rainfall intensity, and the duration of precipitation are the main indicators of the forecast which are necessary for agriculture and industry of India (Rajeevan, 2003).

A great amount of heat and moisture, which enters the atmosphere from the surface of the Indian Ocean, defines the peculiarities of the summer southwest monsoon (Singh et al., 1983). The circulation of the Indian Ocean redistributes heat in the upper ocean layer and consumes the wind energy of the atmosphere and therefore it is of vital importance in the formation and maintenance of the monsoon regime.

¹⁸*Pure and Applied Geophysics*, 2005, v. 162, pp. 1407–1429. Jointly with A. S. Rusakov, V. B. Zalesny, and N. A. Diansky.

To know the structure and the variability of such characteristics of the ocean as sea-surface temperature, heat storage in the upper mixed layer, and currents is necessary for predicting the monsoon circulation. The adequate simulation of the interaction of the atmosphere and the Indian Ocean calls for the development of the system of oceanic observational data assimilation (Barnier et al., 1994; Wenzel et al., 2001), in the on-line operation as well. When solving the above problem it is impossible to do without modern hydrodynamical models of the circulation of the Indian Ocean.

The aim of the present work is to develop efficient numerical methods of predicting the ocean dynamics. These methods are used for calculating the monsoon circulation in the Indian Ocean, which is characterized by the unique seasonable cycle and complex spatial and temporal variability (Shankar et al., 2002). A dramatic peculiarity of the north Indian Ocean is that its currents are radically changed under the action of variable winds of summer and winter monsoons. The observational data show that most currents in the north Indian Ocean reverse their direction from winter to summer (Shankar et al., 2002). For the adequate simulation of the complex dynamics of the Indian Ocean and the peculiarities of its eddy structure it is necessary to use models with high spatial resolution, which are physically complete and numerically efficient. We dwell on two aspects of numerical simulation of the ocean dynamics. These are the development of an efficient numerical technique and its application to the simulation of the complex dynamics of the Indian Ocean with high spatial resolution.

OGC models are extremely complex, developing systems. They are based on nonlinear differential equations describing the evolution of three-dimensional velocity, temperature, salinity fields as well as pressure and density. Two main parts can be singled out in the operator of the system of ocean dynamics equations. The first one is the classical established basis, viz. a subsystem describing the dynamics of rotating fluid in the framework of approximations traditional in oceanology (Bryan, 1969; Gill, 1982; Marchuk and Sarkisyan, 1988). The second one includes physical parameterizations of various kinds, which change as we gain a better understanding of natural phenomena (Griffies et al., 2000). On this basis we use the decomposition of the problem operator i.e., the splitting method by physical processes as a building block to construct the model and develop efficient numerical methods for solving it. On physical grounds we select the main parts of the operator and then

perform their numerical treatment independently of one another. Here we present this line of investigation. We give considerable attention to the description of general methodology of the model construction and the methods of solving the classical part of the OGC equations, we do not dwell on subgrid parameterization. The approach proposed is applied to the solution of the problem of the dynamics of the Indian Ocean. We present and briefly analyze the results of the numerical simulation of the seasonal cycle of the Indian Ocean circulation with high spatial resolution $1/8^\circ$ along latitude, $1/12^\circ$ along longitude, and with 21 vertical levels.

Numerical treatment of the monsoon circulation is performed on the basis of one version of the model of ocean dynamics, which was developed at the Institute of Numerical Mathematics (Zalesny, 1996; Diansky et al., 2002). The model is based on primitive equations in the Boussinesq, hydrostatics, and “rigid lid” approximations, which are written at the bottom following the σ -coordinate system. In the model the horizontal components of the velocity vector, potential temperature, and salinity are prognostic variables, while the vertical velocity and pressure are diagnostic ones.

The main peculiarity of the model, which distinguishes it from the other ocean models (see the review by Griffies et al., 2000), is that the numerical technique is based on the splitting method by physical processes and space coordinates (Marchuk, 1980, 1988). To this end, ocean model equations are written in special symmetrized form. The form of the equations is chosen so that it is convenient to represent the operator of the differential problem as a sum of simpler operators, each being nonnegative in the norm defined by the law of conservation of total energy. This enables one to split the operator of the complete problem into a set of simpler operators and construct spatial approximations of the corresponding groups of terms (in different equations) so that the “energy” relation (the conservation law) which holds for the original differential problem should hold for all the splitted discrete problems.

Splitting of model equations is performed at several levels. The macro-level of splitting is splitting of three-dimensional equations by physical processes. At higher levels the process of splitting selects the simplest locally one-dimensional (with respect to the space) equations. For example, the transport-diffusion equation for the tracer is solved along separate coordinates.

The outline of this paper is as follows. In Section 2 we discuss the key features of our approach to the construction and implementation of the OGC model, which is based on the splitting method. The essence of the method is illustrated by simple examples. In Section 3 we formulate the OGC equations, describe the architecture of the splitted model, transformations of the equations at separate splitting stages: their symmetrization and regularization. Particular emphasis is placed upon the choice of the special symmetrized form of ocean dynamics equations in the σ -coordinate system. We provide the form of equations, which allows one to diminish the error of approximation of horizontal pressure gradients on the given profile of vertical density stratification. In Section 4 we discuss the performance and results of the numerical experiment on simulation of the monsoon circulation in the north Indian Ocean with high spatial resolution $1/8^\circ \times 1/12^\circ \times 21$ (steps along latitude, longitude, and the number of σ -levels along the vertical, respectively). In Section 5 we formulate the main conclusions.

2. The Splitting Method as a Methodological Basis for the Construction of a Numerical Model of a Complicated Physical Process

The key points of the approach proposed are as follows.

- The methodological basis for the construction of numerical models of different complexity levels is the splitting method.
- The splitting method can be considered not only as a cost-effective method of integrating the complex OGC problem with respect to the time but as the basis for the construction of the hierarchical model system as well.
- In the framework of the unified approach there can be constructed a particular model of ocean dynamics of a different complexity: from the point of view of its physical completeness, dimension, and spatial resolution.
- The splitting method is defined for solving systems of equations with nonnegative operators. This property is established a priori for the differential problem considered. We find an integral invariant or a conservation law which holds in the model in the absence of external sources and internal energy sinks.

- When using the splitting method the form of a differential problem is of great importance. The most convenient form of equations is their symmetrized form. By the symmetrized form we mean the form of equations, which satisfies the conditions:
 - the symmetrized form gives the form of the adjoint operator, which is close to the original one;
 - this form leads to the finite difference approximation retaining the main properties typical of original differential operators (symmetry, skew-symmetry, nonnegativeness);
 - from the form naturally follows the splitting of the problem operator into the sum of simple nonnegative operators.
- The key point of the construction of a splitted hierarchical model system and the method of its solution is the decomposition of the original problem into the set of simple subproblems with nonnegative operators.

The choice of this splitting is frequently nontrivial and not unique (Marchuk et al., 1987). The splitting process reduces to the choice of a set of separate problems of simpler structure. The established conservation law holds for every selected problem. Several levels of different depth can be selected in splitting. The splitting macro-level is based on splitting by physical processes. The simplest one-dimensional (with respect to space) problems can be selected at higher levels.

- On splitting the problem at a macro-level the transformation of the problem at some stage can be required. This can be, for example, filtration (simplification) of equations and regularization i. e. the inclusion of additional terms which can improve the numerical algorithm.
- Software and algorithms for solving splitted problems.

On regularizing the splitting stages the question of the choice of a method for solving the problem at the selected stage arises. When choosing a space-approximation technique the property of the selected problem should be taken into account. Different problems (at some stages) can call for different approximation techniques and solvers. In general, the joint model can combine finite-difference schemes and finite-element ones; some problems can be approximated with a higher order of accuracy and so on.

- Module principle and the model software.

The natural property of the splitted model is its module principle: a separate problem – a separate module. The joint model can be “composed” of the different number of modules. The computational characteristics of the model can be improved by changing separate computational modules. Mathematical aspects of the splitting method and its application to the solution of a wide class of physical problems are presented in Samarskii (1962), Yanenko (1967), and Marchuk (1980, 1988).

The essence of the method is the following. Suppose there is the nonstationary problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi &= f, \quad t \in (0, T], \\ \varphi &= \varphi^0, \quad t = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

where A is a nonnegative operator which can be represented as superposition of simpler operators A_i ($i = 1, 2, 3, \dots, I$):

$$A = \sum_{i=1}^I A_i, \quad A_i \geq 0, \quad \forall i.$$

To solve (2.1) we use the following method. We reduce the solution of the original problem with the complex operator A to the solution of a set of problems with simpler operators A_i . For example, if $A = A_1 + A_2$, we can use the following two-cycle splitting scheme (Marchuk, 1988; Marchuk and Sarkisyan, 1988) to solve problem (2.1):

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{\tau}{2}A_1\right) \varphi^{j-1/2} &= \left(E - \frac{\tau}{2}A_1\right) \varphi^{j-1}, \\ \left(E + \frac{\tau}{2}A_2\right) \varphi^j &= \left(E - \frac{\tau}{2}A_2\right) \varphi^{j-1/2}, \\ \bar{\varphi} &= \varphi^j + 2\tau f^j, \\ \left(E + \frac{\tau}{2}A_2\right) \varphi^{j+1/2} &= \left(E - \frac{\tau}{2}A_2\right) \bar{\varphi}, \\ \left(E + \frac{\tau}{2}A_1\right) \varphi^{j+1} &= \left(E - \frac{\tau}{2}A_1\right) \varphi^{j+1/2}, \\ j &= 1, 2, \dots, J-1; \quad \varphi^0 = \varphi(t=0), \quad \tau = \frac{T}{J}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Scheme (2.2) is absolutely stable and approximates (2.1) with the second order of accuracy with respect to time, provided $\frac{\tau}{2}\|A_i\| < 1$.

To solve (2.1) we can also use the simple implicit splitting scheme:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} &= \varphi^j + \tau f^j, \\ (E + \tau A_1) \varphi^{j+1/2} &= \bar{\varphi}, \\ (E + \tau A_2) \varphi^{j+1} &= \varphi^{j+1/2}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Scheme (2.3) is absolutely stable and approximates (2.1) with the first order of accuracy with respect to time. It is more cost-effective than (2.2) but less accurate with respect to time.

The splitting method can be used more widely; on its basis we can develop a numerical model of a complicated process. We can improve the original model by including additional splitting stages into (2.2) or (2.3). We can change the original model. For example, on splitting the problem into a chain of subproblems we can change (simplify and/or regularize) the problem at some stage.

We present a simple example. Assume that when solving some problem we use the procedure of filtering out high-frequency harmonics along the x-coordinate from the solution. To this end, at each time step j we recalculate the vector solution U by the formula

$$\bar{\varphi}_i = \frac{\varphi_{i+1}^j + 2\varphi_i^j + \varphi_{i-1}^j}{4}.$$

Writing this formula as

$$\frac{\bar{\varphi}_i - \varphi_i^j}{\tau} = \frac{h^2}{4\tau} \frac{\varphi_{i+1}^j - 2\varphi_i^j + \varphi_{i-1}^j}{h^2},$$

we see that the filtering procedure can be considered as the inclusion of an additional splitting stage. At the additional stage we solve the diffusion equation by the explicit scheme:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu^\tau \varphi_{xx},$$

where μ^τ is the coefficient of computational viscosity:

$$\mu^\tau = \frac{h^2}{4\tau}$$

It is not difficult to show that if there is viscosity with the coefficient no less than μ^τ at one of the splitting stages implemented implicitly, then the numerical scheme is absolutely stable.

3. Mathematical Model of Ocean Dynamics

We present the mathematical formulation of the ocean dynamics problem. In the spherical coordinates (λ, θ, z) we have (Bryan, 1969; Zalesny, 1996)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - (l - m \cdot \cos \theta \cdot u)v &= -\frac{m}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \nu_u \frac{\partial u}{\partial z} + F^u, \\ \frac{dv}{dt} + (l - m \cdot \cos \theta \cdot u)u &= -\frac{n}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \nu_v \frac{\partial v}{\partial z} + F^v, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= g\rho_w, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$m \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{n}{m} v \right) \right] + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + F^T,$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} + F^S,$$

$$\rho_w = \rho_w(T, S, p), \text{ in } D(\lambda, \theta, z),$$

where

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + mu \frac{\partial}{\partial \lambda} + nv \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z},$$

$$F^* = m^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu_*^* \frac{\partial}{\partial \lambda} + mn \frac{\partial}{\partial \theta} \mu_*^* \frac{n}{m} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

The system of equations (3.1) is considered on the time interval $(0, T]$ in the three-dimensional domain D . The domain D is bounded by the boundary ∂D which consists of the undisturbed sea surface $z = 0$, the lateral (coastal) surface Σ , and the bottom relief $H(\lambda, \theta)$.

The corresponding boundary and initial conditions are added to the above system of equations. In particular, along the vertical coordinate we have for $z = 0$:

$$\nu_u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\tau_1}{\rho_0}, \quad \nu_v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\tau_2}{\rho_0}, \quad w = 0, \tag{3.2}$$

$$\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = D_T(T_S - T) + Q_T, \quad \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} = D_S(S_0 - S) + Q_S,$$

for $z = H(\lambda, \theta)$:

$$w = m \frac{\partial H}{\partial \lambda} u + n \frac{\partial H}{\partial \theta} v. \quad (3.3)$$

On the lateral surface Σ we give the no-slip condition and the conditions of no heat and salt fluxes at the bottom and on Σ .

We give initial conditions for $t = 0$:

$$u = u^0, \quad v = v^0, \quad T = T^0, \quad S = S^0. \quad (3.4)$$

Here λ is the longitude, $\theta = 90 + \psi$, where ψ is the latitude, z is the vertical downward coordinate, (u, v, w) is the velocity field, T is potential temperature, S is salinity, p is pressure, p_w is seawater density which is the known function of potential temperature, salinity, and pressure; the terms F^u, \dots, F^S describe the horizontal turbulent transport; ν_u, ν_v, ν_T and ν_S are the coefficients of vertical turbulent diffusivity; μ_u, μ_v, μ_T and μ_S are the corresponding coefficients of horizontal diffusivity, l is the Coriolis parameter: $l = -2\Omega \cos \theta$, $m = \frac{1}{r \sin \theta}$, $n = \frac{1}{r}$, r is the radius of the earth.

The procedure of constructing the numerical model and the algorithm for its numerical treatment includes several successive steps (Zalesny, 1996). We outline the procedure.

3.1. The Ocean Dynamics Equation in the σ -coordinate System

The first step of the transformations consists in introducing the σ -coordinate system. The σ -transformation introduced into atmospheric models by Phillips more than 40 years ago (Phillips, 1957) has found wide application in solving the problems of meteorology and oceanology (Washington and Parkinson, 1986; Singh et al., 1995; Haidvogel and Beckmann, 1999). Using this approach, we rewrite (3.1)–(3.3) in the new system $(\lambda_1, \theta_1, \sigma) : \lambda_1 = \lambda, \theta_1 = \theta, \sigma = \frac{z}{H(\lambda, \theta)}$. In this case we have

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda_1} - \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \theta_1} \frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

The operators of turbulent transport and boundary conditions are written accordingly.

In the σ -system the continuity equation takes the form

$$m \left[\frac{\partial H u}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{n}{m} H v \right) \right] + \frac{\partial w_1}{\partial \sigma} = 0, \quad (3.5)$$

where w_1 is the new vertical velocity

$$w_1 = w - m\sigma \left[\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} u + \frac{n}{m} \frac{\partial H}{\partial \theta_1} \right] v. \quad (3.6)$$

The boundary condition for the new vertical velocity at the bottom, for $\sigma = 1$, is the same as at the surface:

$$w_1 = 0. \quad (3.7)$$

3.2. The Total Energy Conservation Law and Macro-splitting of the Problem

We write the hydrostatic equation as

$$\frac{\partial p}{\partial z} = g(\rho + \delta\rho), \quad \delta\rho = \rho_w - \rho, \quad (3.8)$$

where ρ is potential density. Unlike the density ρ_w , it does not depend on pressure. If all the terms describing turbulent transport processes are neglected as well as the last term $\delta\rho$ in (3.8), the total energy conservation law holds:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left[H \rho_0 \frac{u^2 + v^2}{2} - \sigma g H^2 \rho \right] dD = 0. \quad (3.9)$$

The second step of the transformations consists in splitting the system of equations (3.1)–(3.3) by physical processes. Allowing for the conservation law (3.9), we single out three energy-independent splitting stages.

As the first subsystem we select equations describing the transport diffusion of momentum, taking into account metric terms. Dropping the subscripts on the variables λ_1 , θ_1 we have

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + m \cdot \cos \theta \cdot u \cdot v &= \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_u \frac{\partial u}{\partial \sigma} + F_1^u, \\ \frac{dv}{dt} - m \cdot \cos \theta \cdot u \cdot u &= \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_v \frac{\partial v}{\partial \sigma} + F_1^v. \end{aligned} \quad (3.10)$$

As the second subsystem we select the equation of turbulent heat and salt exchange. We have

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_T \frac{\partial T}{\partial \sigma} + F_1^T, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_S \frac{\partial S}{\partial \sigma} + F_1^S.\end{aligned}\quad (3.11)$$

In (3.10), (3.11) F_1^* are the terms describing the turbulent exchange in the σ -coordinate system. At the third stage we have equations of adjustment of velocity and density fields. We consider this stage in greater detail below.

3.3. Symmetrization of Systems of Equations

The next step of the transformations consists in symmetrizing the obtained systems of equations.

We present a simple example of symmetrization of the transport equation for the tracer φ in the nondivergent flow field. Three forms of the transport equation are known: conventional, divergent, and semidivergent. Using the semidivergent form, we have

$$\begin{aligned}\frac{H}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[Hu \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} (Hu\varphi) + \frac{n}{m} H v \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{n}{m} H v \varphi \right) + \right. \\ \left. + \frac{w_1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{w_1}{m} \varphi \right) \right] = 0.\end{aligned}\quad (3.12)$$

From a computational standpoint, the semidivergent form (3.12) has the following useful properties:

- this form admits simple finite-difference approximation retaining the skew-symmetry property (Marchuk, 1980);
- using this form, it is easy to obtain the decomposition of the operator of the problem into the sum of three simple nonnegative transport operators along the coordinates λ , θ , σ ;
- the operator of the adjoint equation coincides with the original one.

This raises up the question: In what form is it convenient to write the equations at the stage of adjustment of velocity and potential density fields? With the above example in mind, we discuss this question in more detail.

3.4. Symmetrization of Equations of Adjustment of Velocity and Density Fields

Neglecting $\delta\rho$ in the hydrostatic equation for simplicity, at the adjustment stage we have

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} - lv + \frac{m}{\rho_0} \left[\frac{\partial p}{\partial \lambda} - \underbrace{g \frac{\partial H \sigma}{\partial \lambda} \rho}_1 \right] &= 0, \\
 \frac{dv}{dt} + lu + \frac{n}{\rho_0} \left[\frac{\partial p}{\partial \theta} - \underbrace{g \frac{\partial H \sigma}{\partial \theta} \rho}_2 \right] &= 0, \\
 \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial p}{\partial \sigma} - \underbrace{g \frac{\partial H \sigma}{\partial \sigma} \rho}_3 \right] &= 0, \\
 m \left[\frac{\partial H u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{n}{m} H v \right) \right] + \frac{\partial w_1}{\partial \sigma} &= 0, \\
 \frac{H}{m} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \lambda} (H u \rho)}_1 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{n}{m} H v \rho \right)}_2 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{w_1}{m} \rho \right)}_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

The adjustment equations (3.13) are written in terms of potential density. This can be done if we assume that potential density is a sufficiently smooth function of potential temperature and salinity.

To the system of equations (3.13) are added the corresponding no-normal flow conditions on the lateral boundary dD as well as the kinematical condition along the vertical:

$$w_1 = 0 \text{ for } \sigma = 0, \sigma = 1. \tag{3.14}$$

If we take the inner product of the system (3.13) and the vector

$$(\rho_0 H u, \rho_0 H v, \rho_0 w_1, p, -g H \sigma),$$

then with allowance for the boundary conditions the law of conservation of total energy (3.9) holds. It should be noted that the form of the terms depending on density in the first three equations of (3.13) is consistent with the divergent form of the equation for potential density. The terms marked by identical numbers are in pairs energetically neutral.

There exist several different forms of adjustment equations (3.13), which are due to different representations of the terms depending on potential density.

Now we write the equations in more general form. Assume $f = f(\sigma H)$ is some known smooth function of the vertical coordinate $z \equiv \sigma H$ and $f' = \frac{df}{d(\sigma H)} \neq 0$ is its derivative. We write the adjustment equations as

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} - lv + \frac{m}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \lambda} &= \frac{mg}{2\rho_0} \left[\frac{\rho}{f'} \frac{\partial f}{\partial \lambda} - f \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \rho}{f'} \right) \right], \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + lu + \frac{n}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} &= \frac{ng}{2\rho_0} \left[\frac{\rho}{f'} \frac{\partial f}{\partial \theta} - f \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \rho}{f'} \right) \right], \\
 \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \sigma} &= \frac{g}{2\rho_0} \left[\frac{\rho}{f'} \frac{\partial f}{\partial \sigma} - f \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \rho}{f'} \right) \right], \\
 m \left[\frac{\partial Hu}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{n}{m} H v \right) \right] + \frac{\partial w_1}{\partial \sigma} &= 0, \\
 \frac{H}{m} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{f'} \right) + \frac{1}{2} \left[Hu \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\rho}{f'} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(Hu \frac{\rho}{f'} \right) + \frac{n}{m} H v \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho}{f'} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{n}{m} H v \frac{\rho}{f'} \right) + \frac{w_1}{m} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\rho}{f'} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{w_1}{m} \frac{\rho}{f'} \right) \right] = \\
 &= \frac{\rho}{f} \left[Hu \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{f}{f'} - \sigma H \right) + \frac{n}{m} H v \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{f}{f'} - \sigma H \right) + \left(\frac{w_1}{m} \frac{\rho}{f'} - \sigma H \right) \right],
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

where

$$\tilde{p} = p - \frac{g}{2} \frac{\rho}{f'} f.$$

Choosing the form of the function f , we can obtain different forms of model equations.

One of the difficulties in using σ -models of ocean dynamics is associated with the presence of the truncation error of horizontal pressure gradients (Washington and Parkinson, 1986; Griffies et al., 2000). In our case, these are the right-hand sides of the first three equations (3.15) (the terms depending on potential density).

In the geopotential z -system, if density does not depend on the horizontal coordinates λ and θ , motion does not occur. In the σ -system, due to the approximation error of pressure gradients along the surface $\sigma = \text{const}$ nonzero velocities occur. With pronounced density stratification along the vertical and with large gradients of the bottom relief, these fictitious

velocities can be significant. Choosing the function f in the special way, we can reduce this effect.

As an illustration we give the following examples. Let potential density depend only on the vertical coordinate $z \equiv \sigma H$ and satisfy

$$\rho = \sigma H.$$

It is easily seen that if we choose f also as

$$f = \sigma H,$$

the right-hand side of the first three equations (3.15) vanishes. It means that the horizontal pressure gradients do not generate in σ -coordinate system artificial velocities.

Assume now that potential density satisfies the condition

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha \sigma H}.$$

In this case, we can eliminate errors in the pressure gradients choosing f as

$$f^2 = \rho_0 e^{\alpha \sigma H}.$$

Finally, presume that potential density is an arbitrary function $\tilde{\rho}(\sigma H)$ or it can be approximated by this function with high accuracy. Then choosing the function f as

$$f^2 = 2 \int \tilde{\rho}(\sigma H) d(\rho \sigma),$$

we can see that for $\rho = \tilde{\rho}(\sigma H)$ the terms in the right-hand sides of (3.15) vanish. Note that with usual finite-difference approximation of the equation of motion this property is satisfied using the staggered grid C in the spatial variables λ, θ, σ .

3.5. Splitting of Adjustment Equations

The adjustment stage is the most tedious stage of calculations. To increase the computational efficiency at this stage we can use further splitting of equations. We demonstrate the splitting procedure at the adjustment stage using, as an example, the symmetrized forms of equations which are consistent with the semidivergent form of the equations for density, i. e. we put $f = \sigma H$ in (3.15).

In this case, at the first internal splitting stage we have

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{mg}{2\rho_0} \left[\sigma H \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} - \frac{\partial H \sigma}{\partial \lambda} \rho \right], \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= 0, \\ \frac{H}{m} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (Hu\rho) + Hu \frac{\partial}{\partial \lambda} \rho \right] &= 0.\end{aligned}\tag{3.16}$$

At the second internal splitting stage

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{ng}{2\rho_0} \left[\sigma H \frac{\partial \rho}{\partial \theta} - \frac{\partial H \sigma}{\partial \theta} \rho \right], \\ \frac{H}{m} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{nHv\rho}{m} \right) + \frac{n}{m} H v \frac{\partial}{\partial \theta} \rho \right] &= 0.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Finally, at the third stage

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - lv + \frac{m}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial \lambda} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + lu + \frac{n}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial p_1}{\partial \sigma} &= -\frac{g}{2} \left[\sigma H \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} - \frac{\partial H \sigma}{\partial \sigma} \rho \right], \\ m \left[\frac{\partial Hu}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{n}{m} H v \right) \right] + \frac{\partial w_1}{\partial \sigma} &= 0, \\ \frac{H}{m} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{w_1}{m} \rho \right) + \frac{w_1}{m} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right] &= 0, \\ p_1 &= p - \frac{g}{2} \sigma H \rho.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Thus, at the first and second splitting stages we arrive at the solution of locally one-dimensional problems along the coordinates λ and θ , while at the third stage – at the more complex three-dimensional problem.

To equations (3.18) are added the boundary no-normal flow conditions. A peculiarity of the formulation of the initial boundary value problem

for (3.18), which is typical of hydrodynamic equations, is that there are no boundary conditions for pressure. This leads to additional difficulties when solving numerically the problem, in particular, when calculating pressure along the vertical. In this case, we can use once again additional splitting involving the selection of the vertical-averaged motion component. To this end we write equations (3.18) in the equivalent form from which the solution algorithm naturally follows. We have

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} - l(v - \bar{v} + \bar{v}) + \frac{m}{\rho_0} \frac{\partial p'_1}{\partial \lambda} + R\bar{u} &= -\frac{m}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \lambda} + R\bar{u}, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + l(u - \bar{u} + \bar{u}) + \frac{n}{\rho_0} \frac{\partial p'_1}{\partial \theta} + R\bar{v} &= -\frac{m}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} + R\bar{v}, \\
 \frac{\partial H\bar{u}}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{n}{m} H\bar{v} \right) &= 0, \\
 m \left[\frac{\partial H(u - \bar{u})}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{n}{m} H(v - \bar{v}) \right) \right] + \frac{\partial w_1}{\partial \sigma} &= 0, \\
 \frac{H}{m} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{w_1}{m} \rho \right) + \frac{w_1}{m} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right] &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

where

$$\begin{aligned}
 \bar{a} &= \int_0^1 a \, d\sigma, \quad (a = u, v), \\
 \bar{p}_1 &= p_1(0) - \frac{g}{2} \int_0^1 d\sigma \int_0^\sigma \left(\sigma H \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} - \frac{\partial \sigma H}{\partial \sigma} \rho \right) d\sigma, \quad p'_1 = p_1 - \bar{p}_1,
 \end{aligned}$$

R is some nonnegative function, for example $R = \text{const} \equiv \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon \ll 1$.

Using the above representation, we develop the solution algorithm. It consists in solving the following three subsystems. The first subsystem is

$$\frac{\partial u}{\partial t} = R\bar{u}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = R\bar{v}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{3.20}$$

The second subsystem is

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} - l\bar{v} + \frac{m}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \lambda} + R\bar{u} &= 0, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + l\bar{u} + \frac{n}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} + R\bar{v} &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H\bar{u}}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{n}{m} H\bar{v} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0.\end{aligned}$$

The third subsystem is

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - l(v - \bar{v}) + \frac{m}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}'_1}{\partial \lambda} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + l(u - \bar{u}) + \frac{n}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}'_1}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{H}{m} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{w_1}{m} \rho \right) + \frac{w_1}{m} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right] &= 0,\end{aligned}\tag{3.22}$$

where

$$\frac{w_1}{m} = \int_{\sigma}^0 \left[\frac{\partial H(u - \bar{u})}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{nH(v - \bar{v})}{m} \right) \right] d\sigma.$$

Note that by selecting depth-averaged motion we obtain the following result. In numerical calculations two boundary conditions along the vertical for the velocity w_1 are exactly satisfied, and correct calculations of the vertical structure of the pressure field are performed.

3.6. Regularization of Problems at Some Splitting Stages

The procedure of ε -regularization is frequently used to increase the stability of the numerical solution. The method of ε -regularization involves the addition of certain terms with small coefficients $\varepsilon \ll 1$ to the original equation. The method of artificial compressibility, which is proposed by Yanenko (1967) for solving equations of viscous incompressible fluid, can serve as an example of the ε -regularization procedure. The idea of the artificial compressibility method is to replace the continuity equation by a nonstationary equation of the form

$$\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

We apply the above approach to regularization of the problem (3.19). We drop the “rigid lid” condition at the undisturbed ocean surface and instead of it we use

$$w = -\frac{1}{g\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial t}, \quad (3.23)$$

where

$$p_0 = -g\rho_0\zeta,$$

ζ is the ocean surface height.

From a mathematical standpoint, the transition from the model with the “rigid lid” approximation to the “milder” dynamical condition can be considered as regularization of the two-dimensional incompressible fluid dynamics problem. In this case, the efficiency of calculations of the depth-averaged velocities increases.

Physically, the transition to the boundary condition (3.23) implies the introduction of the dynamics of external gravity waves into the model (Gill, 1982; Marchuk et al., 1987). In this case, in the chain of splitted subsystems, only the stage describing evolution of the vertical-averaged fields changes. In the terms \bar{u} , \bar{v} , \bar{p} the equations have the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - l \cdot \bar{v} + \frac{m}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \lambda} + R\bar{u} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + l \cdot \bar{u} + \frac{n}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \theta} + R\bar{v} &= 0, \\ \frac{1}{g\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} + m \left[\frac{\partial H\bar{u}}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{n}{m} H\bar{v} \right] &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\bar{p}_1 = p_0 - \frac{g}{2} \int_0^1 d\sigma \int_0^\sigma \left(\sigma H \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} - \frac{\partial \sigma H}{\partial \sigma} \rho \right) d\sigma.$$

To system (3.24) on the closed coastal boundary Σ are added the no-normal flow conditions.

Note. When writing the third subsystem of equations of adjustment of velocity and potential density fields (3.19) we added and subtracted the terms R_u , R_v , $R \ll 1$. On the one hand, this is an equivalent transformation of the differential system. On the other hand, using the splitting algorithm (3.20)–(3.22) to solve the problem, we can increase the efficiency of calculations of vertical-averaged motion. It is not difficult to show that the splitting scheme is absolutely stable and has the first

order of accuracy with respect to time if we use an explicit scheme to solve (3.20) and an implicit one to solve (3.21). If the stage (3.20) is dropped in the hierarchical model system, this can also be considered as ε -regularization of the original problem. In this case, regularization involves the introduction of friction with the coefficient R , which acts on the depth-averaged flow component.

4. The Numerical Experiment on Simulation of Monsoon Circulation in the Indian Ocean

The method presented was used as the basis for constructing the numerical model of monsoon circulation in the Indian Ocean with high spatial resolution.

The computational domain covered the north Indian Ocean (10°S – 30°N , 38°E – 103°E). The spatial resolution was $1/8^\circ \times 1/12^\circ \times 21$. The bottom topography was interpolated to the computational grid from the five-minute data array ETOPO5. The minimum bottom depth in the domain was 7 m, the maximal one was about 6000 m.

When treating vertical-averaged flows the stage (3.20) was dropped. To solve the equations describing the adjustment of velocity and density fields we put $f = \sigma H$ in (3.15). Horizontal eddy diffusivity was $1.0 \cdot 10^2 \text{ m}^2/\text{s}$, eddy viscosity was $1.0 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$, and the friction coefficients R was $1.0 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$. Vertical mixing was parameterized using the scheme of Pakanowski and Philander (1981).

The aim of the experiment was to calculate the dynamically consistent seasonable cycle of velocity, temperature, and salinity fields of the Indian Ocean. The model was driven at the sea surface by wind-stress (NCEP reanalysis) and by prescribed temperature and salinity (Levitus et al., 1998). The model was spun up for seven years from a state of rest and January temperature and salinity (Levitus et al., 1998).

Figures 1–3 present the model instantaneous velocity fields at depths of 60 m, 400 m, and 1000 m. The calculated flows differ widely during the winter and summer monsoons, as the observational data show (Tomczak and Godfrey, 2003; Shankar et al., 2002).

We shall dwell briefly on the structure and seasonal variability of the main currents in the Indian Ocean and compare them with the observational data.

Equatorial currents. The numerical experiment shows that the North Equatorial Current is observed from January to March when the winter monsoon is fully established. The horizontal velocities are about

0.5–1.0 m/s near the coasts of Sri Lanka, in the sector between the equator and 6 °N as well as between 60 °E and 75 °E. In the equatorial zone the westward Equatorial Counter Current with the velocities of order 0.5–0.8 m/s is observed. The current is located to the south of 2 °S, and its intensity is diminished westward. According to the calculations this current does not extend farther than 70 °E and merges with the westward countercurrent which is approximately equal in intensity. This pattern is in good agreement with the observational study (Tomczak and Godfrey, 2003), except that the countercurrent is much weaker according to the data. During the months of the monsoon change the Indian Equatorial Jet with velocities 0.7 m/s and higher is pronounced. In the period of the summer monsoon the model also reproduces the Southwest Monsoon Current (Tomczak and Godfrey, 2003) which reaches the velocities 0.5–0.8 m/s south and southeast of Sri Lanka.

Currents in the Arabian Sea and the Bay of Bengal. The model describes adequately the structure of the Somali Current as well as the appearance of the Great Whirl towards the end of the summer monsoon. In September the velocities reach 2 m/s at a depth of 30 m. In March and in January the current reverses its direction.

In summer the northeastward and southeastward Summer Monsoon Current (Shankar et al., 2002) flows across the Arabian Sea basin (Fig. 1). It divides into two branches off Oman at approximately 15 °N. In one branch, which is situated close to the Oman coast, water moves clockwise and forms the West India Coastal Current (WICC) off India (Shankar et al., 2002). The second branch deviates from the coastal current into the open ocean and forms the Summer Monsoon Current (SMC) (Shankar et al., 2002). It should be noted that the complete pattern of currents is rather complex. There are several cyclones and anticyclones inside the Arabian Sea, between two main currents. In the period of the winter monsoon the structure of the velocity field is also rather complex (Fig. 1). In January the Somali Current reverses its direction. Along the entire western coastline of India there appears the coastal northwestward current in the opposite direction as compared to the summer period. Along most of the coastline of the Arabian Sea the currents also reverse their direction as compared to the summer season. There are many local eddies and countercurrents.

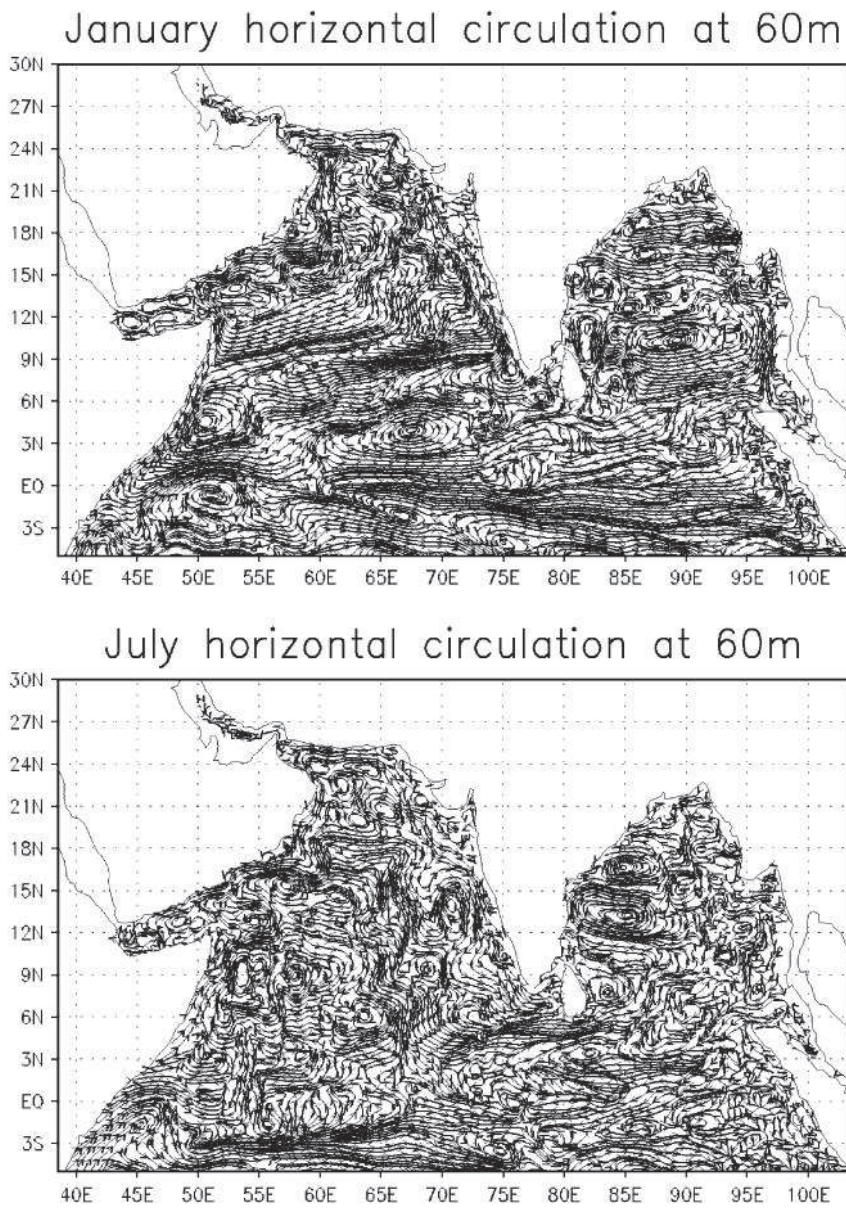


Fig. 1. Model instantaneous velocity fields at depth 60 m

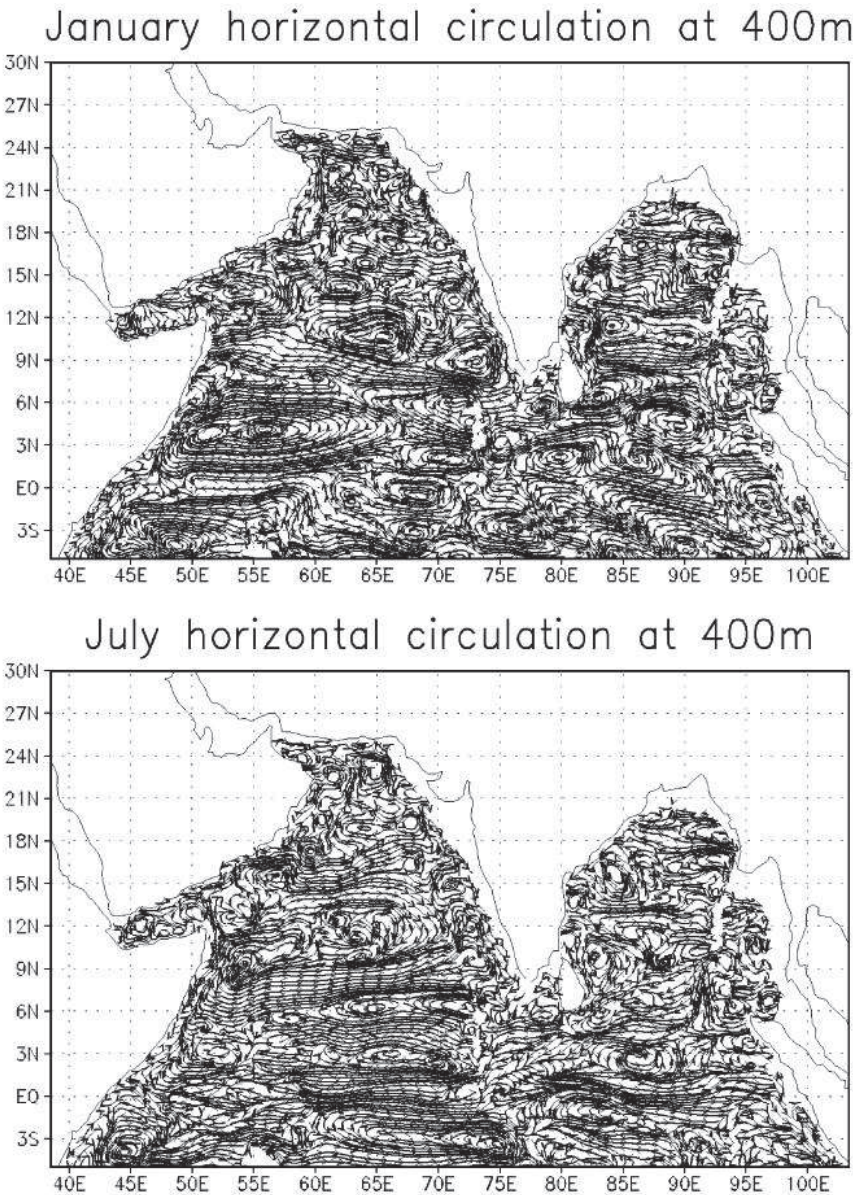


Fig. 2. Model instantaneous velocity fields at depth 400 m

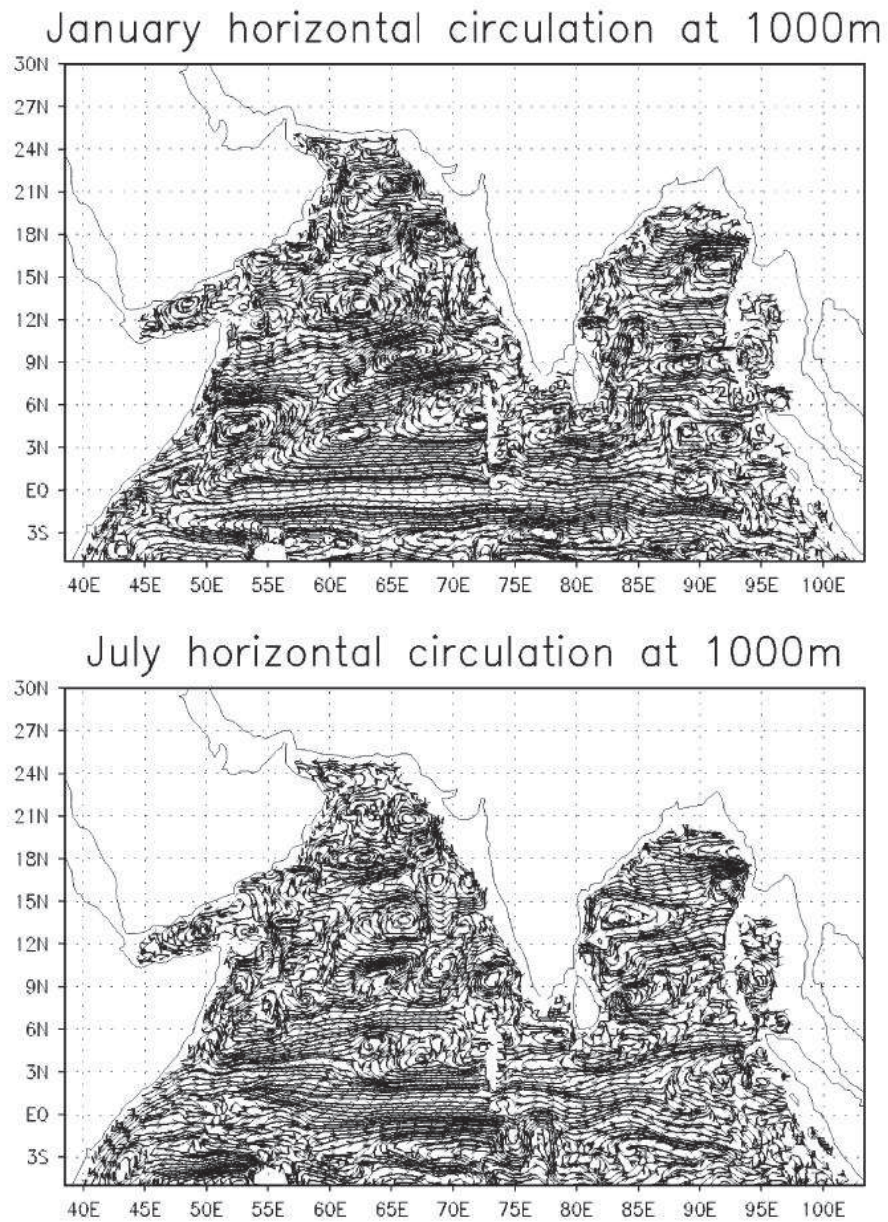


Fig. 3. Model instantaneous velocity fields at depth 1000 m

The anticyclonic circulation prevails in the Bay of Bengal during most of the year. In March-April the local, rather stable anticyclonic vorticity develops northeast of Sri Lanka. Its horizontal size is about 500 km, its thickness is of order 200 m, the velocities reach 0.8 m/s. By September the eddy intensity is diminished; at the end of October-November the circulation reverses its direction and becomes cyclonic. Several eddies are formed; their total large-scale structure may be interpreted as the East Indian Winter Jet (Tomczak and Godfrey, 2003). The Jet velocities are of order 0.4–0.7 m/s. The structure of currents is close to the scheme constructed by the observational data (Tomczak and Godfrey 2003) though the pattern differs from the scheme by certain details. At 75–77 °E, south of Sri Lanka, the East Indian Winter Jet meets with the countercurrent entering into the Bay of Bengal. This countercurrent is formed farther west in the open ocean by the eastward current because of its division into two branches. The first branch turns southward and merges with the Equatorial Jet (Tomczak and Godfrey, 2003). The second one first flows northeastward along the eastern periphery of the above cyclone, flows around it and turns southward forming the countercurrent off Sri Lanka. Water returns into the Arabian Sea, following two paths. First, as the narrow jet about 40 m in depth through the shallow strait between India and Sri Lanka. Second, along the western periphery of the cyclone off the east coast of Sri Lanka as in Tomczak and Godfrey (2003).

The vertical structure of currents in the north Indian Ocean is rather complex (Figs. 2, 3). However, there is one common property: The currents are of distinct zonal character in deeper layers below 300 m. Currents are less intensive and better regulated. The experiment shows that even in the deep ocean the variability of currents with time is appreciable. However, it should be noted that variability is typical of open-ocean eddies rather than the large-scale currents themselves.

5. Conclusion

In the paper we set forth a common approach to the construction of a numerical model of ocean dynamics which is based on splitting by physical processes and geometric coordinates. Model equations are split on several levels. The splitting macro-level is splitting of three-dimensional equations by physical processes. On higher levels the splitting process is to select the simplest equations which are locally one-dimensional with respect to space. The application of the above approach

to the solution of the problem of the Indian Ocean circulation with high spatial resolution demonstrated that this numerical technique performs well.

The peculiarity of the numerical model of the Indian Ocean dynamics is that the adjustment equations of potential density and velocity fields are written in the sigma-coordinate system in the generalized symmetrized form. This transformation allows one to decrease truncation errors occurring in horizontal pressure gradient terms in the sigma model and construct a stable computational procedure.

A comparison of the results of the Indian Ocean simulation with the schemes of currents constructed on the basis of observational data (Shankar et al., 2002; Tomczak and Godfrey, 2003) shows that the model reproduces the monsoon circulation reasonably well. The high resolution enables us to reproduce not only the large-scale structure of monsoon currents, but to describe local peculiarities of its space-time variability as well. The calculations show the high eddy activity of the Indian Ocean. Numerous cyclones and anticyclones are observed in the open ocean, coastal areas, and the deep ocean. Ocean eddies can modify the structure of basin scale currents. With high spatial resolution which is accompanied by the high eddy activity, requirements for the observational data are greater. For the detailed assessment of model calculations and forecasts it is essential to have comprehensive spatial observations. Satellite observations can supply the information regarding the ocean surface; however, to have such information about deep ocean layer is an unresolved problem. The development of observing systems such as the profiling floats ARGO can in part fill the gap. However, in this case, to solve an extremely complex problem of observational data processing and assimilation in the moving coordinate system (of the type of Lagrangian coordinates) is required.

REFERENCES

1. Barnier B., Capella J., O'Brien J. J. The Use of Satellite Scatterometer Winds to Drive a Primitive Equation Model of the Indian Ocean: The Impact of Bandlike Sampling // *J. Geophys. Res.* 1994. V. 99, No. C7. Pp. 14187–14196.
2. Bryan K. A Numerical Method for the Study of the Circulation of the World Ocean // *J. Comput. Physics.* 1969. V. 4. Pp. 347–376.
3. Diansky N. A., Bagno A. V., Zalesny V. B. Sigma Model of Global Ocean Circulation and Its Sensitivity to Variations in Wind Stress.

Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk Fizika Atmosfery i Okeana. 2002. V. 38, No. 4. Pp. 477–494.

4. Gill A.E. (Ed.) Atmosphere-Ocean Dynamics. N. Y.: Academic Press, 1982.

5. Griffies S. M., Boening C., Bryan F. O., Chassignet E. P., Gerdes R., Hasumi H., Hirst A., Treguier A.-M., Webb D. Developments in Ocean Climate Modelling, Ocean Modelling, 2002. V. 2. Pp. 123–192.

6. Haidvogel D. B., Beckmann A. Numerical Ocean Circulation Modelling. Imperial College Press, 1999.

7. Levitus S., Boyer T. P., Conkright M. E., O'Brien T., Antonov J., Stephens C., Stathoplos L., Johnson D., Gelfeld R. NOAA Atlas NESDIS 18, World Ocean Database 1998: Vol. 1. Washington, D. C.: U. S. Gov. Printing Office, 1998. 346 p.

8. Marchuk G. I. Methods of Computational Mathematics. M.: Nauka, 1980.

9. Marchuk G. I. Splitting-up Methods. M.: Nauka, 1988.

10. Marchuk G. I., Dymnikov V. P., Zalesny V. B. Mathematical Models in Geophysical Hydrodynamics and Numerical Methods of their Realization. L.: Gidrometeoizdat, 1987.

11. Marchuk G. I., Sarkisyan A. S. Mathematical Modelling of Ocean Circulation. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, N. Y., London, Paris, Tokyo, 1988.

12. Phillips N. A. A Coordinate System Having Some Special Advantages for Numerical Forecasting // J. Meteorology. 1957. V. 14. Pp. 184–185.

13. Rajeevan M. Prediction of Indian Summer Monsoon: Status Problems and Prospects // Curr. Science. 2003. V. 11. Pp. 1451–1457.

14. Samarskii A. A. On Convergence of the Fractional-step Method for Heat Equation // Zh. Vych. Mat. Mat. Fiz. 1962. V. 2, No. 6. Pp. 1117–1121.

15. Shankar D., Vinayachandran P. N., Unnikrishnan A. S., Shetye S. R. The Monsoon Currents in the North Indian Ocean // Progr. Oceanogr. 2002. V. 52(1). Pp. 63–119.

16. Shukla J., Paolino D. A. The Southern Oscillation and Long-range Forecasting of the Summer Monsoon Rainfall in Peninsular India // Mausam. 1983. V. 33. Pp. 399–404.

17. Singh M. P., Mohanty U. C., Dube S. K. A Study of Heat and Moisture Budget over the Arabian Sea and their Role in the Onset and

Maintenance of Summer Monsoon // *J. Met. Soc. Japan*. 1983. V. 61. 218 p.

18. Singh M. P., Raman S., Templeman B., Templeman S., Holt T., Murthy A. B., Agarwal P., Nigam S., Prabhu A., Ameenullah S. Structure of the Indian Southwesterly Pre-monsoon and Monsoon Boundary Layers: Observations and Numerical Simulation // *Atmosp. Environ.* 1990. V. 24A. Pp. 723–734.

19. Singh M. P., Sharan M., Yadav A. K. Comparison of Various Sigma Schemes for Estimating Dispersion of Air Pollutants in Low Winds // *Atmosp. Environ.* 2005. V. 29. Pp. 2501–2509.

20. Tomczak M., Godfrey S. J. *Regional Oceanography: An Introduction*. Pergamon, 2003.

21. Washington W. M., Parkinson C. L. *Three-dimensional Climate Modeling*. Mill Valley, California: University Science Books; Oxford, N. Y.: Oxford University Press, 1986.

22. Wenzel M., Shroeter J., Olbers D. The Annual Cycle of the Global Ocean Circulation as Determined by 4D VAR Data Assimilation // *Progress in Oceanogr.* 2001. V. 48. Pp. 73–119.

23. Yanenko N. N. *Fractional-step Method of Solving Multidimensional Problems of Mathematical Physics*. Novosibirsk: Nauka, 1967.

24. Zalesny V. B. Numerical Simulation and Analysis of the Sensitivity of Large-scale Ocean Dynamics // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling*. 1996. V. 11, No. 6. Pp. 421–443.

A NUMERICAL METHOD FOR THE SOLUTION OF TIDAL DYNAMICS EQUATIONS AND THE RESULTS OF ITS APPLICATION¹⁹

For a numerical solution of tidal dynamics equations, the alternating direction scheme is used. The difference scheme is described in detail, and the proof of its stability and convergence is given. The results of application of the method in different geophysical conditions are reported. The calculated charts of isoamplitudes and co-tidal lines as well as those of tidal currents are generally in satisfactory agreement with observational data.

¹⁹*J. Comput. Phys.*, 1973, v. 13, pp. 15–34. Jointly with R. G. Gordeev, V. Ya. Rivkind, B. A. Kagan.

1. Introduction

It is customary to use in tidal calculations numerical methods of integration of tidal dynamics equations. Especially popular are a method of boundary values and a hydrodynamical numerical method (often referred to as HN-method) [1, 2].

The first of the above methods assumes a harmonic nature of variations in time of tidal characteristics. According to this assumption, a system of linearized dynamics equations is reduced to one partial differential equation of elliptic type with respect to complex amplitudes of tidal oscillations of the level. The formulated boundary value problem is solvable, and has a unique solution if the condition $\sigma > l$ (where σ is angular velocity of the tidal wave, l , the Coriolis parameter) is met, and values of amplitudes are known on the whole contour of a considered basin or on one of its parts, whereas on the other part there is a condition of no transport (this condition is equivalent to formulation of oblique derivative for the level). The solution is found by standard methods, using the first variant of boundary conditions, or by a special numerical method, developed in [3], for Poincare problem, in the case when, on one part of the contour, the boundary condition is in a form of oblique derivative.

If the condition $\sigma > l$ is not met, and a "critical" latitude (on which l becomes equal to σ) falls on the considered basin whose depth exceeds the thickness of the bottom boundary layer, then existence and uniqueness of the solution are possible, if horizontal turbulent friction is taken into account in the initial dynamics equations [4]. However, in this case we have a higher order equation for the level, and there arise some additional difficulties, due to the fact that we have to set one more boundary condition on the contour of the basin.

In HN-method we do not make any assumptions about the nature of time variations of tidal characteristics. Instead, arbitrary initial conditions are set for tidal oscillations of the level and velocity transport. Integration of the initial system of equations is carried out numerically by stationarity method. A solution is assumed to be found when it becomes periodic, which happens if we set periodic boundary conditions for the level at the open input.

If we do not set periodic conditions, we can consider nonlinear frictional effects. Unfortunately, it is impossible to take accurately into account these and Coriolis effects, because in numerical realization of the method,

we use Eliassen's grid. As is known, in this case, one has to make space interpolation which leads to smoothing of fields of tidal elements. Another important feature of Eliassen's grid is that it cannot satisfy a condition of no slipping on a solid contour of the basin. Therefore, when dynamics equations contain terms describing horizontal turbulent friction, the condition of no slipping is replaced with that of slipping. The latter can result in underestimation of tidal energy dissipation in the regions close to the coast and, as a consequence, to distortion of the tidal energy balance in these regions.

During the last three years we have tested the new method of calculating tidal motions in adjacent seas [5]. In the present paper, we give theoretical substantiation of the difference scheme described in [5] and the results of application of the method in various physical and geographical conditions.

2. Basic Equations

Let us consider an adjacent sea of small space length, so that we can neglect an effect of tide-generating forces. In such a sea, tidal motions are formed by interaction of such forces as horizontal gradient forces, pressure, Coriolis forces, inertness, bottom and horizontal turbulent friction. Therefore if we apply the usual method of describing macroturbulence in a sea of variable depth, initial tidal dynamics equations can be written as follows:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - A\Delta w + A_1 w + \frac{r}{D^2} |w| w = -gG \text{grad } \zeta, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \text{div } w = 0, \quad (2.2)$$

where w is vector function with components u, v , which are the components of total transport along x, y axis, ζ the vertical displacement of the sea level, D the depth, r and A the coefficients of the bottom and horizontal turbulent friction, g the acceleration of gravity, t the time, A_1 the matrix of coefficients equal to $\begin{pmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{pmatrix}$, l the Coriolis parameter, Δ the plane Laplace operator, w is regarded equal to zero on the coast-line Γ_1 ,

$$w/\Gamma_1 = 0, \quad (2.3)$$

and a known function of horizontal coordinates and time on the liquid sea boundary Γ_2 ,

$$w/\Gamma_2 = a(x, y, t). \quad (2.4)$$

Besides, according to the law of mass conservation, the values of w_n on the contour Γ_2 must satisfy the following integral relation:

$$\int_0^t dt \int_{\Gamma_2} w_n d\Gamma = 0, \quad (2.5)$$

where w_n is a normal component to the liquid boundary Γ_2 of total transport, $d\Gamma$ is an element of the contour, and T is tidal period.

Let us drop the condition of periodic variations of w and ζ in time, and turn to a solution of the problem with initial data. It will be supposed that at an initial moment of time (at $t = 0$), fields of tidal currents and of level oscillations are known.

$$w = w_0, \quad \zeta = \zeta_0, \quad \text{with } t = 0, \quad (2.6)$$

where w_0 , ζ_0 are known functions of horizontal coordinates.

It will be noted here that the quadratic resistance law accepted in (2.1) does not take into account the existing shift of phases between shear stress at the bottom and the tidal current. Another method for calculating the bottom friction without this disadvantage was suggested in [6], where it was shown that the bottom friction coefficient is not a universal constant, but depends in a complex manner on external parameters determining turbulent regime in the bottom boundary layer.

3. Difference Scheme

For a numerical solution of the above system of equations (2.1) and (2.2), we use a method of finite differences. For this purpose we use the difference alternating direction scheme proposed in [5], where the system (3.1) of difference equations is written as follows²⁰:

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} + \frac{1}{2}R_1^n u^{n+1/2} = -\frac{1}{2}gD \frac{\partial \zeta^n}{\partial x} - \frac{l}{2}v^n - \frac{1}{2}R_1^n \tilde{a}_1^{n+1/2} +$$

²⁰Note: The difference scheme given below is of explicit-implicit character (it is explicit for equations of gradient of the level, and implicit for equations of complete flows).

$$+ \frac{A}{2} \left(u_{x\bar{x}}^n + u_{y\bar{y}}^{n+1/2} \right) + \frac{f_1^{n+1/2}}{2}, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} + \frac{1}{2} R_1^n v^{n+1/2} = -\frac{1}{2} g D \frac{\partial \zeta^n}{\partial y} + \frac{l}{2} u^{n+1/2} - \frac{1}{2} R_1^n \tilde{a}_2^{n+1/2} +$$

$$+ \frac{A}{2} \left(v_{x\bar{x}}^{n+1/2} + v_{y\bar{y}}^n \right) + \frac{f_2^{n+1/2}}{2}, \quad (3.1.2)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} + \frac{1}{2} R_1^{n+1/2} v^{n+1} = -\frac{1}{2} g D \frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial y} + \frac{l}{2} u^{n+1/2} - \frac{1}{2} R_1^{n+1/2} \tilde{a}_2^{n+1} +$$

$$+ \frac{A}{2} \left(v_{x\bar{x}}^{n+1/2} + v_{y\bar{y}}^{n+1} \right) + \frac{f_2^{n+1}}{2}, \quad (3.1.3)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} + \frac{1}{2} R_1^{n+1/2} u^{n+1} = -\frac{1}{2} g D \frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial x} - \frac{l}{2} v^{n+1} - \frac{1}{2} R_1^{n+1/2} \tilde{a}_1^{n+1} +$$

$$+ \frac{A}{2} \left(u_{x\bar{x}}^{n+1} + u_{y\bar{y}}^{n+1/2} \right) + \frac{f_1^{n+1}}{2}, \quad (3.1.4)$$

$$\frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial x} = \frac{\partial \zeta^n}{\partial x} - \frac{\tau}{2} \left(u_{x\bar{x}}^{n+1} + u_{x\bar{x}}^{n+1/2} + v_{y\bar{x}}^{n+1/2} + v_{y\bar{x}}^n \right), \quad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial y} = \frac{\partial \zeta^n}{\partial y} - \frac{\tau}{2} \left(u_{x\bar{y}}^{n+1/2} + u_{x\bar{y}}^n + v_{y\bar{y}}^{n+1} + v_{y\bar{y}}^{n+1/2} \right). \quad (3.1.6)$$

Here, for any function u , v and the coordinates x , y ,

$$v_x(x, y, t) = (1/h) [v(x+h, y, t) - v(x, y, t)],$$

$$v_{\bar{x}}(x, y, t) = (1/h) [v(x, y, t) - v(x-h, y, t)],$$

$$v_{x\bar{x}} = (v_x)_{\bar{x}},$$

τ is a time step, h finite difference grid length, $(\partial \zeta / \partial x)$, $(\partial \zeta / \partial y)$ are components of horizontal gradient of the level, $R_1 = (r/R^2) \times \sqrt{(u + \tilde{a}_1)^2 + (v + \tilde{a}_2)^2}$ are components of vector \tilde{a} , f_1 , and f_2 -values depending on \tilde{a}_1 , \tilde{a}_2 and their difference relations along x , y , and t . Since \tilde{a}_1 and \tilde{a}_2 are sufficiently smooth functions, these difference relations are restricted by modulus.

It will be noted that relations (3.1.5) and (3.1.6) for $(\partial \zeta / \partial x)$ and $(\partial \zeta / \partial y)$ are derived by approximation of the continuity equation differentiated with respect to x and y ²¹).

²¹When another method of constructing a difference scheme is used (i. e. when the terms containing $\text{grad } \zeta$ and $\text{div } w$ are approximated by central differences), then in determining the level ζ on the grid boundary, $\bar{\Gamma}_h$ it is necessary to set velocity components at grid points outside of the domain Ω_h .

We add to system (3.1) boundary conditions $u, v/\Gamma = 0$ and initial data for $u, v, (\partial\zeta/\partial x), (\partial\zeta/\partial y)$.

Henceforth, the symbol Ω_h will denote a set of grid points belonging to the domain Ω and Γ_h its boundary. We introduce also the following notations for the vector $w_h = (u_h, v_h)$:

$$w_h^2 = u_h^2 + v_h^2, \quad w_{hx}^2 = u_{hx}^2 + v_{hx}^2, \quad w_{h\bar{x}}^2 = u_{h\bar{x}}^2 + v_{h\bar{x}}^2.$$

Besides, we introduce finite difference norm and scalar product according to the formulae

$$||w_h^k||^2 = h^2 \sum_{\Omega_h} (w_h^k)^2,$$

$$||w_{hx}^k||^2 = h^2 \sum_{\overline{\Omega_h}} (w_{hx}^k)^2,$$

$$(f_h^k, w_h^k) = h^2 \sum_{\Omega_h} f_h^k w_h^k,$$

where $\overline{\Omega_h} = \Omega_h \cup \Gamma_h$, subscript h of the function w_h indicates that w is considered in grid points and superscript k indicates that w_h is taken on the layer $t = k\tau$.

To prove the stability of scheme (3.1), we make use of the following well known relations:

$$2\tau u_t^k u^k = (u^k)^2 - (u^{k-1})^2 + \tau^2 (u_t^k)^2, \quad (3.2)$$

$$h^2 \sum_{\overline{\Omega_h}} u_{hx} v_h = -h^2 \sum_{\overline{\Omega_h}} u_h v_{h\bar{x}}, \quad (3.3)$$

where

$$u_t^k = \frac{1}{\tau} (u^k - u^{k-1}).$$

Formula (3.3) is valid for the arbitrary functions u_h, v_h defined on the grid if $v_h/\Gamma_h = 0$. In order to prove a unique solvability of (3.1), it is sufficient to show that a homogeneous system corresponding to it on each layer $t = (k/2)\tau$ $k = 1, 2, \dots, (T/\tau)$ has but a trivial solution. Let us multiply homogeneous equations corresponding to (3.1.3) and (3.1.4) by $h^2 \cdot u^{n+1}$ and $h^2 \cdot v^{n+1}$, and sum up the resulting expressions over all grid points, making use of expression (3.3). This yields

$$\begin{aligned}
& \|v^{n+1}\|^2 + \tau h^2 \sum_{\Omega_h} R_1^{n+1/2} (v_h^{n+1})^2 + \frac{A\tau}{2} \|v_y^{n+1}\|^2 + \\
& + \frac{1}{2} g\tau^2 \sum_{\overline{\Omega_h}} D (v_y^{n+1})^2 = -\frac{1}{4} g\tau^2 \sum_{\overline{\Omega_h}} v_y^{n+1} v^{n+1} D_y, \quad (3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|u^{n+1}\|^2 + \tau h^2 \sum_{\overline{\Omega_h}} R_1^{n+1/2} (u_h^{n+1})^2 + \frac{A\tau}{2} \|u_x^{n+1}\|^2 + \frac{l\tau}{2} (v^{n+1}, u^{n+1}) \\
& + \frac{1}{4} g\tau^2 \sum_{\overline{\Omega_h}} D (u_x^{n+1})^2 = -\frac{1}{4} g\tau^2 \sum_{\overline{\Omega_h}} u_x^{n+1} u^{n+1} D_x. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

From the above relations follow the inequalities

$$\|v^{n+1}\|^2 + \frac{A\tau}{2} \|v_y^{n+1}\|^2 \leq \frac{1}{16} g\tau^2 \lambda_1^{-1} M_1^2 \|v^{n+1}\|^2, \quad (3.6)$$

$$\|u^{n+1}\|^2 + \frac{A\tau}{2} \|u_x^{n+1}\|^2 \leq \frac{1}{16} g\tau^2 \lambda_1^{-1} M_1^2 \|u^{n+1}\|^2 + \frac{l\tau}{2} \|v^{n+1}\| \|u^{n+1}\|, \quad (3.7)$$

where

$$M_1 = \max_{\Omega_h} \{D_{hx}, D_{hy}\}, \quad \lambda = \min_{\Omega_h} D_h.$$

If $\tau(\tau < 4\sqrt{\lambda_1/g}M_1^{-1})$ is sufficiently small, from (3.6) and (3.7) it follows that $\|v^{n+1}\| = \|u^{n+1}\| = 0$. In this case, employing the equations for $(\partial\zeta/\partial x)$ and $(\partial\zeta/\partial y)$, we find that $(\partial\zeta/\partial x)$ and $(\partial\zeta/\partial y)$ are equal to zero in the whole domain Ω_h .

Thus, we have proved that a homogeneous system has but a trivial solution, and, hence, that an inhomogeneous system is uniquely solvable for any right side²²).

Stability of the Difference Scheme (3.1)

Let us prove stability of the difference scheme (3.1). For definiteness it will be assumed that at an initial moment components of transport u , v and those of the level's horizontal gradients $(\partial\zeta/\partial x)$ and $(\partial\zeta/\partial y)$ are equal to zero²³.

²²Note: in the case of a uniform depth D (i. e. when $M_1 = 0$), system (3.1) can be uniquely solved for any τ .

²³Nonzero initial conditions will add (during conversion) the terms which can be included in the addends denoted by symbol f .

Let us multiply (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4) by $2\tau h^2 u^{n+1/2}$, $2\tau h^2 v^{n+1/2}$, and $2\tau h^2 u^{n+1}$ respectively, and sum up the resulting expressions over all points Ω_g . Then we add expressions one and two and expressions three and four. Employing formulae (3.2) and (3.3), and an easily verifiable expression

$$\begin{aligned} A\tau(u_x^k, u_x^{k+1/2}) &= A\tau \|u_x^{k+1/2}\|^2 - A\tau^2(u_{x\bar{t}}^{k+1/2}, u_x^{k+1/2}), \\ k &= 0, 1/2, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.8)$$

we get the basic energy identity

$$\begin{aligned} & \|w^{n+1}\|^2 - \|w^n\|^2 + \tau^2 \left(\|w_{\bar{t}}^{n+1/2}\|^2 + \|w_{\bar{t}}^{n+1}\|^2 \right) + \\ & + a\tau \left\{ \|w_x^{n+1/2}\|^2 + \|w_x^{n+1}\|^2 + \|w_y^{n+1/2}\|^2 + \|w_y^{n+1}\|^2 \right\} + \\ & + (B^{n+1/2})^2 + (B^{n+1})^2 + T^{n+1} + A\tau^2 \left\{ (u_{y\bar{t}}^{n+1/2}, u_y^{n+1/2}) + (v_{x\bar{t}}^{n+1/2}, v_x^{n+1/2}) + \right. \\ & \left. + (u_{x\bar{t}}^{n+1}, u_x^{n+1}) + (v_{y\bar{t}}^{n+1}, v_y^{n+1}) \right\} + B_1^{n+1/2} + B_1^{n+1}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

where

$$\begin{aligned} (u_{\bar{t}}^{k+1/2}) &= \frac{1}{\tau} (u^{k+1/2} - u^k), \quad k = n, n+1/2, \\ (B^{k+1/2})^2 &= \tau h^2 \sum_{\bar{\Omega}_h} R_1^k \left[(u_n^{k+1/2})^2 + (v_k^{k+1/2})^2 \right], \\ (B_1^{k+1/2})^2 &= \tau \left\{ l (u^{k+1/2}, v^{k+1/2} - v^k) + (f^{k+1/2}, w^{k+1/2}) - \right. \\ & \left. - (R_1^k \tilde{a}_1^{k+1/2}, u^{k+1/2}) - (R_1^k \tilde{a}_2^{k+1/2}, v^{k+1/2}) \right\}, \\ T^{n+1} &= -g\tau \left[\left(D \frac{\partial \zeta^n}{\partial x}, u^{n+1/2} \right) + \left(D \frac{\partial \zeta^n}{\partial y}, v^{n+1/2} \right) + \right. \\ & \left. + \left(D \frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial x}, u^{n+1} \right) + \left(D \frac{\partial \zeta^{n+1}}{\partial y}, v^{n+1} \right) \right]. \end{aligned}$$

The second term in the right side of (3.8) is as follows

$$\begin{aligned} A\tau^2 |(u_{x\bar{t}}^{k+1/2}, u_x^{k+1/2})| &\leq \frac{2A^2\tau^2}{h^2} \|u_x^{k+1/2}\|^2 + \frac{\tau^2}{2} \|u_{\bar{t}}^{k+1/2}\|^2, \\ k &= n, n+1/2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

The last summand in (3.9) is found like this:

$$\begin{aligned}
 |B_1^{k+1/2}| &\leq \frac{\tau}{2} \left\{ \epsilon_1^2 \|w^{k+1/2}\|^2 + \epsilon_1^{-2} \|f^{k+1/2}\|^2 + \right. \\
 &\quad + |l| (\|w^{k+1/2}\|^2 + \|w^k\|^2) + \frac{1}{2} \epsilon_2^2 \|w^{k+1/2}\|^2 + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \epsilon_2^{-2} \|\underline{a}^{k+1/2}\|^2 + r \lambda_1^{-2} \left[\max_{\Omega_h} |\underline{a}^{k+1/2}| (\|w^{k+1/2}\|^2 + \|w^k\|^2) \right] \right\} = \\
 &= C_\tau (\|w^{k+1/2}\|^2 + \|w^k\|^2) + C_1, \quad k = n, n+1/2, \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

where ϵ_1, ϵ_2 are any positive quantities, C and C_1 constants depending on the choice of ϵ_1, ϵ_1 and conditions of the problem. Let

$$b^n = u_x + v_y^n, \quad b^{n+1/2} = u_x^{n+1/2} + v_y^{n+1/2},$$

$$L_n = \sum_{k=0}^n b_k + \sum_{k=0}^{n-1} b^{k+1/2},$$

$$L^{n+1/2} = \sum_{k=0}^n b_k + \sum_{k=0}^n b^{k+1/2},$$

and indices D and D_x of any vector $\{v_h\}$ indicate that instead of $\{v_h\}$ we consider vectors $\{v_h \sqrt{D_h}\}$ and $\{v_h D_{hx}\}$, respectively.

Using relations (3.1.5), (3.1.6), (3.2), and (3.3) we rewrite the first term in the right side of (3.9):

$$T_\zeta^{n+1} = -\frac{g\tau^2}{2} (T_1^{n+1} - T_2^{n+1}), \quad (3.12)$$

where

$$\begin{aligned}
 T_1^{n+1} &= \left(L_D^{n+1}, b_D^{n+1} - b_D^{n+1/2} \right) - \left(b_D^{n+1}, b_D^{n+1/2} \right) - \|b_D^{n+1/2}\| - \\
 &\quad - \left(v_{yD}^{n+1}, u_{xD}^{n+1/2} \right) - \left(u_{xD}^{n+1}, v_{yD}^{n+1/2} \right) - 2 \left(v_{yD}^{n+1}, u_{xD}^{n+1} \right), \\
 T_2^{n+1} &= \left(L^{n+1}, u_{D_x}^{n+1/2} \right) + \left(L^{n+1}, u_{D_x}^{n+1} \right) - \left(L^{n+1}, v_{D_y}^{n+1/2} + v_{D_y}^{n+1} \right) - \\
 &\quad - \left(b^{n+1} + v_y^n + b^{n+1/2}, u_{D_x}^{n+1/2} \right) - \left(b_1^{n+1} + u_x^n + b^{n+1/2}, v_{D_y}^{n+1/2} \right) - \\
 &\quad - \left(v_y^{n+1}, u_{D_x}^{n+1} \right) - \left(u_x^{n+1}, v_{D_y}^{n+1} \right).
 \end{aligned}$$

Summing up the above equality over k through 0 to n , we get

$$\sum_{k=0}^n T_\zeta k + 1 = -\frac{g\tau^2}{4} \left[\|L_D^{n+1}\|^2 + \sum_{k=0}^n (s^{k+1} + 2T_2^{k+1}) \right], \quad (3.13)$$

where

$$s^{k+1} = \|u_{xD}^{k+1} - v_{yD}^{k+1}\|^2 - \|b^{k+1/2}\|^2 - 2(v_y^{k+1}, u_x^{k+1/2}) - 2(u_x^{k+1}, v_y^{k+1/2}).$$

For $|T_2^{k+1}|$ the following estimate is valid:

$$\begin{aligned} \frac{g\tau^2}{2} |T_2^{k+1}| &\leq M_1 \tau^3 \sqrt{\frac{g}{\lambda_1}} g \|L_D^{k+1}\|^2 + M_1 \tau \sqrt{\frac{g}{\lambda_1}} (\|w^{k+1}\|^2 + \|w^{k+1/2}\|^2) + \\ &+ \frac{5g\tau^2 M_1}{h} (\|w^{k+1}\|^2 + \|w^{k+1/2}\|^2). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Let the following condition be fulfilled:

$$\frac{A\tau}{h^2} < 1. \quad (3.15)$$

Then, after summing up relations (3.9) over k through 0 to n , and considering expressions (3.10)–(3.14) and the estimates appearing in s^k of difference derivatives in terms of the functions u , v , we get the following a priori estimate:

$$\begin{aligned} \|y^{n+1}\|^2 &\leq \left(\frac{2g \max_{\Omega_h} D_h \tau^2}{h^2} \right) + C_2(\epsilon_1, \epsilon_2, r, l) \tau + \\ &+ \leq M_1 \tau \sqrt{\frac{g}{\lambda_1}} + \frac{5g\tau^2 M_1}{h} \sum_{k=0}^n (\|y^{k+1}\|^2 + \|y^{k+1/2}\|^2) + C_3, \end{aligned} \quad (3.16)$$

where

$$\begin{aligned} \|y^{n+1}\|^2 &= \|w^{n+1}\|^2 + g \|L_D^{n+1}\|^2, \\ \|y^{n+1/2}\|^2 &= \|w^{n+1/2}\|^2 + g \|L_D^{n+1/2}\|^2, \end{aligned}$$

C_2 , C_3 are constants joining all constants in corresponding estimates. A similar inequality is valid, beginning with the layer $t = (n + 1/2)\tau$,

$$\|y^{n+1/2}\|^2 \leq \left(\frac{2g \max_{\Omega_h} D_h^2 \tau^2}{h^2} + C_2(\epsilon_1, \epsilon_2, r, l) \tau + \right.$$

$$+ M_1 \tau \sqrt{\frac{g}{\lambda_1} + \frac{5g\tau^2 M_1}{h}} \sum_{k=0}^n (||y^k||^2 + ||y^{k+1/2}||^2) + C_4. \quad (3.16')$$

Let us require that, in addition to (3.15), the following condition be fulfilled, too:

$$\frac{2g \max_{\Omega_h} D_h^2 \tau^2}{h^2} + C_2 \tau + M_1 \tau \sqrt{\frac{g}{\lambda_1} + \frac{5g\tau^2 M_1}{h}} < 1. \quad (3.17)$$

Then, considering the fact that (3.16) and (3.16') are difference approximations of the differential inequality

$$\frac{dz}{dt} \leq C_5(t)z + C_6(t)$$

with $z = \int_0^t ||w||^2 g ||L_D||^2 dt$, and using the finite difference analog of Lemma 1 in [7], we derive, on the basis of (3.16) and (3.16'), the following expression:

$$||y^k|| \leq C_7, \quad k = n; n+ = n; n = 0, 1, \dots, N = (T/\tau), \quad (3.18)$$

which ensures stability of the difference scheme (3.1) if conditions (3.15) and (3.17) are fulfilled. In (3.18), C_7 is a constant independent of k .

It will be remarked that with $D(x) = D_0 = \text{const}$, condition (3.17) can be reduced to²⁴

$$\frac{2gD_0\tau^2}{h^2} + C_2(\epsilon_1, \epsilon_2, r, l)\tau < 1. \quad (3.19)$$

Because of smallness of C_2 for small values of $\epsilon_1, \epsilon_2, r, l$ from (3.19) follows the Courant – Friedrichs – Levy criterion

$$\frac{2gD_0\tau^2}{h^2} < 1. \quad (3.20)$$

Fulfilment of condition (3.15), with $\tau, h \rightarrow 0$, naturally, involves fulfilment of (3.17) or (3.20). Therefore, one can take just one condition, (3.15), as stability criterion for scheme (3.1). However, in concrete calculations, when r and h take on fixed values, conditions (3.15) and (3.17) both should be checked.

²⁴For the wave components with a minimal possible wavelength equal to $2h$, a condition of stability equivalent to (3.19) was obtained in [8]. A general analysis of the dispersy equation corresponding to the linearized system (3.1) with constant coefficients is given in [5].

Convergence

In order to prove convergence of the difference solution w_h, ζ_h to a solution of problems (2.1)–(2.3), it will be supposed that problems (2.1)–(2.3) have a sufficiently smooth solution $\underline{w}^*(\underline{x}, t), \zeta^*(\underline{x}, t)$. Let $\underline{w}_h^*, \frac{\partial \zeta^*}{\partial x_h}, \frac{\partial \zeta^*}{\partial y_h}$ correspond on the grid with $\underline{w}^*, \frac{\partial \zeta^*}{\partial x}, \frac{\partial \zeta^*}{\partial y}$. Equalities (3.1) are correct for $\underline{w}_h^*, \frac{\partial \zeta^*}{\partial x_h}, \frac{\partial \zeta^*}{\partial y_h}$ with discrepancies to be denoted as $r_1^m, r_2^m, \rho_1^m, \rho_2^m$, respectively. These discrepancies vanish if $\tau, h \rightarrow 0$, when the solution \underline{w}^*, ζ^* is sufficiently smooth (e. g., when all functions and their derivatives appearing in the initial system are continuous). For

$$p_k = \underline{w}_h - \underline{w}_h^*, \quad \rho_{1h} = \frac{\partial \zeta}{\partial x_h} - \frac{\partial \zeta^*}{\partial x_h}, \quad q_{2h} = \frac{\partial \zeta}{\partial y_h} - \frac{\partial \zeta^*}{\partial y_h},$$

we can write the difference scheme

$$\begin{aligned} & \frac{p_1^{n+1/2} - p_1^n}{\tau} + \frac{r}{2D^2} |p^n + \underline{w}^{*n}| p_1^{n+1/2} = \\ & = -\frac{gD}{2} q_1^n + \frac{A}{2} \left(p_{1x\bar{x}}^n + p_{1y\bar{y}}^{n+1/2} \right) - \frac{l}{2} p_2^n + r_1^{n+1/2} - \\ & \quad - \frac{r}{2D^2} u^{*n+1/2} (|p^n + \underline{w}^{*n}| - |\underline{w}^{n+1/2}|), \end{aligned} \quad (3.21.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{p_2^{n+1/2} - p_2^n}{\tau} + \frac{r}{2D^2} |p^n + \underline{w}^{*n}| p_2^{n+1/2} = \\ & = -\frac{gD}{2} q_2^n + \frac{A}{2} \left(p_{2x\bar{x}}^{n+1/2} + p_{2y\bar{y}}^n \right) + \frac{l}{2} p_1^{n+1/2} + r_2^{n+1/2} - \\ & \quad - \frac{r}{2D^2} v^{*n+1/2} (|p^n + \underline{w}^{*n}| - |\underline{w}^{n+1/2}|), \end{aligned} \quad (3.21.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{p_2^{n+1} - p_2^{n+1/2}}{\tau} + \frac{r}{2D^2} |p^{n+1/2} + \underline{w}^{*n+1/2}| p_2^{n+1} = \\ & = -\frac{gD}{2} q_2^{n+1} + \frac{A}{2} \left(p_{2x\bar{x}}^{n+1/2} + p_{2y\bar{y}}^{n+1} \right) + \frac{l}{2} p_1^{n+1/2} + r_2^{n+1} - \\ & \quad - \frac{r}{2D^2} v^{*n+1} (|p^{n+1/2} + \underline{w}^{*n+1/2}| - |\underline{w}^{n+1/2}|), \end{aligned} \quad (3.21.3)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{p_1^{n+1} - p_1^{n+1/2}}{\tau} + \frac{r}{2D^2} |p^{n+1/2} + \underline{w}^{*n+1/2}| p_1^{n+1} = \\
& = -\frac{gD}{2} q_1^{n+1} + \frac{A}{2} \left(p_{1x\bar{x}}^{n+1} + p_{1y\bar{y}}^{n+1/2} \right) - \frac{l}{2} p_2^{n+1} + r_1^{n+1} - \\
& - \frac{r}{2D^2} u^{*n+1} (|p^{n+1/2} + \underline{w}^{*n+1/2}| - |\underline{w}^{n+1/2}|), \quad (3.21.4)
\end{aligned}$$

$$q_2^{n+1} = q_2^n - \frac{\tau}{2} \left(p_{1x\bar{y}}^{n+1/2} + p_{1x\bar{y}}^n + p_{2y\bar{y}}^{n+1} + p_{2y\bar{y}}^{n+1/2} \right) + \tau \rho_2^{n+1}, \quad (3.21.5)$$

$$q_1^{n+1} = q_1^n - \frac{\tau}{2} \left(p_{1x\bar{x}}^{n+1} + p_{1x\bar{x}}^{n+1/2} + p_{2y\bar{x}}^{n+1/2} + p_{2y\bar{y}}^{n+1/2} \right) + \tau \rho_1^{n+1}. \quad (3.21.6)$$

In order to reduce calculations, it will be supposed that $\Gamma = \Gamma$. Then boundary conditions for p_h can be presented in a form $p_h/\Gamma_h = 0$.

Let us multiply each equation of (3.21) by $2\tau h^2$ and a corresponding function, and then sum up the resulting expressions over the whole domain Ω_h . After conversions identical to those made in proving stability, we get inequalities which differ from (3.16) and (3.16') only in additional terms, i. e.

$$\|y^{n+1}\|^2 \leq C_8 \tau \sum_{k=0}^n (\|y^{k+1}\|^2 + \|y^{k+1/2}\|^2) + j^{n+1}, \quad (3.22)$$

$$\|y^{n+1/2}\|^2 \leq C_9 \tau \sum_{k=0}^n (\|y^k\|^2 + \|y^{k+1/2}\|^2) + j^{n+1/2}. \quad (3.22')$$

Here $\|y^{n+1}\|$, $\|y^{n+1/2}\|$ are found, analogously to (3.16), (3.16'), by substituting p_h for \underline{w}_h):

$$j^{n+1} = \tau \left[\sum_{k=0}^{n+1} (\underline{r}^k, \underline{p}^k) + \sum_{k=0}^n (\underline{r}^{k+1/2}, \underline{p}^{k+1/2}) \right] + g \max_{\Omega_h} D_h \tau^2 \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{i=0}^k (\underline{\rho}^i, \underline{\rho}^i),$$

$$j^{n+1/2} = \tau \left[\sum_{k=0}^n (\underline{r}^k, \underline{p}^k) + \sum_{k=0}^n (\underline{r}^{k+1/2}, \underline{p}^{k+1/2}) \right] + g \max_{\Omega_h} D_h \tau^2 \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{i=0}^k (\underline{\rho}^i, \underline{\rho}^i),$$

r and p being vectors with components $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}$, respectively.

Modulus j^{n+1} will be found as follows:

$$|j^{n+1}| \leq C_{10}\tau \sum_{k=0}^n (||\underline{p}^{k+1}||^2 + ||\underline{p}^{k+1/2}||^2) + j_1^{n+1},$$

where

$$j_1^{n+1} = \leq C_{11}\tau \sum_{k=0}^n (||\underline{r}^{k+1}||^2 + ||\underline{r}^{k+1/2}||^2 + ||\underline{\rho}^k||^2).$$

Similarly, we find $|j^{n+1/2}|$. By means of inequalities (3.22) and (3.22'), if τ ($\tau < \frac{1}{2} \max(C_8, C_9) + C_{10}$) is sufficiently small, we find the estimate $||y^k||$ in terms of j_1^k

$$||y^k|| \leq C_{12}j_1^k, \quad k = n, n+1/2; \quad n = 0, 1, \dots, N = \frac{T}{\tau}.$$

Assuming smoothness of a solution, we get $\frac{k}{1} \rightarrow 0$ if $\tau, h \rightarrow 0$. From here follows convergence of the difference solution $\underline{w}_h, \frac{\partial \zeta^*}{\partial x}_h, \frac{\partial \zeta^*}{\partial y}_h$ in difference norm.

Hence, we have proved convergence of the difference scheme (3.1).

An assumption of correspondence of Γ_h with Γ can be changed for a requirement of smoothness of Γ .

Using the methods described in [9, 10] one can prove convergence of the difference solution \underline{w}_h, ζ_h with the solution $\underline{w}^* \in \underline{W}_2^2(\Omega) \cap \underline{W}_2^1(\Omega)$, $\zeta^* \in L_2(\Omega)$ for any $t \in [0, T]$.

4. Results of Application of the Method

The method described here was tested in the North Sea and in four regions of the Arctic Seas, to be referred to as regions A, B, C, D . We have chosen these basins because, first, they are studied in more detail as regards tides and, second, because of a variety of conditions that cause tidal motions in these basins. Thus, here there are various forms of the bottom relief, a variety of sea lengths and coastline shape. Besides, it is essential that some basins are located in the region of "critical" latitude.

First of all, we shall give a brief account of the procedure by which we determined depths and velocity of tidal current in grid points. Depths were taken from bathymetric charts in points that are spaced half of a mesh size apart. Then, by smoothing over five points, we calculated

depths in grid points. Results of numerical experiments showed that such a procedure ensured sufficient smoothing of the bottom relief in the considered regions. A two- or three-fold smoothing did not practically change the results of calculation.

The necessary direction and velocity of the tidal current in points of the liquid contour were determined from hourly charts of the tidal current in the surface layer. The charts were made from observational data. In points of the liquid contour where such data were not available, the direction and velocity of the tidal current were found by interpolation of their values in neighboring grid points.

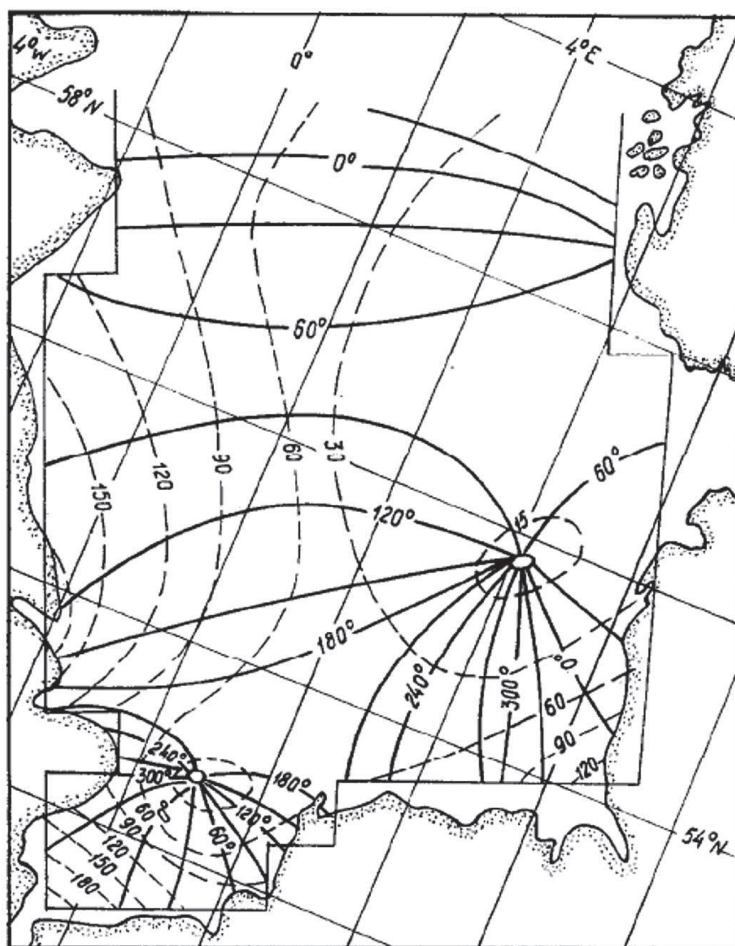


Fig. 1. A chart of isoamplitudes and co-tidal lines of wave M_2 in the North Sea

The mesh length in the North Sea was taken equal to 74 km, in the Arctic basins 50 km; the time interval in both cases was 12 min. Coefficients of the bottom and horizontal turbulent friction in the considered regions were assumed to be fixed, and equal to $3 \cdot 10^{-3}$, $10^8 \text{ cm}^2/\text{sec}$ (in the North Sea) and $3 \cdot 10^{-3}$, $8.5 \cdot 10^8 \text{ cm}^2/\text{sec}$ (in the Arctic basins), respectively. These values were chosen by performing a series of experiments in such a way that an error in calculating velocity of the tidal current in check points was minimal.

We present results of comparison of the calculated values of tidal characteristics with the data of factual measurements. In Fig. 1 is shown a chart of isoamplitudes and co-tidal lines of the main lunar semidiurnal wave M_2 in the North Sea. First of all, it strikes one that the pattern of tidal oscillations we have got is very close to that obtained in [1] on the basis of all available observational data.

We show in Table I a comparison of calculated and observed amplitudes and phases of the level's tidal oscillations in 29 points of the North Sea coast. The table also presents relative errors in calculation of amplitudes in per cent and errors in calculation of phases per hour. One can see that, in most cases, there is a satisfactory agreement between calculated and observed data. Fairly large disagreement observed at Hunstanton Pier, Cromer, and Delfzijl seems to be due to local peculiarities of the sea bottom relief and of the coastline configuration, which could not be considered in calculations.

Table 1. A comparison of calculated and observed tidal oscillations of the level at different points of the North Sea Coast

Name of point	Coordinates		Amplitude, cm			Phase, dg		
	Latitude	Longitude	Calc.	Obs.	Rel. err. %	Calc.	Obs.	Rel. err. per hour
Aberdeen	57°09'	2°05' W	113	131	21	30	25	0,17
Arbroath	56°03'	2°35' W	130	155	16	65	44	0,7
Dunbar	56°00'	2°31' W	147	161	9	75	56	0,6
Blyth	55°07'	1°21' W	160	160	0	87	87	0
R. Tyne	55°01'	1°24' W	165	158	4	90	91	0,03
R. Tees								
Entrance	54°36'	1°10' W	170	169	1	100	98	0,07
Whitby	54°29'	0°37' E	175	165	6	105	103	0,07
Skegness	53°09'	0°21' E	150	213	30	180	169	0,37

Continuation of table 1.

Name of point	Coordinates		Amplitude, cm			Phase, dg		
	Latitude	Longitude	Calc.	Obs.	Rel. err. %	Calc.	Obs.	Rel. err. per hour
Hunstanton Pier	52°56'	0°29' E	130	218	40	204	180	0,80
Cromer	52°56'	1°18' E	105	159	34	235	189	1,54
Winterton	52°43'	1°41' E	86	102	16	233	211	0,74
Lowestoft	52°29'	1°46' E	75	70	7	285	259	0,87
Harwich	51°57'	1°17' E	138	130	6	325	326	0,03
Southend	51°31'	0°45' E	185	201	8	326	354	0,93
Ramsgate	51°20'	1°25' E	197	187	5	340	342	0,07
Oostend	51°14'	2°55' E	185	187	1	10	5	0,17
Zeebrugge	51°20'	3°12' E	157	169	7	20	15	0,17
Vlissingen	51°27'	3°36' E	135	172	22	35	32	0,10
Brouwer-shaven	51°44'	3°54' E	98	115	15	55	57	0,07
Hoek van Holland	51°59'	4°07' E	79	80	1	60	64	0,13
Katwijk	52°12'	4°24' E	76	68	12	89	81	0,27
Ijmuiden	52°28'	4°35' E	65	68	4	110	106	0,13
Der Helder West	52°58'	4°45' E	55	53	4	169	159	0,33
Terschelling	53°22'	5°13' E	58	69	16	212	222	0,33
Delfzijl	53°20'	6°56' E	85	125	32	260	308	1,60
Helgoland	54°11'	7°53' E	95	99	4	330	316	0,47
Roter sand								
Leuchtturm	53°51'	8°05' E	118	129	9	328	316	0,40
Esbjerg	55°29'	8°28' E	54	60	10	30	39	0,30
Lister	58°06'	6°36' E	7	4	75	58	51	0,23

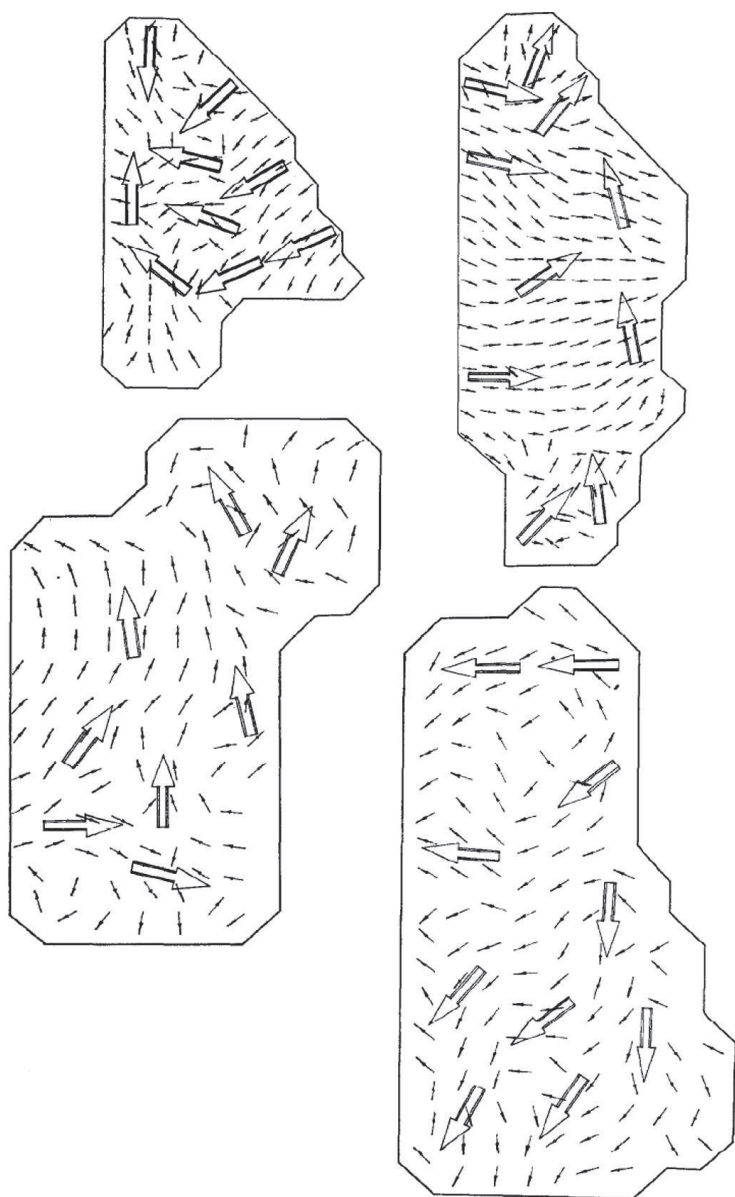


Fig. 2. The direction of tidal currents in four regions of the Arctic Seas at 0h of a tidal period. Small arrows show the results of calculation, big ones show observational data

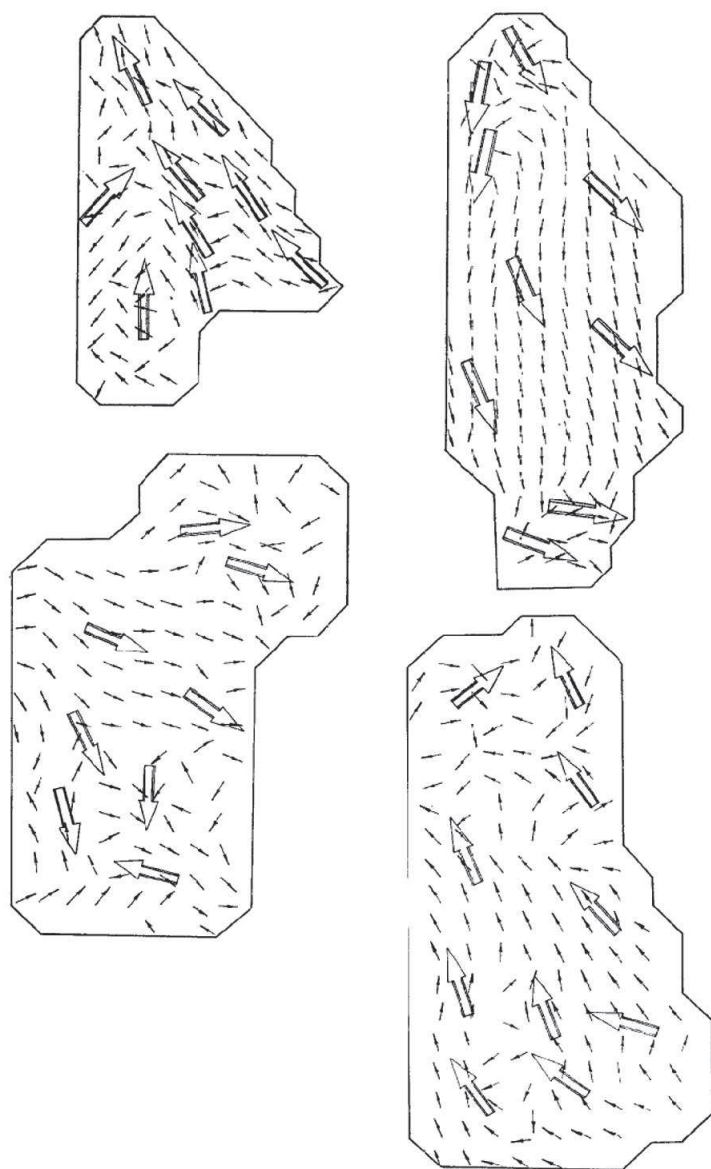


Fig. 3. The direction of tidal currents in four regions of the Arctic Seas at 3h of a tidal period. Small arrows show the results of calculation, big ones show observational data

Analysis of Figs. 2 and 3, which illustrate calculated and observed data of velocity vector of tidal current for wave M_2 in the four regions of the Arctic Seas, shows that disagreement between calculated and

observed data is, as a rule, not too large in central parts of the considered regions, and it increases in the areas close to the coast. This regularity is especially notable in region *C*, in whose western part disagreement between calculated and observed characteristics of the current appears to be the greatest. According to take-off data, here there is a notable increase in the velocity of tidal current, due to some peculiarities of the bottom relief which have not been considered because their horizontal scale does not exceed the mesh size.

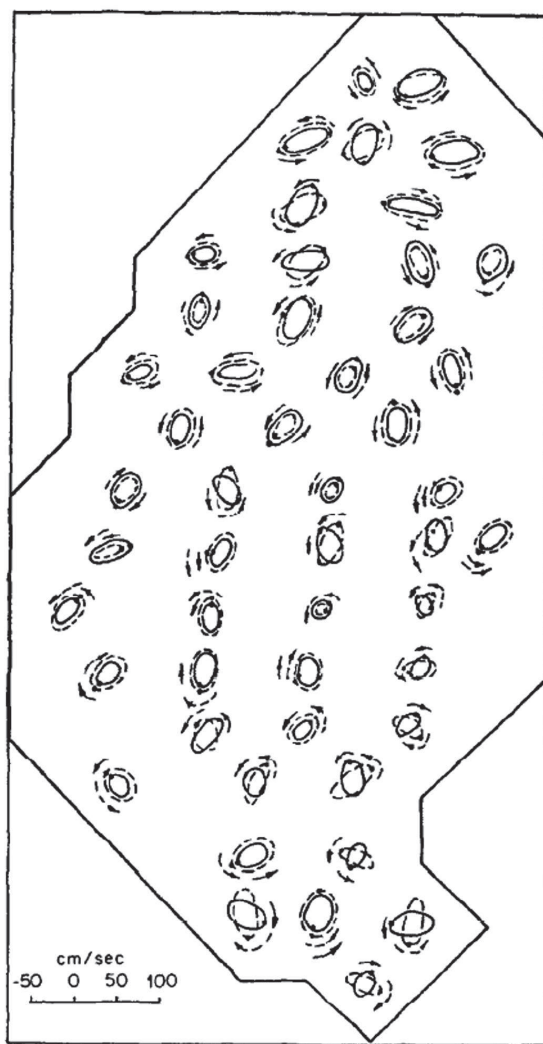


Fig. 4. Ellipses of the tidal current calculated with the help of two resistance laws. See the text for explanation

Another reason for essential disagreement between calculated and observed values of the velocity in the sea areas close to the coast might be errors of observations and of the analysis. These errors become especially appreciable with low velocities of tidal currents typical of the Arctic Seas. It is not excepted, however, that some responsibility ought to be placed upon the method itself, in which some assumptions have been made (such as those associated with the use of fixed values for the coefficients of bottom and horizontal turbulent friction within the considered water basins). In this context, of some interest is Fig. 4, which shows ellipses of tidal current for wave M_2 calculated with regard to the dependence of the bottom friction coefficient on the external parameters of the bottom boundary layer (see [6]), and, consequently, on horizontal coordinates. In the same figure, the dashed line shows ellipses of tidal current obtained with the help of the well known quadratic resistance law. One can see that there is very little difference between the results of the two calculations. This may be due to the presence of large depths in the main part of the considered region, when the bottom friction does not exert any essential influence upon formation of tidal motions.

Southern and southwestern parts of the water basin near the mainland are most representative from the point of view of comparison of the two resistance laws. Here the sea depth is of the order of several tens of meters, and the effect of the friction is essential. Even at a first glance at this figure one can see a striking difference between the tidal current ellipses. In spite of the restrictions mentioned above, application of the method suggested in [5] for calculation of tidal motions in different physical and geographical conditions proved to be worthwhile. The charts of isoamplitudes and co-tidal lines, as well as the charts of tidal currents, made on the basis of the computed results are, generally speaking, in good agreement with observational data, which allows us to recommend this method for performing mass calculations.

REFERENCES

1. Hansen W. Gezeiten und Gezeitenströme der halbtägigen Hauptmondflut M^2 in der Nordsee, Deutsch Hydr. Zeitschr. Ergänzungsheft, 1952. V. 1. Pp. 1–46.
2. Hansen W. Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und der Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen // Tellus. 1956. V. 8. Pp. 287–300.

3. Marchuk G. I. About a numerical solution of the Poincare problem for ocean circulation // Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 1969. V. 185. Pp. 1041–1044.
4. Kagan B. A. Hydrodynamic models of tidal motions in the sea. L.: G-metizdat, 1968.
5. Marchuk G. I., Kagan B. A., Tamsalu R. E. A numerical calculation of tidal motions in adjacent seas // Izv. Akad. Nauk SSSR Fiz. Atmosf. i Okeana. 1969. V. 5. Pp. 694–703.
6. Kagan B. A. On the resistance law for the tidal flow // Izv. AN, FAO. 1972. V. 8. Pp. 533–542.
7. Ladyzenskaja O. A. Mathematical aspects of the dynamics of viscous incompressible fluid. M.: Nauka, 1970.
8. Dvorkin E. N., Kagan B. A., Kleshyova G. P. The calculation of the tide motions in Arctic Seas // Izv. Akad. Nauk. SSSR Fiz. Atmosf. i Okeana. 1972. V. 8. Pp. 298–306.
9. Rivkind V. Ya. On an estimate of the rate of conversion of homogeneous difference scheme for elliptic and parabolic equations with discontinuous coefficients // Boundary Value Problem and Integral Equations / V.I. Smirnov, Ed. N. Y.: Plenum, 1968.
10. Ladyzenskaja O. A., Rivkind V. Ya. On the alternating directions method for the calculation in cylindrical coordinates of the flow of a viscous incompressible fluid // Izv. AN SSSR. Ser. Mat. 1971. V. 5. Pp. 259–269.

MATHEMATICAL MODELLING OF THE WORLD OCEAN GENERAL CIRCULATION: NUMERICAL TECHNIQUE AND MULTIPLE EQUILIBRIA OF MODEL SOLUTIONS²⁵

A global ocean general circulation model with σ -coordinates is presented. It is designed for very long integration periods. Accordingly the numerical techniques applied are very efficient, using implicit timestepping and operator splitting methods. The model is driven at the surface by wind-stress and by restoring temperature and salinity to the observed annual cycle. The cyclo-stationary solution of the model is

²⁵*Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2003, v. 18, No. 4, pp. 307–335. Jointly with J. Schröter and V. B. Zalesny.

shown to depend on the initial conditions even after many thousand years of integration. Four different solutions are briefly reported in this paper. The existence of multiple equilibria has been reported previously only under mixed boundary conditions. Our findings show that care is required when studying the sensitivity of the oceanic circulation.

1. Introduction

In recent years, the investigation of the global ocean general circulation (OGC) has received much attention. The thermohaline component of the ocean circulation plays a key role in climatic changes on decadal and centennial time scales. It is therefore crucial to investigate the long-term oceanic variability and its sensitivity to internal conditions and external forces.

Noteworthy are two streams of research in OGC analysis. The approach used in the first stream is to simulate the thermohaline circulation (THC) numerically and to study its general structure and time-space variability in order to improve a physical understanding of ocean dynamics. The second approach is to investigate theoretical aspects of the behavior of model solutions and to construct cost-effective computational algorithms for qualitative studies and numerical analysis.

The main part of current investigations is devoted to the physical aspects of the OGC. Two interesting peculiarities of the oceanic variability have been found and discussed. There is the occurrence of nearly periodic oscillations of model solutions (self-sustained oscillations) and the existence of multiple equilibria of the THC (Bryan, 1986; Weaver and Sarachik, 1991; Cessi and Young, 1992; Huang and Chou, 1994; Schmidt and Mysak, 1996; Drijfhout et al., 1996). Decadal and centennial ocean variabilities have been found in many numerical models, and the important role of freshwater flux in the THC has been examined in the presence of various types of wind and thermal forcings. Dependence of the long-term oceanic variability (steady state, regular oscillations, chaotic behavior) on the model input parameters, sea surface boundary conditions, peculiarities of the deep convection processes and the parameterization of vertical and horizontal diffusion has been found (Weaver and Sarachik, 1991; Huang and Chou, 1994; Lenderink and Haarsma, 1994; Schmidt and Mysak, 1996). The existence of multiple equilibrium states of the ocean THC, the problems associated with its sensitivity and stability have been investigated in many papers (Stommel, 1961;

Bryan, 1986; Weaver and Sarachik, 1991; Lenderink and Haarsma, 1994; Schmidt and Mysak, 1996).

We will not go into details of this interesting physical problem, but we will point out the following mathematical feature. In all previous ocean model studies, multiple equilibria appear only under mixed boundary conditions where the boundary condition for the model sea surface temperature is of Newtonian type, while a Neumann-type condition is used for model sea surface salinity (Weaver and Sarachik, 1991).

Although the sensitivities of various ocean THC numerical models have been examined in different papers, many aspects still call for further investigation. The origin of the THC variability on decadal and centennial time scales is not well understood yet. The main conditions for the existence of the multiple steady states and the extent to which the ocean THC variability depends on the initial/boundary conditions and input model parameters are also unclear.

Here we present a numerical model of the World Ocean general circulation and describe numerical experiments with this model (for spatial resolution of 5×4 degrees and 12 layers) to determine the equilibrium global circulation.

The model is based on the primitive equation system of thermohaline ocean dynamics. The governing equations are written in a bottom-following coordinate system, i. e. the σ -system.

The special symmetrized form of the differential equations is used in the model. The operator of the problem *prior to* its space approximation is represented as the sum of suboperators of simpler structure. The numerical algorithm of the model is based on implicit splitting schemes. Grid approximations of the split problems with respect to space variables obey the main conservation law that holds for the original system. The space approximation of the model equations is realized on a modified C grid (modification is made for the Coriolis term and geopotential lateral diffusion in the bottom-following system).

A series of numerical experiments are performed. Fluxes are prescribed (either explicitly or implicitly) at the ocean surface for momentum, temperature and salinity. The latter two are given in the form of "restoring" or "relaxation" conditions. We describe the results of the numerical integration of the model over a period of a few thousand years of "model time", which is necessary for the solution to stabilize. Four numerical runs are carried out under identical forcing. Three of them differ in choice of their initial conditions for temperature and salinity, the fourth

is made to study the influence of the steep bottom relief in a σ -coordinate ocean model.

Our numerical experiments show that the system has different equilibrium states corresponding to different initial conditions. Our first experiment is initialized with a temperature of 4 °C and salinity of 34 *psu* (denoted below as light ocean), the second experiment was initialized with a temperature of 0 °C and salinity of 35 *psu* (heavy ocean), and the third with a temperature of 8 °C and salinity of 30 *psu* (super light ocean). In the fourth experiment the heavy ocean experiment is repeated with steep bottom relief (Fig. 1).

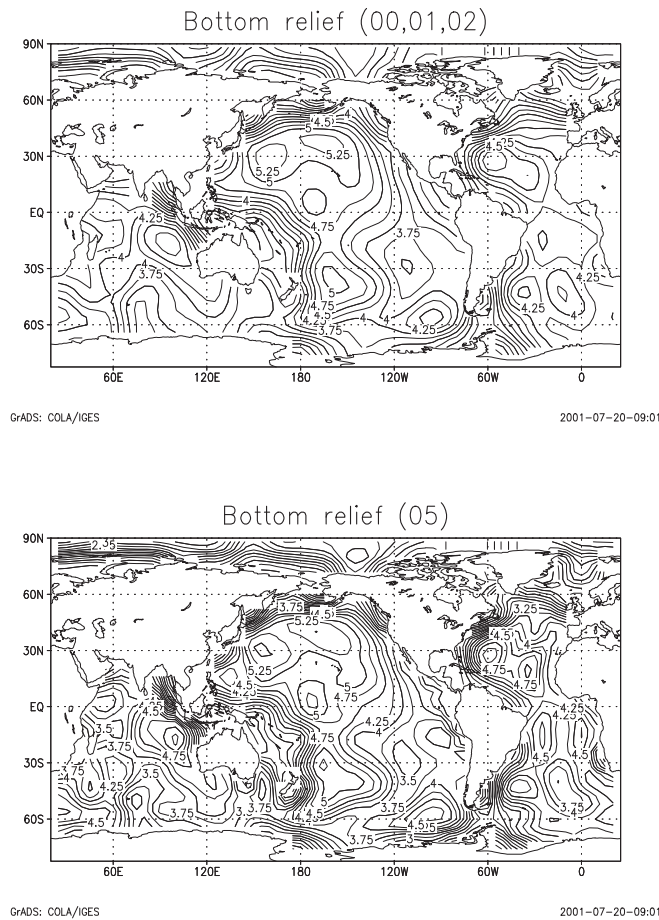


Fig. 1. Bottom relief structure: (a) 3 times smoothing, (b) 1 time smoothing (case “steep relief”)

2. Mathematical model of ocean general circulation

We pose the differential OGC problem in the traditional form using the hydrostatic and Boussinesq approximations. In the spherical coordinates λ, θ, z the equations are written:

$$\frac{du}{dt} - (l - m \cos \theta) v = -\frac{m}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \nu_u \frac{\partial u}{\partial z} + F^u, \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} + (l - m \cos \theta) u = -\frac{n}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \nu_v \frac{\partial v}{\partial z} + F^v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = g\rho, \quad (3)$$

$$m \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + n \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{m} \right) \right] + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + F^T, \quad (5)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} + F^S, \quad (6)$$

$$\rho = f(T_{real}, S, p) \quad \text{in the domain} \quad D(\lambda, \theta, z), \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + mu \frac{\partial}{\partial \lambda} + nv \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z}, \\ F^* &= m^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu_* \frac{\partial^*}{\partial \lambda} + mn \frac{\partial}{\partial \theta} \mu_* \frac{n}{m} \frac{\partial^*}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

We consider the system of equations (1)–(7) on the time interval $(0, t]$ in the three-dimensional domain D . The domain D is bounded by the piecewise lateral boundary ∂D that is composed of the sea surface $z = 0$, the lateral surface Σ , and the bottom relief $H(\lambda, \theta)$. We supplement the above equations by the following boundary conditions:

for $z = 0$

$$\nu \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\tau_\lambda}{\rho_0}, \quad \nu \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\tau_\theta}{\rho_0}, \quad w = 0, \quad (8)$$

$$\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha_T (T - T_S), \quad \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} = \alpha_S (S - S_S); \quad (9)$$

for $z = H(\lambda, \theta)$

$$w = m \frac{\partial H}{\partial \lambda} u + n \frac{\partial H}{\partial \theta} v, \quad (\mathbf{D}u, \mathbf{n}_H) = 0, \quad (\mathbf{D}v, \mathbf{n}_H) = 0, \quad (10)$$

$$(\mathbf{D}T, \mathbf{n}_H) = 0, \quad (\mathbf{D}S, \mathbf{n}_H) = 0; \quad (11)$$

at the lateral surface Σ

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n}_\Sigma) = 0, \quad (\nabla u, \mathbf{n}_\Sigma) = 0, \quad (\nabla v, \mathbf{n}_\Sigma) = 0, \quad (12)$$

$$(\nabla T, \mathbf{n}_\Sigma) = 0, \quad (\nabla S, \mathbf{n}_\Sigma) = 0 \quad (13)$$

and the initial conditions for $t = 0$

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad T = T_0, \quad S = S_0. \quad (14)$$

Here λ is the longitude, $\theta = 90^\circ + \psi$, where ψ is the latitude, z is the vertical downward coordinate, (u, v, w) is the velocity field, T is the potential temperature, S is salinity, p is pressure, ρ is density, T_{real} is *in situ* temperature, where $T = T_{real} - 1.2 \cdot 10^{-6} z$ (Maier-Reimer et al., 1993), density is given by the UNESCO-80 formula; $\nu_u, \nu_v, \nu_T, \nu_S$ are the coefficients of vertical turbulent diffusivity; $\mu_u, \mu_v, \mu_T, \mu_S$ are the corresponding coefficients of horizontal diffusivity; l is the Coriolis parameter: $l = -2\Omega \cos \theta$; $m = \frac{1}{R \sin \theta}$, $n = \frac{1}{R}$, R is the Earth radius,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_H &= -m \frac{\partial H}{\partial \lambda} \mathbf{i}_\lambda - n \frac{\partial H}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \mathbf{i}_z, \\ \mathbf{n}_\Sigma &= \mathbf{i}_\lambda \cos(\mathbf{n}_\Sigma, \mathbf{i}_\lambda) + \mathbf{i}_\theta \cos(\mathbf{n}_\Sigma, \mathbf{i}_\theta), \\ \mathbf{D}\phi &= \mu_\phi \left(m \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \mathbf{i}_\lambda + n \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta \right) + \nu_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{i}_z; \\ \nabla \phi &= \mu_\phi \left(m \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \mathbf{i}_\lambda + n \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta \right). \end{aligned} \quad (15)$$

The equation of state is based on the UNESCO-80 formula and has the form (Gill, 1982):

$$\rho(T_{real}, S, p) = \frac{\rho(T_{real}, S, 0)}{[1 - p/K(T_{real}, S, p)]},$$

where $p = g\rho z$ is the pressure at depth z , $K(T_{real}, S, p)$ is a modulus of elasticity.

Expressions for $\rho(T_{real}, S, 0)$ and $K(T_{real}, S, p)$ are given in (Gill, 1982).

Equations (1)–(7) follow from the classic hydrodynamical equations for a rotating fluid under simplifications traditionally used in oceanography. These include the Boussinesq, incompressibility, hydrostatic, rigid lid, heat and salt transport-diffusion approximations (taking into account linear parameterizations of momentum and heat exchange in the framework of the hypotheses for turbulent viscosity and diffusivity).

We assumed that seawater is always stably stratified with respect to potential density. From the mathematical point of view this assumption leads to the necessity to add or reformulate the problem through the parameterization of the convection process, which is not explicitly described by equations (1) – (7).

To ensure that $\frac{\partial \rho}{\partial z} > 0$, we assume that ν_T, ν_S are nonlinear functions depending on the potential density gradient (Schmidt and Mysak, 1996):

$$\nu_T = \nu_S \equiv \nu_{min} \exp \left(\alpha_1 [1 - \tanh(\alpha_2 \frac{\partial \rho}{\partial z})] \right), \quad (16)$$

where ν_{max} , ν_{min} , α_1 , α_2 are positive constants, $\nu_{max} \gg \nu_{min}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2} \ln[\nu_{max}/\nu_{min}]$.

3. Numerical technique

There are two key features of the ocean model presented: symmetrized representation of equations in σ -coordinates and the numerical algorithm based on splitting by physical processes and geometrical coordinates. The σ -transformation introduced into atmospheric models by Phillips (1957) more than 40 years ago has found wide application in solving the problems of coastal oceanography (Blumberg, Mellor, 1987; Beckmann et al., 1999). This transformation is also used in the models of ocean general circulation (Haidvogel et al., 1991), though these models are less popular than the z -system.

The advantage of this transformed coordinate system from the computational point of view is evident. There is no longer the problem of having a vertical coordinate level intersect the ocean bottom because the $\sigma = 1$ level follows the model's orography precisely. It permits a natural treatment of the bottom boundary layer, an accurate implementation of the bottom boundary conditions, and a simple numerical description of the model arrays with respect to the vertical. However, numerical

σ -models have difficulty in representing the horizontal pressure gradient (HPG) because of its more complicated structure (Griffies et al., 2000).

As a rule, this leads to two undesirable consequences: a significant truncation error in the horizontal pressure gradient terms and the deterioration of the computational stability of σ -models.

A truncation error occurring in horizontal pressure gradient terms results currents in error also. This, in turn, leads to distortion of the local velocity field where continents, shelves, and submarine mountains are encountered. All σ -models including our model have this disadvantage. We realize that it is useless to eliminate truncation errors in the pressure gradients for low spatial resolution. Therefore our main efforts are directed toward developing a stable efficient computational algorithm.

The deterioration of the computational stability of σ -models is largely due to the distortion of the discrete analog of the integral relation for total energy (in the particular case the conservation law), which is also connected with the complex structure of the horizontal pressure gradient terms. We overcome this difficulty by combining the special representation of the HPG with an implicit splitting scheme.

There are several forms of the HPG representation (see, for example, Haidvogel and Beckmann, 1999). In our model the choice of the HPG representation is governed by the semi-divergent form of the heat/salt transport operator. We say that this form is a symmetrized one. It leads to a finite difference scheme which has two important properties:

(*) the discrete law of conservation of total energy is valid, in the particular case, when an equation for potential density can be introduced instead of equations for heat and salt;

(*) there is no truncation error in the case of the horizontally uniform, linearly depth-stratified ocean with arbitrary bottom relief.

3.1. An ocean global circulation model with a bottom-following σ -coordinate

The OGC problem that is formulated in the form (1)–(12) has been used in many previous investigations (Bryan, 1969; Sarkisyan et al., 1977; Andrich et al., 1988; Golubeva et al., 1992; Drijfhout et al., 1996). In this paper we use the transformed form of the equations for the σ -system of coordinates λ, θ, σ , where $\sigma = z/H(\lambda, \theta)$.

Upon transition to the new coordinates, (1)–(12) give (Zalesny, 1996)

$$H \frac{du}{dt} - H(l - m \cos \theta u)v = -H \frac{m}{\rho_0} \left[\frac{\partial p}{\partial \lambda} - g \frac{\partial H}{\partial \lambda} \sigma \rho \right] +$$

$$+ \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_u \frac{\partial u}{\partial \sigma} + F_1^u, \quad (17)$$

$$H \frac{dv}{dt} + H(l - m \cos \theta u)u = -H \frac{n}{\rho_0} \left[\frac{\partial p}{\partial \theta} - g \frac{\partial H}{\partial \theta} \sigma \rho \right] +$$

$$+ \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_v \frac{\partial v}{\partial \sigma} + F_1^v, \quad (18)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = gH\rho, \quad (19)$$

$$m \left[\frac{\partial Hu}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{nHv}{m} \right) \right] + \frac{\partial w_1}{\partial \sigma} = 0, \quad (20)$$

$$H \frac{dT}{dt} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_T \frac{\partial T}{\partial \sigma} + F_1^T, \quad (21)$$

$$H \frac{dS}{dt} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_S \frac{\partial S}{\partial \sigma} + F_1^S, \quad (22)$$

$$\rho = f(T_{real}, S, p) - \rho_0 \quad in \quad D_1(\lambda, \theta, \sigma), \quad (23)$$

where

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + mu \frac{\partial}{\partial \lambda} + nv \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{H} w_1 \frac{\partial}{\partial \sigma},$$

$$w_1 = w + m\sigma \left[\frac{\partial H}{\partial \lambda} u + \frac{n}{m} \frac{\partial H}{\partial \theta} v \right]. \quad (24)$$

The term, which describes the horizontal turbulent heat and salt exchange, F^T, F^S , in the new coordinates has the form:

$$F_1^T = \frac{m^2}{H} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \mu_T H \frac{\partial T}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\mu_T \sigma \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\mu_T \sigma \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\mu_T}{H} \sigma^2 \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) \left. \right] + \frac{mn}{H} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \mu_T H q \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_T \sigma q \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) - \right.$$

$$- \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\mu_T \sigma q \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\mu_T}{H} \sigma^2 \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2 q \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) \left. \right],$$

$$q = \frac{n}{m}. \quad (25)$$

We rewrite the boundary conditions as follows. Along the continent boundaries parallel to the θ -axis:

$$\mu_T \left[H \frac{\partial T}{\partial \lambda} - \frac{\partial H}{\partial \lambda} \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right] = 0. \quad (26)$$

Along the continent boundaries parallel to the λ -axis:

$$\mu_T q \left[H \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial \theta} \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right] = 0. \quad (27)$$

For $\sigma = 1$:

$$\begin{aligned} -\frac{m^2}{H} \mu_T \left[\sigma \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{\partial T}{\partial \lambda} - \frac{\sigma^2}{H} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \sigma q^2 \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - \frac{\sigma^2 q^2}{H} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right] + \frac{1}{H^2} \nu_T \frac{\partial T}{\partial \sigma} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Total energy conservation. For the purpose of illustration and to gain a better understanding we shall consider an asymptotic case.

(*) Assume that all the diffusivity coefficients $\nu_u, \nu_v, \nu_T, \nu_S, \mu_u, \mu_v, \mu_T, \mu_S$ are zero in (17)–(23). Thus, we have only the kinematic boundary conditions

$$w_1 = 0 \quad \text{for} \quad \sigma = 0, \quad \sigma = 1, \quad (29)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n}_\Sigma) = \mathbf{0} \quad \text{at} \quad \Sigma. \quad (30)$$

(*) For simplicity assume that the function $f(T, S)$ in the equation of state (7) does not depend on pressure and has bounded derivatives with respect to T and S . In this particular case, instead of two equations for temperature and salinity, we can introduce one equation for density.

Then using (17)–(23) with the boundary conditions (29)–(30), we can show that the following conservation law holds:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{D_1} \left(H \rho_0 \frac{u^2 + v^2}{2} - \sigma g H^2 \rho \right) dD = 0, \quad (31)$$

$$dD = \frac{1}{mn} d\lambda d\theta d\sigma.$$

3.2. Symmetrization of the σ -coordinate ocean model

In the process of constructing numerical models one can identify three important steps: the choice of a form of governing equations, the approximation of the equations with respect to space, and the choice of a method for integrating the model with respect to the time.

The choice of the form of governing equations can consist of a number of steps. These include the choice of a coordinate system convenient for solving the formulated problem from the physical and mathematical points of view, the choice of a special representation of equations convenient for the subsequent approximation with respect to space, and the stabilization or ϵ -regularization of the problem for improving the properties of its numerical solution.

Because our purpose is to simulate equilibrium regimes of the global ocean circulation, it is necessary to construct and use efficient stable numerical algorithms and models. Such models should approximate the governing equations with respect to space, have low computational cost, and be stable as $t \rightarrow \infty$.

To improve stability of the numerical procedure, we demand that the discrete analogue of the total conservation law (31) should hold for the discrete approximation of the problem (17)–(23). Moreover, because our numerical solution is based on the operator splitting method, we demand that this property should be satisfied for each operator at each stage of splitting.

It is easier to satisfy this property if the equations are transformed to the symmetrized form before the problem is approximated with respect to space variables.

The procedure may be illustrated with the following example. Consider the particular case of (17)–(23) with inviscid linear momentum equations. Suppose that density in the equation of state (23) does not explicitly depend on pressure and all the diffusivity terms are neglected. Then instead of equations for temperature and salinity one can introduce an equation for potential density. We have

$$\frac{\partial u}{\partial t} - lv = -\frac{m}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} - g \frac{\partial \sigma H}{\partial \lambda} \rho \right), \quad (17a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + lu = -\frac{n}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} - g \frac{\partial \sigma H}{\partial \theta} \rho \right), \quad (18a)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} - g \frac{\partial \sigma H}{\partial \sigma} \rho \right), \quad (19a)$$

$$m \left[\frac{\partial H u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{n H v}{m} \right) \right] + \frac{\partial w_1}{\partial \sigma} = 0, \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} H \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (m u H \rho) + m u H \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (n v H \rho) + n v H \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \sigma} (w_1 \rho) + w_1 \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right] = 0, \end{aligned} \quad (21a)$$

where the horizontal pressure gradients in (17a), (18a) are represented in terms of potential density.

Note that the density equation (21a) is written in the semi-divergent form. In a computational sense, the semi-divergent representation for the tracer transport equation is rather convenient. It allows one, for example, to split (21a) with respect to the coordinates λ, θ, σ into three locally one-dimensional equations with non-negative definite operators (Marchuk, 1980).

It is easy to verify that the operator in (17a)–(21a) is energetically neutral and the conservation law (31) holds. This property has to be conserved for discrete model treatment.

It is rather easy for this property to be satisfied for the finite difference approximation of equations (17a)–(21a) if we proceed as follows. We represent the density-dependent terms in the right-hand sides of (17a)–(19a) in accordance with the semi-divergent representation of the density transport equation. We have

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \underbrace{lv}_1 + \underbrace{\frac{m}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial \lambda}}_2 = \frac{mg}{2\rho_0} \left(\underbrace{\frac{\partial \sigma H}{\partial \lambda} \rho}_5 - \underbrace{\sigma H \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}}_6 \right), \quad (17b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{lu}_1 + \underbrace{\frac{n}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial \theta}}_3 = \frac{ng}{2\rho_0} \left(\underbrace{\frac{\partial \sigma H}{\partial \theta} \rho}_7 - \underbrace{\sigma H \frac{\partial \rho}{\partial \theta}}_8 \right), \quad (18b)$$

$$\underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial \sigma}}_4 = \frac{g}{2\rho_0} \left(\underbrace{\frac{\partial \sigma H}{\partial \sigma} \rho}_9 - \underbrace{\sigma H \frac{\partial \rho}{\partial \sigma}}_{10} \right), \quad (19b)$$

$$m \left[\underbrace{\frac{\partial H u}{\partial \lambda}}_2 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{n H v}{m} \right)}_3 \right] + \underbrace{\frac{\partial w_1}{\partial \sigma}}_4 = 0, \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} H \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} m \left(\underbrace{\frac{\partial u H \rho}{\partial \lambda}}_5 + \underbrace{u H \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}}_6 \right) + \frac{1}{2} n \left(\underbrace{\frac{\partial v H \rho}{\partial \theta}}_7 + \underbrace{v H \frac{\partial \rho}{\partial \theta}}_8 \right) + \\ + \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial w_1 \rho}{\partial \sigma}}_9 + \underbrace{w_1 \frac{\partial \rho}{\partial \sigma}}_{10} \right) = 0, \end{aligned} \quad (21b)$$

where

$$p_1 = p - \frac{g}{2} \sigma H \rho.$$

We say that equations (17b)–(21b) are the symmetrized form of original equations (17a)–(21a). The terms marked by identical numbers are in pairs energetically neutral. When we take the inner product of (17b)–(21b) and the vector $(\rho_0 H u, \rho_0 H v, \rho_0 w_1, -g \sigma H)^T$, these terms cancel out.

For equations (17b)–(21b) on the C-type grid (staggered in the three coordinates λ, θ, σ) it is easy to construct the finite difference approximation for which the discrete conservation law (31) holds.

It is not difficult to check that the following property is also satisfied for the above representation of the right-hand sides of (17b)–(19b). The finite difference approximation of equations (17b)–(19b) on the C grid gives zero currents if ρ is a linear function of the vertical coordinate $z \equiv \sigma H$.

3.3. Evolutionary formulation of the problem in σ -coordinates

We transform the symmetrized governing equations to an evolutionary form. Eliminating the functions p_1 and w_1 , we get

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - (l - m \cos \theta u) v = - \frac{m}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \lambda} + \frac{mg}{2\rho_0} \left[\frac{\partial \sigma H}{\partial \lambda} \rho - \right. \\ \left. - \sigma H \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^\sigma \left(\frac{\partial z H}{\partial z} \rho - z H \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) dz + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^1 d\sigma \int_0^\sigma \left(\frac{\partial z H}{\partial z} \rho - z H \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) dz \Bigg] + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_u \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{1}{H} F_1^u, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + (l - m \cos \theta u) u = & -\frac{n}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{ng}{2\rho_0} \left[\frac{\partial \sigma H}{\partial \theta} \rho - \sigma H \frac{\partial \rho}{\partial \theta} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\sigma \left(\frac{\partial z H}{\partial z} \rho - z H \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) dz + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^1 d\sigma \int_0^\sigma \left(\frac{\partial z H}{\partial z} \rho - z H \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) dz \right] + \\ & + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_v \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{1}{H} F_1^v, \end{aligned} \quad (33)$$

$$H \frac{dT}{dt} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_T \frac{\partial T}{\partial \sigma} + F_1^T, \quad (34)$$

$$H \frac{dS}{dt} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_S \frac{\partial S}{\partial \sigma} + F_1^S, \quad (35)$$

where

$$\begin{aligned} H \frac{d*}{dt} = \frac{1}{2} \Bigg[Hmu \frac{\partial *}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} (Hmu*) + Hnv \frac{\partial *}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} (Hnv*) + \\ + w_1 \frac{\partial *}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (w_1*) \Bigg], \end{aligned} \quad (36)$$

$$w_1 = \int_\sigma^1 m \left[\frac{\partial Hu}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{Hnv}{m} \right) \right] d\sigma, \quad (37)$$

$$\bar{p} = \int_0^1 p d\sigma. \quad (38)$$

Here \bar{p} is a function independent of the vertical coordinate. We eliminate it using the depth-integrated continuity equation (20)

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial Hu}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{Hnv}{m} \right) \right] d\sigma = 0 \quad (39)$$

and introducing the stream function.

The total energy conservation law (31) also holds for the evolutionary formulation of the problem.

3.4. The splitting method. Decomposition of the space operator

We use an approach based on a flexible procedure from the family of splitting methods – the weak approximation method (Marchuk, 1980, 1988). We decompose the space operator of our problem into a number of simpler energy conserving suboperators such that the law (31) holds for each isolated subproblem. Each separate problem may be considered as a separate stage of the splitting method if it is employed as a time integration method. Each separate problem can be approximated in space in a particular way and represented by a separate program module of the model. Generally speaking, in the framework of the splitting method for each separate problem we can employ an individual method for its numerical solution: a spatial approximation, a grid structure or a time stepping scheme.

Let us illustrate this approach assuming, once again, that all the viscosity coefficients are zero. We represent the space operator of the system (32)–(35) as a sum of two energy balanced suboperators that describe the process of momentum transfer and the adjustment of current and density fields.

Momentum transfer. We write the momentum equation taking into account the term that describes the effect of spherical geometry:

$$\begin{aligned} \frac{H}{m} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[uH \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} (uHu) + \frac{n}{m} vH \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{n}{m} vHu \right) + \right. \\ \left. + w_1 \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (w_1 u) \right] + H \cos \theta uv = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{H}{m} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[uH \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} (uHv) + \frac{n}{m} vH \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{n}{m} vHv \right) + \right. \\ \left. + w_1 \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (w_1 v) \right] - H \cos \theta uv = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

It is easy to verify that the momentum transfer operator (40)–(41) is skew-symmetric. The semi-divergent form of the advective terms in (40)–(41) is convenient because it allows a further decomposition of the operator. The operator may be represented as a sum of three suboperators which are locally one-dimensional in the coordinates λ, θ, σ , the properties of skew-symmetry being retained.

Adjustment of velocity and density fields. Taking into account (40)–(41), we have from (32)–(35):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - lv + \frac{m}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \lambda} - \frac{mg}{2\rho_0} \left[\frac{\partial \sigma H}{\partial \lambda} \rho - \sigma H \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^\sigma \left(\frac{\partial z H}{\partial z} \rho - z H \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) dz + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^1 d\sigma \int_0^\sigma \left(\frac{\partial z H}{\partial z} \rho - z H \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) dz \right] = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + lu + \frac{n}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} - \frac{ng}{2\rho_0} \left[\frac{\partial \sigma H}{\partial \theta} \rho - \sigma H \frac{\partial \rho}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\sigma \left(\frac{\partial z H}{\partial z} \rho - z H \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) dz + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^1 d\sigma \int_0^\sigma \left(\frac{\partial z H}{\partial z} \rho - z H \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) dz \right] = 0, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} H \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[Hmu \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} (Hmu\rho) + Hnv \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} (Hnv\rho) + \right. \\ \left. + w_1 \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (w_1 \rho) \right] = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

We add the corresponding boundary condition and the relation (39) to the system (42)–(44).

To solve (39), (42)–(44) we represent the horizontal components of the velocity vector u, v as (Bryan, 1969):

$$\begin{aligned} u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \\ \bar{u} = \int_0^1 u d\sigma, \quad \bar{v} = \int_0^1 v d\sigma. \end{aligned} \quad (45)$$

Using (39), we can determine from (42)–(44) the problem describing the dynamics of the vertically-averaged currents. At the separate splitting stage we have in terms of the stream function ψ :

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\partial}{\partial t} + R_b \right) \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{m}{nH} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{n}{mH} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{l}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{l}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \\
& = ng \int_0^1 z \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} - \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) dz, \quad (46) \\
& \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\frac{nH}{m} \bar{v}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = H \bar{u}. \quad (47)
\end{aligned}$$

As a regularization the additional term with R_b is entered into equation (46), with R_b chosen sufficiently small. We choose the value of R_b such that as $t \rightarrow \infty$ the additional term is nearly two orders less with respect to the second and third terms in the left-hand side of (46).

Note. In the general case the above splitting stages are adjusted to the terms that describe turbulent viscosity and diffusivity.

3.5. Space-differencing at the splitting stages

To approximate the governing equations at splitting stages, a modified C grid is used. The C grid is convenient for obtaining time difference equations for which the discrete total conservation law is valid and kinematic boundary conditions (for the inviscid case) are exactly satisfied. A disadvantage of the C grid is distortion of inertial oscillations and inertia-gravity waves because of non-compact approximation for the Coriolis term. In Delecluse and Zalesny (1996) it is shown that C grid approximation may lead to the violation of the maximum principle for finite difference equations describing equatorial dynamics, which is valid for the corresponding differential problem. The violation of the maximum principle leads to the generation of saw-tooth noise in the numerical solution for low spatial resolution. To avoid this disadvantage diagonalization of the Coriolis term on the C grid is used.

For this procedure to be applied, the equations at the stage of adjustment of the baroclinic currents are written as

$$\frac{u_{i+1/2,j}^{p+1} - u_{i+1/2,j}^p}{\tau} - \frac{1}{4} \Sigma_{(i+1/2,j)} (lv)_{i,j+1/2}^{p+1} = f_{i+1/2,j}^p, \quad (48)$$

$$\frac{v_{i,j+1/2}^{p+1} - v_{i,j+1/2}^p}{\tau} + \frac{1}{4} (l)_{i,j+1/2} \Sigma_{(i,j+1/2)} (u)_{i=1/2,j}^{p+1} = g_{i,j+1/2}^p, \quad (49)$$

where τ is a time step, p is a time level, i and j are grid point indices with respect to latitude and longitude, $\Sigma_{(i+1/2,j)}$, $\Sigma_{(i,j+1/2)}$ are the averages over the four neighbouring points on the C grid. From equations (48)–(49) equations for the unknown vectors $u_{i+1/2,j}^{p+1}$, $v_{i,j+1/2}^{p+1}$ are obtained with nine-diagonal matrices after the elimination of $v_{i,j+1/2}^{p+1}$ and $u_{i+1/2,j}^{p+1}$ respectively. Then the nine-diagonal matrices are replaced by their diagonal approximations.

The resulting scheme has second-order accuracy with respect to the space coordinates λ and θ . Experiments show that unlike the usual C grid scheme no saw-tooth numerical noise is generated with this method (Delecluse and Zalesny, 1996).

Similar procedures are used for numerical treatment of the metric terms in (40), (41) and for geopotential lateral diffusion.

4. Numerical experiments and results

In Zalesny (1997) a set of numerical experiments with a bottom-following coordinate global ocean model was presented. We will briefly mention the major results again and point out differences to the study presented here. The experiments in Zalesny (1997) were carried out for the model basin without the Arctic Ocean with the time step of 24 hours. Variability and equilibrium states under prescribed atmospheric forcing were investigated. Two kinds of boundary conditions at the sea surface were applied: seasonal and annual mean. The Dirichlet conditions were used both for temperature and salinity fields. For each forcing (seasonal and annual mean) two runs were made which differed from one another by the initial conditions.

The experiments showed that:

(*) different circulation regimes exist under identical forcing. The difference between the solutions was due to the different initial conditions. This effect was observed both at seasonally varying sea surface temperature and salinity and for their annual mean values. This points to the well-pronounced natural ocean variability and its sufficiently complex spatial-time structure;

(*) the equilibrium oceanic circulation had fluctuations with different periods from a few years to hundreds of years;

(*) the Southern Ocean is of major importance in the formation of the structure and long-period variability of the global ocean. The difference between oceanic equilibrium states manifests itself in the

different character of the processes of deep convection in the Southern Ocean.

The goal of the experiments presented here is to continue the study of the global equilibrium circulation under identical forcing using a new version of the World Ocean model. One of the purposes of this work is to confirm the existence of different equilibrium points for the ocean global circulation under restoring boundary conditions for temperature and salinity at the sea surface.

The following improvements are made in the present model in comparison with its previous version (Zalesny, 1997):

(*) The modelled area is complemented by the Arctic Ocean and now approximates the whole World Ocean basin from the coast of Antarctica to the North Pole. This allows us to estimate the role of the Arctic Ocean in the determination of the global thermohaline circulation.

(*) Instead of algebraic convective adjustment which was used in the previous experiment a new procedure of convective mixing is introduced on the basis of the approach used by Schmidt and Mysak (1996).

(*) The model is complemented by a new (geopotential) representation of lateral turbulent heat and salt exchange, which takes into account mixed derivatives with respect to horizontal and vertical lines in the $z/H(\lambda, \theta)$ -coordinates.

(*) Real monthly mean values for sea surface temperature and wind stress, which are climatic values from 1945 to 1989 (UWM-COADS data: Da Silva et al., 1994), and for sea surface salinity from the World Ocean Atlas 1998 (Levitus et al., 1998) are given at the surface of the World Ocean. Thus, one can reproduce a seasonal cycle more realistically in comparison with the case of a simple winter-summer sine curve which was used in the previous version.

(*) Instead of a B grid (the previous version) a modified C grid is used.

4.1. Description of numerical experiments

We carried out numerical experiments with a coarse (5° latitude by 4° longitude and 12 vertical levels) resolution model to produce equilibrium regimes for the global ocean circulation and to investigate the internal ocean thermohaline circulation peculiarities.

The computational domain includes the whole World Ocean from the coast of Antarctica to the North Pole. The point of the North Pole is excluded, i. e. a point island is placed at it. In our model the stream

function and the v -component of velocity are placed at the point of the North Pole. The stream function at this point is calculated whereas the v -component of velocity is set equal to zero.

The lateral boundary of the domain Σ consists of several closed surfaces approximating the continents and islands: Eurasia, America (separated by the Bering Strait), Antarctica, Australia with adjacent islands, New Zealand, Iceland, Spitsbergen, and the North Pole. The bottom relief of the World Ocean is smoothed with three passes of an averaging operator over the bottom relief from $1^\circ \times 1^\circ$ data set for the first three runs, and 1 pass time of the averaging operator is used for the last run (Fig. 1). The smoothing operator is the weighted mean over nine neighbouring points.

The monthly mean values of wind stress, temperature, and salinity according to the UWM-COADS (Da Silva et al., 1994) data were specified at the ocean surface as forcing terms. The time variation of the sources are piecewise constant functions that vary with time from month to month. World Ocean Atlas data (Levitus et al., 1998) are used for the sea surface salinity.

The turbulent exchange coefficients and regularization parameter are:

$$\begin{aligned}\nu_u = \nu_v &\equiv 2 \text{ cm}^2/\text{s}, & \nu_T = \nu_S &\equiv 1 \text{ cm}^2/\text{s}, \\ \mu_u = \mu_v = \mu_T = \mu_S &\equiv 2 \cdot 10^7 \text{ cm}^2/\text{s}, \\ \alpha_T = \alpha_S &\equiv 1.6 \cdot 10^4/H \text{ cm/s}, \\ R_b &= 4 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}.\end{aligned}$$

In the vertical direction the model layers have variable thickness (0.25/40, 0.75/40, $2 \times 2/40$, $6 \times 5/40$, $3/40$, $1.5/40$, $0.5/40$). The upper layer $0 < \sigma < 1/160$ is assumed to be well-mixed. The model time step is equal to 32 hours for all the runs.

At the initial moment we set

(*) in the case "sc - c00" (super light ocean):

$$u = 0, \quad v = 0, \quad T \equiv \text{const} = 8^\circ\text{C}, \quad S \equiv \text{const} = 30 \text{ psu},$$

(*) in the case "sc - c01" (light ocean):

$$u = 0, \quad v = 0, \quad T \equiv \text{const} = 4^\circ\text{C}, \quad S \equiv \text{const} = 34 \text{ psu},$$

(*) in the case "sc - c02" (heavy ocean) and "sc - c05" (heavy ocean, steep relief):

$$u = 0, \quad v = 0, \quad T \equiv \text{const} = 0^\circ\text{C}, \quad S \equiv \text{const} = 35 \text{ psu}.$$

Integration with respect to the time was performed for each case for 4000 years. The calculations show that the model solutions attain the quasi-equilibrium state for this period. We were striving to obtain a near-equilibrium state for each case. Therefore the calculations were performed using sufficiently high friction and diffusion coefficients though in this case the quality of the solution is diminished.

4.2. Simulated global ocean fields

General structure of ocean currents

The calculated currents correspond to the observational data. The main ocean currents like the Gulf Stream, the Kuroshio, the Antarctic Circumpolar Current (ACC), etc. are reproduced.

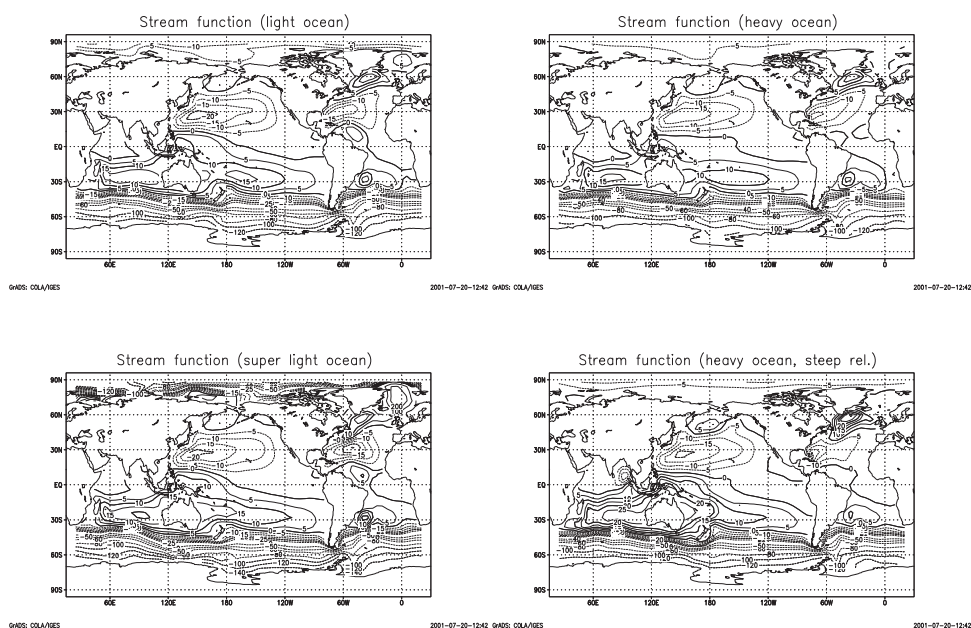


Fig. 2. Stream functions for depth-averaged flow (in Sv.)

Fig. 2 shows depth-integrated stream functions for all the runs. It is interesting that strong depth-averaged currents are obtained in the Arctic Ocean in the case of super light ocean. In this case the *barotropic* flows in the Arctic Ocean are comparable with those in the Antarctic Circumpolar Current. This peculiarity of the stream function for the

super light ocean is related to the strong salinity contribution to the dynamics of the Arctic Ocean and the deep convection regime which is permanently observed there.

Structure of temperature and salinity fields

The general structure of the temperature and salinity fields is reproduced (Figs. 3, 4), but there are significant differences from the observed data (Figs. 5, 6). The most obvious differences are found in the main thermocline (at a depth of around 1000 m). It is warmer in the deep and bottom layers of the model than in real ocean layers. The large vertical diffusivity coefficients are responsible for these differences. Because our purpose is to achieve equilibrium, we chose vertical diffusivity of $1 \text{ cm}^2/\text{s}$.

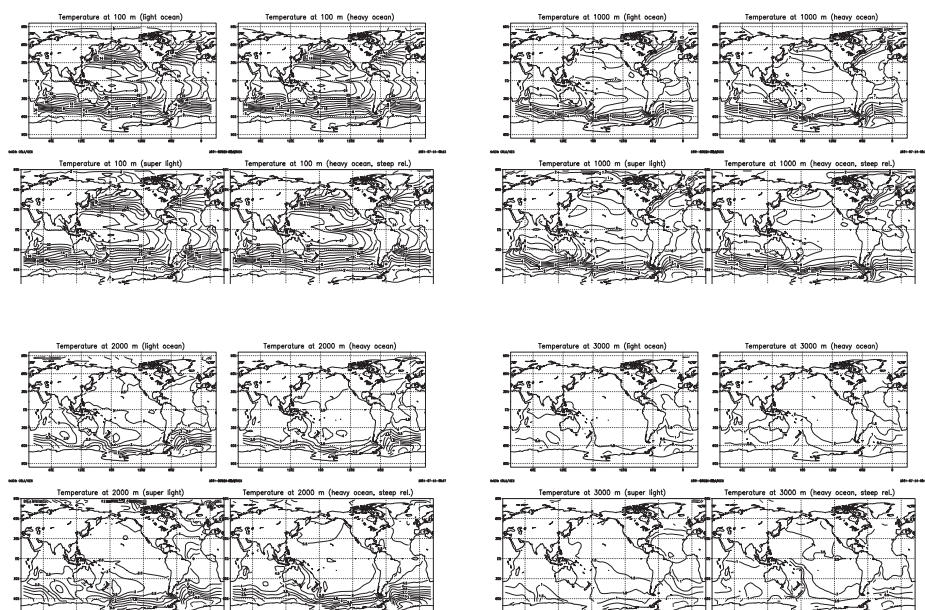


Fig. 3. Temperature at 100, 1000, 2000, 3000 m. The values are averaged over the period of 2500–2501 years

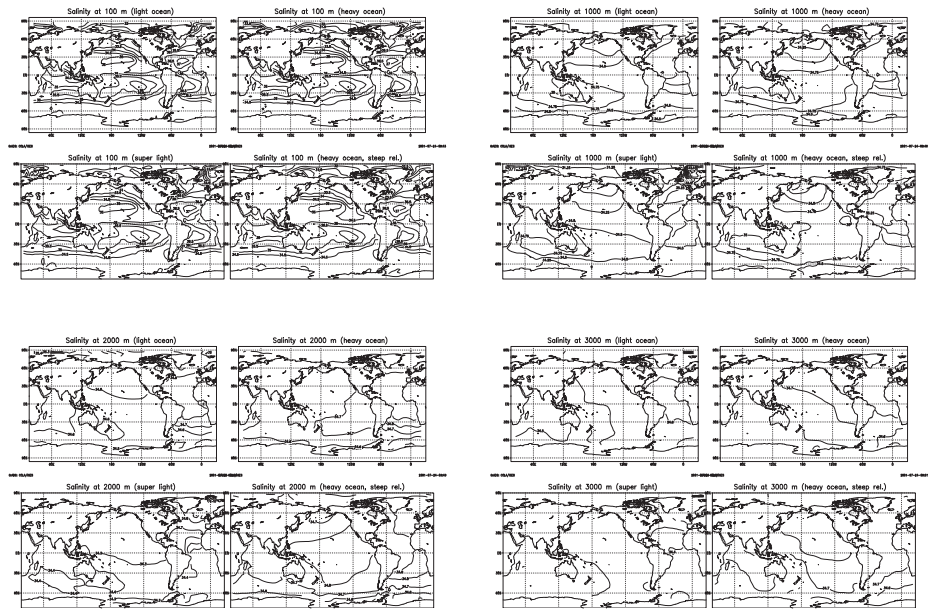


Fig. 4. Salinity at 100, 1000, 2000, 3000 m. The values are averaged over the period of 2500–2501 years

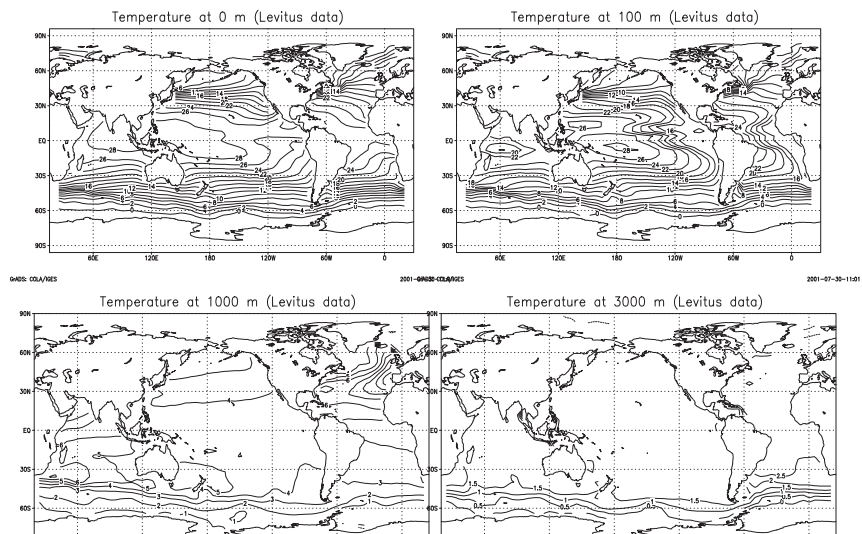


Fig. 5. Observed temperature (World Ocean Atlas 1998 data)

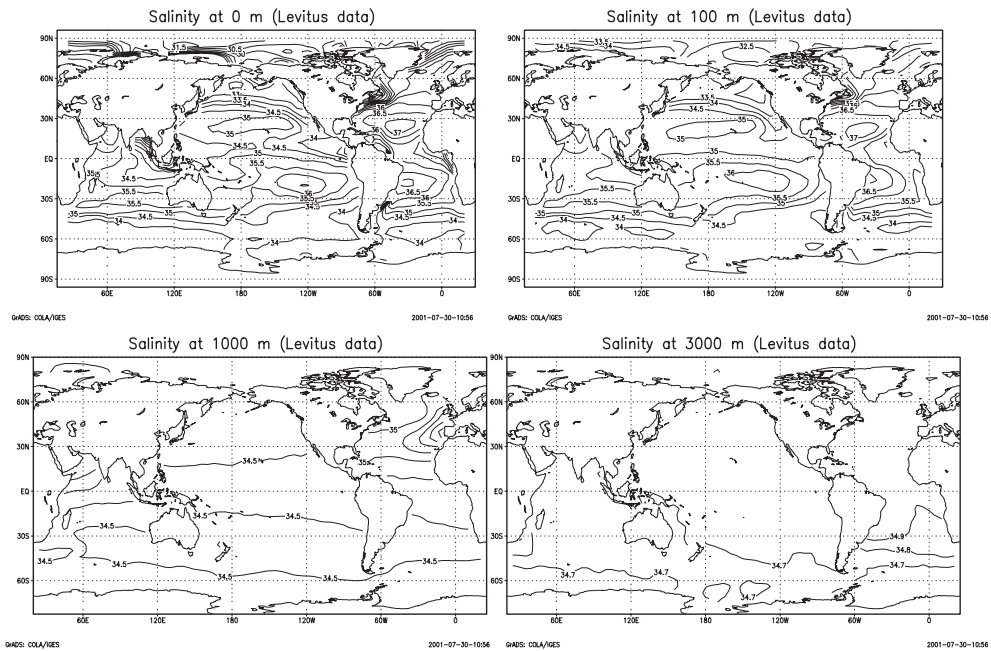


Fig. 6. Observed salinity (World Ocean Atlas 1998 data)

Deep convection

Numerical experiments show that deep convection is the key mechanism which determines the distinct regimes of the global thermohaline circulation. In all the runs deep convection occurs around Antarctica: in the Ross Sea (the most pronounced), in the southern part of the Indian Ocean and in the Weddell Sea. Convection also occurs in some subdomains of the North Atlantic: along the south-east coast of Greenland, in the Norwegian-Greenland Sea and in the Arctic Ocean (very prominent between Spitzbergen and Novaya Zemlya). In the Arctic Ocean for the case of the super light initial state, convection exists during the whole year.

4.3. Internal ocean variability and multiple equilibria

The numerical experiments show that several thousand years are needed for the solution to reach a quasi-equilibrium state. In our case the model solution stabilized after about 2000 years.

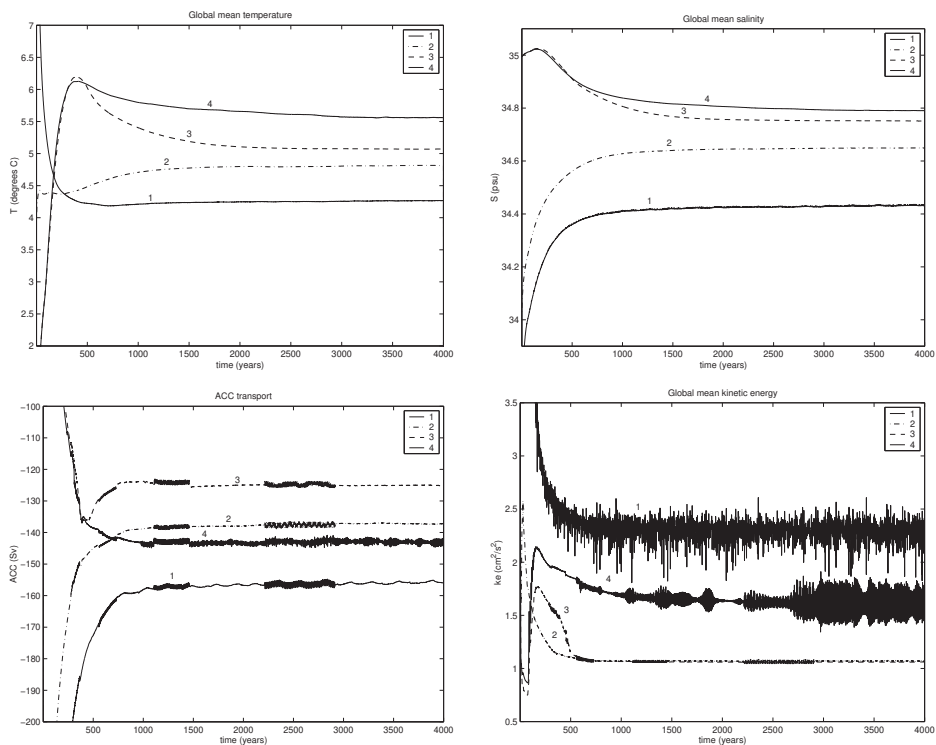


Fig. 7. Time series of global mean quantities during the experiments (1) – super light ocean, (2) – light ocean, (3) – heavy ocean, (4) – heavy ocean, steep relief: (a) temperature; (b) salinity; (c) mass transport of the Antarctic Circumpolar Current; (d) kinetic energy.

Fig. 7 represents the evolution of the global mean temperature and salinity T_{mean} , S_{mean} , kinetic energy kin_{mean} and mass transport of the ACC for all cases.

A distinctive feature of the model solutions is that the equilibrium state for each state is distinct and can have a fluctuating character (Fig. 7).

Noteworthy is similarity of the behavior of the ACC transport (existence of pronounced variations at time intervals of 1100–1400 y. and 2400–2800 y.) for the first three experiments which were carried out with the same bottom relief. One may speculate that the bottom relief might be responsible for this variability.

The experiments performed allow us to state the following.

The approximate relaxation time it takes the system to achieve equilibrium is of the order of several thousand years.

Different equilibrium states may be obtained under the same forcing using restoring boundary conditions for temperature and salinity at the sea surface.

The only difference between these runs was different initial conditions.

The structure of the difference in the ocean fields is different in the different ocean basins. In the lower layer the difference between the solutions is of a global character. In the upper layer, especially in the Arctic and the Southern Oceans, regional anomalies are very pronounced. The most intensive anomalies are observed in the vicinity of deep convection regions.

4.4. Sensitivity experiments

The main result of the present study is the availability of different quasi-equilibrium regimes of ocean thermohaline circulation under identical restoring boundary conditions for temperature and salinity at the sea surface. Earlier in most works multiple equilibrium states were obtained under mixed boundary conditions. Mixed boundary conditions (i. e. a restoring condition for temperature and a flux condition for salinity) are more realistic, therefore more likely our result has a mathematical meaning. The result consists in broadening the set of the ocean dynamics problems whose equilibrium solutions depend on the initial state.

Evaluating the model dependence of the obtained result, we should clarify some questions. First, we have to study its algorithmic dependence. This involves the choice of the coordinate system, a time stepping scheme, the dependence on spatial resolution and so on. It is a complicated problem, and intercomparison experiments with different numerical models are desired. Second, we should study the properties of the solution and estimate the sensitivity of equilibrium regimes to the input parameters in the framework of the given model. With this aim in view, we carried out two additional experiments with three and two model integrations respectively.

The aim of the first experiment was to estimate the sensitivity of the solution to the spatial structure of the initial fields of temperature and salinity. Initial conditions corresponding to heavy, light, and super light states differ considerably from one another in temperature and salinity but coincide in velocity (motion is absent everywhere). They lead to the equilibrium states which are closer in average values of temperature and salinity but are of different spatial structure and different dynamics. In

all the runs the initial temperature and salinity fields were uniform in the horizontal and the vertical. This brings up the question: How does the asymptotic regime depend on the vertical and horizontal structure of initial temperature and salinity fields? What affects the equilibrium regime more strongly: average values of initial temperature and salinity fields or their spatial structure?

To study this problem we performed three additional runs with different structures of initial temperature and salinity fields but with the same average values corresponding to the initial state of the heavy ocean: $T \equiv 0^\circ\text{C}$, $S \equiv 35 \text{ psu}$.

(*) In the first run the initial salinity field was changed in comparison with the initial state of the heavy ocean. Salinity linearly increases along the vertical from 34 psu at the surface to 36 psu at a depth of 4000 m (stable stratification).

(*) In the second run unstable stratification was specified at the initial moment. Salinity linearly decreases along the vertical from 36 psu to 34 psu at a depth of 4000 m .

(*) In the third run the fields T and S at the initial moment were constant along the vertical and along longitude but different along latitude. In the Southern and the Arctic Oceans the values of T and S were close to the values of super light ocean initial state (about 8°C and 30 psu) and in the main region to the conditions of the initially heavy ocean (about 8°C and 30 psu). More exactly, they slightly differ from the above values so that their global means remain equal to 0°C and 35 psu .

The calculations showed the following. All the solutions differ markedly during the initial period of integration, which is about 500 years. For example, the difference between the ACC transport in the first run and the ACC transport in the third run exceeded $100 Sv$ between 5 and 15 years of integration.

Although dynamic regimes differ considerably at the beginning of calculations, all the solutions reach the regime which is practically identical to the equilibrium regime corresponding to the initially heavy ocean. Thus, the results of the experiment show that global means of temperature and salinity are the key parameters defining the structure of the equilibrium state.

The aim of the second experiment was to estimate the sensitivity of the solution to the value of the friction coefficient Rb . Our basic runs show that the structure of the stream function and the ACC transport are good identifiers of a specific regime of global circulation (Figs. 2,

76). However, these characteristics are sensitive to the coefficient Rb which we took rather high. It is of interest to estimate how much vertically averaged circulation is sensitive to Rb and how the model solution will change as Rb decreases. Of course, it would be well to examine the dependence of the equilibrium regimes on coefficients of turbulent viscosity and diffusion. However, this problem involves high computational costs and is beyond the scope of this study.

Two additional runs were carried out to estimate the model sensitivity to the coefficient Rb . From the moment of time $t = 2000$ years the coefficient Rb was reduced by four times for two cases corresponding to (initially) heavy and super light oceans. Both runs with a new value of Rb were extended for 1000 years.

In the first case (heavy ocean) the mean values of temperature and salinity varied only slightly during the whole integration period. The global mean temperature increased from 5.11°C to 5.12°C and global mean salinity from 34.76 psu to 34.77 psu . The ACC transport increased from 125 Sv to about 140 Sv .

In the second case (super light ocean) all the above values changed more significantly. Here the global mean temperature increased from 4.24°C to 4.4°C while global mean salinity decreased from 34.42 psu to 34.18 psu . The ACC transport increased from 160 Sv to about 250 Sv .

The experiment showed that the regime corresponding to the initially heavy ocean is less sensitive to a change in the parameter Rb . Under the considered conditions the difference between two quasi-equilibrium states increases as the parameter Rb decreases.

5. Conclusions

Numerical technique

An efficient numerical technique for the solution of the World Ocean circulation problem using a σ -coordinate primitive equation model has been developed. Before spatial discretization the governing equations are written in symmetrized evolutionary form.

The space approximation of the governing equations is realized on a staggered, modified C grid.

The computational algorithms are based on the decomposition of a space operator and implicit splitting schemes.

The decomposition of the governing equations includes splitting with respect to physical processes and space coordinates.

Results

1. The numerical model satisfactorily reproduces the structure of global current, temperature, and salinity fields.

2. There are different thermohaline regimes under the same atmospheric forcing. Differences between the solutions are due to the different initial conditions for temperature and salinity.

The existence of multiple equilibria of the ocean thermohaline circulation is mostly well known if mixed boundary conditions are applied for temperature (restoring) and salinity (flux) (Cessi and Young, 1992; Weaver and Sarachik, 1991).

3. Differences between thermohaline circulation states are reflected in the different character of the upper layer processes and deep convection in some local subdomains.

The most dramatic zones of field variability are localized areas of intense deep convection, which are of major importance in the formation of the large-scale thermohaline structure of the World Ocean.

4. The key mechanism of the multiple equilibria is nonlinear deep convection processes. Numerical experiments show that global mean values of temperature and salinity are rather important parameters affecting the quasi-equilibrium state.

REFERENCES

1. Andrich P., Delecluse P., Levy C., Madec G. A multitasked general circulation model of the ocean. Science and Engineering on Cray Supercomputers, Proc. of the Fourth Intern. Sym., Cray Research, Minneapolis, Minn. 1988. Pp. 407–428.

2. Beckmann A., Hellmer H. H., Timmermann R. A numerical model of the Weddell sea: large scale circulation and water mass distribution // Journal of Geophysical Research. 1999. V. 104. Pp. 23375–23391.

3. Blumberg A. F., Mellor G. L. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model / Ed. by N. Heaps // Three-Dimensional Coastal Ocean Models. American Geophysical Union. 1987. 208 p.

4. Bryan K. A numerical method for the study of the circulation of the World ocean // Journal of Computational Physics. 1969. V. 4. Pp. 347–376.

5. Bryan F. High-latitude salinity effects and interhemispheric thermohaline circulation // Nature. 1986. V. 323. Pp. 301–304.

6. Cessi P., Young W. R. Multiple equilibria in two-dimensional thermohaline circulation // *Journal of Fluid Mechanics*. 1992. V. 241. Pp. 291–309.
7. Da Silva A. M., Young C. C., Levitus S. Algorithms and procedures. Vol. 1: Atlas of surface marine data. NOAA Atlas NESDIS. 1994. V. 6. 74 p.
8. Delecluse P., Zalesny V. B. Problems of numerical modelling of equatorial dynamics // *Oceanology*. 1996. V. 36, No. 1. Pp. 26–42.
9. Drijfhout S., Heinze C., Latif M., Maier-Reimer E. Mean circulation and internal variability in the ocean primitive equation model // *Journal of Physical Oceanography*. 1996. V. 26. Pp. 559–580.
10. Gill A.E. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. N. Y.: Academic Press, 1982. 662 p.
11. Golubeva E. N., Ivanov Yu. A., Kuzin V. I., Platov G. A. Numerical modelling of the World Ocean circulation with upper layer dynamics // *Oceanology*. 1992. V. 32, No. 3. Pp. 395–405.
12. Griffies S. M., Boening C., Bryan F. O., Chassignet E. P., Gerdes R., Hasumi H., Hirst A., Treguier A.-M., Webb D. Developments in ocean climate modelling // *Ocean Modelling*. 2000. V. 2, No. Pp. 3–4, 123–192.
13. Haidvogel D. B., Beckmann A. *Numerical Ocean Circulation Modelling*. Imperial College Press, 1999. 318 p.
14. Haidvogel D. B., Wilkin J. L., Young R. E. A semi-spectral primitive equation ocean circulation model using vertical sigma and orthogonal curvilinear horizontal coordinates // *Journal of Computational Physics*. 1991. V. 94. Pp. 151–185.
15. Haidvogel D. B., Wilkin J. L., Young R. E. A semi-spectral primitive equation ocean circulation model using vertical sigma and orthogonal curvilinear horizontal coordinates // *Journal of Computational Physics*. 1991. V. 94. Pp. 151–185.
16. Huang R. X., Chou L. Parameter sensitivity study of the saline circulation // *Climate Dynamics*. 1994. V. 9. Pp. 391–409.
17. Lenderink G., Haarsma R. J. Variability and multiple equilibria of the thermohaline circulation associated with deep-water formation // *Journal of Physical Oceanography*. 1994. V. 24. Pp. 1480–1493.
18. Levitus S., Burgett R., Boyer R. P. *World Ocean Atlas 1998, World Ocean Database 1998*. NOAA Atlas NESDIS. 1998. V. 18. 346 p.
19. Maier-Reimer E., Mikolaevicz U., Hasselmann K. Mean circulation of the Hamburg LSG OGCM and its sensitivity to the thermohaline

surface forcing // *Journal of Physical Oceanography*. 1993. V. 23. Pp. 731–757.

20. Marchuk G. I. *Methods of Computational Mathematics*. M.: Nauka, 1980. 536 p.

21. Marchuk G.I. *Splitting-up methods*. M.: Nauka, 1988. 246 p.

22. Phillips N. A. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting // *Journal of Meteorology*. 1957. V. 14. Pp. 184–185.

23. Sarkisyan A. S., Demin Yu. L., Brechovskich A. L., Shachanova T. V. *Methods and results of calculation of the World Ocean circulation*. L.: Gidrometeoizdat, 1977. 152 p.

24. Schmidt G. A., Mysak L. A. The stability of a zonally averaged thermohaline circulation model // *Tellus*. 1996. V. 48A. Pp. 158–178.

25. Stommel H. M. Thermohaline convection with two regimes of flow // *Tellus*. 1961. V. 13, No. 2. Pp. 224–230.

26. Weaver A. J., Sarachik E. S. The role of mixed boundary conditions in numerical models of the ocean's climate // *Journal of Physical Oceanography*. 1991. V. 21. Pp. 1470–1493.

27. Zalesny V. B. Numerical simulation and analysis of the sensitivity of large-scale ocean dynamics // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 1996. V. 11, No. 6. Pp. 421–443.

28. Zalesny V. B. Variability and equilibrium states of the World Ocean circulation // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 1997. V. 12, No. 6. Pp. 547–567.



ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА¹

Проблема создания математических моделей общей циркуляции атмосферы и океана является, по-видимому, одной из центральных в решении задачи долгосрочного прогноза погоды и теории климата и его изменений. Рассматриваемая в настоящей работе трехмерная модель общей циркуляции атмосферы и океана является одной из возможных, реализуемых на базе комплекса алгоритмов и программ, разработанных в Вычислительном центре СО АН СССР. Этот комплекс позволяет реализовать модели различного уровня сложности: циркуляции атмосферы при заданной температуре на поверхности океана [1]; циркуляции океана при заданной температуре на его поверхности [2]; циркуляции атмосферы с подключением верхнего квазиоднородного слоя океана [3] и т. д.

1. Систему дифференциальных уравнений, описывающую совместную крупномасштабную циркуляцию атмосферы и океана, удобно представить в виде двух основных частей, описывающих соответственно атмосферные и океанические движения. Уравнения гидротермодинамики атмосферы формулируются в сферической системе координат $О\lambda\varphi\sigma$ (по вертикали используется σ -координата [1, 3]):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(l + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) v + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \frac{RT}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right) = \frac{F_u}{\pi},$$

¹ Доклады Академии наук СССР, 1980, т. 253, № 3, с. 1041–1044. Совместно с В. П. Дымниковым, В. Б. Залесным, В. Н. Лыковым, И. М. Бобылевой, В. Я. Галиным, В. Л. Перовым.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v}{\partial t} + \left(l + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi\right) u + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{RT}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi}\right) = \frac{F_v}{\pi}, \\
& \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial \pi u}{\partial \lambda} + \frac{\partial \pi v \cos \varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \pi \dot{\sigma} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{RT}{\sigma} = 0, \quad (1) \\
& \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{c_p \sigma} \left[\pi \dot{\sigma} + \sigma \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi}\right)\right] = \frac{F_T}{\pi} + \epsilon, \\
& \frac{dq}{dt} = \frac{F_q}{\pi} - (C - E),
\end{aligned}$$

$$\dot{\sigma} = 0, \quad \Phi = \Phi_S \quad \text{при } \sigma = 1, \quad \dot{\sigma} = 0 \quad \text{при } \sigma = 0. \quad (2)$$

По координатам λ, φ используется условие периодичности решения

$$u = u^0, \quad v = v^0, \quad \pi = \pi^0, \quad T = T^0, \quad q = q^0|_{t=0}. \quad (3)$$

Модель динамики океана [4] формулируется в сферической системе координат $O\lambda\varphi z$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t} - lv = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial u}{\partial z} + F_\lambda, \\
& \frac{\partial v}{\partial t} + lu = -\frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial v}{\partial z} + F_\varphi, \\
& \frac{\partial p}{\partial z} = gp, \\
& \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\
& \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + \mu_T \Delta T, \quad \rho = \rho(T).
\end{aligned} \quad (4)$$

Краевые условия:

$$\begin{aligned}
& u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_n, \\
& w = 0, \quad \nu \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\tau_\lambda}{\rho_0}, \quad \nu \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\tau_\varphi}{\rho_0} \quad \text{при } z = 0, \\
& \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = Q_T,
\end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
w &= \frac{dH}{dt}, \quad \nu \frac{\partial u}{\partial z} = -R \int_0^H u \, dz, \quad \nu \frac{\partial v}{\partial z} = -R \int_0^H v \, dz, \\
\frac{\partial T}{\partial n_1} &= 0 \quad \text{при } z = H, \\
u &= u^0, \quad v = v^0, \quad T = T^0 \quad \text{при } t = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Используемые здесь обозначения и вид операторов и функций в правых частях (1), описывающих процессы радиационного, конвективного и фазового притоков тепла, а также диссипацию и диффузию энергии в атмосфере, приводятся в работах [1–4], отметим лишь, что Ω в (4) есть цилиндрическая область определения решения (4)–(6) с нижним основанием, равным пересечению поверхностей $\{\sigma = 1\}/\{\sigma = 0\}$ и боковой поверхностью S_n .

Взаимодействуя между собой, атмосфера и океан обмениваются теплом, влагой и моментом количества движения. Температура на поверхности океана рассчитывается из термодинамического уравнения, при этом предполагается, что верхний квазиоднородный слой в океане имеет постоянную глубину 100 м. Поток тепла из атмосферы в океан определяется как остаточный член в уравнении теплового баланса на поверхности океана, включающем члены, описывающие радиационный баланс, турбулентный поток тепла в атмосферу и затраты тепла на испарение. Поскольку в данном эксперименте не рассматривались уравнения динамики солёности в океане, в механизме обмена влагой между атмосферой и океаном принимались во внимание только члены, описывающие поток влаги с поверхности океана в атмосферу и сток влаги из суши в океан. Обмен моментом количества движения производился путем использования в качестве верхнего граничного условия для уравнений динамики океана компонентов поверхностного напряжения трения, рассчитанного в модели атмосферы. Для искусственной синхронизации времен термической релаксации атмосферы и океана в работе использовался метод, предложенный в [5].

3. Численный алгоритм решения задачи (1)–(6) основан на использовании ее конечно-разностной дискретизации по пространственным переменным и комбинации двух типов метода расщепления для реализации по временной координате. Выбранная стратегия решения задачи, обладая рядом преимуществ с точки зрения эффективности и устойчивости вычислений по отношению к обычно используемым алгоритмам [5, 6], налагает более строгие ограничения на свойства

дискретного аналога оператора задачи (например, свойств кососимметричности или положительной определенности разностных операторов на каждом шаге расщепления). Соблюдение данных требований повышает устойчивость глобальной вычислительной системы, и выбор шага интегрирования по времени в этом случае связан только с естественными условиями аппроксимации. В модели последовательно используется идея метода расщепления по физическим процессам и по геометрическим координатам. В связи с этим системы (1)–(3) и (4)–(6) приводятся к симметризованному эволюционному виду [4]. На каждом шаге по времени отдельно рассматриваются решения уравнений переноса и адаптации (расщепление по физическим процессам), на этапе переноса используется дальнейшее расщепление трехмерного оператора задачи по пространственным переменным.

4. Численный эксперимент по расчету совместной циркуляции атмосферы и океана был проведен при входных данных, соответствующих зимнему периоду для Северного полушария. Были заданы среднее январское склонение Солнца, граница морских льдов, альbedo облаков и поверхности океана. В модель был введен сглаженный рельеф поверхности Земли. Расчетные параметры модели: в атмосфере $\Delta t = 40$ мин, $\Delta \lambda = 10^\circ$, $\Delta \varphi = 6^\circ$, 3 уровня по координате σ ; в океане $\Delta t = 2$ сут, $\Delta \lambda = \Delta \varphi = 5^\circ$, 4 уровня по координате z . Эксперимент состоял из двух этапов. Сначала при фиксированной температуре на поверхности океана были отдельно рассчитаны атмосферная и океаническая циркуляции на периоды, соответствующие квазиравновесным режимам в атмосфере и океане, а затем был проведен расчет совместной циркуляции на 11 «океанических» лет, что составляет для атмосферы срок порядка двух месяцев. Приведем некоторые результаты численного эксперимента.

Основным параметром, определяющим влияние океана на атмосферную циркуляцию, как известно, является температура поверхности океана. На рис. 1 приведено зонально осредненное распределение температуры поверхности океана, получившееся в результате расчета (сплошная линия) и построенное по фактическим данным (штриховая). Поле поверхностной температуры океана приведено на рис. 2. Видно, что в результате расчета получилось общее охлаждение океана в Северном полушарии и в тропиках и нагревание в средних и южных широтах Южного полушария. Следствием этого явилось уменьшение широтного градиента и температуры в атмосфере, что привело к заниженным значениям энергии в области длинных волн. Обращает на

себя внимание локальный минимум температуры поверхности океана в тропиках, обусловленный экваториальным апвеллингом. Распределения температуры, влажности, динамических характеристик в атмосфере количественно весьма похожи на распределения, полученные при моделировании атмосферы с фиксированной температурой на поверхности океана [1].

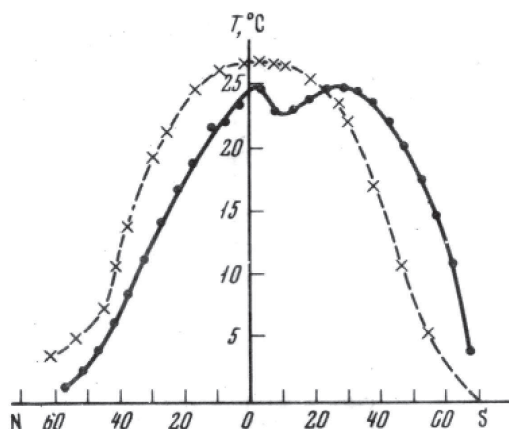


Рис. 1. Зонально-осредненное распределение температуры поверхности океана. Сплошная линия – результат расчета; штриховая – фактические данные

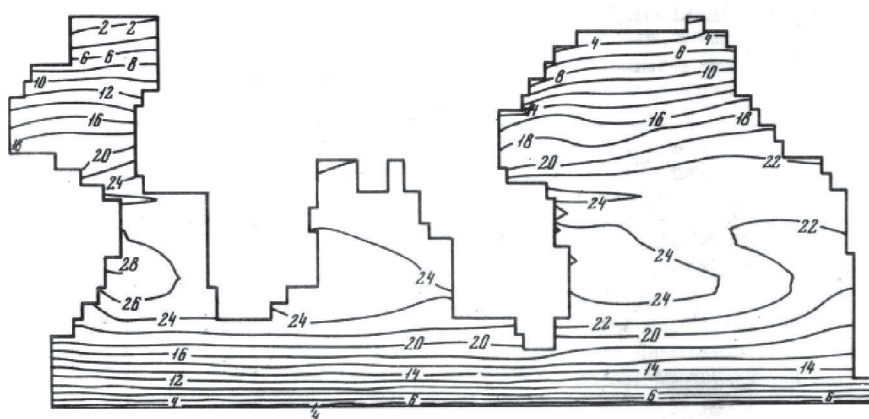


Рис. 2. Температура поверхности океана. Результат расчета

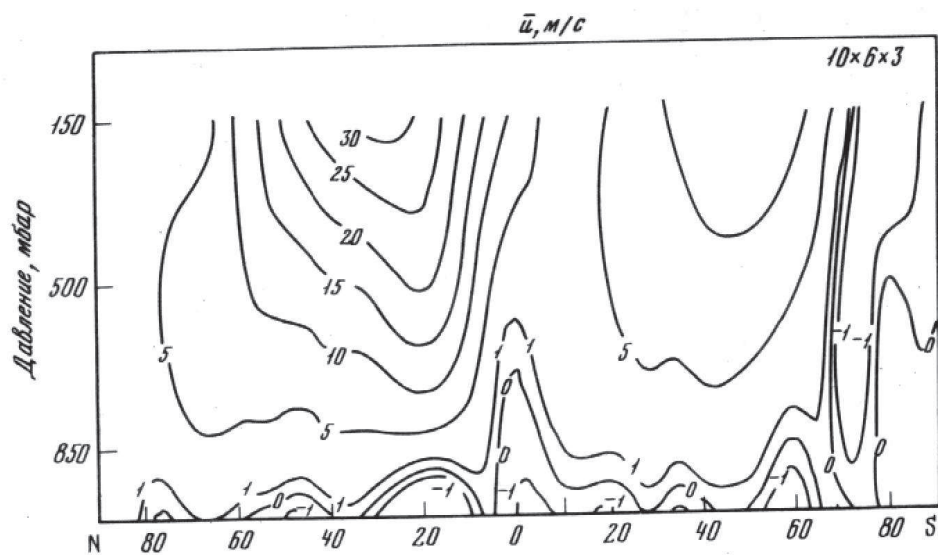


Рис. 3. Зонально осредненная u -компонента вектора скорости

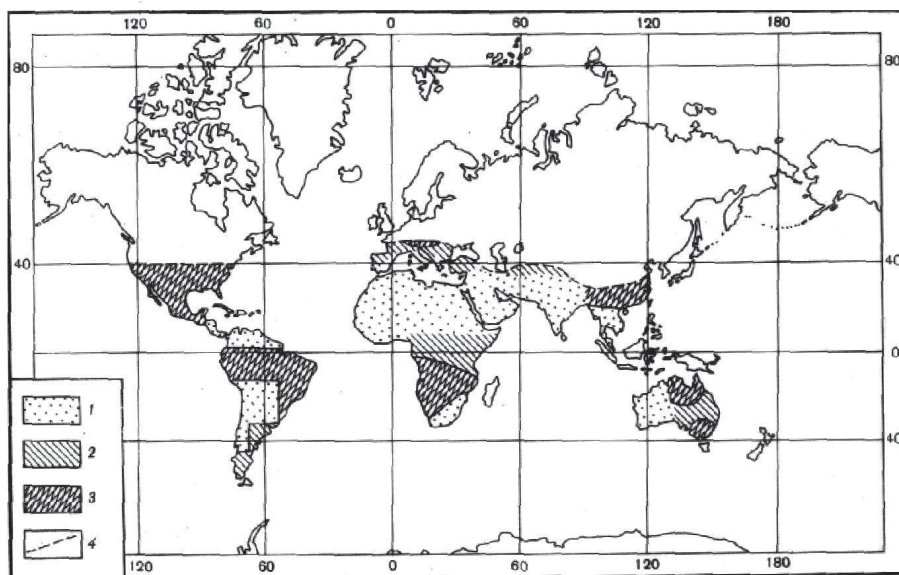


Рис. 4. Распределение запасов влаги в почве (W): 1 – $W < 0,5$ см; 2 – $0,5 \leq W \leq 5$ см; 3 – $W > 5$ см; 4 – линия снега.

Следует отметить некоторое уменьшение вихревых потоков к полюсам тепла, влаги и момента количества движения, смещение тропического пояса осадков к югу примерно на 10° , обусловленное смещением максимума поверхностной температуры. Для примера на рис. 3 и 4 приведены зонально осредненное поле зональной компоненты ветра и полученное распределение запасов влаги в почве. Нетрудно заметить, что модель в целом хорошо воспроизводит засушливые и увлажненные зоны на континентах. Интересно отметить, что Индия воспроизводится как засушливая область, поскольку зимний муссон не несет с собой влаги. В целом можно признать, что модель достаточно хорошо воспроизводит основные климатические характеристики реальной атмосферы и океана и может быть использована в целях изучения физических основ климата и его изменений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И., Дымников В. П. и др. Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15, № 5. С. 467.
2. Марчук Г. И., Залесный В. Б. Сб. науч. трудов ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1964. С. 3.
3. Marchuk G. I., Dymnikov V.P. et al. World Meteorol. Washington: Organiz., Conf. on Climate Models. 1978. P. 318.
4. Марчук Г. И., Дымников В. П. и др. Гидродинамическая модель общей циркуляции атмосферы и океана. Новосибирск, 1975.
5. Bryan K., J. Comp. Phys. 1969. V. 4, No. 3. P. 347.
6. Манабе С., Брайен К. Климат и циркуляция океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1972.

ОСНОВНЫЕ И СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА²

Вводятся в рассмотрение сопряженные уравнения гидродинамики по отношению к важнейшим линейным функционалам задач динамики атмосферы. Проводится исследование свойств сопряженных функций, описываемых сопряженными уравнениями, и дается их интерпретация как

²Метеорология и гидрология, 1974, № 2, с. 9–37.

функций влияния по отношению к вариациям гидродинамических элементов, в зависимости от входных параметров задач.

Для решения проблем долгосрочного прогноза погоды и влияния деятельности человека на климат необходимо создать такой математический аппарат, который бы позволил на основе решения задач динамики атмосферы и океана, использования априорной информации о климатическом состоянии атмосферы и фактической информации об отклонениях полей метеорологических элементов от климатических дать прогноз аномалий температуры и других элементов в заданных районах земного шара. Районы, для которых дается прогноз, должны иметь характерный размер, увеличивающийся с увеличением заблаговременности прогноза. Размеры регионов должны быть уточнены на основе анализа предсказуемости. Важно отметить то, что локальная метеорологическая информация очень чувствительна к непрогнозируемым «метеорологическим шумам», которые свойственны любой, даже самой богатой прогностической модели. Такие шумы обычно являются результатом разрешения физических неустойчивостей, непрерывно реализуемых в атмосфере. Потеря информации происходит и из-за не очень точных моделей прогноза, используемых в расчете. Эту потерю также можно условно отнести к метеорологическим шумам, полагая, что «точная» (вообще говоря, неизвестная) модель содержит «помехи», которые делают ее адекватной используемой нами простейшей модели. Поэтому выбор характерных масштабов регионов, для которых дается прогноз, является одной из центральных задач теории предсказуемости.

Другой задачей является построение таких теорий, которые бы позволили исследователям получить результаты прогноза непосредственно для отклонений метеорологических элементов от их климатических значений. Если для линейных моделей прогноза такая постановка задачи является тривиальной, то для полной нелинейной задачи она требует разработки нового математического аппарата на основе специальным образом определенных сопряженных уравнений, связанных с прогнозируемыми функционалами задач. Теория сопряженных уравнений в применении к операторным уравнениям эволюционного типа была разработана автором совместно с В. В. Орловым [5].

Здесь мы изложим более или менее общий подход к построению сопряженных уравнений прогноза погоды, получим формулы теории

возмущений, которые будут основными как для анализа предсказуемости, так и для цели прогноза погоды. В качестве основного функционала мы будем рассматривать аномалию температуры на земной поверхности для того или иного региона. Распространение теории на другие линейные функционалы от полей метеорологических элементов не представляет труда.

1. Сопряженные уравнения динамики атмосферы

Рассмотрим систему уравнений динамики атмосферных процессов в адиабатическом приближении и исследуем структуру оператора задачи. Исследования начнем с простейшего случая баротропной атмосферы. В этом случае имеем задачу

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} + lv + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v}{\partial y} + lu + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь предполагается, что \bar{u} , \bar{v} известны и удовлетворяют уравнению неразрывности $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$, $R\bar{T} = \text{const}$, а $\varphi(x, y, t)$ играет роль относительного отклонения давления от стандартного. Будем считать, что областью определения решения является квадрат D . На границе δD предположим, что поставлены условия периодичности решения. Введем в рассмотрение вектор решения и матрицу

$$\Phi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ R\bar{T}\varphi \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \Lambda & -l & \frac{\partial}{\partial x} \\ l & \Lambda & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь использовано обозначение оператора

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v}.$$

Используя это обозначение, имеем

$$\Lambda u = \text{div } \bar{\mathbf{u}} u, \quad \Lambda v = \text{div } \bar{\mathbf{u}} v.$$

Тогда систему уравнений (1.1) можно записать в операторной форме

$$B \frac{\partial \Phi}{\partial t} + A\Phi = 0, \quad (1.2)$$

где B – матрица следующего вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Скалярное произведение в гильбертовом пространстве Φ введем соотношением

$$(\mathbf{g}, \mathbf{h})_D = \sum_{i=1}^3 g_i h_i dD.$$

Здесь g_i и h_i – соответственно компоненты вектор-функций \mathbf{g} и $\mathbf{h} \in \Phi$.

Найдем теперь сопряженный оператор по отношению к A . С этой целью рассмотрим тождество Лагранжа

$$(\mathbf{g}, A\mathbf{h})_D = (A^*\mathbf{g}, \mathbf{h})_D,$$

или

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}, A\mathbf{h})_D = \int_D \left[\left(\Lambda u - lv + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) u^* + \left(lu + \Lambda v + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) v^* + \right. \\ \left. + \left(+\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) R\bar{T} \varphi^* \right] dD. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ради простоты мы примем

$$\mathbf{h} = \begin{vmatrix} u \\ v \\ R\bar{T}\varphi \end{vmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{vmatrix} u^* \\ v^* \\ R\bar{T}\varphi^* \end{vmatrix}.$$

С помощью интегрирования по частям в предположении о периодичности решений и некоторых очевидных преобразований интеграл в правой части (1.3) можно привести к виду

$$(\mathbf{g}, A\mathbf{h})_D = \int_D \left[\left(\Lambda^* u^* + lv^* + R\bar{T} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \right) u + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-lu^* + \Lambda^* v^* - R\bar{T} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \right) v - \\
& - \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) R\bar{T} \varphi \Big] = (A^* \mathbf{g}, \mathbf{h})_D,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$\Lambda^* = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} \right) = - \left(\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right) = -\Lambda. \tag{1.5}$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что \bar{u} и \bar{v} удовлетворяют уравнению неразрывности $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$. Учитывая соотношения (1.4) и (1.5), приходим к выражениям

$$\Phi^* = \begin{vmatrix} u^* \\ v^* \\ R\bar{T} \varphi^* \end{vmatrix}, \quad A^* = \left\| \begin{array}{ccc} -\Lambda & l & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -l & -\Lambda & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{array} \right\| = -A.$$

До сих пор предполагалось, что \bar{u} и \bar{v} – заданные функции x , y и времени. Это предположение может быть теперь снято. В самом деле, предположим, что мы имеем дело с квазилинейной системой

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - lv + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + lu + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0
\end{aligned} \tag{1.6}$$

и нашли решение этой системы при условии периодичности на границе с учетом начальных данных

$$u = u_0, \quad v = v_0 \quad \text{при } t = 0. \tag{1.7}$$

Полученные при решении этой задачи функции u и v будем рассматривать в качестве коэффициентов в операторах A и A^* . В результате будем иметь

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} \Lambda & -l & \frac{\partial}{\partial x} \\ l & \Lambda & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{array} \right\|, \quad A^* = -A,$$

где Λ теперь оператор вида

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial x}v.$$

Наряду с задачей (1.6) введем в рассмотрение сопряженную:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u^*}{\partial t} - u\frac{\partial u^*}{\partial x} - v\frac{\partial u^*}{\partial y} + lv^* - R\bar{T}\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} &= 0, \\ -\frac{\partial v^*}{\partial t} - u\frac{\partial v^*}{\partial x} - v\frac{\partial v^*}{\partial y} - lu^* - R\bar{T}\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} &= 0, \\ -\frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial v^*}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

при условии

$$u^* = u_T^*, \quad v^* = v_T^* \quad \text{при } t = T. \quad (1.9)$$

Задачи (1.6), (1.7) и (1.8), (1.9) запишем в операторной форме. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} B\frac{\partial \Phi}{\partial t} + A\Phi &= 0, \\ B\Phi &= B\Phi_0 \quad \text{при } t = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

и

$$\begin{aligned} -B\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - A\Phi^* &= 0, \\ B\Phi^* &= B\Phi_T^* \quad \text{при } t = T. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Умножим далее уравнение (1.10) скалярно на Φ^* , уравнение (1.11) – на Φ и результат вычтем. Тогда приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt}(B\Phi, \Phi^*)_D = 0. \quad (1.12)$$

Интегрируя это уравнение при заданных условиях при $t = 0$ и $t = T$, имеем

$$(B\Phi_T, \Phi_T^*)_D = (B\Phi_0, \Phi_0^*)_D. \quad (1.13)$$

Это условие нам пригодится в дальнейшем. А пока перепишем его в покомпонентной форме:

$$\int_D (u_T u_T^* + v_T v_T^*) dD = \int_D (u_0 u_0^* + v_0 v_0^*) dD. \quad (1.14)$$

Следует отметить, что если в качестве u_T^* и v_T^* выбрать u_T и v_T , мы приходим к закону сохранения кинетической энергии:

$$\int_D E_T dD = \int_D E_0 dD.$$

В этом случае имеет место полная обратимость решения. Это значит, что, решив задачу (1.6), (1.7) и положив $u_T^* = u_T$, $v_T^* = v_T$, можно решить задачу (1.8), (1.9) в обратном направлении (по времени). В результате приходим к тем же решениям основной системы, что и при решении основной задачи.

В заключение покажем, что для наших исследований иногда предпочтительно пользоваться более общим фазовым пространством $D \times T$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{g}, \mathbf{h})_{D \times T} = \sum_{i=1}^3 \int_D dD \int_0^T dt g_i h_i.$$

Введем в рассмотрение операторы

$$M = B \frac{\partial}{\partial t} + A$$

и

$$M^* = -B \frac{\partial}{\partial t} - A.$$

Тогда нетрудно проверить, что имеет место соотношение

$$\begin{aligned} (M\Phi, \Phi^*)_{D \times T} &= (\Phi, M^*\Phi^*)_{D \times T} - \\ &- (B\Phi_T, \Phi_T^*)_D + (B\Phi_0, \Phi_0^*)_D. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Учитывая равенство (1.13), окончательно имеем

$$(M\Phi, \Phi^*)_{D \times T} = (\Phi, M^*\Phi^*)_{D \times T}, \quad (1.16)$$

где

$$M^* = -M.$$

Переходим теперь к рассмотрению системы основных уравнений с вязкостью; пусть имеем уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - lv + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu \Delta u = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + lu + R\bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu \Delta v = 0, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

при условии

$$u = u_0, \quad v = v_0 \quad \text{при } t = 0 \quad (1.18)$$

и в предположении о периодическом характере решений. Тогда методом, изложенным выше, полагая

$$\Lambda = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} - \mu \Delta$$

и

$$\Lambda^* = -u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} - \mu \Delta,$$

приходим к системе сопряженных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u^*}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} - v \frac{\partial u^*}{\partial y} + lv^* - R\bar{T} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - \mu \Delta u^* &= 0, \\ -\frac{\partial v^*}{\partial t} - u \frac{\partial v^*}{\partial x} - v \frac{\partial v^*}{\partial y} - lu^* - R\bar{T} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - \mu \Delta v^* &= 0, \\ -\frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial v^*}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

при условии

$$u^* = u_T^*, \quad v^* = v_T^* \quad \text{при } t = T. \quad (1.20)$$

Анализ задач (1.17), (1.18) и (1.19), (1.20) показывает, что основная задача должна решаться при возрастании t в интервале $0 \leq t \leq T$, а сопряженная задача – при убывании t в интервале $T \geq t \geq 0$. Только такой счет будет корректным для каждой из задач. Это связано с наличием в уравнениях сил вязкости. Смысл введения сопряженных задач нам будет ясен в дальнейшем из анализа формул теории возмущений.

2. Сопряженные уравнения для бароклиной атмосферы

Рассмотрим теперь модель бароклиной атмосферы в адиабатическом приближении:

$$\frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial t} + \Lambda u - l \bar{\rho} v + \bar{p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\rho}v}{\partial t} + \Lambda v + l\bar{\rho}u + \bar{p}\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0, \\
-g\bar{\rho}\vartheta + \bar{p}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial \bar{\rho}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}w}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \bar{\rho}\vartheta}{\partial t} + \Lambda\vartheta + \frac{\gamma_a - \gamma}{\bar{T}}\bar{\rho}w &= 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

при условии

$$\bar{\rho}w = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad \bar{\rho}w = 0 \quad \text{при } z = H. \tag{2.2}$$

Решение предполагается периодическим в плоскости (x, y) и удовлетворяет начальным данным

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{при } t = 0. \tag{2.3}$$

Предположим далее, что $R\bar{T} = \text{const}$, $\frac{\gamma_a - \gamma}{\bar{T}} = \text{const}$. Оператор Λ определим формулой

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x}\bar{\rho}u + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\rho}v + \frac{\partial}{\partial z}\bar{\rho}w.$$

Следовательно,

$$\Lambda u = \text{div } \bar{\rho}\mathbf{u}u, \quad \Lambda v = \text{div } \bar{\rho}\mathbf{u}v, \quad \Lambda\vartheta = \text{div } \bar{\rho}\mathbf{u}\vartheta.$$

Введем далее в рассмотрение вектор-функцию Φ – решение задачи и матрицы

$$\begin{aligned}
\Phi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \Lambda & -\bar{\rho}l & 0 & \bar{p}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \bar{\rho}l & \Lambda & 0 & \bar{p}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{p}\frac{\partial}{\partial z} & -g\rho \\ \frac{\partial}{\partial x}\bar{p} & \frac{\partial}{\partial y}\bar{p} & \frac{\partial}{\partial z}\bar{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\bar{\rho} & 0 & \frac{\bar{T}g}{\gamma_a - \gamma}\Lambda \end{pmatrix}, \\
B\Phi_0 = \begin{pmatrix} \bar{\rho}u_0 \\ \bar{\rho}v_0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\bar{T}g}{\gamma_a - \gamma}\bar{\rho}\vartheta_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{T}g}{\gamma_a - \gamma}\bar{\rho} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Тогда задача (2.1), (2.3) запишется в виде

$$B \frac{\partial \Phi}{\partial t} + A\Phi = 0,$$

$$B\Phi = B\Phi_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (2.4)$$

Здесь предполагается, что решение принадлежит гильбертову подпространству абсолютно непрерывных и дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям (2.2) и предположению о периодичности. Скалярное произведение введем соотношением

$$(\mathbf{g}, \mathbf{h})_D = \sum_{i=1}^5 g_i h_i dD.$$

Рассмотрим оператор A и найдем ему сопряженный с помощью тождества Лагранжа. В результате выкладок, аналогичных рассмотренным выше в разделе 1, получим

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \\ \varphi^* \\ \vartheta^* \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} -\Lambda & \bar{\rho}l & 0 & -\bar{p}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -\bar{\rho}l & -\Lambda & 0 & -\bar{p}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{p}\frac{\partial}{\partial z} & g\rho \\ -\frac{\partial}{\partial x}\bar{p} & -\frac{\partial}{\partial y}\bar{p} & -\frac{\partial}{\partial z}\bar{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g\bar{\rho} & 0 & -\frac{\bar{T}g}{\gamma_a - \gamma}\Lambda \end{pmatrix}.$$

При построении сопряженного оператора мы воспользовались легко проверяемым соотношением

$$\begin{aligned} & \int_D (u^* \operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u} u + v^* \operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u} v + w^* \operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u} w) dD = \\ & = \int_D (u \operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u} u^* + v \operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u} v^* + w \operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u} w^*) dD. \end{aligned}$$

Это соотношение справедливо при выполнении нескольких условий, а именно: предположения, что

$$\operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \bar{\rho} \mathbf{u}^* = 0;$$

требования, чтобы компоненты решения Φ^* удовлетворяли условиям гладкости, предельным соотношениям

$$\bar{\rho} w^* = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad \bar{\rho} w^* = 0 \quad \text{при } z = H; \quad (2.5)$$

и, наконец, предположения периодичности решений в плоскости (x, y) . Мы видим, что в этом случае имеет место соотношение

$$A^* = -A. \quad (2.6)$$

Таким образом, оператор A является кососимметричным. Нашей задачей является построение сопряженных уравнений, соответствующих эволюционным задачам. С этой целью наряду с (2.4) введем в рассмотрение сопряженную задачу

$$-B \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - A \Phi^* = 0, \quad (2.7)$$

$$\Phi^* = \Phi_T^* \quad \text{при } t = T. \quad (2.8)$$

Для нее, как нетрудно убедиться, будет иметь место тождество, аналогичное (1.13), однако уже для нового пятимерного фазового пространства

$$(B\Phi_T, \Phi_T^*)_D = (B\Phi_0, \Phi_0^*)_D, \quad (2.9)$$

которое в развернутой форме имеет вид

$$\begin{aligned} \int_D \left(\bar{\rho} u_T u_T^* + \bar{\rho} v_T v_T^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \bar{\rho} \vartheta_T \vartheta_T^* \right) dD = \\ \int_D \left(\bar{\rho} u_0 u_0^* + \bar{\rho} v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \bar{\rho} \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) dD. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Если выбрать $u_T^* = u_T$, $v_T^* = v_T$, $\vartheta_T^* = \vartheta_T$, то приходим к закону сохранения полной энергии:

$$\int_D \bar{\rho} \pi_T dD = \int_D \bar{\rho} \pi_0 dD,$$

где

$$\pi = u^2 + v^2 + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta^2.$$

Предположим, что значения u_T^* , v_T , ϑ_T^* выбраны следующим образом:

$$u_T^* = 0, \quad v_T^* = 0, \quad \vartheta_T^* = \frac{\gamma_a - \gamma}{g\bar{T}} \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0). \quad (2.11)$$

Тогда на основе (2.10) получаем

$$\bar{\rho}\vartheta_T(x_0, y_0, z_0) = \int_D \left(\bar{\rho}u_0u_0^* + \bar{\rho}v_0v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \bar{\rho}\vartheta_0\vartheta_0^* \right) dD. \quad (2.12)$$

Эта формула указывает на связь между температурой в заданной точке пространства в момент времени $t = T$ и начальным (при $t = 0$) состоянием атмосферы. Напомним, что в формуле (2.12) u_0 , v_0 и ϑ_0 заданы в начальный момент времени, а u_0^* , v_0^* и ϑ_0^* – решения сопряженных уравнений при условии (2.11).

3. Бароклинная модель атмосферы в неадиабатическом приближении

Рассмотрим более полную систему уравнений динамики атмосферы с учетом турбулентного обмена и заданными источниками тепла.

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\rho}u}{\partial t} + \Lambda u - l\bar{\rho}v + \bar{p}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \mu\bar{\rho}\Delta u &= 0, \\ \frac{\bar{\rho}v}{\partial t} + \Lambda v + l\bar{\rho}u + \bar{p}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mu\bar{\rho}\Delta v &= 0, \\ -g\bar{\rho}\vartheta + \bar{p}\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\bar{\rho}u}{\partial x} + \frac{\bar{\rho}v}{\partial y} + \frac{\bar{\rho}w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial\bar{\rho}\vartheta}{\partial t} + \Lambda\vartheta + \frac{\gamma_a - \gamma}{\bar{T}}\bar{\rho}w - \frac{\bar{\partial}}{\partial z}\nu_1\bar{\rho}\frac{\partial\vartheta}{\partial z} - \mu_1\bar{\rho}\Delta\vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В качестве граничных условий рассмотрим следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vartheta}{\partial z} &= \alpha_S (\vartheta - \bar{\vartheta}), \quad \bar{\rho}w = 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial z} &= 0, \quad \bar{\rho}w = 0 \quad \text{при } z = H. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь α_S – коэффициент теплопередачи на поверхности океана, который предположим равным нулю на суше и на полярных льдах, а $\bar{\vartheta}$ – температура поверхностного слоя океана, которая предполагается в данной модели известной.

На границе области в плоскости (x, y) ставится условие периодичности решения.

В качестве начальных данных примем

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (3.3)$$

Предполагается, что решение имеет абсолютно непрерывные производные первого порядка от u , v и ϑ по времени и второго порядка – по всем пространственным переменным. Введем в рассмотрение матричный оператор

$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} \Lambda & -\mu\bar{\rho}\Delta & -l\bar{\rho} & 0 & \bar{p}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ l\bar{\rho} & \Lambda - \mu\bar{\rho}\Delta & 0 & \bar{p}\frac{\partial}{\partial y} & 0 & \\ 0 & 0 & \bar{p}\frac{\partial}{\partial z} & \bar{p}\frac{\partial}{\partial z} & -g\bar{\rho} & \\ \frac{\partial}{\partial x}\bar{p} & \frac{\partial}{\partial y}\bar{p} & \frac{\partial}{\partial z}\bar{p} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & g\bar{\rho} & 0 & \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \left(\Lambda - \frac{\partial}{\partial z}\nu_1\bar{\rho}\frac{\partial}{\partial z} - \mu_1\bar{\rho}\Delta \right) & \end{array} \right\|$$

и вектор

$$\Phi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix}.$$

Тогда приходим к задаче

$$-B\frac{\partial\Phi}{\partial t} + A\Phi = 0, \quad B\Phi = B\Phi_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (3.4)$$

Введем в рассмотрение сопряженный оператор A^* :

$$A^* = \left\| \begin{array}{cccccc} -\Lambda & -\mu\bar{\rho}\Delta & -l\bar{\rho} & 0 & -\bar{p}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -l\bar{\rho} & -\Lambda - \mu\bar{\rho}\Delta & 0 & -\bar{p}\frac{\partial}{\partial y} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{p}\frac{\partial}{\partial z} & g\bar{\rho} & \\ -\frac{\partial}{\partial x}\bar{p} & -\frac{\partial}{\partial y}\bar{p} & -\frac{\partial}{\partial z}\bar{p} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -g\bar{\rho} & 0 & \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \left(-\Lambda - \frac{\partial}{\partial z}\nu_1\bar{\rho}\frac{\partial}{\partial z} - \mu_1\bar{\rho}\Delta \right) & \end{array} \right\|,$$

а затем сформулируем следующую задачу:

$$-B\frac{\partial\Phi^*}{\partial t} + A^*\Phi^* = 0, \quad B\Phi^* = B\Phi_T^* \quad \text{при } t = 0, \quad (3.5)$$

при этом компоненты вектор-функции Φ^* удовлетворяют требованиям гладкости, условиям периодичности на границе области и условиям

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} &= \alpha_S \vartheta^*, \quad \bar{\rho} w^* = 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} &= 0, \quad \bar{\rho} w^* = 0 \quad \text{при } z = H.\end{aligned}\tag{3.6}$$

В покомпонентной форме задача (3.5) имеет вид

$$\begin{aligned}-\frac{\bar{\rho} u^*}{\partial t} - \Lambda u^* + l \bar{\rho} v^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - \mu \bar{\rho} \Delta u^* &= 0, \\ -\frac{\bar{\rho} v^*}{\partial t} - \Lambda v^* - l \bar{\rho} u^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} - \mu \bar{\rho} \Delta v^* &= 0, \\ g \bar{\rho} \vartheta^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\bar{\rho} u^*}{\partial x} + \frac{\bar{\rho} v^*}{\partial y} + \frac{\bar{\rho} w^*}{\partial z} &= 0, \\ -\frac{\partial \bar{\rho} \vartheta^*}{\partial t} - \Lambda \vartheta^* + \frac{\gamma_a - \gamma}{\bar{T}} \bar{\rho} w^* - \frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \nu_1 \frac{\vartheta^*}{\partial z} - \bar{\rho} \mu_1 \Delta \vartheta^* &= 0\end{aligned}\tag{3.7}$$

при граничных условиях (3.6) и начальных данных

$$u^* = u_T^*, \quad v^* = v_T^*, \quad \vartheta^* = \vartheta_T^* \quad \text{при } t = T.\tag{3.8}$$

Поскольку операторы A и A^* сопряженные, то при $\vartheta = 0$ имеет место условие

$$(A\Phi, \Phi^*)_D = (\Phi, A^*\Phi^*)_D.\tag{3.9}$$

Уравнение (3.4) скалярно умножим на Φ^* , а уравнение (3.5) – на Φ , проинтегрируем по времени в пределах от 0 до T и результат вычтем друг из друга. Тогда в покомпонентной форме приходим к соотношению

$$\begin{aligned}& \int_D \left(u_T u_T^* + v_T v_T^* + \frac{g \bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta_T \vartheta_T^* \right) \bar{\rho} dD - \\ & - \int_D \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g \bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD - \\ & - q \int_0^T dt \int_S \alpha_S \bar{\nu} \vartheta^* dS = 0,\end{aligned}\tag{3.10}$$

где $q = \frac{\nu_1 g \bar{\rho} \bar{T}}{\gamma_a - \gamma}$ – поверхность Мирового океана с заданной температурой поверхностного слоя $\bar{\vartheta}(x, y, 0, t)$.

Предположим, что нас интересует прогноз среднего поля температуры по области $G(x, y)\{x, y \in \sigma, 0 \leq z \leq h\}$. Тогда «начальные» для сопряженных уравнений условия выберем в виде

$$u_T^* = 0, \quad v_T^* = 0,$$

$$\frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta^* = \frac{1}{|G|}, \quad \text{если } \mathbf{x} \in G, \quad \text{и } \vartheta^* = 0 \quad \text{вне } G, \quad (3.11)$$

где bfx – совокупность координат (x, y, z) ; $|G|$ – мера области G .

Введем в рассмотрение обозначение для средней по области G аномалии температуры в момент времени $t = T$:

$$\frac{1}{|G|} \int_G \bar{\rho} \vartheta_T dD = \overline{\bar{\rho} \vartheta_T^G}.$$

Тогда формулу (3.10) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \overline{\bar{\rho} \vartheta_T^G} = & \int_D \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD + \\ & + q \int_0^T dt \int_S \alpha_S \bar{\vartheta} \vartheta^* dS. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Выражение $\overline{\bar{\rho} \vartheta_T^G}$ означает, что средняя аномалия температуры рассчитывается по данным на интервале $0 \leq t \leq T$.

Таким образом, задача прогноза средней аномалии температуры свелась к решению сопряженной задачи (3.7), (3.8) при условии (3.11).

В настоящем разделе была построена теория возмущений при специальном задании начальных условий для системы сопряженных уравнений и при однородных граничных условиях. Покажем, что возможны и другие постановки задач для системы сопряженных уравнений, которые приводят к формулам теории возмущений, удобным для практического использования. В самом деле, рассмотрим систему уравнений (3.1) вместе с граничными условиями (3.2) и начальными данными (3.3). Рассмотрим далее сопряженную систему уравнений (3.7).

Граничные условия для системы (3.7) определим следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} &= \alpha_S \vartheta^* + f^*, \quad \bar{\rho} w^* = 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} &= 0, \quad \bar{\rho} w^* = 0 \quad \text{при } z = H,\end{aligned}\tag{3.13}$$

где

$$f^* = \frac{\bar{\rho}}{|G_0|q} \delta(t - T), \quad \text{если } (x, y) \in G_0.$$

Здесь G_0 – некоторая область на поверхности Земли, где требуется дать прогноз средней аномалии температуры.

В качестве начальных данных для сопряженной задачи возьмем

$$u = u^*, \quad v = v^*, \quad \vartheta^* = 0 \quad \text{при любом } t > T.\tag{3.14}$$

С помощью основной и сопряженной задач и уже рассмотренной техники получим функционал

$$\begin{aligned}\overline{\bar{\rho} \vartheta_T^{G_0}} &= \int_D \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD + \\ &+ q \int_0^T dt \int_S \alpha_S \bar{\vartheta} \vartheta^* dS,\end{aligned}\tag{3.15}$$

где

$$\overline{\bar{\rho} \vartheta_T^{G_0}} = \frac{1}{|G_0|} \int_{G_0} \bar{\rho} \vartheta_T dS.\tag{3.16}$$

Предположим, что мы имеем дело с малыми возмущениями $u' = u + \delta u$, $v' = v + \delta v$, $\vartheta' = \vartheta + \delta \vartheta$, $\bar{\vartheta}' = \bar{\vartheta} + \delta \bar{\vartheta}$. Тогда методами, изложенными выше, приходим к формуле

$$\begin{aligned}\delta \left(\overline{\bar{\rho} \vartheta_T^{G_0}} \right) &= \int_D \left(\delta u_0 u_0^* + \delta v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \delta \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD + \\ &+ q \int_0^T dt \int_S \alpha_S \delta \bar{\vartheta} \vartheta^* dS.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Сравнивая формулу (3.15) с (3.12), мы видим, что они совпадают, если выбрать в (3.12) $G = G_0$. В этом случае, как нетрудно убедиться, будут совпадать и решения сопряженных уравнений, поскольку безразлично, задать ли мгновенный «источник» при $t = T$ на G_0 в граничных условиях или задать его на G_0 в момент времени $t = T$ как условие Коши.

До сих пор мы предполагали, что задача состоит в нахождении долгосрочного прогноза погоды на момент времени $t = T$ по отношению к начальному $t = 0$. Естественно, что при рассмотрении месячных или сезонных прогнозов нет смысла так точно определять момент предсказания аномалий температуры или других элементов. Методически было бы более правильно находить прогноз средней аномалии температуры за некоторый интервал времени. Например, при прогнозе погоды на ближайший месяц было бы целесообразно дать его осредненным по декадам: средний прогноз за первую, вторую и третью декады. Если нас интересует прогноз погоды на сезон, то в этом случае было бы достаточно дать осредненный по времени прогноз за первый, второй и третий месяцы сезона. Поскольку осреднение прогноза приводит к дополнительной фильтрации метеорологических шумов, то такая процедура повысила бы информативную значимость прогноза. Это значит, что наш подход к получению формул теории возмущений нужно несколько изменить.

С этой целью в качестве граничных условий для системы сопряженных уравнений выберем следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} &= \alpha_S \vartheta^* + f^*, \quad \bar{\rho} w^* = 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} &= 0, \quad \bar{\rho} w^* = 0 \quad \text{при } z = H, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $f^*(x, y, t)$ задается в форме

$$f^*(x, y, t) = \begin{cases} \bar{\rho}_q \xi^*(x, y) \eta^*(t), & \text{если } (x, y) \in G_0, \quad t \in [T - \tau, T], \\ 0 & \text{вне этой области.} \end{cases}$$

Относительно функций $\xi^*(x, y)$ и $\eta^*(t)$ предположим только, что они нормированы, т. е.

$$\int_{G_0} \xi^*(x, y) dS = 1, \quad \int_{T-\tau}^T \eta^*(t) dt = 1.$$

В частном случае, естественно, они могут быть постоянными.

В качестве начальных данных для сопряженных уравнений примем

$$u_T^* = 0, \quad v_T^* = 0, \quad \vartheta_T^* = 0 \quad \text{при } t > T. \quad (3.19)$$

При граничных условиях (3.18) и начальных данных (3.19) обычным методом получим функционал

$$\begin{aligned} \overline{\rho \vartheta_{T-\tau/2}^{G_0}} = & \int_D \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD + \\ & + q \int_0^T dt \int_S \alpha_S \bar{\rho} \vartheta^* dS, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$\overline{\rho \vartheta_{T-\tau/2}^{G_0}} = \int_{T-\tau}^T \eta^*(t) dt \int_{G_0} \bar{\rho} \vartheta \xi^* dS.$$

Сравнивая формулу (3.20) с (3.15) и (3.12), мы видим, что формально они совпадают друг с другом, изменяется лишь смысл сопряженного решения. На практике, конечно, удобно выбирать функции ξ^* и η^* гладкими и положительными. В этом случае соотношение (3.21) будет иметь смысл осредненного с весом значения температуры в заданной области G_0 и в интервале времени $t - \tau \leq t \leq T$.

4. Ценность метеорологической информации по отношению к аномалиям средней температуры и долгосрочный прогноз

Формулы теории возмущений, определенные в предыдущем параграфе, позволяют дать толкование решению сопряженной задачи как ценности информации по отношению к аномалии температуры в заданной области. Для того чтобы это пояснить, необходимо хотя бы качественно описать динамику решения сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -B \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + A \Phi^* &= 0, \\ B \Phi^* &= B \Phi_T^* \quad \text{при } t = T, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где компонентами вектора $B \Phi_T^*$, например, выбраны условия (3.11). Нетрудно представить себе, что при $t = T$, согласно условиям (3.11),

имеем $u_T^* = 0$, $v_T^* = 0$, а ϑ_T^* отлична от нуля только в области G , где она является константой. Предполагая функции u , v , w заданными, решаем систему сопряженных уравнений для $t < T$. При этом за счет переноса субстанций область ненулевых начальных данных переместится на запад примерно на расстояние $u\Delta t$, на север (или юг) – на $v\Delta t$ и по z – на $w\Delta t$, где $\Delta t = T - t$. Конечно, сразу же при этом возникнут гравитационные волны, волны Россби, которые «размажут» эту картину, расширив область возмущений и т. д. В результате турбулентной диффузии интенсивность полей компонентов сопряженных функций постоянно будет уменьшаться, в пределе при $t \rightarrow -\infty$ стремясь к нулю. Это значит, что при достаточно далеких прошлых моментах времени по отношению к моменту $t = T$ за счет диссипативных процессов информация о начальных полях уже не будет полезной, превращаясь в метеорологические шумы. В математической модели это и отражается тем, что первый интеграл в формуле (3.12) при $t \rightarrow \infty$ будет стремиться к нулю, а вариации температурной аномалии определяться только потоком тепла из океана, т. е.

$$\overline{\delta \rho \vartheta_T^G} = q \int_{-\infty}^T dt \int_S \delta \bar{\vartheta} \vartheta^* dS. \quad (4.2)$$

Это предельное соотношение позволяет сделать весьма важное заключение о роли океана в формировании аномалий температуры в долгосрочном прогнозе погоды. Более того, структура формулы (4.2) указывает на тот факт, что сопряженная формула ϑ^* – решение сопряженной задачи – является функцией влияния в отношении к прогнозируемым вариациям.

В связи с тем, что сопряженное решение является в конечном итоге основным критерием значимости информации по отношению к рассматриваемому функционалу задачи, его можно назвать ценностью информации.

5. Общая теория возмущений для эволюционных задач

В предыдущих разделах этой работы была построена теория возмущений в предположении, что истинное поле вектора скорости мало отличается от климатического. На самом деле при прогнозах погоды, особенно на короткий срок, приходится иметь дело с весьма существенными отклонениями полей метеорологических элементов от

климатических, и в этом случае теория малых возмущений уже оказывается недостаточной. Поэтому мы приходим к необходимости создания более полной теории, не связанной с предположением о малых возмущениях. С этой целью в качестве основного «невозмущенного» состояния атмосферы будем рассматривать климатическое состояние. Реальное состояние атмосферы будем называть возмущенным. Пусть невозмущенное состояние атмосферы описывается основной задачей (3.4)

$$\begin{aligned} B \frac{\partial \Phi}{\partial t} + A\Phi &= f, \\ B\Phi &= B\Phi_0 \quad \text{при } t = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

и сопряженной (3.5)

$$\begin{aligned} -B \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + A\Phi^* &= 0, \\ B\Phi^* &= B\Phi_T^* \quad \text{при } t = T, \end{aligned} \quad (5.2)$$

В фазовом пространстве $D \times T$ введем в рассмотрение скалярное произведение

$$(\mathbf{g}, \mathbf{h})_{D \times T} = \sum_{i=1}^3 \int_0^T dt \int_D g_i h_i dD. \quad (5.3)$$

Умножим, далее, скалярно уравнение (5.1) на Φ^* , а уравнение (5.2) – на Φ и результаты вычтем друг из друга. Тогда, используя начальные данные и условия, связывающие компоненты Φ и Φ^* на границах области D , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} (B\Phi_T, \Phi_T^*)_D - (B\Phi_0, \Phi_0^*)_D + \int_0^T dt [(\Phi^*, A\Phi)_D - (\Phi, A^*\Phi^*)_D] = \\ = \int_0^T (f, \Phi^*)_D dt. \end{aligned} \quad (5.4)$$

С учетом

$$(\Phi^*, A\Phi)_D = (\Phi, A^*\Phi^*)_D \quad (5.5)$$

соотношение (5.4) немножко упростится:

$$(B\Phi_T, \Phi_T^*)_D - (B\Phi_0, \Phi_0^*)_D = \int_0^T (f, \Phi^*)_D dt. \quad (5.6)$$

Итак, операторы решения и входные данные для основных и сопряженных уравнений в невозмущенном состоянии связаны зависимостями (5.4)–(5.6).

Наряду с невозмущенным состоянием теперь рассмотрим возмущенное состояние атмосферы. Пусть оно описывается задачей

$$B \frac{\partial \Phi'}{\partial t} + A' \Phi' = f',$$

$$B \Phi' = B \Phi'_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (5.7)$$

К задаче (5.7) присоединим сопряженную задачу, соответствующую невозмущенному состоянию атмосферы:

$$-B \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + A^* \Phi^* = 0,$$

$$B \Phi^* = B \Phi_T^* \quad \text{при } t = T. \quad (5.8)$$

Как и прежде, скалярно умножим уравнение (5.7) на Φ^* , уравнение (5.8) – на Φ' и результаты вычтем. Тогда приходим к соотношению, аналогичному (5.4):

$$\begin{aligned} & \left(B \Phi'_T, \Phi_T^{*'} \right)_D - \left(B \Phi'_0, \Phi_0^* \right)_D + \int_0^T dt \left[\left(\Phi^*, A' \Phi' \right)_D - \left(\Phi', A^* \Phi^* \right)_D \right] = \\ & = \int_0^T \left(f', \Phi^* \right)_D dt + R, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где R – некоторый функционал, связанный с тем, что граничные условия для компонентов решения Φ могут оказаться неоднородными. Вид этого функционала для конкретных случаев будет приведен в дальнейшем.

Введем теперь обозначения

$$A' = A + \delta A, \quad \Phi' = \Phi + \delta \Phi, \quad f' = f + \delta f, \quad (5.10)$$

где A , Φ и f – оператор и векторы, соответствующие невозмущенному состоянию.

Подставим (5.10) в (5.9) и воспользуемся соотношением (5.4) и тем очевидным фактом, что

$$\int_0^T dt (\Phi^*, A\Phi')_D = \int_0^T dt (\Phi^*, A^*\Phi^*)_D + R. \quad (5.11)$$

Тогда приходим к формуле возмущений в виде

$$\begin{aligned} (B\delta\Phi_{T'}, \Phi_T^*)_D - (B\delta\Phi_0, \Phi_0^*)_D + \int_0^T (\Phi^*, \delta A\Phi')_D dt = \\ = \int_0^T (\delta f, \Phi^*)_D dt + \delta R. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Формула (5.12) будет основной для получения различных прогностических выражений для искомым функционалов задач.

6. Теория возмущений для задач прогноза погоды

Переходим к покомпонентной записи формул теории возмущений. С этой целью рассмотрим возмущенную систему уравнений атмосферных движений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} u'}{\partial t} + \Lambda' u' - l \bar{\rho} v' + \bar{p} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - \mu \bar{\rho} \Delta u' &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho} v'}{\partial t} + \Lambda' v' + l \bar{\rho} u' + \bar{p} \frac{\partial \varphi'}{\partial y} - \mu \bar{\rho} \Delta v' &= 0, \\ -g \bar{\rho} \vartheta' + \bar{p} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\bar{\rho} u'}{\partial x} + \frac{\bar{\rho} v'}{\partial y} + \frac{\bar{\rho} w'}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho} \vartheta'}{\partial t} + \Lambda \vartheta' + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} \bar{\rho} w' - \frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \nu_1 \frac{\partial \vartheta'}{\partial z} - \bar{\rho} \mu_1 \Delta \vartheta' &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial z} = \alpha'_S (\vartheta' - \bar{\vartheta}'), \quad \bar{\rho} w' = 0 \quad \text{при } z = 0,$$

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial z} = 0, \quad \bar{\rho} w' = 0 \quad \text{при } z = H \quad (6.2)$$

и периодичности решения по (x, y) . Здесь $\vartheta' = \vartheta + \delta\vartheta$, $\bar{\vartheta}' = \bar{\vartheta} + \delta\bar{\vartheta}$, ϑ и $\bar{\vartheta}$ – климатические температуры воздуха соответственно на уровне будки и поверхностного слоя трения океана, а $\delta\vartheta$ и $\delta\bar{\vartheta}$ – отклонения от климата. В качестве начальных данных примем

$$u' = u'_0, \quad v' = v'_0, \quad \vartheta' = \vartheta'_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (6.3)$$

Далее, рассмотрим сопряженную систему, соответствующую невозмущенному состоянию атмосферы:

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{\rho} u^*}{\partial t} - \Lambda u^* + l\bar{\rho} v^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - \mu\bar{\rho} \Delta u^* &= 0, \\ -\frac{\bar{\rho} v^*}{\partial t} - \Lambda v^* - l\bar{\rho} u^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} - \mu\bar{\rho} \Delta v^* &= 0, \\ g\bar{\rho} \vartheta^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\bar{\rho} u^*}{\partial x} + \frac{\bar{\rho} v^*}{\partial y} + \frac{\bar{\rho} w^*}{\partial z} &= 0, \\ -\frac{\partial \bar{\rho} \vartheta^*}{\partial t} - \Lambda \vartheta^* + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} \bar{\rho} w^* - \frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \nu_1 \frac{\vartheta^*}{\partial z} - \bar{\rho} \mu_1 \Delta \vartheta^* &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} &= \alpha_S \vartheta^*, \quad \bar{\rho} w^* = 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} &= 0, \quad \bar{\rho} w^* = 0 \quad \text{при } z = H, \end{aligned} \quad (6.5)$$

а также в предположении периодичности решения по (x, y) и начальных данных

$$u^* = u_T^*, \quad v^* = v_T^*, \quad \vartheta^* = \vartheta_T^* \quad \text{при } t = T, \quad (6.6)$$

где u_T^* , v_T^* и ϑ_T^* – функции, которые будут определены в дальнейшем.

Прежде чем переходить к конструкции формул теории возмущений, введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$\Lambda' = \Lambda + \delta\Lambda, \quad \alpha'_S = \alpha_S + \delta\alpha'_S.$$

В соответствии с рассмотренной формальной процедурой основное уравнение системы (6.1) последовательно умножим на u^* , v^* , w^* , $R\bar{T}\varphi^*$ и $\frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma}\vartheta^*$, затем полученные выражения сложим и вычтем аналогичное выражение, полученное умножением уравнений сопряженной системы (6.4) соответственно на u' , v' , w' , $R\bar{T}\varphi'$ и $\frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma}\vartheta'$ с последующим сложением. Результат проинтегрируем по всему фазовому объему $D \times T$. Тогда с помощью простых преобразований приходим к выражению

$$\begin{aligned} & \int_D \left(u'_T u_T^* + v'_T v_T^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta'_T \vartheta_T^* \right) \bar{\rho} dD - \\ & - \int_D \left(u'_0 u_0^* + v'_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta'_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD + \\ & + \int_0^T dt \int_D \left(u^* \delta \Lambda u' + v^* \delta \Lambda v' + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta^* \delta \Lambda \vartheta' \right) dD - \quad (6.7) \\ & - q \int_0^T dt \int_S \alpha'_S (\alpha'_S \bar{\vartheta}' - \delta \alpha_S \vartheta') \vartheta^* dS = 0. \end{aligned}$$

В (6.7) предположим, что возмущения операторов и решений отсутствуют. Тогда мы приходим к формуле

$$\begin{aligned} & \int_D \left(u'_T u_T^* + v'_T v_T^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta'_T \vartheta_T^* \right) \bar{\rho} dD - \\ & - \int_D \left(u'_0 u_0^* + v'_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta'_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD - \quad (6.8) \\ & - q \int_0^T dt \int_S \alpha_S \bar{\vartheta}' \vartheta^* dS = 0. \end{aligned}$$

Учитывая обозначения $u' = u + \delta u$, $v' = v + \delta v$, $\vartheta' = \vartheta + \delta \vartheta$ и вычитая из (6.7) соотношение (6.8), приходим к формуле

$$\int_D \left(\delta u_T u_T^* + \delta v_T v_T^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \delta \vartheta_T \vartheta_T^* \right) \bar{\rho} dD -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_D \left(\delta u_0 u_0^* + \delta v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \delta \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD + \\
& + \int_0^T dt \int_D \left(u^* \delta \Lambda u' + v^* \delta \Lambda v' + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta^* \delta \Lambda \vartheta' \right) dD - \\
& - q \int_0^T dt \int_S [\alpha_S \delta \bar{\vartheta} + \delta \alpha_S (\bar{\vartheta}' - \vartheta')] \vartheta^* dS = 0. \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Формулу теории возмущений перепишем в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
& \int_D \left(\delta u_T u_T^* + \delta v_T v_T^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \delta \vartheta_T \vartheta_T^* \right) \bar{\rho} dD = \\
& = \int_D \left(\delta u_0 u_0^* + \delta v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \delta \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD - \\
& - \int_0^T dt \int_D \left(u^* \delta \Lambda u' + v^* \delta \Lambda v' + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta^* \delta \Lambda \vartheta' \right) dD + \\
& + q \int_0^T dt \int_S [\alpha_S \delta \bar{\vartheta} + \delta \alpha_S (\bar{\vartheta}' - \vartheta')] \vartheta^* dS. \tag{6.10}
\end{aligned}$$

Если теперь в качестве начальных условий для сопряженных уравнений мы возьмем условие (3.11), то приходим к формуле для аномалий средней температуры

$$\begin{aligned}
& \delta \left(\overline{\bar{\rho} \vartheta_T^G} \right) = \int_D \left(\delta u_0 u_0^* + \delta v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \delta \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD + \\
& + \int_0^T dt \int_D \left(u^* \delta \Lambda u' + v^* \delta \Lambda v' + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta^* \delta \Lambda \vartheta' \right) \bar{\rho} dD + \\
& + q \int_0^T dt \int_S [\alpha_S \delta \bar{\vartheta} + \delta \alpha_S (\bar{\vartheta}' - \vartheta')] \vartheta^* dS. \tag{6.11}
\end{aligned}$$

Проведем некоторые упрощения формулы (6.11) в том случае, когда срок прогноза достаточно велик (например, месяц). В этом случае, как было отмечено раньше, влияние начальных данных будет мало, поскольку интенсивность величин u^* , v^* и ϑ^* со временем вследствие диссипации будет уменьшаться. Тогда формула (6.11) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta \left(\overline{\rho \vartheta}_T^G \right) = & \int_{-\infty}^T dt \left(u^* \delta \Lambda u' + v^* \delta \Lambda v' + \frac{g \bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta^* \delta \Lambda \vartheta' \right) dD + \\ & + q \int_{-\infty}^T dt \int_S [\alpha_S \delta \bar{\vartheta} + \delta \alpha_S (\bar{\vartheta}' - \vartheta')] \vartheta^* dS. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Если предположить, что сопряженная задача решается при фактических значениях u , v и w , то $\delta \Lambda = 0$, и мы приходим к формуле

$$\delta \left(\overline{\rho \vartheta}_T^G \right) = q \int_{-\infty}^T dt \int_S [\alpha_S \delta \bar{\vartheta} + \delta \alpha_S (\bar{\vartheta}' - \vartheta')] \vartheta^* dS. \quad (6.13)$$

Смысл этой формулы весьма прозрачен. А именно: первый член в правой части (6.13) описывает вклад в аномалию температуры за счет взаимодействия атмосферы и океана, при этом член

$$q \int_{-\infty}^T dt \int_S \alpha_S \delta \bar{\vartheta} \vartheta^* dS$$

учитывает отклонение температуры поверхностного слоя трения океана от климатической, а другой член

$$q \int_{-\infty}^T dt \int_S \delta \alpha_S (\bar{\vartheta}' - \vartheta') \vartheta^* dS$$

описывает эффекты, связанные с отклонением теплопередачи атмосфера – океан за счет штормов, динамики ледового покрова и т. д.

Из формулы (6.13) следует, что долгосрочные аномалии температуры больших регионов континентов формируются в деятельном слое океана при его взаимодействии с атмосферой.

Наконец, если пренебречь штормами и считать динамику льдов в океане известной, то формула для прогноза аномалии температуры принимает простейший вид:

$$\delta \left(\overline{\rho \vartheta_T^G} \right) = q \int_{-\infty}^T dt \int_S \alpha_S \delta \bar{\vartheta} \vartheta^* dS \quad (6.14)$$

В заключение следует отметить, что в настоящем параграфе мы рассмотрели только случай, когда источники в сопряженных уравнениях задаются начальными данными (3.11). Все рассуждения остаются в силе для случая задания источников в граничных условиях в форме (3.13). В этом случае следует лишь G заменить на G_0 и в качестве сопряженных функций взять решение задачи (3.7), (3.13), (3.14).

7. Перенос тепла в бароклинном океане

Поскольку океан играет решающую роль в формировании аномалий температуры при долгосрочном прогнозе погоды, а данных по термическому состоянию океана крайне мало, представляется целесообразным поставить задачу о формировании теплового режима в океане под действием процессов, протекающих в атмосфере. С этой целью будем предполагать, что нам известны в любые моменты времени, предшествующие данному, температура (или поток тепла) на поверхности океана и напряжения ветра. Выбирая в качестве начальных данных при $t = 0$ климатическое состояние океана, шаг за шагом будем адаптировать океан к реальным возмущениям, приходящим с его поверхности. В результате океан адаптируется к атмосферным воздействиям, а информация о его термическом режиме может быть использована для целей долгосрочного прогноза погоды. Такова основная идея дальнейшего анализа.

Итак, рассмотрим систему уравнений динамики океана в линейном приближении:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - lv + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} - (\nu_s u'_z)_{z'} - \mu_s \Delta u = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + lu + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y} - (\nu_s v'_z)_{z'} - \mu_s \Delta v = 0,$$

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z'} - \frac{g\sigma}{\bar{\rho}} \vartheta_s = 0, \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z'} = 0,$$

$$\frac{\partial \vartheta_s}{\partial t} + \frac{\Gamma}{\sigma} w - (\nu_{1s} \vartheta_{sz'})_{z'} - \mu_{1s} \Delta \vartheta_s = 0,$$

где $z' = -z$, ϑ_s – относительная температура воды, связанная со стандартной температурой атмосферы соотношением

$$\vartheta_s = \frac{T - \bar{T}}{\bar{T}}$$

T – уже ранее введенный параметр атмосферы. Такое определение удобно по той причине, что оно дает возможность сохранить непрерывность относительных температур атмосферы и океана на поверхности океана; σ – заданная константа, связывающая температуру воды и ее плотность по формуле $\rho = \sigma \vartheta_s$. Влиянием солёности мы пренебрегаем, хотя ее учет был бы тривиален.

Ради удобства в системе (7.1) мы использовали те же обозначения для коэффициентов турбулентного обмена, что и для атмосферы. Снабдим их только специальными индексами s . Граничные условия для системы (7.1) выберем в виде

$$\nu_s u'_{z'} = -\frac{\tau_{xz}}{\bar{\rho}}, \quad \nu_s v'_{z'} = -\frac{\tau_{yz}}{\bar{\rho}}, \quad w = 0,$$

$$\frac{\partial \vartheta_s}{\partial z'} = \beta_s (\vartheta_s - \vartheta) \quad \text{при } z' = 0, \quad (7.2)$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial \vartheta_s}{\partial z'} = 0 \quad \text{при } z' = H_s,$$

где ϑ – заданная температура приводного слоя атмосферы над океаном; H_s – глубина океана; β_s – коэффициент теплопередачи в океане.

На береговой цилиндрической поверхности будем иметь

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial \vartheta_s}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Sigma. \quad (7.3)$$

В качестве начальных данных возьмем климатические характеристики

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad \vartheta_s = \vartheta_{s0} \quad \text{при } t = 0. \quad (7.4)$$

Далее, введем в рассмотрение систему сопряженных уравнений

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial u^*}{\partial t} + lv^* - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p^*}{\partial x} - (\nu_s u_{z'}^*)_{z'} - \mu_s \Delta u^* &= 0, \\
 -\frac{\partial v^*}{\partial t} - lu^* - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p^*}{\partial y} - (\nu_s v_{z'}^*)_{z'} - \mu_s \Delta v^* &= 0, \\
 -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p^*}{\partial z'} + \frac{g\sigma}{\bar{\rho}} \vartheta_s^* &= 0, \\
 -\frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial v^*}{\partial y} - \frac{\partial w^*}{\partial z'} &= 0, \\
 -\frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial t} - \frac{\Gamma}{\sigma} w^* - (\nu_{1s} \vartheta_{sz'}^*)_{z'} - \mu_{1s} \Delta \vartheta_s^* &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Граничные условия для сопряженных уравнений сформулируем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \nu_s u_{z'}^* &= 0, \quad \nu_s v_{z'}^* = 0, \quad w^* = 0 \quad \text{при } z' = 0, \\
 \begin{cases} \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial z'} = \beta_s \vartheta_s^* - \alpha_s \vartheta^*, & \text{если } t < t_m \\ \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial z'} = \beta_s \vartheta_s^*, & \text{если } t_m < t \end{cases} & \text{при } z' = 0, \\
 u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad w^* = 0, \quad \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial z'} = 0 & \text{при } z' = H_s.
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Здесь $\beta_s \vartheta_s^*$ – заданная функция, которая находится из решения сопряженной задачи (3.7), (3.13), (3.14) для атмосферы³. На береговой цилиндрической поверхности поставим условия

$$u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Sigma. \tag{7.7}$$

В качестве начальных данных для системы (7.5) возьмем

$$u^* = u_T^*, \quad v^* = v_T^*, \quad \vartheta_s^* = \vartheta_{sT}^*, \tag{7.8}$$

где u_T^* , v_T^* и ϑ_{sT}^* – пока произвольные функции координат.

³Здесь и в дальнейшем мы для удобства сохраним обозначение α_s как и в (3.2), хотя в действительности коэффициент α_s в граничных условиях для сопряженных уравнений определяется с точностью до множителей, обусловленных выбором скалярного произведения.

Естественно, что мы всюду предполагаем выполнение условий гладкости решений основной и сопряженной задач аналогично тому, как мы это имели при рассмотрении уравнений динамики атмосферы.

Умножим, далее, уравнения системы (7.1) соответственно на u^* , v^* , w^* , $\frac{1}{\bar{\rho}}p^*$ и $\frac{g\sigma^2}{\bar{\rho}\Gamma}\vartheta_s^*$, затем их сложим. После этого умножим уравнения сопряженной системы (7.5) соответственно на u , v , w , $\frac{1}{\bar{\rho}}p$ и $\frac{g\sigma^2}{\bar{\rho}\Gamma}\vartheta_s$ и также сложим. Затем результаты вычтем один из другого и окончательное выражение проинтегрируем по всему фазовому пространству $D_0 \times T$, где D_0 – область, занятая океаном. Тогда с учетом граничных условий получим

$$\begin{aligned} & \int_{D_0} \left(u_T u_T^* + v_T v_T^* + \frac{g\sigma^2}{\bar{\rho}\Gamma} \vartheta_{ST} \vartheta_{ST}^* \right) dD - \\ & - \int_{D_0} \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g\beta^2}{\bar{\rho}\Gamma} \vartheta_{S0} \vartheta_{S0}^* \right) dD + \\ & + \int_0^T dt \int_S \left(\frac{\tau_{xz}}{\bar{\rho}} u^* + \frac{\tau_{yz}}{\bar{\rho}} v^* - \frac{\beta_s}{r} \vartheta \vartheta_S^* \right) dS + \\ & + \frac{1}{r} \int_{t_m}^T dt \int_S \alpha_s \vartheta \vartheta_S^* dS = 0, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где

$$r = \frac{\bar{\rho}\Gamma\nu_{1S}}{g\sigma^2} \quad \text{при } z' = 0.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} & \int_{t_m}^T dt \int_S \alpha_s \vartheta \vartheta_S^* dS = r \left[\int_{D_0} \left(u_T u_T^* + v_T v_T^* + \frac{g\sigma^2}{\bar{\rho}\Gamma} \vartheta_{ST} \vartheta_{ST}^* \right) dD - \right. \\ & - \left. \int_{D_0} \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g\sigma^2}{\bar{\rho}\Gamma} \vartheta_{S0} \vartheta_{S0}^* \right) dD \right] + \\ & + \int_0^T dt \int_S \left[\frac{r}{\bar{\rho}} (\tau_{xz} u^* + \tau_{yz} v^*) - \beta_s \vartheta \vartheta_S^* \right] dS. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Пусть

$$u_T^* = 0, \quad v_T^* = 0, \quad \vartheta_{ST}^* = 0. \quad (7.11)$$

Тогда формула (7.10) несколько упростится:

$$\begin{aligned} & \int_{t_m}^T dt \int_S \alpha_s \vartheta \vartheta_S^* dS = \\ & = \int_0^T dt \int_S \left[\frac{r}{\bar{\rho}} (\tau_{xz} u^* + \tau_{yz} v^*) - \beta_s \vartheta \vartheta_S^* \right] dS - \\ & - r \int_{D_0} \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g\sigma^2}{\bar{\rho}\Gamma} \vartheta_{s0} \vartheta_{s0}^* \right) dD. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Введем теперь в рассмотрение возмущенную систему основных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} - l v' + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} - (\nu_s u'_{z'})_{z'} - \mu_s \Delta u' &= 0, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + l u' + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y} - (\nu_s v'_{z'})_{z'} - \mu_s \Delta v' &= 0, \\ \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z'} - \frac{g\sigma}{\bar{\rho}} \vartheta'_s &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z'} &= 0, \\ \frac{\partial \vartheta'_s}{\partial t} + \frac{\Gamma}{\sigma} w' - (\nu_{1s} \vartheta'_{sz'})_{z'} - \mu_{1s} \Delta \vartheta'_s &= 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

при условии

$$\begin{aligned} \nu_s u'_{z'} &= -\frac{\tau'_{xz}}{\bar{\rho}}, \quad \nu_s v'_{z'} = -\frac{\tau'_{yz}}{\bar{\rho}}, \quad w' = 0 \quad \text{при } z' = 0, \\ \frac{\partial \vartheta'_s}{\partial z'} &= \beta_s (\vartheta'_s - \vartheta') \quad \text{при } z' = 0, \\ u' &= 0, \quad v' = 0, \quad w' = 0, \quad \frac{\partial \vartheta'_s}{\partial z'} = 0 \quad \text{при } z' = H_s. \end{aligned} \quad (7.14)$$

где

$$\tau'_{xz} = \tau_{xz} + \delta \tau_{xz}, \quad \tau'_{yz} = \tau_{yz} + \delta \tau_{yz}, \quad \vartheta' = \vartheta + \delta \vartheta.$$

Здесь мы ради простоты предположим, что $\beta'_s = \beta_s$, т. е. $\delta\beta = 0$. Учет вариации $\delta\beta$ новых трудностей в рассмотрение не вносит. В качестве условий на боковой границе примем

$$u' = 0, \quad v' = 0, \quad \frac{\partial \vartheta'_s}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad (7.15)$$

а в качестве начальных данных – климатические значения

$$u' = u_0, \quad v' = v_0, \quad \vartheta'_s = \vartheta'_{s0}. \quad (7.16)$$

Тогда умножим уравнение (7.13) на сопряженные функции u^* , v^* , w^* , $\frac{1}{\rho}p^*$ и $\frac{g\sigma^2}{\rho\Gamma}\vartheta_s^*$, соответствующие невозмущенной (климатической) задаче, и почленно сложим, а сопряженные уравнения (7.5) умножим на u' , v' , w' , $\frac{1}{\rho}p'$ и $\frac{g\sigma^2}{\rho\Gamma}\vartheta'_s$ и также сложим, результаты этих операций вычтем друг из друга и проинтегрируем по $D_0 \times T$. Тогда аналогично предыдущему получим выражение

$$\begin{aligned} & \int_{t_m}^T dt \int_S \alpha_s \vartheta'_s \vartheta_s^* dS = \\ &= \int_0^T dt \int_S \left[\frac{r}{\rho} (\tau'_{xz} u^* + \tau'_{yz} v^*) - \beta_s \vartheta'_s \vartheta_s^* \right] dS - \\ & - r \int_{D_0} \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g\sigma^2}{\rho\Gamma} \vartheta_{s0} \vartheta_{s0}^* \right) dD. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Используя выражение (7.12) и распространяя интегрирование по t до $-\infty$, соотношение (7.17) запишем для отклонений

$$\begin{aligned} & \int_{t_m}^T dt \int_S \alpha_s \delta \vartheta \vartheta^* dS = \\ & \int_{-\infty}^T dt \int_S \left[\frac{r}{\rho} (\delta \tau_{xz} u^* + \delta \tau_{yz} v^*) - \beta_s \delta \vartheta \vartheta_s^* \right] dS. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Учитывая (7.18), прогностическое выражение (6.14) можно переписать в виде

$$\delta \left(\overline{\rho \vartheta}_T^G \right) = q \left\{ \int_{-\infty}^{t_m} dt \int_S \alpha_S \delta \vartheta \vartheta^* dS + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^T dt \int_S \left[\frac{r}{\rho} (\delta \tau_{xz} u^* + \delta \tau_{yz} v^*) - \beta_s \delta \vartheta \vartheta_s^* \right] dS. \right\} \quad (7.19)$$

Формулу (7.19) можно несколько упростить. В самом деле, поскольку отклонения температуры поверхностного слоя трения океана от климатической и отклонения приводного слоя атмосферы над океаном хорошо коррелируют друг с другом, то ради простоты их можно считать совпадающими друг с другом, т. е. при $z = 0$ положим $\delta \vartheta = \delta \bar{\vartheta}$. Пренебрегая далее отклонением динамики ветровых течений в океане, будем иметь

$$\delta \left(\overline{\rho \vartheta}_T^G \right) = q \left[\int_{-\infty}^{t_m} dt \int_S \delta \vartheta (\alpha_S \vartheta^* - \beta_S \vartheta_s^*) dS + \right. \\ \left. + \int_{t_m}^T dt \int_S \beta_s \delta \vartheta \vartheta_s^* dS \right]. \quad (7.20)$$

Распространение пределов интегрирования от нуля до T на интервал $(-\infty, T; \infty, T)$ не вносит существенных погрешностей, если исходный интервал так велик, что за рассматриваемый отрезок времени начальные данные «затухают» и ими можно пренебречь.

Поскольку мы здесь рассматриваем вопросы долгосрочного прогноза погоды, то такая замена является вполне оправданной. Если величины ϑ^* и ϑ_s^* заранее рассчитаны по климатическим данным, то первый интеграл в правой части (7.20) вычисляется просто. Что касается второго интеграла, то для него величина $\delta \bar{\vartheta}$ оказывается неизвестной. Ее нужно найти на основе совместного решения уравнений динамики атмосферы и океана.

8. Термическое влияние континентов на долгосрочный прогноз аномалий температуры

При решении задач прогноза погоды обычно на поверхности Земли ставят условие тепловой изоляции

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0.$$

Это условие удовлетворительно описывает процесс теплообмена в атмосфере, если прогноз погоды дается на короткий срок, когда из-за большой тепловой инерции поверхностного слоя Земли приток тепла из почвы в атмосферу, или наоборот, оказывается малым. Условие адиабатичности хорошо выполняется для областей, покрытых снегом. Если мы интересуемся долгосрочным прогнозом погоды на срок от месяца до сезона, то в этом случае Земля уже выступает в качестве активного механизма теплопередачи. Особенно важным является учет теплового режима почвы в глубине континентов, где действие океана ослабевает.

Итак, изучим процесс формирования температурного режима почвы под влиянием заданного потока тепла на поверхности. Пусть ϑ_c – относительная температура почвы в точке (x, y, z') в момент времени t , отнесенная к средней температуре атмосферы T , т. е.

$$\vartheta_c = \frac{T - \bar{T}}{\bar{T}}.$$

Рассмотрим уравнение притока тепла в почве

$$\frac{\partial \vartheta_c}{\partial z} - \nu_{1c} \frac{\partial^2 \vartheta_c}{\partial z'^2} = 0 \tag{8.1}$$

при условии

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_c}{\partial z'} &= \beta_c (\vartheta_c - \vartheta) \quad \text{при } z' = 0, \\ \frac{\partial \vartheta_c}{\partial z'} &= 0 \quad \text{при } z' = h. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Ось координат z' здесь направлена от поверхности $z = 0$ вертикально вниз. В уравнении (8.1) ν_{1c} – коэффициент теплопроводности почвы, β_c в (8.2) – коэффициент теплопередачи, ϑ – температура воздуха вблизи поверхности Земли.

В качестве начальных данных примем климатическое значение температуры

$$\vartheta_c = \vartheta_{c0} \quad \text{при } t = 0. \quad (8.3)$$

Введем, далее, в рассмотрение сопряженное уравнение

$$-\frac{\partial \vartheta_c^*}{\partial t} - \nu_{1c} \frac{\partial^2 \vartheta_c^*}{\partial z'^2} = 0 \quad (8.4)$$

при условии

$$\frac{\partial \vartheta_c^*}{\partial z'} = \beta_c \vartheta_c^* - f_c^* \quad \text{при } z' = 0, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial \vartheta_c^*}{\partial z'} = 0 \quad \text{при } z' = h, \quad (8.6)$$

где

$$f_c^* = \begin{cases} \alpha_s \vartheta^*, & \text{если } (x, y) \in C, \quad t_m \leq t \leq T, \\ 0 & \text{вне этой области.} \end{cases} \quad (8.7)$$

Здесь $\alpha_s \vartheta^*$ – сопряженная функция, являющаяся решением задачи динамики атмосферы, а C – область, занятая континентами.

Начальные данные для сопряженной задачи возьмем в виде

$$\vartheta_c^* = 0 \quad \text{при } t > T. \quad (8.8)$$

Умножим уравнение (8.1) скалярно на ϑ_c^* , а уравнение (8.4) – на ϑ_c и результаты вычтем друг из друга. Тогда получим

$$\int_0^T dt \int_{D_c} \frac{\partial}{\partial t} (\vartheta_c \vartheta_c^*) dD - \nu_{1c} \int_0^T dt \int_{D_c} \left(\vartheta_c^* \frac{\partial^2 \vartheta_c}{\partial z'^2} - \vartheta_c \frac{\partial^2 \vartheta_c^*}{\partial z'^2} \right) dD = 0. \quad (8.9)$$

Здесь D_c – область D , занятая континентами. Используя граничные условия и начальные данные, (8.9) преобразуем к виду

$$- \int_{D_c} (\vartheta_c \vartheta_c^*) dD - \nu_{1c} \int_0^T dt \int_{D_c} (\beta_c \vartheta_c \vartheta_c^* - f_c^* \vartheta_c^*) dD = 0. \quad (8.10)$$

С помощью соотношения (8.10) получим

$$\int_{t_m}^T dt \int_C \alpha_s \vartheta_c \vartheta_c^* ds = \frac{1}{\nu_{1c}} \int_{D_c} (\vartheta_c \vartheta_c^*) dD + \int_0^T dt \int_C \beta_c \vartheta_c \vartheta_c^* dS. \quad (8.11)$$

Если временной интервал $0 \leq t \leq T$ сделать достаточно большим, то роль начальных данных будет несущественной и вместо соотношения (8.11) мы получим

$$\int_{t_m}^T dt \int_C \alpha_s \vartheta_c \vartheta^* ds = \int_{-\infty}^T dt \int_C \beta_c \vartheta \vartheta_c^* dS. \quad (8.12)$$

На основе этого соотношения можно получить формулу теории возмущений (отклонений от климата)

$$\int_{t_m}^T dt \int_C \alpha_s \delta \vartheta_c \vartheta^* ds = \int_{-\infty}^T dt \int_C \beta_c \delta \vartheta \vartheta_c^* dS. \quad (8.13)$$

В дальнейшем будем считать, что $\delta \vartheta_c = \delta \vartheta$.

При рассмотрении динамики атмосферы и прогноза погоды мы ранее предполагали, что на континенте поставлено условие адиабатичности. Если предположить, что вместо этого мы имеем условие

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z'} = \alpha_c (\vartheta - \bar{\vartheta}),$$

где через $\bar{\vartheta}$ обозначим температуру поверхностного слоя почвы, то, очевидно, в построенных формулах для прогноза средних аномалий температуры континент будет отличаться от океана только коэффициентом теплопередачи: на поверхности океана его следует взять равным $-\alpha_s$, а на поверхности континентов α_c . В результате основная прогностическая формула (7.20) может быть обобщена и примет вид

$$\begin{aligned} \delta \left(\overline{\rho \vartheta}_T^G \right) = & q \left[\int_{-\infty}^{t_m} dt \int_S \delta \vartheta (\alpha_s \vartheta^* + \beta_s \vartheta_s^*) dS + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{t_m} dt \int_C \delta \vartheta (\alpha_c \vartheta^* + \beta_c \vartheta_c^*) dS \right] + \\ & + q \int_{t_m}^T dt \left(\int_S \alpha_s \delta \vartheta \vartheta_s^* dS + \int_C \alpha_c \delta \vartheta \vartheta_c^* dS \right). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в (8.14), известно и рассчитывается по фактическим отклонениям температуры от климатической $\delta\bar{\vartheta}$ как на поверхности океана S , так и на поверхности континента C . Что касается второго слагаемого в правой части (8.14), то оно неизвестно и должно быть найдено в результате совместного решения задачи динамики атмосферы и океана и теплопроводности почвы.

Если предположить, что роль последнего слагаемого в правой части (8.14) мала, то так же, как при выводе (7.20), приходим к простейшей формуле долгосрочного прогноза средних аномалий температуры:

$$\delta \left(\overline{\rho \vartheta}_T^G \right) = q \int_{-\infty}^{t_m} dt \left[\int_S \delta \vartheta (\alpha_S \vartheta^* + \beta_S \vartheta_s^*) dS + \right. \\ \left. + \int_C \delta \vartheta (\alpha_c \vartheta^* + \beta_c \vartheta_c^*) dS \right]. \quad (8.15)$$

Итак, суммируя все сказанное, можно отметить, что задача долгосрочного прогноза погоды в основном свелась к расчету специальным образом определенных сопряженных функций для атмосферы, океана и континента и определению вариаций температуры на поверхности океана и континентов и вариации притока тепла в атмосфере.

В заключение обратим внимание на тот факт, что как на континенте, так и в океане коэффициент теплопередачи может меняться весьма существенно как за счет динамики ледового покрова в океане, так и за счет снежного покрова на континентах. Поэтому при выводе формул теории возмущений этот факт должен быть учтен.

В рамках теории малых возмущений в этом случае всюду в формулах для средних аномалий температуры величины $\alpha_s \delta\bar{\vartheta}$ и $\alpha_c \delta\bar{\vartheta}$ нужно заменить на $\delta(\alpha_s \bar{\vartheta})$ и $\delta(\alpha_c \bar{\vartheta})$ соответственно. Например, формула (8.15) примет вид

$$\delta \left(\overline{\rho \vartheta}_T^G \right) = q \int_{-\infty}^{t_m} dt \left[\int_S [\delta(\alpha_s \bar{\vartheta}) \vartheta^* + \delta(\beta_s \bar{\vartheta}) \vartheta_s^*] dS + \right. \\ \left. + \int_C [\delta(\alpha_c \bar{\vartheta}) \vartheta^* + \delta(\beta_c \bar{\vartheta}) \vartheta_c^*] dS \right]. \quad (8.16)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноз погоды. М.: Гостехиздат, 1957.
2. Марчук Г. И., Орлов В. В. К теории сопряженных функций // В сб.: Нейтронная физика. М.: Госатомиздат, 1961.
3. Марчук Г. И. О постановке некоторых обратных задач // Доклады АН СССР. 1964. Т. 156, № 3.
4. Марчук Г. И. Уравнение для ценности информации с метеорологических спутников и постановка обратных задач // Космические исследования. 1964. Т. 2, вып. 3.
5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Новосибирск: Наука, 1973.

МЕТОДЫ ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ И СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ⁴

Данная работа является продолжением статьи «Основные и сопряженные уравнения динамики атмосферы и океана» [1]. В ней рассматриваются вопросы использования сопряженных уравнений для задач долгосрочного прогноза погоды. Строится вариация функционалов задач (средней аномалии температур, средних аномалий вертикальных токов для больших регионов Земли). Выводятся формулы для указанных аномалий на основе входных данных задач для динамики атмосферы и океана, а также теплопроводности континентов.

1. Формулировка задачи долгосрочного прогноза погоды

При рассмотрении задачи долгосрочного прогноза погоды мы в качестве основных параметризаций использовали уравнения теплового баланса на поверхности океана и континентов. Как известно, формулы теплового баланса достаточно хорошо описывают эффект взаимодействия атмосферы с океаном и континентами с учетом излучения, фазовых превращений водяного пара, ледового покрова океана и др.

⁴Метеорология и гидрология, 1974, № 3, с. 17–34.

Именно по этой причине основной вариант теории был рассмотрен в этом простейшем и в основных чертах правильном приближении.

Здесь будет построена близкая, но более точная теория, которая снимет некоторые неясности в исходных предположениях модели теплового баланса. С этой целью будем предполагать, что нам известны температура поверхностного слоя воды в океане и температура земной поверхности на континентах. Располагая этой информацией, сформулируем основные и сопряженные уравнения, соответствующие им граничные условия и начальные данные, которые и позволят сформулировать теорию возмущений.

Итак, рассмотрим систему основных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial t} + \Lambda u - l \bar{\rho} v + \bar{p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu \bar{\rho} \Delta u &= 0, \\
 \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial t} + \Lambda v + l \bar{\rho} u + \bar{p} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \mu \bar{\rho} \Delta v &= 0, \\
 -g \bar{\rho} \vartheta + \bar{p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial \bar{\rho} \vartheta}{\partial t} + \Lambda \vartheta + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} \bar{\rho} w - (\nu_1 \bar{\rho} \vartheta_z)_z - \mu \bar{\rho} \Delta \vartheta &= \epsilon,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$\Lambda a = \frac{\partial \bar{\rho} u a}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v a}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w a}{\partial z}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho} w &= 0, \quad \vartheta = \bar{\vartheta} \quad \text{при } z = 0, \\
 \bar{\rho} w &= 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = H.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

В качестве начальных данных примем

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{при } t = 0. \tag{1.3}$$

В задаче (1.1)–(1.3) ϵ с точностью до константы $\frac{1}{c_p T}$ является лучистым притоком тепла к единице массы атмосферы.

В рамках приближения Шварцшильда нетрудно получить

$$\epsilon = \frac{1}{c_p \bar{T}} \frac{\partial F}{\partial z},$$

где F – поток излучения через единичную площадку в плоскости (x, y) на уровне z , равный

$$F = S + A - B,$$

S – поток коротковолновой радиации от Солнца, A – поток длинноволновой радиации, направленной вниз, а B – поток длинноволновой радиации, уходящей вверх.

Система сопряженных уравнений для атмосферы имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \bar{\rho} u^*}{\partial t} - \Lambda u^* + l \bar{\rho} v^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \bar{\rho} \Delta u^* &= 0, \\ -\frac{\partial \bar{\rho} v^*}{\partial t} - \Lambda v^* - l \bar{\rho} u^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \bar{\rho} \Delta v^* &= 0, \\ g \bar{\rho} \vartheta^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} &= 0, \\ -\frac{\partial \bar{\rho} u^*}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\rho} v^*}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\rho} w^*}{\partial z} &= 0, \\ -\frac{\partial \bar{\rho} \vartheta^*}{\partial t} - \Lambda \vartheta^* + \frac{\gamma_a - \gamma}{\bar{T}} \bar{\rho} w^* - (\nu_1 \bar{\rho} \vartheta_z^*)_z - \mu \bar{\rho} \delta \vartheta^* &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Граничными условиями для системы (1.4) возьмем

$$\begin{aligned} \bar{\rho} w^* &= 0, \quad \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = f^* \quad \text{при } z = 0, \\ \bar{\rho} w^* &= 0, \quad \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = H, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$f^* = \begin{cases} \xi^*(x, y) \eta^*(t), & \text{если } (x, y) \in G_0, \quad T - \tau \leq t \leq T, \\ 0 & \text{вне этой области.} \end{cases}$$

Начальные данные для сопряженной системы выберем следующие:

$$u_T^* = 0, \quad v_T^* = 0, \quad \vartheta_T^* = 0 \quad \text{при } t > T. \quad (1.6)$$

Умножим четвертые уравнения систем (1.1) и (1.4) на $R\bar{T}$, а пятые – на $\frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma}$ и с помощью обычных преобразований, аналогичных рассмотренным в [1], получим формулу

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\vartheta_{T-\tau/2}^{G_0} = & \int_D \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD + \\ & + q \int_0^T dt \int_{S+C} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \vartheta^* dS - \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \int_0^T dt \int_D \epsilon \vartheta^* dD. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Заметим теперь, что на поверхности океана поток тепла в атмосфере связан с потоком тепла в океане и интегральным потоком излучения F соотношением

$$k \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{1}{c_p \bar{T}} F = -k_s \frac{\partial \vartheta_s}{\partial z'} \quad \text{при } z = z' = 0 \quad \text{на } S \quad (1.8)$$

и на поверхности Земли

$$k \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{1}{c_p \bar{T}} F = -k_c \frac{\partial \vartheta_c}{\partial z'} \quad \text{при } z = z' = 0 \quad \text{на } C. \quad (1.9)$$

Здесь использованы обозначения

$$k = \nu_1 \bar{\rho}, \quad k_s = \nu_{1s} \bar{\rho}_s, \quad k_c = \nu_{1c} \bar{\rho}_c,$$

$\bar{\rho}$ – плотность воздуха, $\bar{\rho}_s$ – плотность воды, $\bar{\rho}_c$ – плотность почвы. Кроме того, считается, что $z' = -z$. С учетом формул (1.8) и (1.9) соотношение (1.7) перепишем в форме

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\vartheta_{T-\tau/2}^{G_0} = & \int_D \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD - \\ & - q \int_0^T dt \left(\frac{k_s}{k} \int_S \frac{\partial \vartheta_s}{\partial z'} \vartheta^* dS + \frac{k_c}{k} \int_C \frac{\partial \vartheta_c}{\partial z'} \vartheta^* dS \right) - \\ & - \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \int_0^T dt \left(\int_D \epsilon \vartheta^* dD + \frac{1}{k c_p \bar{T}} \int_{S+C} F \vartheta^* dS \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Напомним, что по определению $\epsilon = \frac{1}{c_p \bar{T}} \frac{\partial F}{\partial z}$, поэтому после интегрирования по частям формула (1.10) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \vartheta_{T-\tau/2}^{G_0} = & \int_D \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g \bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD - \\ & - q \int_0^T dt \left(\frac{k_s}{k} \int_S \frac{\partial \vartheta_s}{\partial z'} \vartheta^* dS + \frac{k_c}{k} \int_C \frac{\partial \vartheta_c}{\partial z'} \vartheta^* dS \right) + \\ & + \frac{g}{c_p (\gamma_a - \gamma)} \left(\int_0^T dt \int_D F \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} dD - \int_0^T dt \int_{S+C} F_H \vartheta_H^* dS \right), \quad (1.11) \end{aligned}$$

где индексом H отмечены величины при $z = H$.

Рассмотрим далее систему основных уравнений для океана в предположении, что напряжением ветра на свободной поверхности можно пренебречь. Такое предположение естественно, поскольку в более полной форме уравнения динамики океана уже были рассмотрены в [1]. Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - lv + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} - \mu_s \Delta u &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + lu + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y} - \mu_s \Delta v &= 0, \\ -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z'} - \frac{g\sigma}{\bar{\rho}} \vartheta_s &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z'} &= 0, \\ \frac{\partial \vartheta_s}{\partial t} + \frac{\Gamma}{\sigma} w - (\nu_1 \vartheta_{sz'})_{z'} - \mu_{1s} \Delta \vartheta_s &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

К системе (1.12) присоединим граничные условия

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \vartheta_s = \bar{\vartheta} \quad \text{при } z' = 0, \\ w = 0, \quad \frac{\partial \vartheta_s}{\partial z'} = 0 \quad \text{при } z' = H_s, \\ u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial \vartheta_s}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Sigma \end{aligned} \quad (1.13)$$

и начальные данные

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad \vartheta_s = \vartheta_{s0} \quad \text{при } t = 0. \quad (1.14)$$

Сопряженные уравнения определим следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u^*}{\partial t} + lv^* - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p^*}{\partial x} - \mu_s \Delta u^* &= 0, \\ -\frac{\partial v^*}{\partial t} - lu^* - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p^*}{\partial y} - \mu_s \Delta v^* &= 0, \\ -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p^*}{\partial z'} + \frac{g\sigma}{\bar{\rho}} \vartheta_s^* &= 0, \\ -\frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial v^*}{\partial y} - \frac{\partial w^*}{\partial z'} &= 0, \\ -\frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial t} - \frac{\Gamma}{\sigma} w^* - (\nu_1 \vartheta_{sz'}^*)_{z'} - \mu_{1s} \Delta \vartheta_s^* &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Граничными условиями для системы (1.15) возьмем

$$\begin{aligned} w^* &= 0, \quad \vartheta_s^* = \frac{k_s}{k} \vartheta^* \quad \text{при } z' = 0, \\ w^* &= 0, \quad \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial z'} = 0 \quad \text{при } z' = H_s, \\ u^* &= 0, \quad v^* = 0, \quad \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$f^* = \begin{cases} \xi(x, y) \eta(t), & \text{если } (x, y) \in G_0, \quad T - \tau \leq t \leq T, \\ 0 & \text{вне этой области.} \end{cases}$$

Начальные данные определим соотношениями

$$u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad \vartheta_s^* = 0 \quad \text{при } t > T. \quad (1.17)$$

Тогда на основе сформулированных задач приходим к функциональному уравнению

$$\begin{aligned}
& \int_D \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g\sigma^2}{\bar{\rho}\Gamma} \vartheta_{s0} \vartheta_{s0}^* \right) dD + \\
& + \frac{1}{r} \int_0^T dt \int_S \frac{k_s}{k} \left(\frac{\partial \vartheta_s}{\partial z'} \vartheta^* - \bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial z'} dS = 0 \right). \quad (1.18)
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
& \int_0^T dt \int_S \frac{k_s}{k} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial z'} \vartheta^* dS = \int_0^T dt \int_S \bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial z'} dS - \\
& - \int_D \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g\sigma^2}{\bar{\rho}\Gamma} \vartheta_{s0} \vartheta_{s0}^* \right) dD. \quad (1.19)
\end{aligned}$$

Переходим теперь к рассмотрению задачи теплопроводности почвы. Сначала рассмотрим основную задачу

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \vartheta_c}{\partial t} - \nu_{1c} \frac{\partial^2 \vartheta_c}{\partial z'^2} = 0, \\
& \vartheta_c = \vartheta \quad \text{при } z' = 0, \\
& \frac{\partial \vartheta_c}{\partial z'} = 0 \quad \text{при } z' = h, \\
& \vartheta_c = \vartheta_{c0} \quad \text{при } t = 0, \quad (1.20)
\end{aligned}$$

где h – глубина почвы, на которой годовой ход температуры отсутствует.

Сопряженную задачу по отношению к (1.20) определим следующим образом:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial \vartheta_c^*}{\partial t} - \nu_{1c} \frac{\partial^2 \vartheta_c^*}{\partial z'^2} = 0, \\
& \vartheta_c^* = \frac{k_c}{k} \vartheta^* \quad \text{при } z' = 0, \\
& \frac{\partial \vartheta_c^*}{\partial z'} = 0 \quad \text{при } z' = h, \\
& \vartheta_c^* = 0 \quad \text{при } t > T. \quad (1.21)
\end{aligned}$$

Обычным способом приходим к функциональному уравнению

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_C \frac{k_c}{k} \frac{\partial \vartheta_c}{\partial z'} \vartheta^* dS &= \int_0^T dt \int_C \bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta_c^*}{\partial z'} dS - \\ &- \frac{1}{\nu_{1c}} \int_0^T dt \int_{D_c} \vartheta_{c0} \vartheta_{c0}^* dD. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Далее полученные выражения (1.19) и (1.22) используем для исключения соответствующих выражений из основного соотношения (1.11). Тогда получим

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \vartheta_{T-\tau/2}^{G_0} &= \int_D \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD + \\ &+ q \left[\int_{D_s} \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g\sigma^2}{\bar{\rho}\Gamma} \vartheta_{s0} \vartheta_{s0}^* \right) dD + \frac{1}{\nu_{1c}} \int_{D_c} \vartheta_{c0} \vartheta_{c0}^* dD \right] - \\ &- q \int_0^T dt \left(\int_S \bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial z'} dS + \int_C \vartheta \frac{\partial \vartheta_c^*}{\partial z'} dS \right) + \\ &+ \frac{g}{c_p (\gamma_a - \gamma)} \left(\int_0^T dt \int_D F \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} dD - \int_0^T dt \int_{S+C} F_H \vartheta_H^* dS \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

На основе (1.23) приходим к формуле малых возмущений. Для этой цели предположим, что в начальный момент времени начальные состояния океана и почвы климатические.

Тогда, предполагая, что истинное состояние системы мало отличается от климатического, получим формулу для средней аномалии температуры

$$\begin{aligned} \delta \left(\bar{\rho} \vartheta_{T-\tau/2}^{G_0} \right) &= \int_D \left(\delta u_0 u_0^* + \delta v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \delta \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD - \\ &- q \int_0^T dt \left(\int_S \delta \bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial z'} dS + \int_C \delta \vartheta \frac{\partial \vartheta_c^*}{\partial z'} dS \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{g}{c_p(\gamma_a - \gamma)} \int_0^T dt \left(\int_D \delta F \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} dD - \int_{S+C} \delta F_H \vartheta_H^* dS \right). \quad (1.24)$$

Здесь по-прежнему $\delta \bar{\vartheta}$ – заданное отклонение относительной температуры при $z = 0$ от климатического значения.

Если, наконец, интервал $0 \leq t \leq T$ достаточно велик и начальные данные в атмосфере уже не играют существенной роли в прогнозе аномалий температуры, то формулу (1.24) можно заменить более простой:

$$\begin{aligned} \delta \left(\overline{\rho \vartheta}_{T-\tau/2}^{G_0} \right) = & -q \int_{-\infty}^T dt \left(\int_S \delta \bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial z'} dS + \int_C \delta \vartheta \frac{\partial \vartheta_c^*}{\partial z'} dS \right) + \\ & + \frac{g}{c_p(\gamma_a - \gamma)} \int_{-\infty}^T dt \left(\int_D \delta F \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} dD - \int_{S+C} \delta F_H \vartheta_H^* dS \right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Из этой формулы следует, что формирование аномалии температуры при долгосрочном прогнозе происходит в основном за счет передачи тепла из океана, континента и теплообмена в атмосфере.

Если предположить, что вариации потока лучевой энергии слабо меняются по высоте, т. е.

$$\delta F \cong \delta F_H \cong \delta F_0,$$

то приближенно запишем

$$\int_D \delta F \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} dD - \int_{S+C} \delta F_H \vartheta_H^* dS \cong \int_{S+C} \delta F_0 \vartheta_0^* dS,$$

следовательно, формула (1.25) упростится:

$$\begin{aligned} \delta \left(\overline{\rho \vartheta}_{T-\tau/2}^{G_0} \right) = & -q \int_{-\infty}^T dt \left(\int_S \delta \bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial z'} dS + \int_C \delta \vartheta \frac{\partial \vartheta_c^*}{\partial z'} dS \right) - \\ & - \frac{g}{c_p(\gamma_a - \gamma)} \int_{-\infty}^T dt \int_{S+C} \delta F_0 \vartheta_0^* dS. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Полезно отметить, что формула (1.26) могла бы быть получена строго в предположении, что лучистым притоком тепла в атмосфере можно пренебречь, т. е. в уравнениях (1.1) с самого начала положено $\epsilon = 0$, а трансформация лучистой энергии в тепловую происходит только на поверхности океана и континентов, где выполняются граничные условия (1.8) и (1.10). Такое приближение может оказаться удовлетворительным.

В результате приходим к следующему алгоритму долгосрочного прогноза погоды. По климатическим данным и с помощью решения сопряженных задач для атмосферы, для океана и континентов находятся выражения ϑ^* , $\frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial z'}$, $\frac{\partial \vartheta_c^*}{\partial z'}$. Они могут быть затабулированы заранее при фиксированных входных параметрах: G_0 , времени года и интервалах осреднения $T - \tau \leq t \leq T$. Затем рассчитываются величины

$$\begin{aligned} a(t) &= -q \int_S \delta \bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial z'} dS, \\ b(t) &= -q \int_C \delta \bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta_c^*}{\partial z'} dS, \\ c(t) &= -q \frac{g}{c_p(\gamma_a - \gamma)} \int_{S+C} \delta F_0 \vartheta^* dS. \end{aligned}$$

Функции $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ рассчитываются по известным из наблюдений значениям $\delta \bar{\vartheta}$ и δF_0 в интервале времени $-\infty < t < t_m$. Недостающие значения этих величин в интервале $t_m \leq t \leq T$ могут быть найдены, например, на основе теории экстраполяции случайных функций, учитывая большую корреляционную связь метеорологических полей во времени. Этот путь, по-видимому, является весьма рациональным. Однако простейшая формула прогноза получается в том случае, когда используются упрощенные формулы. В самом деле, поскольку величины ϑ_s^* , ϑ_c^* и ϑ^* со временем затухают (если, например, речь идет о прогнозе на месяц или сезон), то с некоторой погрешностью вместо (1.26) можно воспользоваться следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \delta \left(\bar{\rho} \vartheta_{T-\tau/2}^{G_0} \right) &= -q \int_{-\infty}^{t_m} dt \left(\int_S \delta \bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial z'} dS + \int_C \delta \bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta_c^*}{\partial z'} dS \right) - \\ &\quad - \frac{g}{c_p(\gamma_a - \gamma)} \int_{-\infty}^{t_m} dt \int_{S+C} \delta F_0 \vartheta^* dS. \end{aligned} \quad (1.27)$$

2. Долгосрочный прогноз средних отклонений осадков от нормы

Проблема долгосрочного прогноза отклонений осадков от нормы в заданном регионе в общем виде представляет собой задачу большой сложности. Мы же попытаемся дать весьма упрощенную схему прогноза, которая хотя качественно отвечала на вопрос о том, выпадет осадков больше или меньше климатической нормы. При таком подходе можно использовать хорошо установленную корреляционную связь между вертикальной скоростью w и осадками. Такая связь указывает, что осадки, как правило, коррелируют в нижней тропосфере с вертикальной скоростью w , обращаясь в нуль при $w < 0$. Если этот факт принять за основу, то можно построить теорию возмущений для средней по региону Ω_h вертикальной скорости w , осредненной также по интервалу времени $T - \tau \leq t < T$. Здесь Ω_h – трехмерная область в тропосфере, которая своей проекцией на плоскость $z = 0$ имеет G_0 .

Рассмотрим сопряженную задачу

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \bar{\rho} u^*}{\partial t} - \Lambda u^* + l \bar{\rho} v^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \bar{\rho} \Delta u^* &= 0, \\
 -\frac{\partial \bar{\rho} v^*}{\partial t} - \Lambda v^* - l \bar{\rho} u^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \bar{\rho} \Delta v^* &= 0, \\
 -g \bar{\rho} \vartheta^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} &= f^*, \\
 -\frac{\partial \bar{\rho} u^*}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\rho} v^*}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\rho} w^*}{\partial z} &= 0, \\
 -\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t} - \Lambda \vartheta^* + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} \bar{\rho} w^* - (\bar{\rho} \nu_1 \vartheta_z^*)_z - \mu_1 \bar{\rho} \Delta \vartheta^* &= 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

при условии

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho} w^* &= 0, \quad \vartheta^* = 0 \quad \text{при } z = 0, \\
 \bar{\rho} w^* &= 0, \quad \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = H
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

и начальных данных

$$u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad \vartheta^* = 0 \quad \text{при } t > T. \tag{2.3}$$

Здесь

$$f^* = \begin{cases} \xi^*(x, y) \kappa^*(z) \eta^*(t) & \text{при } (x, y, z) \in \Omega_h, \quad T - \tau \leq t \leq T, \\ 0 & \text{вне этой области,} \end{cases}$$

а $\xi^*(x, y)$, $\kappa^*(z)$ и $\eta^*(t)$ – функции, нормированные в Ω_h на единицу. Здесь ΔT обозначает интервал $T - \tau \leq t \leq T$.

Уравнения системы (1.1) умножим соответственно на u^* , v^* , w^* , $R\bar{T}$ и $\frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma}\vartheta^*$ и почленно сложим. Далее, систему уравнений (2.1) умножим на u , v , w , $R\bar{T}$ и $\frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma}\vartheta$ и сложим. Результаты вычтем друг из друга и проинтегрируем по всему фазовому пространству, используя граничные условия (1.2), (2.2) и начальные данные (1.3), (2.3). Тогда приходим к функционалу

$$\begin{aligned} \bar{w}_{T-\tau/2}^{\Omega_h} = & \int_D \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD + \\ & + q \int_0^T dt \int_{S+C} \bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} dS. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для малых возмущений получим

$$\begin{aligned} \delta \left(\bar{w}_{T-\tau/2}^{\Omega_h} \right) = & \int_D \left(\delta u_0 u_0^* + \delta v_0 v_0^* + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \delta \vartheta_0 \vartheta_0^* \right) \bar{\rho} dD + \\ & + q \int_0^T dt \int_{S+C} \delta \bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} dS. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При выводе формул теории малых возмущений для отклонений средней вертикальной системы от климатических значений мы ради простоты пренебрегли лучистым теплообменом. При необходимости учет его можно осуществить методами, изложенными выше.

Если интервал времени $0 \leq t \leq T$ достаточно велик, то начальными данными можно пренебречь, и мы приходим к формуле

$$\delta \left(\bar{w}_{T-\tau/2}^{\Omega_h} \right) = q \int_0^T dt \int_{S+C} \delta \bar{\vartheta} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} dS. \quad (2.6)$$

На основе формулы (2.6) можно в рассматриваемом регионе в интервале времени $0 \leq t \leq T$ установить превышение осадков над климатическим значением, если $\overline{\delta \bar{w}_{T-\tau/2}^{\Omega_h}} > 0$, и дефицит, если $\overline{\delta \bar{w}_{T-\tau/2}^{\Omega_h}} < 0$.

Формулу (2.6) упростим, учитывая, что ϑ^* затухает со временем. Тогда имеем

$$\delta \left(\overline{w}_{T-\tau/2}^{\Omega_h} \right) = q \int_{-\infty}^{t_m} dt \int_{S+C} \delta \overline{\vartheta} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} dS. \quad (2.7)$$

3. Простейшая модель долгосрочного прогноза погоды

Переходим к расчету сопряженных функций. С этой целью предположим, что основной нашей задачей является долгосрочный прогноз средней аномалии температуры в заданном регионе G_0 и в интервале времени $T - \tau \leq t \leq T$. Поскольку пространственные и временные масштабы явлений, ответственные за такой прогноз, весьма велики, то естественно сосредоточить внимание только на наиболее крупных возмущениях фонового характера. Что касается масштабов возмущений циклонических размеров, то их будем описывать феноменологически с помощью системы макромасштабного турбулентного обмена. В этом случае приходим к сопряженной задаче

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \bar{\rho} u^*}{\partial t} - \bar{u} \frac{\partial \bar{\rho} u^*}{\partial x} + l \bar{\rho} v^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - \mu \bar{\rho} \Delta u^* &= 0, \\ -\frac{\partial \bar{\rho} v^*}{\partial t} - \bar{u} \frac{\partial \bar{\rho} v^*}{\partial x} + l \bar{\rho} u^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} - \mu \bar{\rho} \Delta v^* &= 0, \\ g \bar{\rho} \vartheta^* - \bar{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} &= 0, \\ -\frac{\partial \bar{\rho} u^*}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\rho} v^*}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\rho} w^*}{\partial z} &= 0, \\ -\frac{\partial \bar{\rho} \vartheta^*}{\partial t} - \bar{u} \frac{\partial \bar{\rho} \vartheta^*}{\partial x} + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} \bar{\rho} w^* - (\nu_1 \bar{\rho} \vartheta_z^*)_z - \mu \bar{\rho} \delta \vartheta^* &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\bar{u}(x, y)$ – среднее за год и по интервалу $0 \leq x \leq L$ климатическое значение компонента скорости u .

Граничные условия выберем в виде

$$\begin{aligned} \bar{\rho} w^* &= 0, \quad \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = f^* \quad \text{при } z = 0, \\ \bar{\rho} w^* &= 0, \quad \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = H. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь f^* определяется формулой (1.5).

Начальные данные определим при $t \geq T$:

$$u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad \vartheta^* = 0. \quad (3.3)$$

Как и раньше, задачу (3.1)–(3.3) будем считать периодической по (x, y) .

Решая задачу (3.1)–(3.3) для заданного региона, мы сможем найти значение ϑ^* при $z = 0$ и с ее помощью найти необходимые нам для решения задачи величины

$$\tau_s^* = -q \frac{\partial \vartheta_s^*}{\partial z'}, \quad \tau_c^* = -q \frac{\partial \vartheta_c^*}{\partial z'}.$$

При заданных G_0 и f^* из (3.2) функции τ_s^* и τ_c^* табулируются и могут быть использованы многократно для любых сезонов года.

В результате задача сводится к интегрированию выражения

$$\delta \left(\overline{\rho \vartheta}_{T-\tau/2}^{G_0} \right) = \int_{-\infty}^T dt \left(\int_S \delta \overline{\vartheta} \tau_s^* dS + \int_C \delta \vartheta \tau_c^* dS + \int_{S+C} \delta \overline{F} \vartheta^* dS \right), \quad (3.4)$$

где

$$\delta \overline{F} = \frac{g}{c_p (\gamma_a - \gamma)} \delta F_0.$$

Учитывая убывание τ_s^* , τ_c^* со временем при $t \rightarrow T$ и пренебрегая притоком тепла за счет излучения в интервале $t_m \leq t \leq T$, формулу (3.4) упростим. В результате получим

$$\delta \left(\overline{\rho \vartheta}_{T-\tau/2}^{G_0} \right) = \int_{-\infty}^{t_m} dt \left(\int_S \delta \overline{\vartheta} \tau_s^* dS + \int_C \delta \vartheta \tau_c^* dS + \int_{S+C} \delta \overline{F} \vartheta^* dS \right), \quad (3.5)$$

Аналогичная ситуация имеет место с отклонением средней вертикальной скорости от климатической. В этом случае требуется лишь вместо сопряженной задачи (3.1), (3.3) рассмотреть новую:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \overline{\rho} u^*}{\partial t} - \overline{u} \frac{\partial \overline{\rho} u^*}{\partial x} + l \overline{\rho} v^* - \overline{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - \mu \overline{\rho} \Delta u^* &= 0, \\ -\frac{\partial \overline{\rho} v^*}{\partial t} - \overline{u} \frac{\partial \overline{\rho} v^*}{\partial x} + l \overline{\rho} u^* - \overline{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} - \mu \overline{\rho} \Delta v^* &= 0, \\ g \overline{\rho} \vartheta^* - \overline{p} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} &= f^*, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$-\frac{\partial \bar{\rho} u^*}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\rho} v^*}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\rho} w^*}{\partial z} = 0,$$

$$-\frac{\partial \bar{\rho} \vartheta^*}{\partial t} - \bar{u} \frac{\partial \bar{\rho} \vartheta^*}{\partial x} + \frac{\gamma_a - \gamma}{\bar{T}} \bar{\rho} w^* - (\nu_1 \bar{\rho} \vartheta_z^*)_z - \mu \bar{\rho} \delta \vartheta^* = 0$$

при условии

$$\begin{aligned} \bar{\rho} w^* &= 0, \quad \vartheta^* = 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \bar{\rho} w^* &= 0, \quad \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = H \end{aligned} \quad (3.7)$$

и начальных данных

$$u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad \vartheta^* = 0 \quad \text{при } t > T. \quad (3.8)$$

Тогда прогностическая формула примет вид

$$\delta \left(\bar{w}_{T-\tau/2}^{\Omega_h} \right) = \int_0^T dt \int_{S+C} \delta \bar{\vartheta} \tau_w^* dS, \quad (3.9)$$

где

$$\tau_w^* = q \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z},$$

или, в упрощенной форме,

$$\delta \left(\bar{w}_{T-\tau/2}^{\Omega_h} \right) = \int_{-\infty}^{t_m} dt \int_{S+C} \delta \bar{\vartheta} \tau_w^* dS. \quad (3.10)$$

Рассмотренный метод долгосрочного прогноза имеет дело с информацией, практически доступной к хранению на существующих ЭВМ. Как было отмечено, для этой цели нужно хранить двумерные массивы информации τ_s^* , τ_c^* , ϑ^* и τ_w^* при $z = 0$ и накапливать текущую метеорологическую информацию $\bar{\vartheta}$, $\delta \bar{\vartheta}$, \bar{F} и $\delta \bar{F}$. Таким образом, речь идет о хранении по крайней мере 8 двумерных массивов за срок в несколько месяцев (около 6). Объем такой информации приблизительно равен 1 млн. машинных слов и доступен для оперативного использования.

Предположение о том, что \bar{u} является только функцией y и z , непринципиально. Следующий этап в развитии методов состоит в учете зависимости \bar{u} от времени. Решение этой задачи реализуемо, однако для каждого сезона потребует решения своих сопряженных задач.

Более точная модель прогноза будет связана с решением сопряженных уравнений на климатическом материале о полях $\bar{u}(x, y, z, t)$,

$\bar{v}(x, y, z, t)$ и $\bar{w}(x, y, z, t)$. Это уже потребует хранения информации порядка 25 млн машинных слов и достаточно большого быстродействия в переработке информации.

4. Требования к метеорологической информации и этапы реализации долгосрочного прогноза погоды

Принципы долгосрочного прогноза температурных аномалий и отклонений вертикальной скорости от нормы, изложенные в предыдущих разделах настоящей работы, позволяют сформулировать те минимальные требования к метеорологической информации, которые позволят подойти практически к оперативной работе. Эти требования сводятся к следующему.

Районы, для которых дается прогноз, должны иметь характерный размер, увеличивающийся с увеличением заблаговременности прогноза. Так, для прогноза аномалии температуры на срок 7–10 дней характерный размер района, для которого дается прогноз, по-видимому, должен быть выбран порядка 1000×1000 км. При прогнозе на месяц – порядка 3000×3000 км и на сезон – порядка 5000×5000 км. Конечно, эти характерные масштабы должны быть уточнены на основе анализа предсказуемости по той или иной модели.

Что касается интервалов временного осреднения, то на срок 7–10 дней таким интервалом могут быть 3 дня, на месяц – неделя и на сезон – месяц.

Вместе с этим необходимо осуществить ряд мероприятий, связанных с подготовкой входных данных для решения задачи прогноза погоды.

Прежде всего необходимо осуществление комплекса обработки метеорологической и океанографической информации по построению климатических значений температуры поверхностного слоя океана, температуры поверхности материков и потока радиации на поверхности всей Земли с учетом снежного покрова, ледовитости и облачности.

Что касается климатических значений температуры на земной поверхности, то для целей прогноза погоды от двух недель до сезона их пространственное разрешение допустимо в масштабе квадрата 500×500 км. Что касается временного осреднения, то таким интервалом осреднения может быть принята одна неделя. Полученные данные приписываются центрам областей пространственного осреднения и временных интервалов. Поскольку данные о температуре на

поверхности Земли получить трудно, то там, где это возможно, они могут быть найдены путем пересчета на основе данных на уровне метеорологических будок. В тех случаях, когда сеть наблюдений над отдельными труднодоступными регионами континентов, такими как Тибет, Сахара и др., отсутствует, данные о климатических значениях температуры поверхности следует получить на основе анализа спутниковой информации.

При расчете климатического хода потоков лучистой энергии на поверхности Земли осреднение допустимо с теми же пространственно-временными масштабами, что и при обработке климатического хода температуры. Над океанами и в труднодоступных районах Земли лучистый поток может быть измерен со спутников. Дальнейшее уточнение теории потребует климатических характеристик лучистого потока на стандартных уровнях атмосферы от поверхности Земли до высот порядка 30 км.

Третьим компонентом, необходимым для целей долгосрочного прогноза погоды, является информация о средней климатической скорости $\bar{u}(x, y, z, t)$, осредненной по каждому кругу широты и за интервал времени порядка недели.

Перечисленная выше информация является тем необходимым материалом, без которого долгосрочный прогноз даже по самым простейшим схемам невозможен. Если такая информация подготовлена, то следующая задача состоит в оперативном накоплении отклонений температуры поверхности Земли и потока тепла от климатической нормы. Такая информация, осредненная по тем же характерным пространственно-временным масштабам, что и соответствующая информация о климате, должна иметь точность порядка одного градуса для температуры и не более 10% от средней изменчивости лучистого потока тепла на поверхности Земли.

По мере развития работ по долгосрочному прогнозу потребуется информация о климатических значениях u , v (w находится с помощью u и v из уравнения неразрывности). Пространственное разрешение 500×500 км и временное порядка недели будет достаточным для довольно точного решения сопряженных задач при климатических входных данных и дальнейшего использования результатов в прогнозах средних аномалий температуры и отклонений средней вертикальной скорости от нормы.

В известном смысле завершающим шагом является схема долгосрочного прогноза, основанная на фактической информации о полях

метеорологических элементов в интервале времени $-\infty < t < t_m$ и прогностической в интервале $t_m \leq t \leq T$. Эта модель предполагает осуществление нескольких этапов, которые и опишем.

Прежде всего предполагается, что, начиная с некоторого момента времени, мы будем располагать фактической информацией об отклонениях температуры поверхностного слоя океана и аномалиях температуры материков. Выбирая начальные условия для задачи динамики океана и термического состояния континентов климатическими, приведем расчет динамики океана и термического решения континентов ото дня ко дню по мере поступления фактически наблюдаемой информации. Примерно через сезон в океане и в поверхностном слое континентов сформируется некоторый режим, который отнесем к моменту времени $t = t_m$, принимаемому за начальный, для дальнейшего совместного решения задач динамики атмосферы и океана с учетом теплопередачи на континентах. В результате решения этих задач на интервале $t_m \leq t \leq T$ получим недостающую информацию о полях u , v (а следовательно, и w) на всех уровнях атмосферы, о температуре поверхности Земли ϑ и лучистом потоке F_0 , с помощью которой получим необходимые для расчета отклонения метеорологических элементов и операторов от климатических.

Используя климатические значения u , v , w , с помощью рассчитанных климатических значений сопряженной функции ϑ^* на поверхности океана и континентов решим климатические сопряженные задачи для океана и континентов. Следующий этап состоит в расчете величины $\delta \left(\overline{\rho \vartheta}_{T-\tau/2}^{G_0} \right)$ по формулам (3.5) и (3.9) (для отклонения вертикальной скорости) с использованием для этой цели фактически наблюдаемой информации об отклонениях метеорологических элементов в интервале $-\infty < t < t_m$ и полученной в интервале $t_m \leq t \leq T$ прогностической информации. Поскольку формула (3.5) (и формула (3.9) построена в предположении малых возмущений, то контрольный расчет должен быть проведен на основе более полной теории возмущений, которая учитывает также и вариации операторов $\delta \Lambda u'$, $\delta \Lambda v'$ и $\delta \Lambda \vartheta'$ по отношению к климатическим значениям. В этом случае, как нетрудно проверить, формула (3.5) переходит в более точную:

$$\delta \left(\overline{\rho \vartheta}_{T-\tau/2}^{G_0} \right) = \int_{-\infty}^T dt \left[\int_D (u^* \delta \Lambda u' + v^* \delta \Lambda v' + \right.$$

$$+ \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta^* \delta \Lambda \vartheta' \Big) + \int_S \delta \bar{\vartheta} \tau_s^* dS + \int_C \delta \vartheta \tau_c^* dS + \int_{S+C} \delta \bar{F} \vartheta^* dS \Big]. \quad (4.1)$$

Аналогичным образом получим

$$\delta \left(\bar{w}_{T-\tau/2}^{\Omega_h} \right) = \int_{-\infty}^T dt \left[\int_D (u^* \delta \Lambda u' + v^* \delta \Lambda v' + \right. \\ \left. + \frac{g\bar{T}}{\gamma_a - \gamma} \vartheta^* \delta \Lambda \vartheta' \Big) + \int_{S+C} \delta \bar{\vartheta} \tau_w^* dS \right]. \quad (4.2)$$

Следует помнить, что сопряженные функции в формуле (4.1) u^*, v^*, ϑ^* являются решением задачи при климатическом значении оператора Λ (см. [1]), а соответствующие функции в формуле (4.2) – суть решение задачи (2.1)–(2.3) также при климатическом значении оператора Λ . Поскольку поля сопряженных функций меняются во времени слабо (примерно с таким же темпом, что и климат), то это позволяет величины $\delta \Lambda u', \delta \Lambda v', \delta \Lambda \vartheta', \delta \bar{\vartheta}$ и $\delta \bar{F}$ в формулах (4.1), (4.2) предварительно осреднять по выбранному ранее стандартному пространственно-временному масштабу и отнести их к центральным «точкам» областей и времен. Далее, с помощью простейших квадратных формул найдем реализацию интегралов в рассматриваемых формулах.

5. Простейшая схема решения уравнений динамики атмосферы и океана

Одним из этапов решения задачи долгосрочного прогноза аномалий температуры и отклонений вертикальной скорости от нормы является совместное решение уравнений динамики атмосферы и океана и уравнения теплопроводности в почве на континентах в интервале времени $t_m \leq t \leq T$. Вклад возмущений полей на этом интервале можно ожидать сравнительно небольшим, поскольку мы уже учли основной эффект за счет выноса тепла из океана и с континентов, аккумулированного в течение интервала времени $-\infty < t < t_m$. Это было сделано, как мы помним, ценой предположения, что на интервале $t_m \leq t \leq T$ температурные возмущения на поверхности земли отсутствуют. На самом деле отклонения температуры от климата имеют место, но они

априори нам неизвестны. Тем не менее такие предположения позволили нам получить простейшие прогностические формулы с использованием только фактической информации о полях метеорологических элементов при $t < t_m$ (см. формулы (7.21), (8.15) в [1]; (1.27), (2.7) и (3.5) в настоящей работе).

При более точном подходе к долгосрочному прогнозу на интервале $t_m \leq t \leq T$, как было отмечено выше, необходимо решить задачу прогноза с учетом взаимодействия атмосферы с океаном и поверхностным слоем континентов. Существенной особенностью таких задач является их фоновый характер, поскольку на длительный срок нас будут интересовать осредненные характеристики метеорологических и океанографических величин. Поэтому пространственно-временной масштаб осреднения мы выберем таким же, как и для сопряженных уравнений, т. е. по пространству это будет квадрат 500×500 км, а временной интервал – порядка недели. При указанном подходе необходимо подготовить для расчета начальные данные в атмосфере, осреднив их по области характерных масштабов. Что касается океана и континентов, то мы предположим, что начальные данные для этих областей получены именно с таким пространственно-временным осреднением на основе решения соответствующих задач без начальных данных и с заданными при $z = 0$ граничными значениями температуры и другой информации в соответствии с постановкой задач.

Итак, на временном интервале $t_m \leq t \leq T$ рассмотрим следующую задачу.

Для атмосферы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial t} + \Lambda u - l \bar{\rho} v + \bar{p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mu \bar{\rho} \Delta u &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial t} + \Lambda v + l \bar{\rho} u + \bar{p} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \mu \bar{\rho} \Delta v &= 0, \\ \bar{p} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - g \bar{\rho} \vartheta &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho} \vartheta}{\partial t} + \Lambda \vartheta + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} \bar{\rho} w - (\nu_1 \bar{\rho} \vartheta_z)_z - \mu \bar{\rho} \Delta \vartheta &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

с начальными данными

$$u = \langle u \rangle, \quad v = \langle v \rangle, \quad \vartheta = \langle \vartheta \rangle \quad \text{при } t = t_m, \quad (5.2)$$

где символом $\langle \rangle$ отмечен тот факт, что соответствующие функции осреднены по пространству и времени в соответствии с принятыми пространственно-временными масштабами.

Для океана:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - lv + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu_s \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + lu + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu_s \Delta v, \\ \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z'} - \frac{g\sigma}{\bar{\rho}} \vartheta &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z'} &= 0, \\ \frac{\partial \vartheta_s}{\partial t} + \frac{\Gamma}{\sigma} w - (\nu_{1s} \rho \vartheta_{sz'})_{z'} - \mu_{1s} \Delta \vartheta_s &= 0.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Начальными данными для системы (5.3) выберем

$$u = \langle u \rangle, \quad v = \langle v \rangle, \quad \vartheta_s = \langle \vartheta_s \rangle \quad \text{при } t = t_m.\tag{5.4}$$

Здесь величины $\langle u \rangle$, $\langle v \rangle$ и $\langle \vartheta_s \rangle$ берутся непосредственно из расчета задачи формирования начальных физических полей на интервале времени $-\infty < t < t_m$ при осредненных вариациях температуры на поверхности океана.

На континентах (D_c) имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \vartheta_c}{\partial t} - \nu_{1c} \frac{\partial^2 \vartheta_c}{\partial z'^2} = 0\tag{5.5}$$

с начальным условием

$$\vartheta_c = \langle \vartheta_c \rangle \quad \text{при } t = t_m.\tag{5.6}$$

Здесь, так же как и при рассмотрении задачи динамики океана, $\langle \vartheta_c \rangle$ является результатом предварительного решения задачи теплопроводности в почве при заданных в интервале $-\infty < t < t_m$ на поверхности почвы осредненных вариациях температуры.

Граничными условиями для задач (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) и (5.5), (5.6) возьмем следующие:

$$\bar{\rho} w = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = H,$$

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}w = 0, \quad \nu_1 \bar{\rho} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + F = - \left\{ \begin{array}{ll} \nu_{1s} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial z'} & \text{на } S \\ \nu_{1c} \frac{\partial \vartheta_c}{\partial z'} & \text{на } C \end{array} \right\} \quad \text{при } z = 0, \\
w = 0, \quad \frac{\partial \vartheta_s}{\partial z'} = 0 \quad \text{при } z' = H_s, \\
\frac{\partial \vartheta_c}{\partial z'} = 0 \quad \text{при } z' = h.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Здесь S – поверхность океана, а C – поверхность континентов.

К системе граничных условий необходимо еще добавить условия периодичности решения задачи динамики атмосферы по пространству, а также условия на береговой цилиндрической поверхности

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial \vartheta_s}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \tag{5.8}$$

необходимые для решения уравнений динамики океана.

Предположим, что решение сформулированной задачи на интервале времени $t_m \leq t \leq T$ найдено. Тогда, пользуясь этим решением, мы можем получить все необходимые функционалы задач: среднюю аномалию температуры по различным регионам, среднее отклонение вертикальной скорости по отношению к климатической норме и т. д.

Однако таким образом полученное решение должно быть проверено, поскольку применяемые нами математические модели и методы решения являются приближенными и могут быть связаны с более или менее существенными погрешностями. Такая проверка результатов может быть проведена на основе методов теории возмущений, которые в значительной степени используют фактическую информацию, не зависящую ни от модели расчета, ни от методов решения задачи. Так, для аномалии средней температуры мы получим формулу, аналогичную (3.1):

$$\begin{aligned}
\delta \left(\overline{\bar{\rho} \vartheta}_{T-\tau/2}^{G_0} \right) = \int_{-\infty}^T dt \left[\int_D \left(u^* \delta \Lambda u' + v^* \delta \Lambda v' + \frac{g \sigma^2}{\Gamma} \vartheta^* \delta \Lambda \vartheta' \right) \bar{\rho} dD + \right. \\
\left. + q \int_{S+C} \delta \bar{\vartheta} \vartheta^* dS \right].
\end{aligned} \tag{5.9}$$

И для среднего отклонения вертикальной скорости – аналогично (3.2):

$$\delta \left(\bar{w}_{T-\tau/2}^{\Omega_h} \right) = \int_{-\infty}^T dt \left[\int_D \left(u^* \delta \Lambda u' + v^* \delta \Lambda v' + \frac{g\sigma^2}{\Gamma} \vartheta^* \delta \Lambda \vartheta' \right) \bar{\rho} dD + \right. \\ \left. + q \int_{S+C} \delta \bar{\vartheta} \vartheta^* dS \right]. \quad (5.10)$$

Здесь мы ради простоты вариациями лучистого потока пренебрегли, хотя их учет не вносит новых трудностей. Хотя правые части формул (5.9), (5.10) формально совпадают друг с другом, однако они по существу различаются своими сопряженными функциями, которые определяются соответствующими функционалами задач.

Следует подчеркнуть, что в формулах (5.9), (5.10) отсутствуют величины, связанные с ϑ_s^* и ϑ_c^* , которые входили существенными компонентами в формулы (3.1) и (3.2). Это связано с тем, что они описывали передачу тепла из области океана и континентов на интервале $t_m \leq t \leq T$, аккумулированного в моменты времени, предшествующие t_m . В наших формулах (5.9) и (5.10) эти эффекты учитываются при совместном решении задач динамики атмосферы и океана при заданных начальных (при $t = t_m$) условиях. Именно начальные условия являются главным носителем информации о термическом состоянии океана и континентов за счет адаптации с атмосферой в предшествующие моменты времени.

В заключение отметим, что сопряженные уравнения позволяют построить формулу теории возмущений и оценить область зависимости решения задачи прогноза погоды для той или иной модели. Кроме того, следует отметить, что прогноз на основе формул теории возмущений не исключает необходимости решения задачи прогноза погоды в интервале времени $0 \leq t \leq T$ по начальным данным, заданным при $t = 0$, в атмосфере и океане. Тем не менее прогноз погоды, основанный на формулах теории возмущений, оказывается значительно более предпочтительным, поскольку он базируется не только на сведениях о состоянии атмосферы в интервале времени $0 \leq t \leq T$, где необходимая информация восстанавливается с помощью решения прогностической задачи и соответствующей ей сопряженной, но и на точных сведениях о полях метеорологических элементов в интервале времени $-\infty < t < 0$, которые должны быть получены из наблюдений.

Распространение в формулах теории возмущений пределов интегрирования по t до $t = -\infty$ эквивалентно тому, что начальные при $t = 0$ значения полей метеорологических элементов, необходимые для прогноза погоды, по формулам теории возмущений заменяются фактическими сведениями о состоянии атмосферы во все предшествующие нулевому моменту ($-\infty < t < 0$) на уровне океана и континентов. Они должны быть известными с необходимой точностью.

Существенной проблемой в теории долгосрочного прогноза погоды является выбор модели и параметризации входных данных. В самом деле, для долгосрочного прогноза погоды может быть использована как простейшая линейная модель с заданной скоростью западно-восточного переноса, так и более сложная линейная модель с компонентами вектора скорости, заданными в форме климатических значений. Естественно, что коэффициенты макротурбулентного обмена для количества движения и тепла будут существенно зависеть от характера моделей и должны быть найдены в результате решения обратных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Основные и сопряженные уравнения динамики атмосферы и океана // Метеорология и гидрология. 1974. № 2.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА⁵

Излагаются методические вопросы исследования чувствительности дискретных моделей динамики атмосферы и океана численными методами. Рассмотрены три метода: 1) прямого моделирования; 2) основанный на уравнениях в вариациях; 3) использующий сопряженные уравнения гидротермодинамики. Обсуждаются практические применения этих методов.

Численное моделирование атмосферных и океанических процессов является одним из основных средств для решения задач прогноза погоды и теории климата. Особенно большое значение принимает про-

⁵Известия АН СССР. Серия: физика атмосферы и океана, 1979, т. 15, № 11, с. 1123–1131. Совместно с В. В. Пененко.

блема численного моделирования при изучении вариаций климата под влиянием естественных и антропогенных факторов и при оценке влияния деятельности человека на окружающую среду. Выбор и обоснование физических моделей для данного класса задач тесно связаны с исследованием вопросов устойчивости, предсказуемости и чувствительности климатической системы, состоящей из атмосферы, океана, снежного и ледового покрова, континентов и биосферы. Все части этой системы взаимодействуют между собой. Внешним по отношению к системе фактором является солнечная энергия. Воздействия антропогенных факторов можно интерпретировать так же, как возмущения, вносимые в систему.

Предсказуемость определяет возможности научно детерминированного подхода к предсказанию физических процессов и тем самым определяет возможности построения численных моделей для описания и предсказания поведения климатической системы или ее частей. Проблема чувствительности состоит в изучении поведения климатической системы. Чувствительность определяет степень устойчивости системы по отношению к вариациям входных параметров и внешних воздействий. Если деятельность человека рассматривать как один из факторов в климатической системе, то для оценки влияния воздействий, возникающих в результате этой деятельности, можно использовать методику исследования чувствительности моделей.

Наряду с параметрами, определяемыми физическим содержанием задач, при численном моделировании возникает множество факторов, обусловленных дискретным характером моделей. Например, ошибки дискретизации и округления, погрешности за счет итерационных процессов и др. Это – фиктивные возмущения, некоторые из них случайны. В результате действия фиктивных возмущений в модели появляются шумы, и исследование чувствительности помогает оценить полезную информацию на фоне различного рода шумов.

Методы исследования чувствительности математических моделей получили широкое развитие в теории оптимального управления и идентификации систем [1, 2]. В данной работе рассматриваются применения численных методов для исследования чувствительности дискретных моделей динамики атмосферы и океана. Круг задач, связанных с проблемой чувствительности, достаточно широк. Перечислим некоторые из них, имеющие непосредственное применение в проблеме математического моделирования атмосферы и океана.

1. Оценка вариаций решения или функционалов от решения в зависимости от вариаций входных параметров и предсказание поведения решений в окрестности известного решения.

2. Оценка вариаций параметров по вариациям решения.

3. Уточнение и оптимизация параметров моделей по экспериментальной информации и согласование начальных полей в соответствии с заданными критериями.

4. Оценка влияния случайных изменений параметров моделей или начальных условий, экстраполяция решения при случайных вариациях входных параметров.

5. Анализ влияния ошибок аппроксимации и округления при решении задач на ЭВМ.

6. Оценка границ области устойчивости системы.

Определим функции чувствительности модели как функции влияния изменений параметров на решение задачи. Аналогично под функциями чувствительности модели по отношению к заданному функционалу будем подразумевать функции влияния вариаций параметров на вариацию функционала. Таким образом, исследование чувствительности относится к изучению поведения модели в пространстве параметров. Математически определение функций чувствительности сводится к вычислению частных производных от искомого решения или от функционалов, определенных на множестве решений, по параметрам модели в окрестности невозмущенных значений.

Поясним суть этих определений на простейшем примере, когда функция зависит только от одного параметра. Обозначим ее через $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \alpha)$, где \mathbf{x} – совокупность пространственных координат и времени, α – параметр из некоторой области допустимых значений. Пусть α_0 – заданное конкретное значение параметра, которое будем называть невозмущенным, $\Delta\alpha$ – вариация и $\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta\alpha$ – возмущенное значение параметра. Предполагая дифференцируемость функции φ по параметру, запишем ее разложение в ряд Тейлора:

$$\varphi(\mathbf{x}, \alpha_1) = \varphi(\mathbf{x}, \alpha_0) + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_0} \Delta\alpha + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} \right|_{\alpha_0} (\Delta\alpha)^2 + \dots \quad (1)$$

Если $\Delta\alpha$ мало и функция $\varphi(\mathbf{x}, \alpha)$ достаточно гладкая в окрестности $\alpha = \alpha_0$, то в разложении можно ограничиться только первыми двумя слагаемыми. Частная производная $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}$, представляющая собой функцию от \mathbf{x} и α , называется функцией влияния параметра α , или

функцией чувствительности по отношению к вариациям параметра первого порядка.

В дальнейшем будем рассматривать задачи с малыми возмущениями, в которых можно ограничиться оценкой вариаций первого порядка. Непосредственная оценка вариаций и функций чувствительности более высокого порядка для задач рассматриваемого класса связана с большими вычислительными трудностями, для преодоления которых требуются специальные методы теории возмущений высшего порядка.

1. Запишем математическую модель в операторной форме

$$B \frac{\partial \varphi}{\partial t} + L(\varphi, \mathbf{Y}) = 0, \quad \varphi \in Q(D_t), \quad \mathbf{Y} \in R(D_t), \quad (2)$$

где φ – вектор состояния; \mathbf{Y} – вектор параметров; B – диагональная матрица, в случае стационарных моделей – нулевая; $L(\varphi, \mathbf{Y})$ – нелинейный матричный дифференциальный оператор, зависящий от вектора состояния и параметров; $D_t = \{D \times [0, \bar{t}]\}$, D – область изменения пространственных переменных; $[0, \bar{t}]$ – интервал изменения времени; $Q(D_t)$ – пространство функций, удовлетворяющих граничным и начальным условиям; $R(D_t)$ – множество допустимых значений параметров.

Система (2) выражает основные законы гидротермодинамики исследуемых процессов и является системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В число компонентов вектора состояния входят температура, давление, плотность, вектор скорости и др., а вектор параметров состоит из коэффициентов дифференциальных уравнений и граничных условий, начальных значений вектора состояния, характеристик области интегрирования, функций, описывающих внешние по отношению к системе воздействия и т. д.

Конструктивный алгоритм решения задачи (2) определяет вектор состояния как функцию независимых переменных и входных параметров

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{x} \in D_t, \quad \mathbf{Y} \in R(D_t). \quad (3)$$

Задаче (2) поставим в соответствие вариационную формулировку в виде интегрального тождества, вытекающего из определения обобщенного решения:

$$\mathbf{I}(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi^*) = 0, \quad (4)$$

где φ^* – произвольная, достаточно гладкая вектор-функция такой же структуры, как и вектор состояния. Функционал $\mathbf{I}(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi^*)$ выберем из условия, чтобы он имел структуру скалярного произведения, т. е.

$$\mathbf{I}(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi^*) = \left(B \frac{\partial \varphi}{\partial t} + L(\varphi, \mathbf{Y}), b f \varphi^* \right)_{D \setminus t}, \quad (5)$$

и преобразуем его так, чтобы из (4) при подходящем выборе функции φ^* без дополнительных операций дифференцирования и интегрирования по частям следовало уравнение баланса полной энергии системы.

Исходя из вариационной формулировки, процесс построения дискретных аналогов модели сводится к дискретизации тождества (4):

$$\mathbf{I}^h(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi^*) = 0, \quad (6)$$

а также к в записи условий стационарности сумматорного функционала $\mathbf{I}^h(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi^*)$. Индекс h здесь и далее обозначает дискретный аналог. Для удобства записи будем считать, что в функционалах и операторах, отмеченных индексом h , операция дискретизации распространяется и на области их определения.

Дискретные аналоги задачи (2) получаются из условий

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^*} \mathbf{I}^h(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi^*) = 0. \quad (7)$$

Аналогично записывается система сопряженных уравнений в дискретной форме

$$\frac{\partial}{\partial \varphi'} \left\{ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathbf{I}^h(\varphi + \xi \varphi', \mathbf{Y}, \varphi^*) \right\}, \quad (8)$$

где ξ – вещественный параметр; φ' – вариация вектора состояния в окрестности невозмущенного значения. Частные производные в (7), (8) определяются как операции дифференцирования скалярной функции многих переменных по векторным и скалярному аргументам. Процесс построения гарантирует взаимную согласованность и энергетическую сбалансированность систем основных и сопряженных уравнений в дискретной форме (7) и (8). Это играет решающую роль в методах теории возмущений, которые требуют тщательного согласования всех этапов вычислительных алгоритмов и особенно основной и сопряженной задач.

2. Для примера рассмотрим неадиабатическую модель гидротермодинамики атмосферы на сферической Земле, описываемую системой полных уравнений в предположении кназистатики и в приближении метода свободной конвекции. Опуская запись дифференциальных

уравнений модели, приведем вариационную формулировку в виде интегрального тождества [3]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi^*) &= \int_{D_t} \{(\Lambda u, u^*) + (\Lambda v, v^*) + \sigma(\Lambda T, T^*) + \\
 &+ (\mathbf{u}^* \text{grad } H - \mathbf{u} \text{grad } H^*) + \left(l + \frac{\text{ctg} \theta}{a}(u^* v - uv^*)\right) + \\
 &+ \frac{R}{p} \left(T\tau^* - \sigma \frac{(\gamma_a - \gamma)\bar{T}}{g} \tau T^*\right) - \frac{\sigma \tilde{\epsilon}}{c_p} T^*\} dD dt + \\
 &+ \int_{S_t} \frac{1}{2} \bar{\rho} \left(\frac{\partial H}{\partial t} H^* - \frac{\partial H^*}{\partial t} H\right) \Big|_{P_a} dS dt + \\
 &+ \frac{1}{2} \left[\int_D (uu^* + vv^* + \sigma TT^*) dD + \int_S \bar{\rho} H H^* \Big|_{P_a} dS \right] \Big|_{\bar{t}_0} + I_d(\varphi, \varphi^*) = 0,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
 (\Lambda \varphi, \varphi^*) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \varphi^* - \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \varphi \right) + (\varphi^* \mathbf{u} \text{grad} \varphi - \varphi \mathbf{u} \text{grad} \varphi^*) \right], \\
 I_D(\varphi, \varphi^*) &= \int_{D_t} \{ \mu_1 [D_T(u_s) D_T(u_s^*) + D_s(u_s) D_s(u_s^*)] + \\
 &+ \chi_1 \left(\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial u^*}{\partial p} + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial v^*}{\partial p} \right) + \\
 &+ \sigma \left[\mu_2 \left(\frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial T}{\partial \psi} \frac{\partial T^*}{\partial \psi} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) + \chi_2 \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial T^*}{\partial p} \right] \} dD dt + \\
 &+ \int_{S_t} (u^* \tau_\psi + v^* \tau_\theta + \sigma T^* q_t|_{P_a} dS dt,) \\
 \mathbf{u} \text{grad } \varphi &= \frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{v}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \tau \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \\
 D_t(\mathbf{u}_s) &= \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial (v \sin \theta)}{\partial \theta} \right),
 \end{aligned}$$

$$D_s(\mathbf{u}_s) = \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial(u \sin \theta)}{\partial \theta} \right),$$

$$D = \{S \times [p_T, p]\}, \quad S = \{0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}, \quad S_t = \{S \times [0, \bar{t}]\},$$

$$dS = a^2 \sin \theta d\psi d\theta, \quad dD = dS dp.$$

Здесь t – время; ψ – долгота; θ – дополнение до широты; p – давление ($p_t \leq p \leq p_a$, P_a – давление на нижней и p_t на верхней границах воздушной массы); $\mathbf{u} = (u, v, \tau)$ и $\mathbf{u}_s = (u, v)$, где u, v, τ – составляющие вектора скорости в направлении координат ψ, θ, p соответственно; T и H – отклонения температуры и геопотенциала от их стандартных значений \bar{T} и \bar{H} ; $\bar{\rho}$ – стандартное значение плотности; γ_a – адиабатический температурный градиент; $\gamma = -\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$ – градиент стандартной температуры; ϵ – приток тепла к единице объема; c_p – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении; R – универсальная газовая постоянная; l – параметр Кориолиса; a – радиус Земли; g – ускорение свободного падения; μ_1 и μ_2 – коэффициенты горизонтального турбулентного обмена: $\chi = \nu_i \left(\frac{gp}{RT} \right)^2$ ($i = 1, 2$); ν_i – коэффициенты вертикального турбулентного обмена, функции τ_ψ, τ_θ характеризуют условия динамического, а q_t – теплового взаимодействия атмосферы с подстилающей поверхностью; σ – масштабный множитель, вводимый таким образом, чтобы из (9) можно было получить уравнение баланса энергии.

В соответствии с (2) определим вектор состояния $\varphi = (u, v, T, \tau, H)$ и вектор параметров $\mathbf{Y} = (\varphi_0, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, \epsilon, \tau_\psi, \tau_\theta, q_t, l, a, R, c_p, g)$. По аналогии с $\varphi, \mathbf{u}, \mathbf{u}_s$ определяются и $\varphi^* = (u^*, v^*, T^*, \tau^*, H^*)$, $\mathbf{u}^* = (u^*, v^*, \tau^*)$, $\mathbf{u}_s^* = (u^*, v^*)$. Компоненты вектора φ^* являются произвольными достаточно гладкими функциями.

Антисимметричные формы $(\Lambda, \varphi, \varphi^*)$ получены в результате преобразования операторов переноса, а симметричная форма $I_d(\varphi, \varphi^*)$ – в результате преобразования операторов турбулентного обмена. Выражения $D_T(\mathbf{u}_s^*)$ и $D_s(\mathbf{u}_s^*)$ получаются из $D_T(\mathbf{u}_s)$ и $D_s(\mathbf{u}_s)$ тождественной подстановкой \mathbf{u}_s^* вместо \mathbf{u}_s . Интегральное тождество включает в себя дифференциальные уравнения, граничные и начальные условия. Условия периодичности по переменной ψ и условия на полюсах входят в описания классов вектор-функций $\varphi \in Q(D_t)$ и $\varphi^* \in Q^*(D_t)$. Очевидно, что при $\varphi^* = \varphi$ и σ , равном среднему значению функции $\frac{g}{(\gamma_a - \gamma)\bar{T}}$, тождество (9) непосредственно дает уравнение полной энергии системы

$$\mathbf{I}(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi) = 0. \quad (10)$$

Дискретизацию тождества следует проводить с сохранением свойств его подынтегральных выражений. Для определенности будем считать, что дискретизация производится конечно-разностным методом и все функции и параметры определяются на сетке $D_t^h \subset D_t$. Подробное изложение этого способа дискретизации дано в [3, 4].

3. Предположим, что задача (2), (4) поставлена корректно. В этом случае можно предполагать, что класс вектор-функций φ , определяемых преобразованием (3), непрерывно зависит от \mathbf{Y} , т. е. малым возмущениям $\delta\mathbf{Y}$ вектора \mathbf{Y} соответствуют малые возмущения $\delta\varphi$ вектора φ .

Как показывает приведенный выше пример, компоненты вектора \mathbf{Y} могут быть слишком различными по своему физическому смыслу. Поэтому удобно, учитывая дискретное представление, перенумеровать все компоненты вектора \mathbf{Y} подряд, т. е.

$$\mathbf{Y} = \{Y_i\} \quad (i = \overline{1, N}), \quad (11)$$

где N – общее число компонентов, определяемых размерностью сеточной области $D_t^h \subset D_t$ и числом различных по физическому смыслу величин, включаемых в \mathbf{Y} . Под вектором $\delta\mathbf{Y}$ будем понимать вектор $\delta\mathbf{Y} = \{\delta Y_i\}$ ($i = \overline{1, N}$) при условии, что $|\delta Y_i| \ll |Y_i|$, где символ δ обозначает вариацию, и хотя бы один из компонентов δY_i ($i = \overline{1, N}$) отличен от нуля. Аналогично определяется вариация $\delta\varphi$ вектора состояния φ . Из (3) вытекает, что вариации $\delta\varphi$ и $\delta\mathbf{Y}$ будут также связаны между собой.

Проблема исследования чувствительности модели состоит в оценке влияния вариаций входных параметров на вектор состояния и выяснении роли различных факторов при формировании моделируемых процессов.

4. В настоящее время наиболее распространенным методом исследования чувствительности модели является метод прямого моделирования, основная идея которого состоит в следующем. Решается дважды задача при невозмущенном $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y} \in R(D_t)$ и возмущенном $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y} + \delta\mathbf{Y} \in R(D_t)$ значениях вектора параметров. В результате получаются два значения вектора состояния, которые при использовании (3) можно представить следующим образом:

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{Y}_1), \quad \varphi_2(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{Y}_2), \quad \mathbf{x} \in D_t^h. \quad (12)$$

Искомая вариация получается по формуле

$$\delta\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) - \varphi_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D_t^h. \quad (13)$$

Для проведения численных экспериментов этот метод наиболее прост и универсален. Однако если вектор \mathbf{Y} имеет большую размерность и математическая модель достаточно сложна, то для оценки влияния вариаций отдельных компонентов вектора \mathbf{Y} методом прямого моделирования требуется проведение большого количества численных экспериментов, и поэтому для детальных исследований этот метод оказывается непосильным даже для самых быстродействующих ЭВМ.

Одним из недостатков метода прямого моделирования является необходимость вычисления вариаций $\delta\varphi$ с помощью операции вычитания. Хотя при этом не накладываются ограничения на величину вариаций, на практике решения (12) получаются приближенно, и поэтому при малых вариациях операция (13) сводится к вычитанию близких чисел, заданных с ошибкой, что в свою очередь может привести к неверному результату. Таким образом, метод прямого моделирования целесообразно применять при оценке больших вариаций.

5. При малых вариациях $\delta\mathbf{Y}$ и $\delta\varphi$ для нахождения $\delta\varphi$ лучше использовать уравнения в вариациях. Это – линейные уравнения, которые получаются в результате линеаризации исходной нелинейной системы в окрестности невозмущенного состояния и параметров. Поскольку задача рассматривается в дискретной форме (7), то и уравнение для вариаций удобно вывести из (7) или из (6). Пусть \mathbf{Y}_0 – невозмущенное значение вектора параметров, а φ_0 – решение задачи (7) при невозмущенных параметрах. Представим вектор параметров в окрестности \mathbf{Y}_0 в виде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 + \xi\delta\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}, \mathbf{Y}_0 \in R(D_t), \quad (14)$$

где ξ – вещественный параметр, и предположим, что и вектор состояния можно представить в таком же виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \xi\delta\varphi, \quad \varphi, \varphi_0 \in R(D_t). \quad (15)$$

Тогда, используя (14), (15) и проводя формально операции дифференцирования сумматорного функционала, получим систему уравнений в вариациях

$$\frac{\partial}{\partial\varphi^*} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial\xi} I^h(\varphi + \xi\delta\varphi, \mathbf{Y}_0 + \xi\delta\mathbf{Y}, \varphi^*) \right] = 0. \quad (16)$$

Система уравнений (16) неоднородна. Она имеет такую же структуру, как и (7), а в качестве источника выступает выражение

$$B(\varphi_0, \mathbf{Y}_0)\delta\mathbf{Y} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \xi} L^h(\varphi_0, \mathbf{Y}_0 + \xi\delta\mathbf{Y}), \quad (17)$$

зависящее от невозмущенных значений φ_0 , \mathbf{Y}_0 и от вариаций параметров. Решение задачи (16) осуществляется практически по одному и тому же алгоритму, что и (7). Если нелинейные слагаемые в (7) линеаризуются по данным с предыдущих шагов, то добавки, возникающие за счет операций линеаризации в (16), учитываются явно.

Этот метод оценки вариаций при большой размерности вектора состояния целесообразно использовать только при заданном векторе вариаций параметров.

В силу линейности (16) относительно вариаций векторов состояния и параметров, уравнения в вариациях при специальном задании $\delta\mathbf{Y}$ позволяют оценивать непосредственно функции чувствительности вектора состояния к вариациям параметров. Как отмечалось раньше, эти функции определяются как частные производные компонентов вектора состояния по компонентам вектора параметров. В этом случае по аналогии с методом построения фундаментальных решений осуществляется последовательное решение уравнений в вариациях. При каждом таком решении один из компонентов вектора $\delta\mathbf{Y}$ в (16) принимается равным единице, а остальные – нулю. Решение задачи (10) при таких условиях дает функцию чувствительности к вариациям соответствующего параметра. Естественно, этот способ удобно применять при оценке чувствительности модели только к небольшому числу компонентов вектора параметров.

Для оценок функций чувствительности применим и метод прямого моделирования. При каждом интегрировании системы уравнений (7) один из компонентов Y_i вектора \mathbf{Y} получает небольшое приращение δY_i относительно невозмущенного значения. Полученная в результате операций (12) и (13) вариация вектора состояния, которую обозначим через $\delta\varphi^{(i)}$, делится на δY_i . Таким образом, получается функция чувствительности к вариациям параметра Y_i . При этом необходимо принимать во внимание следующие особенности такого способа оценок функций чувствительности. Если δY_i выбрано слишком малым, то ошибки округления при решении задачи (7) приводят к неточному вычислению вариации $\delta\varphi^{(i)}$, а если δY_i выбрано большим, то получается слишком грубая оценка функции чувствительности.

6. На практике часто требуется оценивать вариации функционалов, определенных на множестве решений задачи (2). В этих случаях

функционал можно принять в качестве меры чувствительности модели к вариациям входных величин. Примерами таких функционалов могут быть полная энергия системы, среднее значение какого-либо компонента вектора состояния по области D_t или по ее частям и др. Даже значение решения в одной точке области D_t можно записать в виде функционала при специальном выборе весовой функции.

Учитывая тот факт, что в зависимости от целей исследования функционал может быть выбран многими способами, изложим метод оценки вариаций для функционала общего вида, предполагая при этом его ограниченность, непрерывность и дифференцируемость на множестве функций $\varphi \in Q(D_t)$ и $\mathbf{Y} \in R(D_t)$. Методы оценок вариаций линейных функционалов и их применение в проблеме численного моделирования атмосферы и океана подробно изложены в [5]. Для определенности будем считать, что функционал явно зависит от компонентов вектора состояния, и обозначим его через $\Phi(\varphi)$. В силу (3) $\Phi(\varphi)$ будет всегда неявно зависеть от \mathbf{Y} . Из сделанных предположений следует, что существуют векторы

$$\text{grad}_{\varphi}\Phi \equiv \frac{\partial\Phi(\varphi)}{\partial\varphi}, \quad \text{grad}_{\mathbf{Y}}\Phi \equiv \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right\},$$

$$\varphi \in Q(D_t), \quad \mathbf{Y} \in R(D_t), \quad (18)$$

где символ частной производной обозначает вектор-градиент скалярной функции в направлении векторного аргумента.

Запишем теперь определение вариации функционала. Она может быть вычислена двумя способами:

$$\delta\Phi = (\text{grad}_{\varphi}\Phi, \delta\varphi), \quad (19)$$

$$\delta\Phi = (\text{grad}_{\mathbf{Y}}\Phi, \delta\mathbf{Y}). \quad (20)$$

Скалярное произведение в (19) определяется структурой функционала $\Phi(\varphi)$, а выражение для скалярного произведения в (20) – функционалами из (4) и (6).

Ввиду предполагаемой явной зависимости функционала от φ вычисление вариации по формуле (19) и вектора $\text{grad}_{\varphi}\Phi$ проводятся непосредственно. Вычислительная схема реализует следующие операции:

$$\delta\Phi = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial\xi} \Phi^h(\varphi + \xi\delta\varphi), \quad (21)$$

$$\text{grad}_{\varphi} \Phi = \frac{\partial}{\partial \delta \varphi} \left\{ \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi^h(\varphi + \xi \delta \varphi) \right\} \quad (22)$$

Уравнение (20) является основным соотношением теории чувствительности моделей. Оно связывает вариации функционалов с вариациями входных параметров. Компоненты вектора $\text{grad}_{\mathbf{Y}} \Phi$ характеризуют вклад соответствующих им вариаций компонентов вектора \mathbf{Y} в вариацию функционала, поэтому они называются функциями влияния вариаций параметров на функционал или функциями чувствительности модели к вариациям входных величин, если в качестве меры чувствительности взят функционал $\Phi(\varphi)$.

Алгоритм для определения вектора $\text{grad}_{\mathbf{Y}} \Phi$ и вариации по формуле (20) описан в [4]. Опуская промежуточные преобразования, выпишем только окончательный результат

$$\delta \Phi = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \xi} I^h(\varphi, \mathbf{Y} + \xi \delta \mathbf{Y}, \varphi^*), \quad (23)$$

$$\text{grad}_{\varphi} \Phi = \frac{\partial}{\partial \delta \mathbf{Y}} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \xi} I^h(\varphi, \mathbf{Y} + \xi \delta \mathbf{Y}, \varphi^*) \right], \quad (24)$$

где $I^h(\varphi, \mathbf{Y} + \xi \delta \mathbf{Y}, \varphi^*)$ – функционал, определенный левой частью (6); φ – решение задачи (7) при невозмущенном значении \mathbf{Y} ; φ^* – решение сопряженной задачи (8) со свободным членом, равным $\text{grad}_{\varphi} \Phi$, вычисленным по формуле (22) в окрестности невозмущенного значения вектора φ . Формально численная схема для сопряженной задачи, используемой в данном случае, получается из условий

$$\frac{\partial}{\partial \delta \varphi} \left\{ \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \xi} [I^h(\varphi + \xi \delta \varphi, \mathbf{Y}, \varphi^*) + \Phi^h(\varphi + \xi \delta \varphi)] \right\}. \quad (25)$$

При заданных значениях векторов φ , \mathbf{Y} , φ^* выражение в правой части (23) представляет рабочую формулу для вычисления вариации функционала. С другой стороны, оно дает определение скалярного произведения в (20). Чтобы убедиться в этом, достаточно поставить в соответствие выражения коэффициентов в (20) и (23) при одноименных вариациях параметров.

7. Таким образом, структура вычислительных алгоритмов полностью определяется интегральным тождеством (4) и его сумматорными аналогами (6). При этом автоматически обеспечивается полная согласованность численных схем для исходной модели, для задачи в вариациях и для сопряженных уравнений. Однако большинство из

существующих в настоящее время численных моделей динамики атмосферы и океана построено на основе интегро-интерполяционного метода баланса (в терминологии зарубежных авторов – «бокс-метод») или спектрально-разностных методов. Подробный обзор этих моделей представлен в [6, 7]. Возникает вопрос: можно ли применить методику исследования чувствительности к численным моделям общего вида?

Пусть дискретная модель записана в форме

$$B\Lambda_t\varphi + L^h(\varphi, \mathbf{Y}) = 0, \quad \varphi \in Q^h(D_t^h), \quad \mathbf{Y} \in R^h(D_t^h), \quad (26)$$

где $B\Lambda_t\varphi$ – разностный аналог $B\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, а в операторе $L^h(\varphi, \mathbf{Y})$ учтены все краевые и начальные условия. При использовании метода расщепления вектор состояния и операторы должны доопределяться с учетом вспомогательных функций на дробных шагах. Чтобы построить вычислительные алгоритмы, достаточно по аналогии с (5) определить сумматорный функционал вида

$$I^h(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi^*) \equiv (B\Lambda_t\varphi + L^h(\varphi, \mathbf{Y}), \varphi^*)_{D_t^h} = 0, \quad (27)$$

где φ^* – произвольным вектор такой же структуры, как и φ , определенный в D_t^h . Скалярное произведение удобно выбрать так, чтобы из (27) можно было получить уравнение баланса энергии. При этом все расчетные формулы (7)–(25) остаются в силе, только в общем случае не будет гарантирована энергетическая сбалансированность численных схем, если дискретная модель (26) не обладает этим свойством.

8. Каждый из рассмотренных методов исследования чувствительности имеет свою область применения. Первые два дают возможность оценить поле вариаций или функций чувствительности вектора состояния, а третий – вариации и функции чувствительности функционалов.

Функции чувствительности несут большую информацию, чем сами вариации, поскольку они позволяют оценить относительную роль различных факторов при формировании исследуемых процессов и определить пространственно-временные масштабы областей их влияния. Дополнительная информация, заключенная в функциях чувствительности, позволяет также осуществлять экстраполяцию решений в окрестности невозмущенного состояния при малых вариациях параметров и оценить в первом приближении допустимую точность решения при заданных ошибках входных величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ейкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683 с.
2. Tomović R., Vukobratović M. General sensitivity theory. Elsevier, 1972. 258 с.
3. Пененко В. В. Энергетически-сбалансированные дискретные модели динамики атмосферных процессов // Метеорология и гидрология, 1977. № 10. С. 3–20.
4. Пененко В. В. Вычислительные аспекты моделирования динамики атмосферных процессов и оценки влияния различных факторов на динамику атмосферы // В кн.: Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1975. С. 61–77.
5. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Гидрометеиздат, 1974. 303 с.
6. Döös B. R. Numerical experimentation related to GARP-WMO // GARP Publication Series. 1970. No. 6. 68 p.
7. Modelling for the first GARP global experiment // GARP Publication Series. 1974. No. 14.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ТЕРМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТМОСФЕРЫ С ОКЕАНАМИ И КОНТИНЕНТАМИ⁶

Для целей долгосрочного прогноза погоды исследуется модель термического взаимодействия атмосферы Земли, Мирового океана и континентов. Применяется подход, основанный на использовании решения определенным образом поставленной сопряженной задачи. Сопряженное решение связывается с прогнозируемым функционалом от аномалии температуры, по отношению к которому оно выступает в качестве основного критерия значимости входной информации. Для численного решения строится балансная абсолютно устойчивая разностная схема. Применяемый метод расщепления позволил построить экономический вычислительный алгоритм. Результаты численного эксперимента анализируются.

⁶Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана, 1976, т. 12, № 5, с. 459–469. Совместно с Ю. Н. Скибой.

В работе [1] для целей долгосрочного прогноза аномалий температуры предложена модель термического взаимодействия атмосферы с Мировым океаном и континентами с учетом адвекции и конвекции тепла, горизонтального и вертикального турбулентного перемешивания. Известно, что неоднородность поля облачности, отклонения его от климатического состояния являются важными факторами, ответственными за пропускание радиации через атмосферу и аккумуляцию тепла в океане и на континентах. Аккумулированное в океане тепло переносится морскими течениями на большие расстояния. В дальнейшем оно идет на прогревание атмосферы, приводя к долгопериодным аномалиям температуры в различных областях. Таким образом, облачность и морские течения являются эффективными регуляторами с обратной связью процессов переработки постоянного потока солнечной радиации в неравномерно распределенные в пространстве и времени притоки тепла к атмосфере. Предложенная в настоящей работе модель использует параметризованную информацию о поле облачности, а также данные о скоростях ветра в атмосфере и течений в океане.

Для решения задачи применяется математический аппарат, построенный в [1] и основанный на использовании решения специальным образом определенной сопряженной задачи, которое связывается с необходимыми прогнозируемыми функционалами. Формулы теории малых возмущений позволяют находить результаты прогноза непосредственно для отклонений метеорологических элементов от их климатических значений. В такой постановке сопряженное решение является функцией влияния по отношению к прогнозируемым функционалам [1]. В качестве таких функционалов в данной статье рассматриваются осредненные по некоторой территории поверхности Земли (для которой дается прогноз) и по определенному промежутку времени (на который дается прогноз) значения аномалий температуры. Численными методами исследуется поведение решения сопряженной задачи, с помощью которого возможно будет в дальнейшем долгосрочное прогнозирование указанных функционалов.

Постановка задачи

Рассмотрим сферическую систему координат (λ, ϑ, z) , связанную с Землей; $0 \leq \lambda < 2\pi$ – географическая долгота, $0 \leq \vartheta < \pi$ – дополнение до широты, положительное направление оси z отсчитывается в атмосферу от поверхности Земли $S = \{x : 0 \leq \lambda < 2\pi,$

$0 \leq \vartheta < \pi, z = 0\}$. Пусть $S = S_o \cup S_k \cup S_l$, где S_o, S_k, S_l – подмножества S , на которых атмосфера граничит с океаном, континентами и льдами соответственно; $D = (\bigcup_{i=1}^3) \cup S$ – ограниченная область, где область D_1 представляет собой нижние слои атмосферы, заключенные в шаровом слое $0 < z < H_a$, D_2 – деятельный слой океана с нижней границей $z = -H_0$, D_3 – слой почвы континентов с нижней границей $z = -H_k$.

Рассмотрим в D уравнение притока тепла

$$MT = c_p \bar{\rho} T_t + \operatorname{div}(uT) - (\nu T_z)_z - \operatorname{div}(\mu \nabla_2 T) = f, \quad (1)$$

где $T(x, t)$ – отклонение температуры частиц воздуха, воды или земли от климатической, $f = \delta F \cdot \delta(z)$, $\delta F(\lambda, \vartheta, t)$ – аномалии полного потока радиации на S , $\bar{\rho}(z)$ – стандартное значение плотности, c_p – удельная теплоемкость, a – радиус Земли, $\operatorname{div}_2(\cdot)$ и $\nabla_2(\cdot)$ – двумерные (по λ и ϑ) дивергенция и градиент; $\nu = c_p \bar{\rho} \nu_1$, $\mu = c_p \bar{\rho} \mu_1$, где ν_1, μ_1 – вертикальный и горизонтальный коэффициенты теплопроводности; $\mathbf{u} = \{u, v, w\} \equiv c_p \bar{\rho} \mathbf{u}_1$, где $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ – известный вектор скорости ветра (в D_1) и воды (в D_2), удовлетворяющий в D_1 и D_2 уравнению неразрывности

$$\operatorname{div} u = 0. \quad (2)$$

В D_3 $\mathbf{u}_1 = 0$, $\mu_1 = 0$, $c_p = C = \text{const}$; в D_1 $\mu_1 = \mu_a = \text{const}$; в D_2 $\mu_1 = \mu_0 = \text{const}$; $\bar{\rho}$, \mathbf{u} – достаточно гладкие ограниченные функции в каждой из D_i , но имеющие разрыв первого рода на S , кроме функции w , которая непрерывна в \bar{D} и равна нулю при $z = 0$, $z = H_a$ и $z = -H_0$; $\nu_1 = \nu_1(z)$ – непрерывная в каждом D_i функция z (в океане $\nu_1 = \nu_1(z, \vartheta)$), ограниченная в D . На S функция ν_1 имеет разрыв первого рода. Примерные графики этой функции приведены в [1]. Разрывность коэффициентов – следствие того, что область D составлена из трех разнородных по своим физическим свойствам сред.

В качестве начального условия задачи примем

$$T(x, 0) = g(x). \quad (3)$$

Граничные условия имеют вид

$$\nu T_s = 0 \quad \text{при } z = H_a, \quad z = -H_0, \quad z = -H_k, \quad (4)$$

$$\nu T_s = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad \text{на } S_l. \quad (5)$$

На боковой поверхности Мирового океана σ

$$(\mu \nabla_2 T, \mathbf{n}) = 0, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n}) = 0, \quad (6)$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к σ . В силу однозначности функции T в точках полюсов $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ имеем

$$\bar{T}(z, t) = T(\lambda, 0, z, t), \quad \tilde{T}(z, t) = T(\lambda, \pi, z, t) \quad (7)$$

при всех $0 \leq \lambda < 2\pi$; \bar{T} , \tilde{T} – ограниченные функции. На поверхности $S_0 \cup S_k$ ставятся условия сопряжения, выражающие непрерывность T и потока νT_z :

$$[T] = 0, \quad [\nu T_z] = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (8)$$

где $[\cdot]$ – символ скачка функции. Условия (8) характерны для задач теплообмена между соприкасающимися средами путем конвекции, а также для задач дифракции [2].

Рассмотрим области $Q_t = D \times (0, t)$ и $Q_{t,i} = D_i \times (0, t)$, где $(0, t)$ – интервал времени, на котором решается задача. Обобщенным решением задачи (1)–(8) из $W_2^{1,0}(Q_{t_1})$ (см. [2]) назовем функцию $T \in W_2^{1,0}(Q_{t_1})$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{Q_{t_1}} \left(-c_p \bar{\rho} T \eta_t + \frac{\mu}{a^2 \sin^2 \vartheta} T_\lambda \eta_\lambda + \frac{\mu}{a^2} T_\vartheta \eta_\vartheta + \nu T_z \eta_z + \frac{u}{a \sin \vartheta} T \eta_\lambda + \right. \\ \left. + \frac{v}{a} T \eta_\vartheta + w T \eta_{\eta_z} \right) dz dt = \int_{Q_{t_1}} c_p \bar{\rho} g \eta(x, 0) dx + \int_{Q_{t_1}} f \eta dx dt \quad (9) \end{aligned}$$

при любых $\eta(x, t) \in W_2^1(Q_{t_1})$ и $\eta(x, t_1) = 0$. С другой стороны, функция $T(x, t)$ из $W_2^{1,0}(Q_{t_1})$, удовлетворяющая интегральному тождеству (9), условию (7) и имеющая в каждой D_i ограниченные вторые производные по x и первые по t , удовлетворяет (1)–(8) в их классической форме. В этом легко убедиться, интегрируя по частям левую часть (9). При этом условия (4)–(6) и второе из (8) выполняются автоматически, следовательно, они являются естественными.

Скалярное произведение в $L_2(Q_t)$ определим как сумму скалярных произведений в $L_2(Q_{t,i})$ ($i = 1, 2, 3$). Тогда уравнение энергетического баланса имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\sqrt{c_p \bar{\rho}} T(x, t)\|_{L_2(D)}^2 + \\
& + \int_{Q_t} \left[\frac{\mu}{a^2 \sin^2 \vartheta} (T_\lambda)^2 + \frac{\mu}{a^2} (T_\vartheta)^2 + \nu (T_z)^2 \right] dx dt = \\
& = \frac{1}{2} \|\sqrt{c_p \bar{\rho}} g(x)\|_{L_2(D)}^2 + \int_{Q_t} f \cdot T dx dt. \quad (10)
\end{aligned}$$

Пусть $f \in L_2(Q_{t_1})$, тогда используя неравенство Коши – Буняковского, нетрудно получить энергетическое неравенство

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq \tau t} \|\sqrt{c_p \bar{\rho}} T(x, \tau)\|_{L_2(D)} & \leq \|\sqrt{c_p \bar{\rho}} g\|_{L_2(D)} + \\
& + 2t \cdot \max_{0 \leq \tau t} \left\| \frac{1}{c_p \bar{\rho}} f(x, \tau) \right\|_{L_2(D)}, \quad (11)
\end{aligned}$$

справедливое для всех $t \in [0, t_1]$. Умножая уравнение (1) скалярно (в $L_2(D)$) на постоянную в D функцию, получим соотношение баланса тепла в системе атмосфера – океан – континент:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D c_p \bar{\rho} T dx = \int_S \delta F dS. \quad (12)$$

Рассмотрим в D сопряженную по Лагранжу к (1)–(8) задачу

$$-c_p \bar{\rho} T_t^* - \operatorname{div}(u T^*) - (\nu T_z^*)_z - \operatorname{div}_2(\mu \nabla_2 T^*) = f \equiv F^* \delta(z) \quad (1')$$

для функции $T^*(x, t)$, удовлетворяющей начальному условию

$$T^*(x, t_1) = g^*(x) \quad (3')$$

и граничным условиям (4)–(8), которые будем обозначать (4')–(8'). Условия на коэффициенты уравнения прежние. Обобщенное решение сопряженной задачи определяется так же, как и для задачи (1)–(8), только η удовлетворяет условию $\eta(x, t) = 0$. Для $T^*(x, t)$, $g^*(x)$ и $f^*(x, t)$ справедливо уравнение энергетического баланса (10), энергетическое неравенство (11) и балансное соотношение (12) с учетом изменения направления отсчета времени.

Умножим уравнение (1) скалярно (в $L_2(Q_{t_1})$) на T^* , уравнение (1') – на T и вычтем одно из другого. В результате приходим к тождеству

$$\begin{aligned} & \int_D c_p \bar{\rho} T(x, t_1) g^*(x) dx + \int_0^{t_1} dt \int_S F^* T dS = \\ & = \int_D c_p \bar{\rho} g(x) T^*(x, 0) dx + \int_0^{t_1} dt \int_S T^* \delta F dS. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим линейный функционал

$$J(T) = \int_D c_p \bar{\rho} T(x, t_1) g^*(x) dx + \int_0^{t_1} dt \int_S F^* T dS. \quad (14)$$

Пусть требуется дать прогноз на интервале времени $\Delta t = t_1 - t_0$ (см. рис. 1) для области $\Sigma \subset S$ площадью $m\Sigma$. Определим F^* :

$$F^*(\lambda, \vartheta, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t m \Sigma}, & \text{если } (\lambda, \vartheta) \in \Sigma, t \in [t_0, t_1], \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (15)$$

Тогда, полагая $g = g^*$ в D , получим

$$\bar{T}_\Sigma^{\Delta t} \equiv J(t) = \frac{1}{\Delta t m \Sigma} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_\Sigma T(\lambda, \vartheta, 0, t) d\Sigma. \quad (16)$$

Таким образом, $\bar{T}_\Sigma^{\Delta t}$ представляет собой осредненное по области Σ и промежутку времени Δt значение аномалии температуры поверхности Земли. Но из (13) следует, что

$$\bar{T}_\Sigma^{\Delta t} = \int_0^{t_1} dt \int_S T^*(\lambda, \vartheta, 0, t) \delta F(\lambda, \vartheta, t) dS. \quad (17)$$

Поэтому если необходим расчет T на большей части или всей S под действием одних и тех же вариаций входных данных, то наиболее рационально использование задач типа (1)–(8) для функции T . Если же нас интересуют не сами аномалии температуры T , а только зависимость некоторых функционалов (например, $J(T)$) от изменения

входных данных (например, δF), то лучше всего пользоваться теорией возмущений с применением сопряженных уравнений, развитой для линейных функционалов в [1]. Для этой цели нужно сопряженную задачу решить один раз и затем в явном виде вычислить $J(T)$ по формуле (17). Формулы теории малых возмущений для функционалов общего вида получены в [3] с использованием метода множителей Лагранжа. Так как T^* входит в (17) в качестве весовой функции при δF , то сопряженное решение T^* в данной трактовке характеризует область влияния вариаций входных параметров во всем пространстве на изменение функционала $J(T)$ в данном районе.

Разностная схема

При построении разностной схемы необходимо учесть физические особенности задачи (1)–(8): разрывный характер коэффициентов, наличие δ -образного источника при $z = 0$, условия сопряжения. Разностную схему будем строить, исходя из интегрального соотношения, выражающего закон сохранения для малого объема [4–6]. Законы сохранения для всей сеточной области для таких схем будут алгебраическим следствием разностных уравнений. Аппроксимацию по z проведем по аналогии с тем, как это сделано в [1]. Введем в рассмотрение две сетки точек:

$$\{z_k\} = \{z_{n+1}, z_n, \dots, z_1, z_0 = 0, z_{-1}, \dots, z_{-m}, z_{-m-1}\}$$

и

$$\begin{aligned} \{z_{k+1/2}\} &= \{z_{k+1/2} = 0.5(z_k + z_{k+1}), k = -m-1, \dots, n\}, \\ \{z_{n+1/2}\} &= H_a, \quad \{z_{-m-1/2}\} = -H_0. \end{aligned}$$

Переход от одной сетки к другой осуществляется по формуле $T_{k+1/2} = \frac{1}{2}(T_k + T_{k+1})$. Проинтегрировав (1) по z в пределах от $z_{k-1/2}$ до $z_{k+1/2}$ получим интегральное тождество – основу для построения конечно-разностных уравнений по z :

$$\begin{aligned} & \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} c_p \bar{\rho} T_t dz + \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \operatorname{div}_2(\mathbf{u}T) dz + (wT)_{k+1/2} - (wT)_{k-1/2} = \\ & = I_{k+1/2} - I_{k-1/2} + \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \operatorname{div}_2(\mu \nabla_2 T) dz + \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} f dz, \end{aligned} \quad (18)$$

где $I = \nu T_z$, $I_k = I(z_k)$. В результате некоторых выкладок (см. [1]) с учетом упомянутых выше особенностей задачи приходим к окончательной формулировке разностного по z аналога задачи:

$$\begin{aligned} (c_p \bar{\rho})_k \Delta z_k (T_k)_t + \operatorname{div}_2(u_k T_k) \Delta z_k + (wT)_{k+1/2} - (wT)_{k-1/2} = \\ = I_{k+1/2} - I_{k-1/2} + \operatorname{div}_2(\mu \nabla_2 T_k) \Delta z_k + f_k, \end{aligned} \quad (19)$$

$$k = n, n-1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -m-1, -m,$$

$$w_{n+1/2} = 0, \quad I_{n+1/2} = 0, \quad w_{-m-1/2} = 0, I_{-m-1/2} = 0, \quad (20)$$

где $f_0 = \int_{z_{-1/2}}^{z_{1/2}} \delta F \cdot \delta(z) = \delta F$; при $k \neq 0$ $f_k = 0$, $(c_p \bar{\rho})_k = c_p \bar{\rho}_k$;

$$\Delta z_k = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}; \quad \Delta z_{k+1/2} = z_{k+1} - z_k; \quad \nu_{k+1/2} = \frac{\Delta z_k}{\int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{dz}{\nu}};$$

$$I_{k+1/2} = (\nu_{k+1/2} / \Delta z_{k+1/2}) (T_{k+1} - T_k); \quad \psi_0 = \frac{1}{\Delta z_0} \left(\int_{z_{-1/2}}^{-0} \psi dz + \int_{+0}^{z_{1/2}} \psi dz \right),$$

где ψ – одна из функций $c_p \bar{\rho}$, μ , u , v . Аналогично строятся разностные по z уравнения, когда атмосфера граничит с континентами и льдом. Система (19)–(20) баланса. Действительно, просуммировав все уравнения (19) по k и интегрируя по λ и ϑ , получим

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \iint \delta F dS, \quad (21)$$

где $Q(t) = \sum_k \Delta z_k \iint (c_p \bar{\rho})_k T_k dS$ – полный запас тепла.

Приступим теперь к разностной аппроксимации по λ и ϑ . Рассмотрим сетку D^h на сферической поверхности, состоящую из точек пересечения меридианов $\lambda_i = i(2\pi/M) \equiv i \cdot \Delta\lambda$ ($i = 1, \dots, M$) и параллелей $\vartheta_j = j(\pi/N+1) \equiv j \cdot \Delta\vartheta$ ($j = 1, \dots, N$) и точек полюсов $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$. Элементарная ячейка точки (λ_i, ϑ_j) сетки S^h состоит из множества точек сферы, заключенных между меридианами $\lambda = \lambda_i \pm \Delta\lambda/2$ и параллелями $\vartheta = \vartheta_j \pm \Delta\vartheta/2$, а полюсные ячейки – из множества точек сферы, для которых $0 < \vartheta < \Delta\vartheta/2$ и $\pi - \Delta\vartheta/2 < \vartheta < \pi$. Пусть $D^h = S^h \times \{z_k\}$. Проинтегрируем каждое уравнение системы (19) по ячейке сетки S^h и при получении уравнений используем разностное уравнение неразрывности в точке $(z_k, \lambda_i, \vartheta_j)$ (указываются только дробные индексы):

$$\frac{1}{a \sin \vartheta_j} \left[\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{\Delta \lambda} + \frac{(v \sin \vartheta)_{j+1/2} - (v \sin \vartheta)_{j-1/2}}{\Delta \vartheta} \right] + \frac{w_{i+1/2} - w_{i-1/2}}{\Delta z_k} = 0. \quad (22)$$

Формула Гаусса – Остроградского, примененная к $\operatorname{div}_2(\cdot)$ при интегрировании по полюсной ячейке, после аппроксимации контурного интеграла позволяет получить разностные аналоги уравнения неразрывности, $\operatorname{div}_2(u_k T_k)$ и $\operatorname{div}_2(\mu_k \nabla_2 T_k)$, которые, например, для ячейки Северного полюса имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{2}{Ma \sin \frac{\Delta \vartheta}{2}} \sum_{i=1}^M v_{k,i,1/2} + \frac{w_{k+1/2,0} - w_{k-1/2,0}}{\Delta z_k} &= 0, \\ \operatorname{div}_2(u_k T_k) &\approx \frac{1}{Ma \sin \frac{\Delta \vartheta}{2}} \sum_{i=1}^M v_{k,i,1/2} T_{k,i,1}, \\ \operatorname{div}_2(\mu_k \nabla_2 T_k) &\approx \frac{\mu_k}{a^2 \sin^2 \frac{\Delta \vartheta}{2}} \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M T_{k,i,1} - \bar{T}_k \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

В [4, 7] приведены разностные выражения, аппроксимирующие со вторым порядком точности дивергентные члены уравнения для неполюсных ячеек. В результате получаем линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно компонент вектора $T(t)$:

$$B \mathbf{T}_t + \sum_{i=1}^3 (A_i + L_i) \mathbf{T} = f, \quad \mathbf{T}(0) = 0, \quad (24)$$

где матрица $B = \operatorname{diag}\{(c_p \bar{\rho} \Delta z)_{k,i,j}\}$, $B > 0$, $T' = \{T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_{-m+1}, T'_{-m}\}$, $T'_k = \{\bar{T}_k, T'_{k,1}, \dots, T'_{k,M}, \tilde{T}_k\}$, $T'_{k,i} = \{T'_{k,i,1}, \dots, T'_{k,i,N}\}$, $f' = \{f'_n, f'_{n-1}, \dots, f'_{-m+1}, f'_m\}$ имеет отличной от нуля лишь компоненты f'_0 ; штрих – знак транспонирования.

Рассмотрим евклидово пространство \mathcal{E} векторов T со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) : 2 = a^2 \sum_{k=-m}^n \left[\Delta \lambda \Delta \vartheta \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_{kij} \psi_{kij} \sin \vartheta_j + \right.$$

$$+ \left(\bar{\varphi}_k \bar{\psi} + \tilde{\varphi}_k \tilde{\psi}_k \right) \pi \sin^2 \frac{\Delta \vartheta}{2} \Big]$$

и нормой $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$. Непосредственно проверяется, что с учетом граничных условий и выполнения соотношений (22)–(23) операторы A_i и L_i обладают следующими свойствами:

$$A_i = -A_i^*, \quad L_i = -L_i^*, \quad (L_i \mathbf{T}, \mathbf{T}) \geq 0, \quad (25)$$

а, следовательно,

$$(A_i \mathbf{T}, \mathbf{T}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (26)$$

$$\left(\sum_{i=1}^3 A_i \mathbf{T}, \mathbf{e} \right) = 0, \quad (L_i \mathbf{T}, \mathbf{e}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (27)$$

где $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$ – вектор с равными компонентами. В дальнейшем будем считать, что граничные условия учтены в операторах A_i, L_i .

Для однородной системы (24) начало координат пространства \mathcal{E} является положением равновесия системы, функция Ляпунова $V(\mathbf{T}) = (B\mathbf{T}, \mathbf{T})$ в силу (25), (26) удовлетворяет неравенству $\frac{\partial}{\partial t} V(\mathbf{T}) \leq 0$ и устойчивость начала координат следует из первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения [8]. Итак, мы еще раз убедились в получении хорошей разностной аппроксимации дифференциального уравнения по пространственным переменным. Система, сопряженная к (24), аппроксимирует задачу (1'), (2), (3')–(8'') и имеет вид

$$-B\mathbf{T}_t^* + \sum_{i=1}^3 (-A_i + L_i)\mathbf{T}^* = f^*, \quad T^*(t_1) = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим на интервале времени $[0, t_1]$ равномерную сетку с шагом $\tau = t_{n+1} - t_n$, $t_0 = 0$, $t_{2s} = t_1$ и на расширенном интервале $t_{n-1} \leq t \leq t_{n+1}$ будем решать задачу (26) методом двуциклического полного расщепления (операторы $R_i \equiv A_i + L_i$ – некоммутативные, [4, 7]). Система разностных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{\tau}{2} B^{-1} R_\alpha^n \right) \mathbf{T}^{n-\frac{4-\alpha}{4}} &= \left(E - \frac{\tau}{2} B^{-1} R_\alpha^n \right) \mathbf{T}^{n-\frac{5-\alpha}{4}}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ \mathbf{T}^{n+1/4} &= \mathbf{T}^{n-1/4} + 2\tau B^{-1} \mathbf{f}^n, \\ \left(E + \frac{\tau}{2} B^{-1} R_\alpha^n \right) \mathbf{T}^{n+\frac{5-\alpha}{4}} &= \left(E - \frac{\tau}{2} B^{-1} R_\alpha^n \right) \mathbf{T}^{n+\frac{4-\alpha}{4}}, \quad \alpha = 3, 2, 1, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\mathbf{f}^n = \mathbf{f}(t_n)$, $R_\alpha^n = R_\alpha(t_n)$, $n = 1, 3, \dots, 2s - 1$. Если оператор $A \geq 0$, $B = B^* > 0$, $\beta \geq 0$, то имеет место неравенство Келлога

$$\|(E - \beta B^{-1}A)(E + \beta B^{-1}A)\|_B \geq 1$$

в норме, индуцированной энергетической нормой $\|\cdot\|_S$ пространства \mathcal{E} , где $\|\mathbf{T}\|_B^2 = (B\mathbf{T}, \mathbf{T})$ и устойчивость схемы (29) на каждом конечном интервале времени легко доказывается:

$$\|B^{1/2}\mathbf{T}^n\| \leq \|B^{1/2}\mathbf{T}^0\| + \tau n \|B^{-1/2}\mathbf{f}\|, \quad (30)$$

$\|B^{-1/2}\mathbf{f}\| = \max_n \|B^{-1/2}\mathbf{f}^n\|$. Схема (29) при достаточной гладкости по t функций \mathbf{T} , \mathbf{f} и n элементов матриц R_α аппроксимирует систему (24) с точностью $O(\tau^2)$. Схема расщепления сопряженной задачи имеет вид, аналогичный (29). Полученные в результате расщепления одномерные уравнения решаются методом прогонки, при этом в атмосфере предварительно применяется метод окаймления [5, 9].

Численные эксперименты

В результате испытаний со схемой (29) был выбран шаг по времени $\tau = 4$ часа. По z рассматривалось девять уровней: 1–4-й уровни – атмосферные; 5-й уровень (z_5) соответствовал высоте $z = 0$; 6–9-й уровни находились в океане или почве. $H_a = 16$ км; $H_0 = 1,5$ км; $H_k = 2,25$ м; шаги $\Delta z_{k+1/2}$ в атмосфере и океане – переменные, шаг в почве – постоянный, равный 0,5 м; $\Delta\lambda = 10^\circ$, $\Delta\vartheta = 5^\circ$; в атмосфере $\mu_1 = 5 \cdot 10^6$ м²/с, $\nu_1 = 10$ м²/с, $c_p = 0,24$ кал/г · град, в океане $\mu_1 = 10^4$ м²/с, ν_1 менялся от 10^{-5} м²/с в умеренных широтах до $3 \cdot 10^{-4}$ м²/с в северных и приэкваториальных широтах; в почве $\nu_1 = 10^{-6}$ м²/с, $c_p = 0,5 \cdot 10^6$ кал/м³ · град.

Расчеты проводились с модельными скоростями. В атмосфере моделировался западно-восточный перенос: $u_1 = 10 \sin 2\vartheta$ (в Северном полушарии), $v_1 = w_1 = 0$. Рассматривались два океана – Атлантический и Тихий, представленные сферическими прямоугольниками, ограниченными параллелями и меридианами, и расположенные только в Северном полушарии. Антарктида и Северный Ледовитый океан моделировались льдами, остальная часть поверхности Земли принадлежала континентам. На каждом уровне по k в узлах $(\lambda_{i+1/2}, \vartheta_{j+1/2})$, принадлежащих океанам, задавалась функция тока $\psi_{i+1/2, j+1/2}$, изолинии которой представляли замкнутые круговые течения в океанах

с их западной интенсификацией до 1,5 м/с, моделирующей Гольфстрим и Куро시오. В узлах, совпадающих с границей океанов σ , $\psi = 0$. Скорости u_1 и v_1 вычислялись по формулам

$$(u_1)_{i+1/2,j} = \frac{\psi_{i+1/2,j+1/2} - \psi_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta\vartheta},$$

$$(v_1)_{i,j+1/2} = \frac{\psi_{i-1/2,j+1/2} - \psi_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta\lambda \sin \vartheta_j},$$

обеспечивающим автоматическое выполнение второго граничного условия (6) и разностного уравнения неразрывности (22); $w_1 = 0$.

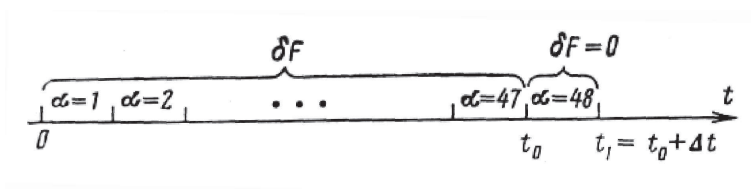


Рис. 1. Интервал времени, на котором рассматривается решение задачи

Рассмотрим рис. 1. Интервал времени $(0, t_1)$ состоит из 48 недельных интервалов, пронумерованных от 1 до 48 по мере роста t . Допустим, что на интервале времени $(0, t_0)$ вся метеоинформация нам дана и мы хотим дать прогноз для функционала $\bar{T}_\Sigma^{\Delta t}$ на интервале (t_0, t_1) . На нем δF не известна, а в качестве первого приближения можно положить $\delta F = 0$. Один из методов нахождения δF на $(0, t_0)$, основанный на анализе поля облачности, предложен в [1]. Интегрирование сопряженного уравнения проводится от $t = t_1$ до $t = 0$, т. е. почти на один год. Анализ решения показывает, что функция T^* медленно меняется по времени, поэтому допустима формула (см. (17))

$$\bar{T}_\Sigma^{\Delta t} = \delta t \sum_{\alpha=1}^{47} \int_S \bar{T}_\alpha^* \bar{\delta F}_\alpha dS,$$

где \bar{T}_α^* и $\bar{\delta F}_\alpha$ – осредненные по времени за α -ю неделю значения T^* и δF , $\delta t = 1$ неделя.

Формула (31) достаточно точная, хотя в нее не входит слагаемое с номером $\alpha = 48$. Это объясняется двумя основными причинами. Во-первых, при решении сопряженных уравнений с «источником информации» f^* величина T^* на интервале (t_0, t_1) растет почти линейно от

нуля до некоторой величины и затем за счет крупномасштабной диффузии начинает медленно убывать. Поэтому если диффузия не очень сильна, то роль δF на интервале (t_0, t_1) меньше, чем на нескольких предыдущих недельных интервалах. Во-вторых, чем более долгосрочный прогноз поля T рассматривается, тем большую роль играет океан. Рассмотрим для примера Атлантический океан. Среднее время «жизни» возмущений в температурном поле океана от источника радиации δF в экваториальной зоне до того, как эти возмущения, перенесенные Гольфстримом в высокие широты, в результате взаимодействия будут восприняты атмосферой и достигнут с помощью западно-восточного переноса Европы, примерно равно четырем месяцам. Причем первые теплые воды достигнут северных широт только через два месяца. А это значит, что в данной модельной ситуации отличная от нуля величина δF в интервале (t_0, t_1) , если Δt меньше двух месяцев, не окажет влияние на значение \bar{T}_α^* и $\bar{T}_{\delta F\alpha}$.

Функция T^* была рассчитана для прогноза на срок $\Delta t = 1$ неделя. В качестве прогнозируемой территории Σ выбрана Европейская часть СССР. Уравнение (1) умножалось на $m\Sigma$, чтобы избежать деления на машинное число. Правильность счета контролировалась выполнением соотношения баланса (12) для T^* . На рис. 2–6 представлены изолинии осредненной по недельным интервалам времени функции $T^*/\max T^*$ на уровне поверхности Земли. Изолинии пронумерованы по мере возрастания значений функции. Значение нулевой изолинии равно 0,001, а четырнадцатой – единице. Выбранные рисунки отражают наиболее характерные моменты эволюции T^* . Рис. 2 соответствует 48-му интервалу, когда действует источник f^* , а рис. 3, ..., 6 – 41, 33, 25 и 13-му недельным интервалам соответственно (см. рис. 1).

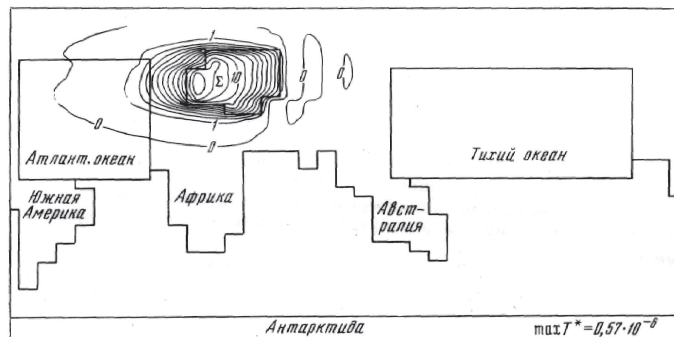


Рис. 2. Изолинии функции $T^*/\max T^*$ при $z = 0$, $\alpha = 48$

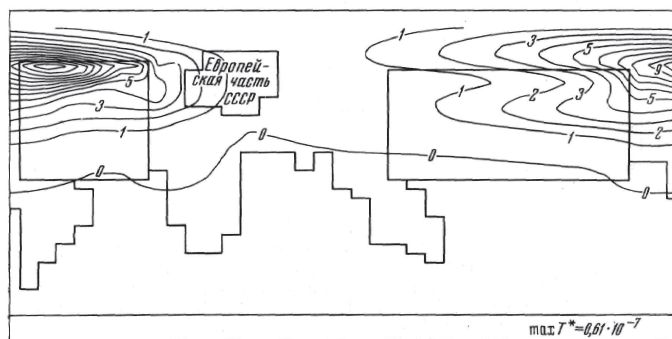


Рис. 3. Изолинии функции $T^*/\max T^*$ при $z = 0$, $\alpha = 41$

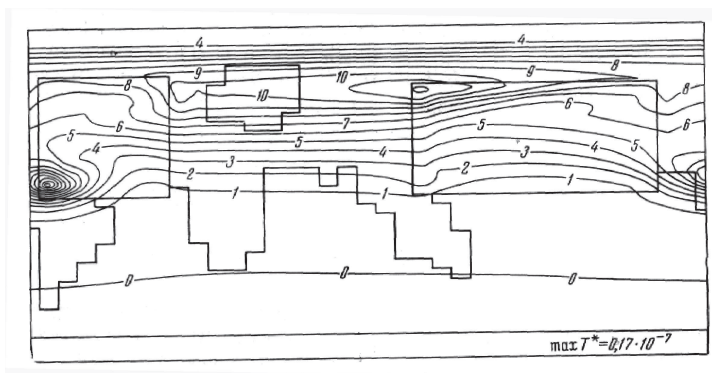


Рис. 4. Изолинии функции $T^*/\max T^*$ при $z = 0$, $\alpha = 33$.
При $\alpha \leq 33$ максимум функции находится в экваториальной зоне Атлантического океана

Из анализа результатов расчета T^* видно, что значения δF в приэкваториальной зоне Атлантического океана будут влиять на поле аномалий температуры в Европейской части СССР только через 4 месяца (рис. 4), а значения δF в той же зоне Тихого океана – только через 6 месяцев (рис. 5). Таким образом, существенный вклад в $\overline{T}_\Sigma^{\Delta t}$ внесут значения $\delta F(t)$ (см. (17)) в указанной зоне Атлантики только при $t < t_1$ (4 месяца), а для Тихого океана – только при $t < t_1$ – (6 месяцев). Отсюда видна важная роль в этих зонах океанов облачных систем, ответственных за поток тепла (δF) в поверхностные слои океанов.

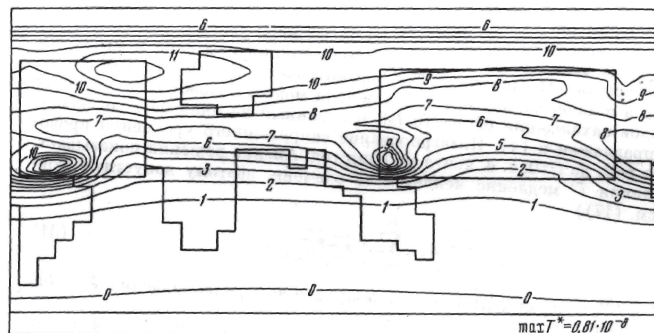


Рис. 5. Изолинии функции $T^*/\max T^*$ при $z = 0$, $\alpha = 25$.
При $\alpha \leq 25$ значения функции, близкие к максимальным,
находятся в экваториальной зоне Тихого океана

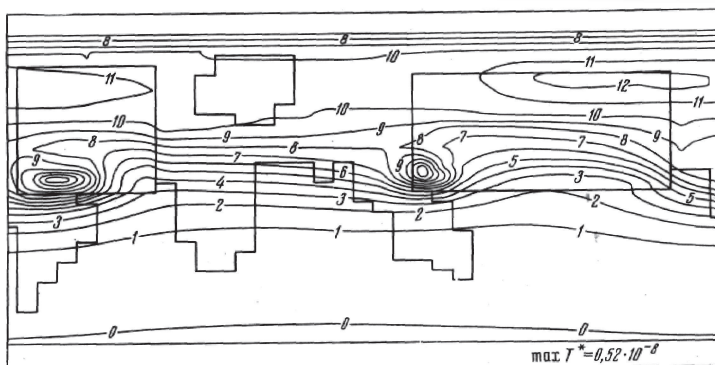


Рис. 6. Изолинии функции $T^*/\max T^*$ при $z = 0$, $\alpha = 13$

Итак, в рамках рассмотренной модели возможно изучение механизма связи между установившейся на длительный (от месяца до сезона) срок аномалией облачности над некоторыми частями Мирового океана и изменением в конечном итоге поля температур для различных регионов континентов.

Эта связь на основе обработки большого статистического материала была обнаружена Ш. А. Мусаеляном [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Гидрометеиздат, 1974. 303 с.

-
2. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
 3. Пененко В. В. Вычислительные аспекты моделирования динамики атмосферных процессов и оценки влияния различных факторов на динамику атмосферы // В сб.: Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1975. С. 61–76
 4. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. Новосибирск: Наука, 1973.
 5. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
 6. Bryan K. A scheme for numerical integration of the equations of motion on an irregular grid free of nonlinear instability // *Monthly Weather Rev.* 1966. V. 94, No. 1. Pp. 39–40, 1966.
 7. Марчук Г. И., Кордзадзе А. А., Скиба Ю. Н. Расчеты основных гидрологических полей Черного моря // *Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана.* 1975. Т. 11, № 4. Pp. 379–393.
 8. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964.
 9. Swarztrauber P. N. The direct solution of the discrete Poisson equation on the surface of a sphere // *J. Comput. Phys.* 1974. V. 15, No. 1. Pp. 46–54.
 10. Мусаелян Ш. А. Проблема параметризации процесса передачи лучистой энергии Солнца системе океан–атмосфера и долгосрочный прогноз // *Метеорология и гидрология.* 1974. № 10. С. 9–19.



ПРОБЛЕМЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

СТРУКТУРА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ¹

Проблема взаимодействия человека с окружающей природной средой в настоящее время представляет новую и активно развивающуюся область применения методов численного моделирования. Увеличение масштабов хозяйственной деятельности и осуществление крупных народнохозяйственных проектов связаны с воздействиями на окружающую среду локального и глобального характера. При оценке возможных последствий этой деятельности существенную роль могут сыграть математические модели. С их помощью можно определить возмущения основных параметров, характеризующих изменения состояния климатической системы под влиянием естественных и антропогенных факторов. Климатической обычно называют физическую систему, состоящую из атмосферы, океана, снежного и ледового покрова, континентов и биосферы. Постановка натурных экспериментов в реальных условиях на практике оказывается слишком дорогостоящей. Полученная в результате измерений информация позволяет в определенном смысле следить за поведением системы, однако основная задача заключается в оценке возможных последствий тех или иных воздействий и в поиске оптимальных решений при планировании хозяйственной деятельности с учетом допустимых нагрузок на окружающую среду и социально-экономических условий. Поэтому только

¹Актуальные проблемы прикладной математики и математического моделирования, Новосибирск: Наука, 1982, с. 125–137. Совместно с В. В. Пененко, А. Е. Алоян, А. В. Протасовым.

в сочетании экспериментальных исследований с методами математического моделирования можно сформулировать эффективные подходы к решению данного класса задач.

Цель данной статьи – краткое описание некоторых аспектов численного моделирования, развиваемых в Вычислительном центре СО АН СССР для решения задач, связанных с изучением и оценкой влияния деятельности человека на атмосферу. Более подробно эти вопросы изложены в работах [1–11].

В последние годы накоплен достаточно большой опыт решения задач физики атмосферы и океана, прогноза погоды и теории климата. Если деятельность человека интерпретировать как один из факторов в климатической системе, то принципы построения математических моделей для изучения влияния антропогенных воздействий на эту систему остаются такими же, как и для глобальных моделей теории климата. Однако имеются некоторые отличия.

В первую очередь они проявляются в формулировке прямых и обратных связей при описании взаимодействия различных факторов естественного и антропогенного происхождения и в требованиях к пространственно-временному разрешению моделей в зависимости от характерных масштабов и времен воздействий. Например, при изучении загрязнения атмосферы необходимо учитывать, что изменение гидрометеорологического режима влияет на процессы переноса и трансформации примесей, а наличие примесей в атмосфере кроме непосредственного ее загрязнения влияет на радиационный и термический режим атмосферы.

Для представления структуры математических моделей удобно ввести понятие функций, описывающих состояние рассматриваемой системы, и параметров. Физический смысл параметров и функций состояния, а также различия между ними зависят от конкретной постановки задачи. Например, в совместной модели гидротермодинамики атмосферы и переноса примесей к функциям состояния можно отнести поля гидрометеоэлементов (составляющие вектора скорости, температура, давление, плотность, характеристики влажности) и концентрации различных примесей, а к параметрам – поля начальных значений функций состояния, значения коэффициентов турбулентности, интенсивности искусственных и естественных источников тепла, мощности источников примесей, физико-географические характеристики области. При реализации модели численными методами дополнительно возникает совокупность параметров, таких как характеристики сеточ-

ной области, остаточные члены аппроксимационных формул и т. д., которые непосредственно не обусловлены физическим содержанием задачи.

Численная модель, по существу, определяет конструктивно преобразование, ставящее в соответствие совокупности значений параметров совокупность значений функций состояния. Будем считать, что основу моделей данного класса составляют законы сохранения массы, момента количества движения и энергии, которые вместе с законами термодинамики и химии описывают процессы, происходящие в атмосфере, океане, почве, и их взаимодействие. В математическом выражении это многомерные системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для удобства дальнейшего изложения воспользуемся операторной формой записи и представим модель с помощью следующего операторного уравнения:

$$B \frac{\partial \varphi}{\partial t} + G(\varphi, Y) = 0, \quad \varphi \in Q(D_t), \quad Y \in R(D_t), \quad (1)$$

где φ – вектор состояния; Y – вектор параметров; B – диагональная матрица; $G(\varphi, Y)$ – нелинейный матричный дифференциальный оператор, зависящий от вектора параметров и состояния; $D_t = D \times [0, \bar{t}]$, D – область изменения пространственных переменных; $[0, \bar{t}]$ – интервал изменения времени t ; $Q(D_t)$ – пространство функций, удовлетворяющих граничным условиям; $R(D_t)$ – область допустимых значений параметров.

Процесс математического моделирования состоит из нескольких этапов: построение дискретных аналогов; разработка вычислительных алгоритмов и программ для их реализации на ЭВМ; идентификация параметров по априорной информации и данным измерений; исследование чувствительности моделей к вариациям параметров и т. д. Вычислительный алгоритм решения задачи (1) фактически сводится к реализации преобразования

$$\varphi = \varphi(x, Y), \quad x \in D_t, \quad Y \in R(D_t), \quad (2)$$

определяющего вектор состояния как функцию независимых переменных и входных параметров модели.

Не вдаваясь в детали описания всех этапов численного моделирования, приведем в качестве примера общую схему модели для изучения влияния человека на атмосферу в региональном и локальном масштабах (рис. 1, 2) и отметим ее базовые элементы. Большинство из известных численных моделей гидротермодинамики атмосферы и океана

построено по традиционной схеме, сводящейся к решению дискретных аналогов основной системы (1) при заданных значениях входных параметров. В структуру рассматриваемого класса моделей кроме блока решения основной системы уравнений дополнительно введены блоки решения систем сопряженных уравнений и уравнений в вариациях, расчета функций чувствительности и оценок вариаций функционалов, идентификации параметров моделей по априорной информации и данным измерений и др. Все эти элементы различаются по своему функциональному назначению.

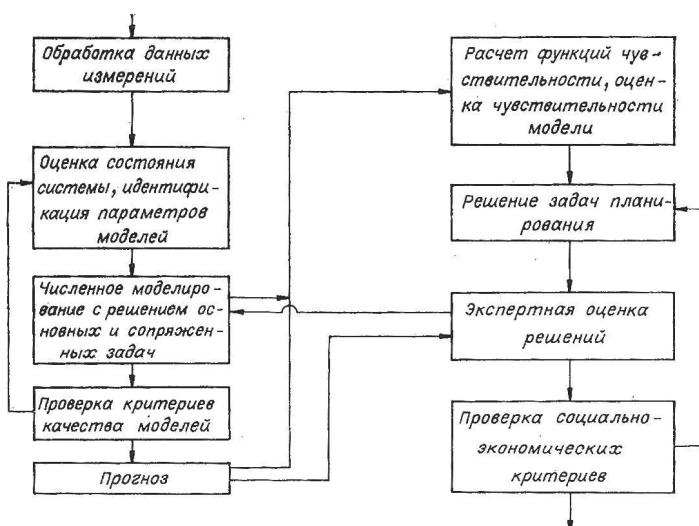


Рис. 1. Общая схема региональной модели для изучения влияния деятельности человека на атмосферу

Для построения дискретных моделей и взаимно сбалансированных на всех этапах вычислений алгоритмов для их реализации удобно вместо системы (1) использовать интегральное тождество

$$I(\varphi, Y, \varphi^*) = \left(B \frac{\partial \varphi}{\partial t} + G(\varphi, Y), \varphi^* \right)_{D_t}, \quad (3)$$

где φ^* – произвольная достаточно гладкая функция, а скалярное произведение выбирается таким образом, чтобы при конкретном задании φ^* из интегрального тождества можно было получить без дополнительных операций дифференцирования и интегрирования по частям ряд соотношений балансного характера, в том числе уравнение баланса энергии системы [9].

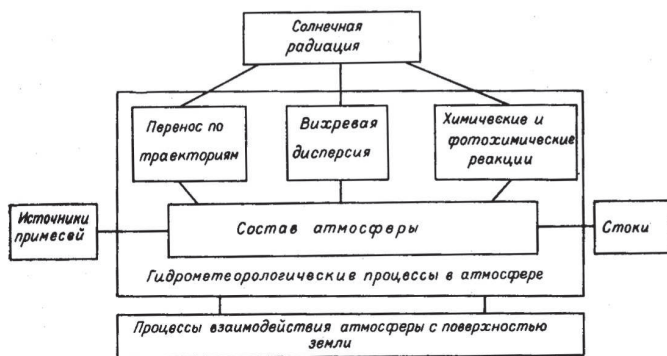


Рис. 2. Схема блока «Численное моделирование» региональной модели для изучения гидрометеорологического режима и загрязнения атмосферы

Кроме функций состояния для описания поведения моделей и моделируемых объектов введем в рассмотрение функционалы, определенные на множествах функций состояния и параметров. Удобно использовать два типа функционалов. К первому отнесем функционалы, характеризующие меру близости между вычисленными с помощью модели и измеренными в реальных условиях величинами. Предположим, что на некотором множестве $D_t^m \subset D_t$ задана совокупность измерений, которую обозначим через $f_{\text{изм}}$. Она может состоять не только из непосредственно измеряемых значений функций состояния. В нее включаются и данные косвенных экспериментов, когда вместо функций состояния или наряду с ними измерению оказываются доступными функции, связанные с функциями состояния операторными уравнениями, которые можно назвать «операторами измерений». Обозначим через $[\varphi]$ результат сноса значений функций состояния φ , вычисленных с помощью модели на множество D_t^m . Другими словами, $[\varphi]$ представляет результат действия модели «операторов измерений» на функцию состояния φ . В наиболее простом случае, когда производятся непосредственные измерения функций состояния в точках множества D_t^m , символ $[\varphi]$ обозначает результат интерполяции вектор-функции φ на это множество. С учетом принятых обозначений функционал определим следующим образом:

$$\Phi_1(\varphi, Y) = \|[\varphi] - f_{\text{изм}}\|_{D_t^m}. \quad (4)$$

Норма в (4) может быть введена многими способами, но при любом выборе метрики структура функционала такова, что по его величине

можно судить о точности описания измеряемых полей моделируемыми. Функционалы типа (4) используются в диагностических целях, например, при оценке качества моделей, при усвоении данных измерений в режиме реального времени и при идентификации параметров моделей по данным измерений.

К функционалам второго типа отнесем такие обобщенные характеристики состояния моделируемых объектов, в которых не учитываются невязки между вычисляемыми и измеряемыми величинами. Примером может быть

$$\Phi_2(\varphi, Y) = \int_{D_t} (\varphi(x) \cdot \eta(x)) dDdt, \quad (5)$$

где $\eta(x)$ – неотрицательная весовая функция, определенная в области D_t и отличная от нуля хотя бы в одной точке. В общем случае функция $\eta(x)$ зависит от функций состояния.

Остановимся теперь несколько подробнее на вопросах исследования чувствительности моделей к вариациям параметров и идентификации параметров по данным измерений. Введем понятие «функции чувствительности» и проиллюстрируем его суть на простейшем примере. Пусть функция состояния зависит только от одного параметра. Обозначим ее через $\varphi(x, \alpha)$, где x – совокупность пространственных координат и времени, α – параметр. Пусть α_0 – заданное конкретное значение параметра, $\delta\alpha_0$ – вариация и $\alpha_1 = \alpha_0 + \delta\alpha$ – возмущенное значение параметра. Предполагая корректность исходной задачи и дифференцируемость функции состояния по параметру в окрестности α_0 , запишем разложение в ряд Тейлора:

$$\varphi(x, \alpha_1) = \varphi(x, \alpha_0) + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \delta\alpha + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha_0} \delta\alpha^2 + \dots \quad (6)$$

Если $\delta\alpha$ мало и функция $\varphi(x, \alpha)$ достаточно гладкая по параметру, то в разложении (6) можно ограничиться только первыми двумя слагаемыми. Частную производную представляющую собой функцию x и α , назовем функцией влияния параметра, или функцией чувствительности состояния модели к вариациям параметра α первого порядка. Вычисление функций такого типа осуществляется с помощью модели в вариациях со специальным заданием функций источника, которая получается непосредственно из (1) [4].

Если для слежения за поведением моделируемого объекта используется некоторый функционал $\Phi(\varphi, Y)$, то его можно взять и в качестве меры чувствительности модели (1) к вариациям параметров. Ограничиваясь членами первого порядка относительно возмущений параметров, для оценки вариаций функционала получим следующую формулу:

$$\delta\Phi(\varphi, Y) = (\text{grad}_Y \Phi, \delta Y), \quad (7)$$

где δY – вариация вектора параметров Y модели (1); $\text{grad}_Y \Phi \equiv \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right\}$ – вектор-функция чувствительности функционала к вариациям параметров. Алгоритм для вычисления функций чувствительности и расчета вариаций по формулам типа (7) для моделей рассматриваемого класса, описываемых системами многомерных нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, изложен в работах [4, 8]. Основу его составляет вариационный принцип в сочетании с методом расщепления.

Таким образом, по аналогии с (6) функции чувствительности в (7) определяются как частные производные функционала по параметрам модели и равны коэффициентам при соответствующих вариациях компонентов вектора параметров. Само по себе понятие «функций чувствительности» имеет физический смысл. С их помощью реализуется связь между вариациями параметров и оцениваемых функционалов. Соотношение (7) представляет рабочую формулу для оценок вариаций функционалов при заданных вариациях параметров. Заметим, что входящие в него функции чувствительности вычисляются только по невозмущенным значениям функций состояния и параметров.

При решении задач физики атмосферы и океана и особенно задач, связанных с изучением влияния деятельности человека на природную среду, существенное значение имеет проблема оценки состояния моделируемых объектов и параметров моделей. Нет сомнений, что делать какие-либо заключения относительно влияния возмущений тех или иных факторов можно только тогда, когда модель правильно отражает суть реальных физических процессов. Это значит, что прежде всего модель необходимо «настроить» так, чтобы моделируемые функции состояния находились в достаточно хорошем согласии с данными измерений, например в смысле функционала (4). И только с хорошо настроенной моделью имеет смысл проводить эксперименты по изучению ее чувствительности и по решению задач прогноза изменений функций или функционалов состояния под влиянием возмущений параметров и внешних воздействий, обусловленных естественны-

ми и антропогенными факторами. Настройку модели можно понимать в следующем смысле: необходимо найти такую совокупность значений параметров Y , при которой функционал (4) принимает минимальное значение.

Общая схема алгоритмов для оценки параметров моделей динамики атмосферы и океана и примеры решения конкретных задач описаны в работах [6, 10, 11].

Связь между параметрами модели и функциями состояния выражает соотношение (2), которое конструктивно реализуется с помощью численной схемы для интегрирования уравнений (1). Поэтому для решения задачи идентификации параметров по данным измерений используются итерационные методы оптимизации. Простейший итерационный процесс градиентного типа имеет вид

$$Y^{(n+1)} = Y^{(n)} + \kappa_n \Delta Y^{(n)}, \quad (n \geq 0), \quad (8)$$

где n – номер итерационного цикла; κ_n – итерационный параметр;

$$\Delta Y^{(n)} = -\text{grad}_Y \Phi(\varphi, Y)|_{Y=Y^{(n)}}. \quad (9)$$

В соответствии с (9) на каждом итерационном шаге вводятся поправки в параметры, пропорциональные функциям чувствительности функционала (4). Если все компоненты вектора параметров зафиксированы, кроме тех, которые соответствуют начальным значениям функций состояния, то процедура идентификации приводит к восстановлению функций состояния в начальный момент времени по данным измерений. В этом случае сама численная модель выступает в роли пространственно-временного интерполянта.

В некоторых случаях оценку вариаций параметров удобно производить непосредственно с помощью основного соотношения чувствительности (7) [2]. Это те случаи, когда оценивается небольшое число параметров, а число итераций для решения задачи оптимизации велико. Пусть имеется набор функционалов $\Phi_k(\varphi, Y)$, $k = \overline{1, N}$. Для каждого такого функционала при невозмущенных значениях функции состояния φ и параметров Y рассчитываются функции чувствительности $F_k \equiv \text{grad}_Y \Phi_k(\varphi, Y)$, $k = \overline{1, N}$. В результате получается система линейных алгебраических уравнений

$$\delta \Phi_k = (F_k, \delta Y), \quad k = \overline{1, N}, \quad (10)$$

связывающая значения вариаций функционалов с вариациями параметров. Если заданы значения вариаций, то из этой системы находится $\delta\Phi_k$. При плохой обусловленности или вырожденности «матрицы чувствительности», составленной из вектор-строк F_k , в качестве оценки для δY принимается нормальное решение системы (10), т. е. решение, обладающее минимальной нормой.

Рассмотрим теперь модель загрязнения атмосферы, входящую как один из фрагментов в комплекс моделей для решения задач по охране окружающей среды. Введем в области D декартову систему координат и, предполагая характеристики гидрометеорологического режима заданными, запишем уравнение переноса примесей

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \operatorname{grad} \varphi + A \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \operatorname{div}_s \mu \cdot \operatorname{grad}_s \varphi = q(x, t) \quad (11)$$

с условиями

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \beta \varphi &= r_s \quad \text{при } z = Z_s(x), \\ \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -k_1(\varphi - \bar{\varphi}) \quad \text{при } z = Z_H, \\ \mu \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= -k_2(\varphi - \bar{\varphi}) \quad \text{при } (x, y) \in \sigma. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\mathbf{x} = (x, y, z)$ – точка области D ; x, y, z – пространственные координаты; n – нормаль к боковой поверхности в области D ; Z_s – рельеф поверхности Земли; Z_H – верхняя граница воздушной массы; $\mathbf{u} = (u, v, w)$ – вектор скорости частиц воздуха; u, v, w – составляющие в направлениях координат соответственно; ν, μ – коэффициенты вертикальной и горизонтальной турбулентности; $q(x, t)$ – функция распределения источников примесей; r_s – распределение поверхностных источников примесей; $\bar{\varphi}$ – значение фоновых концентраций примесей на границах области D ; β, k_1, k_2 – функции, определяющие условия взаимодействия загрязнений с поверхностью Земли и с фоновыми процессами; A – оператор, описывающий локальные процессы трансформации примесей.

Индексом s отмечены операторы, действующие только в горизонтальных направлениях x и y . Гидрометеорологический режим в области D учитывается через поле скоростей и через коэффициенты турбулентности. Отнесем их к числу входных параметров задачи (11), (12), а саму модель динамики атмосферы, с помощью которой они

рассчитываются, описывать не будем. Скорость гравитационного оседания или подъема частиц примесей учтем в вертикальной составляющей w вектора скорости \mathbf{u} . Роль функции состояния в данной задаче выполняет функция распределения концентраций примесей φ . Примеси составляют многокомпонентную среду, однако для наших целей при изложении достаточно ограничиться случаем одной скалярной функции. Вектор параметров определим следующим образом:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{u}, \varphi^0, \mu, \nu, \beta, k_1, k_2, \bar{\varphi}, q, r_s), \quad (13)$$

где φ^0 – распределение концентраций примесей в момент времени $t = 0$.

Задаче (11), (12) поставим в соответствие интегральное тождество. Умножим (11) скалярно на произвольную достаточно гладкую функцию φ^* и, интегрируя по частям, получим тождество следующего вида:

$$\begin{aligned} I(\varphi, \mathbf{Y}, \varphi^*) = & \int_{D_t} \left[(\Lambda\varphi, \varphi^*) + A\varphi \cdot \varphi^* + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} + (\mu \text{grad}_s \varphi \cdot \text{grad}_s \varphi^*) - q\varphi^* \right] \times \\ & \times dDdt + \int_{S_t} [(\beta\varphi\varphi^* + r_s\varphi^*)|_{z=Z_s} + k_1(\varphi - \bar{\varphi})\varphi^*|_{z=Z_H}] dSdt + \\ & + \int_{\sigma_t} k_2(\varphi - \bar{\varphi})\varphi^* d\sigma dt + \frac{1}{2} \int_D \varphi\varphi^* \bigg|_0^{\bar{t}} dD = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $S_t = S \times [0, \bar{t}]$; $\sigma_t = \sigma \times [0, \bar{t}]$; S – поверхность, $z = \text{const}$, а ds и $d\sigma$ – элементы площадей на S и σ соответственно. Выражение $(\Lambda\varphi, \varphi^*)$ представляет антисимметричную форму, соответствующую дифференциальному выражению оператора переноса $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \text{grad} \varphi$. Основное свойство этой формы заключается в том, что для любой вещественной функции, определенной в области D_t , имеет место равенство $(\Lambda\varphi, \varphi^*) = 0$. Вид этой формы зависит от структуры уравнения неразрывности. Например, при $\text{div} \mathbf{u} = 0$ имеем

$$\begin{aligned} (\Lambda\varphi, \varphi^*) = & \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \varphi^* - \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \varphi \right) + \right. \\ & \left. + \varphi^* \mathbf{u} \text{grad} \varphi - \varphi \mathbf{u} \text{grad} \varphi^* \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, что в данном случае

$$(\Lambda\varphi, \varphi) = 0. \quad (16)$$

Тождество (14) примем за основу при построении дискретных аппроксимаций. Основное соотношение чувствительности (7) для функционалов $\Phi_k(\varphi, \mathbf{Y})$, определенных на множестве функций состояния, принимает вид

$$\begin{aligned} \delta\Phi_k(\varphi, \mathbf{Y}) = & \int_{D_t} [(\delta A\varphi\varphi_k^*) + \delta\mathbf{u}(\varphi_k^*\mathbf{grad}\varphi - \varphi\mathbf{grad}\varphi_k^*) + \\ & + \delta\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi_k^*}{\partial z} + \delta\mu\mathbf{grad}_s\varphi \cdot \mathbf{grad}_s\varphi_k^* - \delta q\varphi_k^*] dDdt + \\ & + \int_{S_t} [(\delta\beta\varphi\varphi_k^* + \delta r_s\varphi_k^*)|_{z=Z_s} + (\delta k_1(\varphi - \bar{\varphi})\varphi_k^* - k_1\delta\bar{\varphi}\varphi_k^*)|_{z=Z_H}] dSdt + \\ & + \int_{\sigma_t} [\delta k_2(\varphi - \bar{\varphi})\varphi_k^* - \delta k_2\bar{\varphi}\varphi_k^*] d\sigma dt + \frac{1}{2} \int_D \delta\varphi\varphi_k^* \Big|_{t=0} dD, \quad (17) \end{aligned}$$

где φ_k^* – решение задачи, сопряженной к (11), (12), с членом источника, равным $\mathbf{grad}_\varphi\Phi_k(\varphi, \mathbf{Y})$, и с однородными краевыми условиями и начальным условием $\varphi_k^*|_{t=\bar{t}} = 0$.

На примере (17) наглядно виден физический смысл функций чувствительности модели. Они равны коэффициентам при соответствующих вариациях параметров, и для их расчета требуются решения основной и сопряженной задач. В работах [1–3] решение сопряженной задачи интерпретируется как функция ценности, или функция влияния параметров модели для функционалов типа (5). Чтобы показать сопряженную функцию в такой роли, запишем формулу для вычисления функционалов

$$\Phi_k(\varphi, \mathbf{Y}) = \int_{D_t} \varphi(\mathbf{x}, t)\eta_k(\mathbf{x}, t) dDdt \quad (18)$$

непосредственно через входные параметры модели:

$$\Phi_k(\varphi, \mathbf{Y}) = \int_{D_t} q(\mathbf{x}, t)\varphi_k^*(\mathbf{x}, t) dDdt + \int_{S_t} \varphi_k^* \Big|_{z=Z_s} +$$

$$+ k_1 \bar{\varphi} \varphi_k^*|_{z=Z_H} dS dt + \int_{\sigma_t} k_2 \bar{\varphi} \varphi_k^* d\sigma dt + \int_D \varphi_k^* \varphi^0 \Big|_{t=0} dD, \quad (19)$$

где φ_k^* получено из решения сопряженной задачи с членом источника, равным $\text{grad}_{\varphi} \Phi_k(\varphi, \mathbf{Y}) = \eta_k(\mathbf{x}, t)$, и начальным условием $\varphi_k^*|_{t=\bar{t}} = 0$.

Пусть $\eta_k(\mathbf{x}, t)$ – неотрицательная в D и отличная от нуля в некоторой подобласти $D_0 \subset D$ функция, удовлетворяющая условию нормировки $\int_D \eta_k(\mathbf{x}, t) dD dt = 1$. Тогда функционал (18) определяет суммарное количество загрязнений, взвешенных с весом $\eta_k(\mathbf{x}, t)$, поступающее в область D_0 за интервал времени $[0, \bar{t}]$. Если, например, $q(\mathbf{x}, t) = Q_0 \delta(\mathbf{x}_0)$, где $\delta(\mathbf{x}_0)$ – дельта-функция и Q_0 – мощность источника, а $\varphi^0(\mathbf{x}) = 0$, $r_s = 0$ и $\bar{\varphi} = 0$, то из формулы (19) имеем

$$\Phi_k(\varphi, \mathbf{Y}) = Q_0 \int_0^{\bar{t}} \varphi_k^*(\mathbf{x}_0, t) dt. \quad (20)$$

В данном случае решение сопряженной задачи выступает как функция влияния источника, расположенного в точке $(\mathbf{x}_0) \in D$, на загрязнение области D_0 . Из формулы (20) можно непосредственно получить решение обратной задачи на размещение источников [3]. Действительно, пусть требуется найти в области D такую точку (\mathbf{x}_0) , в которой надо разместить источник мощностью Q_0 , чтобы суммарное загрязнение области D_0 , в смысле функционала (18), не превышало заданной величины, т. е. $\Phi_k(\varphi, \mathbf{Y}) \leq J_k$. Тогда из (20) вытекает, что точку (\mathbf{x}_0) следует выбирать в тех частях области D , где функция $\bar{\varphi}_k^*(\mathbf{x}) \equiv \int_0^{\bar{t}} \varphi_k^*(\mathbf{x}, t) dt$ не превосходит величины (J_k/Q_0) .

Воспользуемся конечно-разностным способом дискретизации и введем в области D_t сетку D_t^h . Аппроксимируем на D_t^h тождество (14), заменив интегралы кубатурными формулами и подинтегральные выражения конечно-разностными так, чтобы и в дискретном представлении сохранились свойства антисимметрии и симметрии соответствующих слагаемых [9]. В результате получим сумматорный аналог тождества (14), который запишем следующим образом:

$$I^h(\varphi^h, \mathbf{Y}^h, \varphi^{*h}) = 0. \quad (21)$$

Здесь индекс h отмечает дискретные величины. Все функции, отмеченные этим индексом, определены на сетке D_t . Дискретные ана-

логи задачи (11), (12) получаются непосредственно из сумматорного функционала $I^h(\varphi^h, \mathbf{Y}^h, \varphi^{*h})$ с помощью операций

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^{*h}} I^h(\varphi^h, \mathbf{Y}^h, \varphi^{*h}) = 0. \quad (22)$$

Аналогично сумматорный аналог соотношения (17)

$$\delta \Phi_k^h(\varphi^h, \mathbf{Y}^h) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} I^h(\varphi^h, \mathbf{Y}^h + \xi \delta \mathbf{Y}^h, \varphi_k^{*h}) \right], \quad (23)$$

где ξ – вещественный параметр; $\delta \mathbf{Y}^h$ – вектор, составленный из вариаций параметров, а φ_k^{*h} – решение сопряженной задачи при условии $\varphi_k^{*h}|_{t=\bar{t}}$. Алгоритм построения сопряженной системы уравнений сводится к реализации следующих операций:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi'^h} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(I^h(\varphi^h + \xi \varphi'^h, \mathbf{Y}^h, \varphi_k^{*h}) + \Phi_k^h(\varphi^h + \xi \varphi'^h, \mathbf{Y}^h) \right) \right] = 0, \quad (24)$$

где φ^h – решение основной задачи (22) при невозмущенных значениях параметров, а φ'^h – отклонение от невозмущенного решения.

Таким образом, все необходимые соотношения получаются формально из сумматорного тождества, чем автоматически обеспечивается взаимная согласованность всех этапов численного моделирования. Интересно отметить следующее обстоятельство. Если при дискретизации интегрального тождества по времени использовать метод слабой аппроксимации с дробными шагами, то в результате операций (22)–(24) окончательно получатся схемы расщепления. В этом случае реализация вычислительных алгоритмов значительно упрощается.

В заключение перечислим несколько практических задач, для решения которых применимы описанные региональные и локальные модели динамики и загрязнения атмосферы.

1. Слежение за состоянием загрязнения атмосферы и прогноз качества воздуха совместно с прогнозом полей метеоэлементов.

2. Планирование наблюдательных экспериментов по оценке загрязнения атмосферы.

3. Управление интенсивностью действующих источников загрязнения, исходя из условий допустимой нагрузки на природную среду и стоимости регулирования.

4. Размещение источников на основе критериев, определяемых по допустимым нормам загрязнения атмосферы и социально-экономическим факторам.

Это задачи, в которых учитывается в основном непосредственное влияние антропогенных факторов на атмосферу. Под источниками здесь подразумеваются промышленные предприятия, транспортные магистрали и другие объекты, функционирование которых связано с выделением загрязняющих примесей и значительного количества тепла. При их решении необходимо учитывать и не прямое воздействие результатов хозяйственной деятельности человека на гидрометеорологический режим и климат конкретных регионов, а также взаимодействие между процессами региональных и глобальных масштабов [7]. Поэтому по структуре комплекс региональных моделей следует рассматривать как элемент в моделях более высокого ранга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 303 с.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
3. Марчук Г. И. Окружающая среда и некоторые проблемы оптимизации // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, №5. С. 1056–1059.
4. Марчук Г. И., Пененко В. В. Исследование чувствительности дискретных моделей динамики атмосферы и океана // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15, № 11. С. 1123–1131.
5. Марчук Г. И., Пененко В. В., Алоян А. Е., Лазриев Г. Л. Численное моделирование микроклимата города // Метеорология и гидрология. 1979. № 8. С. 5–15.
6. Марчук Г. И., Пененко В. В., Протасов А. В. Малопараметрическая модель динамики атмосферы спектрально-разностного типа // Метеорология и гидрология. 1978. № 11.
7. Марчук Г. И., Пененко В. В. Принципы построения математических моделей для изучения влияния деятельности человека на атмосферу в промышленных районах // В кн.: Проблемы рационального природопользования и контроля качества природной среды Севера Сибири. Якутск: Якутский филиал СО АН СССР, 1979. С. 28–37.
8. Пененко В. В. Вычислительные аспекты моделирования динамики атмосферных процессов и оценки влияния различных факторов на динамику атмосферы // В кн.: Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1975. С. 66–77.

9. Пененко В. В. Энергетически-сбалансированные дискретные модели динамики атмосферных процессов // Метеорология и гидрология. 1977. № 10. С. 3–20.

10. Пененко В. В. Оценка параметров дискретных моделей динамики атмосферы и океана // Метеорология и гидрология. 1977. № 10. С. 77–90.

11. Пененко В. В., Образцов Н. Н. Вариационный метод согласования полей метеорологических элементов // Метеорология и гидрология. 1978. № 11. С. 3–16.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МИКРОКЛИМАТА ГОРОДА²

Излагается численная модель микроклимата больших городов, основанная на модели атмосферных процессов. Приводится пример моделирования микроклимата города, типичного для средних широт и расположенного на равнинной местности, для летнего периода. Анализируется вклад различных факторов в формирование острова тепла над городом.

Введение

Известно, что климат города отличается от климата окружающей его местности [9, 10, 12]. Многочисленные измерения температуры воздуха в городе и в его окрестностях показывают, что город почти всегда теплее, при этом разность температур ΔT город – окрестности иногда достигает довольно больших значений (больше 10 °С). Это явление в литературе называется городским островом тепла (ОТ). Оказалось, что ОТ особенно хорошо выражен ночью, в безветренную и безоблачную погоду. Интенсивность ОТ зависит также от времени года, от географической широты, от численности населения в городе и т. д.

Городские застройки сильно влияют на внешний ветер. По [9], скорость ветра в нижнем пятисотметровом слое над Москвой на 1–3 м/с меньше, чем в Подмосковье. В среднем скорость ветра

²Метеорология и гидрология, 1979, № 8, с. 5–15. Совместно с В. В. Пененко, А. Е. Алоян, Г. Л. Лазриевым.

в городе на 20–35% меньше, чем в пригородах [10]. Город изменяет и другие метеорологические характеристики, такие как относительная влажность, повторяемость туманов, число выпадения и интенсивность осадков, интенсивность солнечной радиации и т. д.

Важную роль в формировании микроклимата города играют искусственные потоки тепла, образующиеся при работе промышленных предприятий, отопительных систем, автотранспорта и т. д. Со временем их влияние будет усиливаться, так как, по данным ВМО, мировое потребление энергии возрастает в среднем на 6% в год. В некоторых больших городах, особенно расположенных в высоких широтах, куда поступает мало солнечной радиации, количество выделяемого за год тепла сравнимо с количеством поглощенной Землей солнечной радиацией. Для среднеширотных городов этот фактор особенно существен зимой. Например, в Москве температура зимой выше, чем в пригородах, несмотря на то, что радиационный баланс в Москве меньше, чем в Подмосковье.

По мнению многих исследователей [9, 12, 17], на формирование климата города оказывают влияние следующие основные факторы:

- городские застройки, влияние которых на внешний ветер проявляется через увеличение шероховатости подстилающей поверхности;
- различие в теплофизических свойствах подстилающей поверхности в городе и в окрестностях;
- искусственные потоки тепла;
- механическое удаление осадков и уменьшение свободно испаряющей поверхности в городе;
- загрязнение воздуха.

Кроме этих факторов, следует еще отметить альбедо, которое для города в течение всего года меньше, чем для сельской местности. По-видимому, это связано с наличием в городе темных строительных материалов, с загрязнением снега и с удалением его зимой с улиц и т. д.

В последние годы, наряду с экспериментальными исследованиями, большое внимание уделяется математическому моделированию микроклимата крупных промышленных центров [11–14, 16–19], и это естественно, так как концентрация промышленных объектов и транспорта в городах и густонаселенных районах приводит к тому, что города все сильнее ощущают на себе отрицательное влияние индустриализации. В работах [13, 16, 18, 19] описаны результаты численного моделирования микроклимата городов, таких как Монреаль [13],

Сент-Луис [18], Токио [16] и др. В этих работах в основном изучается влияние какого-либо определенного фактора на климат города. Например, в [13] на основе двумерной модели исследуется чувствительность ОТ к вариациям параметра шероховатости и искусственного потока тепла ночью, в условиях зимы. В [19] также с помощью двумерной модели изучается зависимость ночного ОТ от устойчивости атмосферы и скорости геострофического ветра. Следует отметить работу [14], в которой рассматривается одномерная модель, но в ней впервые было использовано уравнение баланса тепла для определения температуры подстилающей поверхности в условиях города и сельской местности. Трехмерные модели описаны в [11, 16, 18]. В [18] изучается зависимость микроклимата г. Сент-Луис от скорости и направления внешнего ветра при заданном ΔT . В [16] также при заданном ΔT исследуется зависимость поля ветра от ОТ г. Токио с учетом реального побережья в этом районе.

В данной работе излагается численная модель для изучения микроклимата больших городов. При этом в первую очередь рассматриваются гидродинамические аспекты проблемы микроклимата – взаимодействие воздушной массы с подстилающей поверхностью, формирование острова тепла и локальных циркуляций на фоне внешнего потока. Методологической основой для построения численной модели является метод расщепления [5].

1. Система уравнений модели имеет следующий вид [8]:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \text{div } \vec{u}u = -\frac{\partial \pi'}{\partial x} + \lambda \vartheta' \frac{\partial \delta}{\partial x} + lv' + \frac{\partial}{\partial z} \nu_u \frac{\partial u}{\partial z} + \Delta u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \text{div } \vec{u}v = -\frac{\partial \pi'}{\partial y} + \lambda \vartheta' \frac{\partial \delta}{\partial y} - lu' + \frac{\partial}{\partial z} \nu_u \frac{\partial v}{\partial z} + \Delta v, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta'}{\partial t} + \text{div } \vec{u}\vartheta' = & -S \left(w' + u' \frac{\partial \delta}{\partial x} + v' \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \nu_\vartheta \frac{\partial \vartheta'}{\partial z} + \Delta \vartheta' - \\ & - u' \Theta_x - v' \Theta_y + \frac{L_w}{c_p} \Phi + Q_r, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q'}{\partial t} + \text{div } \vec{u}q' = & -\frac{\partial Q}{\partial z} \left(w' + u' \frac{\partial \delta}{\partial x} + v' \frac{\partial \delta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \nu_q \frac{\partial q'}{\partial z} + \Delta q' - \\ & - u' Q_x - v' Q_y - \Phi, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \pi'}{\partial z} = \lambda \vartheta', \quad (5)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

$$u = U + u', \quad v = V + v', \quad w = W + w',$$

$$\vartheta = \Theta + \vartheta', \quad q = Q + q', \quad \pi = \Pi + \pi',$$

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mu}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{\mu}_2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Здесь t – время; x, y, z – криволинейные координаты, причем x, y взаимно ортогональны и направлены вдоль рельефа; $z = z_1 - \delta(x, y)$, z_1 – высота над уровнем моря; уравнение $z_1 = \delta(x, y)$ описывает рельеф; \vec{u} – вектор скорости ветра; u, v, w – его составляющие в направлениях x, y и z соответственно; λ, l, S – параметры конвекции, Кориолиса и стратификации; $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ – горизонтальные коэффициенты турбулентности; ν_u, ν_ϑ – вертикальные коэффициенты турбулентности для количества движения и тепла; ϑ – потенциальная температура; q – удельная влажность; π – величина, пропорциональная давлению; U, V, W, Θ, Q, Π – фоновые значения метеорологических полей; $u', v', w', \vartheta', q', \pi'$ – отклонения от фона; Θ_x, Θ_y и Q_x, Q_y – горизонтальные градиенты фоновой потенциальной температуры и фоновой удельной влажности; L_w – скрытая теплота испарения; c_p – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении; Φ – скорость образования жидкой фазы; Q_r – радиационная составляющая притока тепла.

Для описания приземного слоя используем следующую систему уравнений:

$$\kappa z \frac{\partial |V|}{\partial z} = u_* \varphi_u(\zeta), \quad \kappa \frac{\partial p}{\partial z} = p_* \varphi_\vartheta(\zeta), \quad (p = \vartheta, q), \quad (7)$$

$$\kappa |\nu| = u_* f_u(\zeta, \zeta_u), \quad p - p_0 = p_* f_\vartheta(\zeta, \zeta_0), \quad \zeta = \frac{z}{L},$$

$$\zeta_u = \frac{z_u}{L}, \quad \zeta_0 = \frac{z_\vartheta}{L}, \quad (8)$$

$$\nu_i = \frac{u_* \kappa z}{\varphi_i(z)}, \quad (\nu_i)_h = \frac{u_* \kappa z}{\varphi_i(z_h)} \quad (i = u, \vartheta), \quad \zeta_h = \frac{h}{L}, \quad L = \frac{u_*^2}{\lambda \kappa^2 \vartheta_*}, \quad (9)$$

где $|V| = \sqrt{u^2 + v^2}$ – модуль скорости ветра; u_* – скорость трения; ϑ_*, q_* – масштабы потенциальной температуры и удельной влажности; κ – постоянная Кармана; z_u, z_ϑ – параметры шероховатости для ветра и температуры; h – высота приземного слоя; индексами $_0$ и $_h$ обозначены метеорологические поля при $z = z_\vartheta$ и $z = h$ соответственно;

L – масштаб длины; ζ – безразмерная длина; φ_i, f_i – непрерывные универсальные функции [4]. Начальные условия задаются в следующем виде [8]:

$$u' = v' = 0, \quad q' = 0, \quad \vartheta' = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (10)$$

Система решается при следующих краевых условиях [8]:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial q'}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm X, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial q'}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = \pm Y, \quad (12)$$

$$u' = 0, \quad v' = 0, \quad w' = 0, \quad \vartheta' = 0, \quad q' = 0 \quad \text{при } z = H, \quad (13)$$

$$w = 0, \quad h \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{\varphi_u(\zeta_h)}{f_u(\zeta_h, \zeta_u)} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix},$$

$$h \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\varphi_\vartheta(\zeta_h)}{\varphi_\vartheta(\zeta_h, \zeta_0)} (p - p_0) \quad \text{при } z = h. \quad (14)$$

Здесь H – высота пограничного слоя атмосферы; X, Y – боковые границы области.

Над водой ϑ_0 и q_0 считаются заданными

$$\vartheta_0 = \Theta_0, \quad q_0 = q_H(\Theta_0). \quad (15)$$

Над сушей функция q_0 вычисляется по формуле

$$q_0 = \eta_0 q_H(\vartheta_0), \quad (16)$$

где η_0 – относительная влажность, предполагаемая известной функцией от x, y и t , q_H (насыщающая удельная влажность, которая рассчитывается по формуле Магнуса [6]).

Для определения температуры на поверхности Земли запишем уравнение баланса тепла

$$G_s - \rho c_p \left(\nu_\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)_0 - \alpha_\Gamma \rho L_w \left(\nu_\vartheta \frac{\partial q}{\partial z} \right)_0 = I_0 (1 - A_s) + I_s - F_s, \quad (17)$$

где $G = \lambda_s (\partial T / \partial z)_s$ – теплопередача через поверхность $z = 0$ (индексом s обозначены величины при $z = 0$); λ_s – коэффициент теплопроводности; A_s – альбедо; T – абсолютная температура почвы; ρ –

плотность воздуха; F_s – эффективное длинноволновое излучение [6]; α_T – безразмерный коэффициент, позволяющий учесть тот факт, что в разных точках подстилающей поверхности вследствие ее неоднородности на испарение (конденсацию) тратится неодинаковое количество тепла; I_0 – коротковолновая солнечная радиация, которая определяется по формуле Албрехта [2]; $I_s(x, y, t)$ – функция, описывающая поток тепла, которое выделяется в процессе производства и потребления энергии в городе.

Вопрос об учете искусственных потоков тепла в моделях микроклимата городов пока остается открытым [13, 14, 17]. Отдача тепловой энергии в атмосферу возможна либо в виде реальной, либо в виде скрытой теплоты, и в зависимости от этого возможны различные способы ее параметризации. В данной модели искусственный поток тепла, по аналогии с [14], учитывается как добавка к радиационному притоку тепла.

При штилевых условиях перепад температуры между уровнями $z = 0$ и $z = z_\vartheta$ может достигать довольно больших значений. Следовательно, при решении уравнения (17) целесообразно использовать известную полуэмпирическую параметризационную формулу для вязкого подслоя [3, 15]:

$$\vartheta_s - \vartheta_0 = 0.0962 \vartheta_* \left(\frac{u_* z_\vartheta}{\nu} \right)^{0.45}, \quad (18)$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости воздуха. Тогда решение уравнения (17) запишется в следующем виде [4]:

$$\vartheta_0 = \frac{\tilde{\vartheta}_0 + \tilde{D} \vartheta_h}{1 + \tilde{D}}, \quad \tilde{D} = \tilde{C} F, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= AC_p + \left(B + 4 \frac{F_s}{T_s} \right)^{j-1} \frac{0.0962 c_\vartheta}{\kappa} \left(\frac{c_u |V|_h z_\vartheta}{\nu} \right)^{0.45}, \\ \tilde{\vartheta}_0 &= \vartheta_0^{j-1} + F \left[J_0 (1 - A_s) - F_s^{j-1} - B \left(0.414 \tau_s^{j-1} + \sum_{n=1}^4 K_n \tau_s^{j-n} \right) \right] + \\ &\quad + (q_h - q_0^{j-1}) A F L_w + A F L_w \mu (\vartheta_0^{j-1} - \vartheta_s^{j-1}), \\ A &= \rho c_u c_\vartheta |V|_h, \quad B = 2 \lambda_s / (K_s \pi \Delta t)^{1/2}, \\ K_0 &= 1, \quad K_n = (n+1)^{1/2} - 2n^{1/2} + (n-1)^{1/2} \quad \text{при } n > 1. \end{aligned}$$

Выражения для μ и F приведены в [4]. Остальные обозначения: K_s – коэффициент температуропроводности почвы; c_u , c_ϑ – коэффициенты трения и теплопередачи; Δt – шаг по времени; $\tau_s^{j-n} = (T_s^{j-n} - \bar{T})$ – отклонение температуры подстилающей поверхности от ее среднесуточного значения \bar{T} в момент времени $t = (j - n)\Delta t$.

По ϑ_0 из (17) можно определить ϑ_s .

Перечислим теперь основные входные данные, необходимые для моделирования микроклимата конкретных городов:

- географические координаты и план города;
- рельеф местности;
- характеристики подстилающей поверхности – параметр шероховатости, относительная влажность, альбедо, среднесуточная температура, коэффициенты температуро- и теплопроводности почвы;
- распределение и мощность искусственных источников тепла;
- термическая стратификация фоновой атмосферы и значения фоновых полей метеозлементов – температуры, удельной влажности и компонентов вектора скорости.

Все величины, задаваемые на уровне входной информации, являются функциями пространственных координат. Фоновые значения метеозлементов для прогностических целей получаются из моделей крупномасштабных атмосферных процессов, а при решении задач в диагностическом режиме – задаются по результатам обработки данных измерений в реальной атмосфере.

2. В качестве иллюстрации рассмотрим пример моделирования микроклимата города для летнего периода. На рис. 1 схематически представлен план города, границы которого обведены пунктиром, а наиболее плотно застроенные участки – жирной линией и заштрихованы. Предположим, что город расположен в средних широтах на равнинной местности. Река делит город на две части, рядом находится море (озеро, водохранилище). Значительную часть территории занимают зеленые насаждения, в основном типичный для средних широт сосновый бор (узловые точки с кругами), а остальную местность можно рассматривать как сельскую, характеризующуюся редко застроенными одноэтажными домами, мелким кустарником, полями и т. д.

Для расчетов использовалась численная схема, построенная по аналогии с [7, 8] некоторыми модификациями, учитывающими специфику модели. Все излагаемые ниже численные эксперименты проводились при следующих значениях входных параметров:

$X = Y = 21,375$ км; $h = 50$ м; $H = 1650$ м; $\Delta t = 1200$ с; $\Delta x = \Delta y = 2250$ м; $\Delta z = 100$ м при $z \leq 300$ м, $\Delta z = 150$ м при $300 < z \leq 1650$ м; $\lambda = 0,035$ м/(с² · К); $l = 10^{-4}$ с⁻¹; $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = 1000$ м²/с; $\kappa = 0,35$; $S = 0,003$ К/м; $c_p = 0,24$ кал/(г · К); $L_w = 530$ кал/г; $\rho = 1300$ г/м³; $\nu = 15 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\bar{T} = 300$ К; $\Theta_0 = 295$ К.

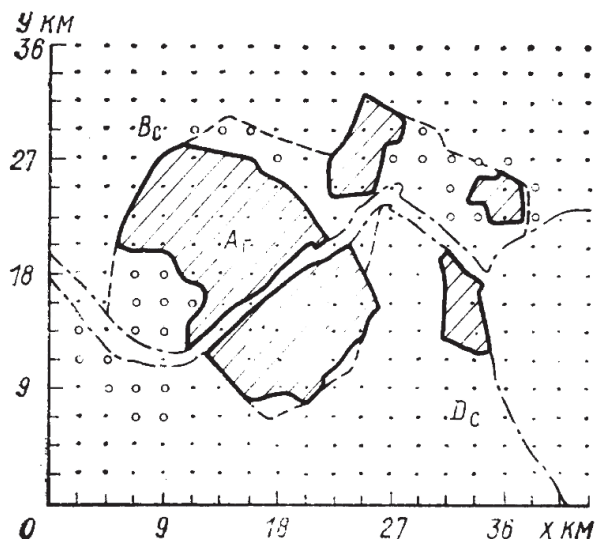


Рис. 1. Схематический план города

Остальные значения параметров приведены в таблице 1. Функция $\tilde{I}(t)$ в этой таблице определяется следующим образом:

$$\tilde{I}(t) = \begin{cases} 5 + 7 \sin [\pi(t - 6)/18], & \text{если } 6 \leq t \leq 24 \text{ (} t \text{ в часах),} \\ 5 & \text{для других моментов времени.} \end{cases}$$

Таблица 1. Параметры подстилающей поверхности

Местность	z_u , м	z_θ , м	$10^7 K_s$, м ² /с	λ_s , $\frac{\text{кал}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot ^\circ\text{C}}$	A_s	I_s , $\frac{\text{кал}}{\text{м} \cdot \text{с}}$	α_Γ
Город	1	0,01	12,5	0,62	0,2	$\tilde{I}(t)$	0,25
Село	0,1	0,01	5	0,26	0,3	0	1
Бор	0,5	0,01	5	0,26	0,4	0	1

Параметр z_u , для города взят равным 1 м, что соответствует застройкам высотой 20–30 м, а для сельской местности и для бора

взяты типичные для таких местностей значения [3]. Значения A_s , λ_s , K_s , приведенные в таблице, часто используются при аналогичных расчетах [13, 14], отметим только, что им в городе соответствуют песочно-каменные материалы, а в сельской местности и в бору – увлажненная почва. Для приближенного учета дополнительного отражения в бору A_s было взято на 0,1 больше, чем в сельской местности. Значения I_s и α_Γ характерны для больших, среднеширотных городов [13, 14, 19]. В качестве z_θ взяты микрометеорологические значения параметра шероховатости. При расчетах предполагалось, что $\Phi = 0$, $Q_r = 0$, $\delta(x, y) = 0$. Вертикальные коэффициенты турбулентности, относительная влажность и фоновые поля температуры и удельной влажности задавались так же, как в [8].

Эксперимент 1. Известно, что при штилевых условиях, особенно ночью и ранним утром, когда часто наблюдаются приземные инверсии, возрастает опасность загрязнения атмосферы вредными веществами [1]. Следовательно, представляет интерес рассмотреть случай отсутствия фонового ветра, т. е. когда $\vec{V} = 0$ и микроклимат города формируются только за счет влияния локальных неоднородностей подстилающей поверхности.

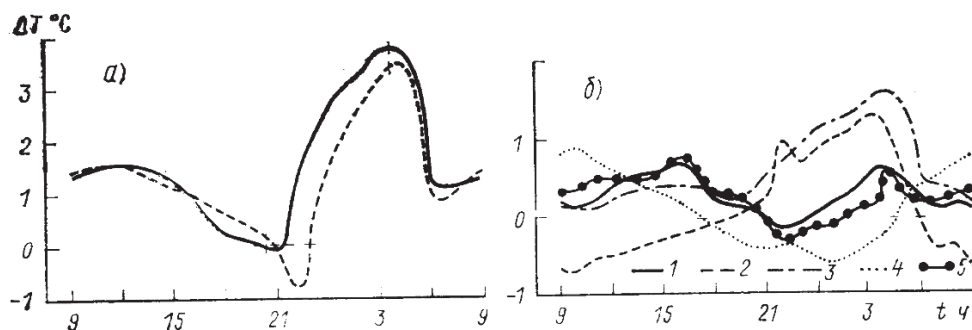


Рис. 2. Суточный ход разности температур между точками $A_\Gamma - B_c$ (сплошная линия) и $A_\Gamma - D_c$ (пунктир) на высоте 2 м (а) и разности интенсивностей ОТ при основном и вспомогательных экспериментах (б)

Из результатов численных экспериментов следует, что в этом случае в городе температура почти всегда выше, чем в окрестностях, за исключением малого интервала времени после захода Солнца (20 ч 31 мин). Как видно на рис. 2а, на котором представлен суточный ход

разности температур на высоте $z = 2$ м между узловой точкой A_T в городе и точками B_c (сплошная линия) и D_c (пунктир) в сельской местности, ΔT зависит от взаимного расположения этих точек. Под влиянием моря в точке D_c ночью получается меньше выхолаживания, чем в B_c . Обе кривые имеют два максимума: один – около полудня, а второй – ночью, перед восходом Солнца. С восходом Солнца (4 ч 41 мин) сельская местность начинает прогреваться интенсивней, чем город, что ведет к уменьшению ΔT . Поперечные черточки на кривых указывают значения для моментов времени, соответствующих заходу и восходу Солнца, а продольные – для моментов времени, при которых функция меняет знак.

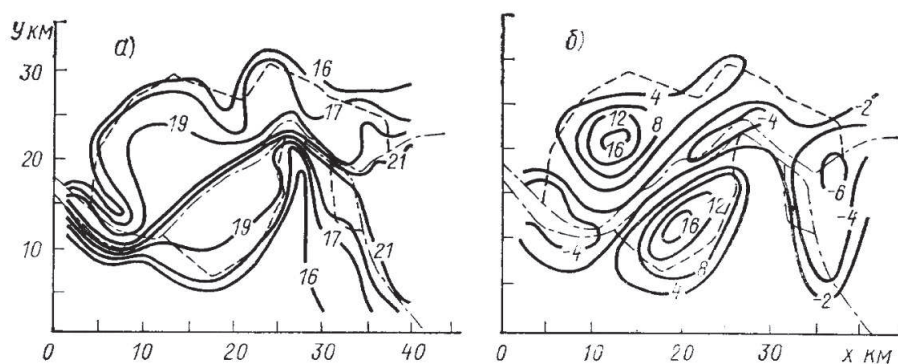


Рис. 3. Распределение температуры ($^{\circ}\text{C}$) на высоте 2 м для $t = 4$ ч (а) и вертикальных скоростей (см/с) на высоте 500 м для $t = 14$ ч (б)

На рис. 3а представлено поле температуры на высоте 2 м в момент $t = 4$ ч, когда интенсивность ОТ достигает максимума. Из этого рисунка следует, что центральные участки города в среднем на 3° теплее, чем окружающая территория.

Рассмотрим вертикальную структуру ОТ в сечении $x = 13,5$ км для 14 ч, когда особенно четко выражен «тепловой купол» над городом (рис. 4а). Заштрихованная область на оси y обозначает город, а волнистая линия – водную поверхность. Как видно, над каждой частью города образуется свой собственный «купол». Эти «купола» с высотой разрушаются и как бы соединяются в один общий, высота которого достигает 600 м. Несмотря на то, что ΔT на уровне двух метров ночью больше, чем днем, высота «купола» ночью меньше (рис. 4б). Это, по-видимому, связано с затрудненным турбулентным перемешиванием из-за инверсии, которая образуется как над городом, так и

над сельской местностью приблизительно через 2–3 ч после захода Солнца.

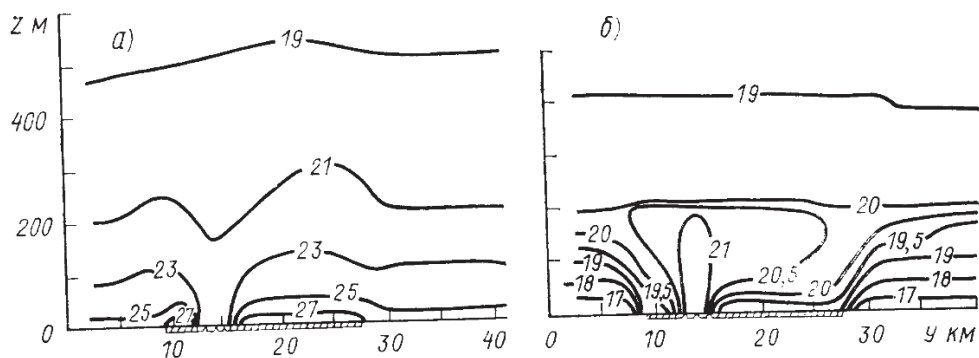


Рис. 4. Вертикальная структура ОТ ($^{\circ}\text{C}$) в сечении $x = 13,5$ км для $t = 14$ ч (а) и для $t = 4$ ч (б)

Образовавшись, инверсия постепенно усиливается и непосредственно перед восходом Солнца достигает максимального значения над городом – около 1°C при высоте около 100 м, а над сельской местностью достигает примерно 3°C при высоте около 200 м. С восходом Солнца инверсия ослабевает и разрушается над городом несколько раньше, чем над сельской местностью.

Остров тепла стимулирует локальную циркуляцию, которая в нижних слоях направлена к наиболее нагретым участкам города. Над плотно застроенными районами образуются две зоны сходимости воздушных масс, в области которых вертикальные токи и температура принимают максимальные значения. Под влиянием морского бриза, скорость которого достигает 6 м/с такие зоны в других частях города отсутствуют. Поворачиваясь с высотой вправо, ветер выше 1000 м меняет направление на противоположное по сравнению с приземным. Бризу соответствует антибриз с максимальной скоростью 1,5 м/с.

Ночью потоки, как и днем, направлены от холодных участков местности к более теплым, но зоны конвергенции уже не образуются. Так как температурный контраст между сельской местностью и морем больше, чем интенсивность ОТ, то преобладает перенос в сторону моря. Максимальная скорость хорошо выраженного берегового бриза

На рис. 5 показаны векторные поля скорости ветра на уровнях $z = 50$ м (рис. 5а) и $z = 1400$ м (рис. 5б) в полдень. Стрелкам с квадратными концами соответствуют малые значения скорости.

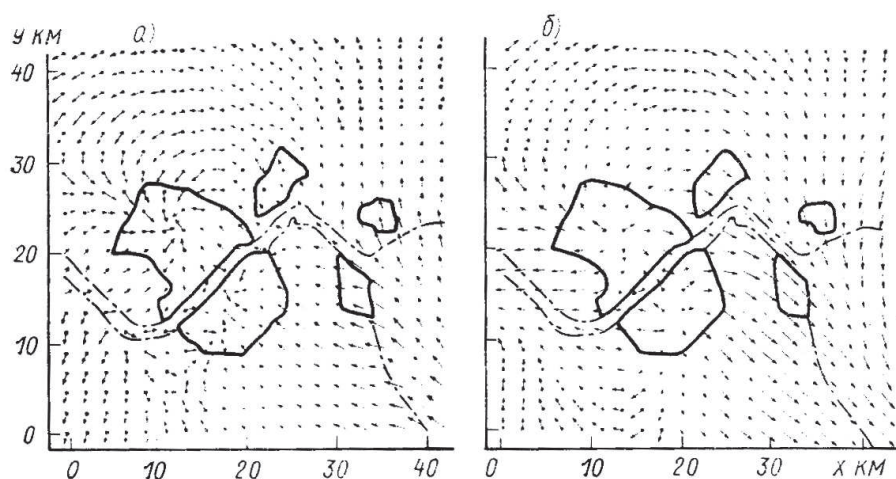


Рис. 5. Картина локальной циркуляции для $t = 12$ ч в сечениях $z = 50$ м (а) и $z = 1400$ м (б). Максимальному вектору соответствует значение 6,2 м/с (а) и 1,5 м/с (б)

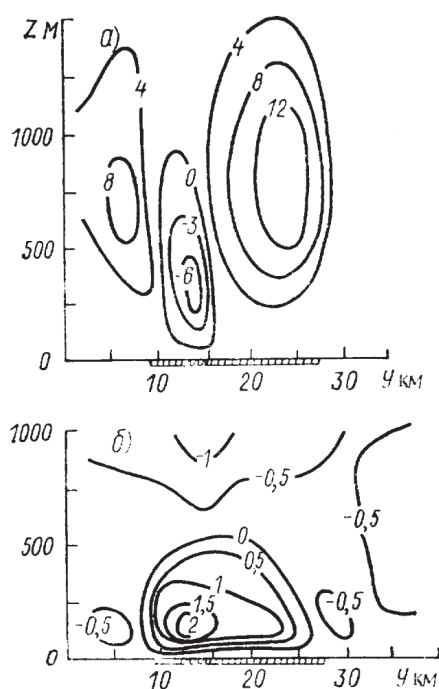


Рис. 6. Изолинии w (см/с) в сечении $x = 13,5$ км для $t = 14$ ч (а) и для $t = 2$ ч (б)

Вертикальные токи над городом всегда положительны. Наибольшего значения они достигают днем, в момент максимального развития циркуляции на высоте около 500 м (рис. 3б). Ночью вертикальные токи на порядок меньше, чем днем. Над водными поверхностями наблюдаются днем нисходящие, а ночью восходящие движения.

На рис. 6 показаны изолинии w в сечении $z = 13,5$ км для 14 ч (рис. 6а) и 2 ч (рис. 6б).

Таким образом, при отсутствии внешнего ветра локальная циркуляция в центре города будет способствовать вертикальному переносу воздушных масс с нижних слоев атмосферы в верхние, а оттуда их адвекции к окраинам города.

Наряду с основным экспериментом 1 была проведена серия вспомогательных экспериментов, в которых последовательно одной из физических характеристик, соответствующих городу, например альбедо, параметру шероховатости и т. д., присваивалось значение, такое же, как и для сельской местности. Величина разности интенсивностей ОТ при основном и вспомогательных экспериментах, суточный ход которых дан на рис. 2б, использовалась для оценки вклада различных физических процессов в формирование микроклимата города.

Эксперимент 2. Чтобы изучить влияние городских застроек на ОТ, параметру z_u присвоено значение, соответствующее сельской местности. Ночью ослабление турбулентного перемешивания по сравнению с экспериментом 1 ведет к уменьшению потока тепла из атмосферы к подстилающей поверхности, вследствие чего температура вблизи Земной поверхности на высоте 2 м уменьшается, т. е. ОТ ослабевает. Днем, также из-за ослабления турбулентного перемешивания по сравнению с экспериментом 1, уменьшается поток тепла в атмосферу, следовательно, интенсивность ОТ уменьшается.

Как видно на рис. 2б (кривая 1), максимальный вклад параметра z_u ночью составляет $-0,7$ °С, а днем $-0,6$ °С.

Эксперимент 3. Предполагается, что подстилающая поверхность в городе обладает такими же теплофизическими свойствами, как в сельской местности.

Днем, когда поток тепла направлен в почву, из-за уменьшения коэффициента теплопроводности λ_s и связанной с ним величины потока G_s подстилающая поверхность в городе, по сравнению с экспериментом 1, нагревается больше, и, как следствие, возрастает интенсивность ОТ. Ночью поток направлен уже из почвы, поэтому умень-

шение λ_s в городе ведет к уменьшению температуры подстилающей поверхности и к ослаблению интенсивности ОТ.

Как видно на рис. 2б (кривая 2) максимальный вклад данного фактора составляет ночью $1,3^\circ\text{C}$, днем – $1,1^\circ\text{C}$.

Эксперимент 4. Рассматривается случай, когда искусственные источники тепла отсутствуют. Как видно на рис. 2б (кривая 3), днем вклад искусственного потока тепла мал по той причине, что I_s представляет малую величину по сравнению с коротковолновой солнечной радиацией. Ночью, несмотря на малую величину ($5 \text{ кал}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$), искусственный поток сравним с потоком тепла из почвы и с эффективным длинноволновым излучением, которые являются основными составляющими в уравнении баланса тепла. Поэтому вклад I_s в интенсивность ОТ ночью существен и достигает $1,6^\circ\text{C}$. Начиная с момента времени, соответствующего восходу Солнца, кривая 3 резко идет вниз.

Эксперимент 5. Предполагается, что влажностные процессы в городе и сельской местности протекают одинаково. В уравнении баланса тепла задано $a_T = 1$.

Как видно на рис. 2б (кривая 4), механическое удаление осадков и уменьшение свободной испаряющей поверхности в городе дают максимальный вклад в ОТ днем около 1°C , а ночью – $0,6^\circ\text{C}$. Днем увеличение затрат тепла на испарение (по сравнению с экспериментом 1) ведет к ослаблению ОТ. Вечером и ночью, когда поток влаги направлен к подстилающей поверхности, усиление процесса конденсации способствует нагреву города и усилению ОТ больше, чем в эксперименте 1 для этого же промежутка времени.

Эксперимент 6. Альbedo подстилающей поверхности в городе принимает такое же значение, как и для сельской местности. Тогда днем за счет уменьшения поглощенной коротковолновой солнечной радиации подстилающая поверхность нагревается меньше, и по сравнению с экспериментом 1 интенсивность ОТ ослабевает. Максимальный вклад альbedo днем составляет $0,8^\circ\text{C}$.

Как видно на рис. 2б (кривая 5), небольшое отличие от результатов эксперимента 1 заметно и ночью, когда альbedo никакой роли не играет. Это, по-видимому, связано с тем фактом, что под влиянием уменьшения альbedo днем происходит перестройка полей ветра и температуры, и с момента времени, соответствующего заходу Солнца, задача фактически решается при других начальных условиях.

3. Результаты численных экспериментов качественно отражают основные закономерности формирования гидрометеорологического ре-

жима над городом. Сравнительный анализ расчетов при различных входных данных позволяет делать выводы об относительной роли тех или иных факторов естественного и антропогенного происхождения. Очевидно, что проблема микроклимата городов представляет интерес не только как задача метеорологии. Остров тепла и система локальных циркуляций во взаимодействии с подстилающей поверхностью и крупномасштабными атмосферными процессами являются фоном, на котором происходит, в частности, трансформация загрязняющих примесей. Учитывая дальнейшее применение методики численного моделирования для изучения промышленных районов, описанная в статье модель реализована в виде комплекса алгоритмов и программ универсального характера, без алгоритмической привязки к конкретному объекту. Адаптация модели для решения конкретных задач осуществляется на уровне входной информации. По структуре эта модель является частью проекта, реализуемого в Вычислительном центре СО АН СССР, по изучению гидродинамических проблем окружающей среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берлянд М. Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
2. Будыко М. И. Тепловой баланс земной поверхности. Л.: Гидрометеоиздат, 1956.
3. Зилитинкевич С. С. Динамика пограничного слоя атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1970.
4. Казаков А. Л., Лазриев Г. Л. О параметризации приземного слоя атмосферы и деятельного слоя почвы // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 14, № 3.
5. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
6. Матвеев Л. Т. Основы общей метеорологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1965.
7. Пененко В. В., Алоян А. Е. Численный метод расчета полей метеорологических элементов пограничного слоя атмосферы // Метеорология и гидрология. 1976. № 6.
8. Пененко В. В., Алоян А. Е., Лазриев Г. Л. Численная модель локальных атмосферных процессов // Метеорология и гидрология. 1979. № 4.

9. Погосян Х. П., Бачурина А. А. Метеорологический режим города и градостроительство. Л.: Гидрометеиздат, 1977.
10. Расторгуева Г. П. Особенности термического режима городов // Труды ГГО / Вычислительный центр СО АН СССР Закавказский научно-исследовательский гидрометеорологический институт. 1969. Вып. 238.
11. Atwater M. A. Thermal changes induced by urbanization and pollutants // J. Appl. Meteorol. 1975. V. 14, No. 6.
12. Garstand M., Tyson P. D., Emmitt G. D. The structure of heat islands // J. Rev. Geophys. and Space Ph. 1975. V. 13, No. 2.
13. Gutman D. P., Torrance K. E. Response of the urban boundary layer to heat addition and surface roughness // Boundary Layer Meteorol. 1975. V. 9, No. 2.
14. Myrup L. A numerical model of the urban heat island // J. Appl. Meteorol. 1969. V. 8, No. 6.
15. Pielke R. A., Mahrer J. Representation of the heated planetary boundary layer in mesoscale models with coarse vertical resolution // J. Atmos. Sci. 1975. V. 32, No. 3.
16. Saito T. A numerical experiment of the land and sea breeze circulation // Meteorol. and Geophys. 1976. No. 4.
17. Sawai T. Formation of the urban air mass and the associated local circulation // J. Meteorol. Soc. Japan. 1978. Ser. II. V. 56, No. 3.
18. Vukovich F. M., Dunn T. W., Crissman B. W. A theoretical study of the St-Louis heat island. The wind and temperature distribution // J. Appl. Meteorol. 1976. V. 15, No. 5.
19. Yu T-W., Wagner N. K. Numerical study of the nocturnal urban boundary layer // Boundary Layer Meteorol. 1975. V. 9, No. 2.

ГЛОБАЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ В АТМОСФЕРЕ³

Построена численная модель глобального переноса примесей в атмосфере с использованием основного и сопряженного уравнений. Проводились численные эксперименты для оценки антропогенной нагрузки в отдельных регионах

³Известия АН. Серия: Физика атмосферы и океана, 1995, т. 31, № 5, с. 597–606. Совместно с А. Е. Алоян.

планеты для периода январь – февраль 1986 г. Взаимодействие воздушной массы с поверхностью Земли учитывается с помощью модели планетарного стратифицированного пограничного слоя атмосферы. Расчеты проводились с использованием метеорологической информации TOGA Data Set, восстановленной в Европейском центре среднесрочных прогнозов.

При решении глобальных задач физики атмосферы и окружающей среды требуется детальное описание структуры метеорологических полей и процессов распространения примесей в атмосфере. Особенно остро стоит эта проблема в последние годы в связи с активным воздействием человека на окружающую среду. Увеличение хозяйственной деятельности и осуществление крупных народно-хозяйственных проектов уже связаны с воздействием на окружающую среду глобального характера.

При оценке возможных последствий этой деятельности существенную роль играют математические модели. С их помощью можно оценить возмущения основных параметров, характеризующих изменения состояний климатической системы под влиянием естественных и антропогенных факторов. Проблема моделирования оказывается существенной еще и потому, что эксперименты в экологии и социально-экономических областях могут привести к необратимым последствиям. Математическое моделирование позволяет рассмотреть различные сценарии по влиянию деятельности человека на окружающую среду и оценить их последствия. Полученная в результате информация позволяет следить за поведением исследуемой системы в динамике. Важнейшей задачей также является поиск оптимальных решений при планировании хозяйственной деятельности с учетом допустимых нагрузок на окружающую среду и социально-экономических критериев с конечной целью – определить границы устойчивости системы и пределы допустимых ее изменений.

Для оценки областей влияния источников загрязнений на экологическое состояние отдельных регионов Земли используются уравнение переноса примесей в атмосфере с учетом турбулентного обмена и взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью. Мы будем осуществлять моделирование глобального распространения примесей, с помощью которого можно получить оценку общего количества загрязнений подстилающей поверхности.

Расчеты по модели переноса примесей обычно проводятся на длительные строки. С целью повышения достоверности результатов расчетов информация о поле скорости ветра и других метеозадающих элементах используется на основе фактического материала наблюдений. Модель рассматривается применительно к сферической Земле в системе координат (λ, ψ, z) , где λ – долгота; ψ – дополнение до широты; z – высота от подстилающей поверхности.

Основное уравнение переноса примесей на сфере запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \psi} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + (w - w_g) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \\ & = F + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{1}{a^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \sin \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}, \end{aligned} \quad (1)$$

или в операторной форме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = F.$$

Здесь $\varphi = \varphi(\lambda, \psi, z, t)$ – концентрация примесей, $\mathbf{u} = (u, v, w - w_g)$ – вектор скорости ветра с компонентами в направлении координат λ, ψ, z соответственно, где w_g – скорость гравитационного оседания; μ, ν – коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальном и вертикальном направлениях; $F = F(\lambda, \psi, z, t)$ – функция размещения и мощности источников; a – средний радиус Земли. Мощности источников и их распределения задаются как функции от пространственных координат.

Задача рассматривается в области $D_t = G \times [0, T]$, где

$$G = S \times [b, H]; \quad S = \{0 \leq \lambda \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \pi\}.$$

Здесь $b = b(\lambda, \psi)$ – функция, описывающая рельеф подстилающей поверхности, H – верхняя граница расчетной области.

Сформулируем краевое условие задачи (1) на уровне высоты приземного слоя атмосферы $z = b + h$. Как известно из теории подобия Мони́на – Обухова [1], в приземном слое атмосферы турбулентный поток пассивной примеси (наряду с потоками тепла и количества движения) допустимо считать постоянными по высоте. Тогда при $z \leq b + h$ будут выполняться соотношения [1]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\varphi_*}{z} \eta(\zeta), \quad (2)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi_* \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\eta(\zeta)}{zeta} d\zeta \equiv \varphi_* f_{\varphi}(\zeta, \zeta_0), \quad (3)$$

$$\nu(\zeta) = \frac{u_* \kappa z}{\eta(\zeta)}, \quad u_* = \frac{\kappa |u|}{f_u(\zeta, \zeta_0)} = c_u |u|, \quad (4)$$

где φ_* – масштаб для изменения концентрации примеси; η , f_u , f_{φ} – универсальные функции [2]; ζ – безразмерная длина, характеризующая устойчивость атмосферы ($\zeta = z/L$); индекс ноль означает, что соответствующее величины берутся при $z = b + z_0$; z_0 – параметр шероховатости; L – масштаб турбулентного слоя; κ – постоянная Кармана; u_* – масштаб скорости ветра; $c_u = \kappa/f_u(\zeta, \zeta_0)$. Из (2), (3) получаем

$$\varphi_* = \frac{\varphi - \varphi_0}{f_{\varphi}(\zeta, \zeta_0)}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\eta(\zeta)}{z} \frac{\varphi - \varphi_0}{f_{\varphi}(\zeta, \zeta_0)}. \quad (6)$$

Умножая уравнение (6) на ν , придем к соотношению

$$\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha (\varphi - \varphi_0),$$

где $\alpha = c_u c_{\varphi} |u|$, $c_{\varphi} = \kappa/f_{\varphi}(\zeta, \zeta_0)$.

Рассмотрим это соотношение при $z = b + h$:

$$\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha (\varphi - \varphi_0) \quad \text{при } z = b + h. \quad (7)$$

Заметим, что параметр $\alpha = \alpha(\zeta)$ характеризует взаимодействие атмосферы с подстилающей поверхностью и является функцией от безразмерного параметра ζ , вид которого дан в [2–4].

Область определения решения G заменим на $G = S \times [b + h, H]$, имея в виду, что приземный слой, как было указано выше, можно исключить из рассмотрения, используя параметризацию граничного условия. Таким образом, единственной неизвестной величиной в граничном условии (7) остается функция φ_0 . функцию φ_0 определим из уравнения баланса примеси на подстилающей поверхности:

$$-\left(\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 = (\beta_i - w_g) \varphi_0 = \sum_{k=1}^K Q_{0k} \delta(x - x_k) \delta(y - y_k), \quad (8)$$

где K – число всех наземных источников с координатами (x_k, y_k) ; Q_{0k} – мощность каждого источника, т. е. количество примеси, поступающей в единицу времени на единичную площадь подстилающей поверхности; β_i ($i = 1, 2$) – коэффициент, характеризующий взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью ($\beta_1 = 0.01$ м/с соответствует суше, а $\beta_2 = 1$ м/с – водной поверхности [5]).

Для удобства уравнение (8) записано в декартовых координатах x, y , поскольку они обычным образом связаны с координатами λ, ψ . С учетом (7) уравнение (8) примет вид

$$\varphi_0 = \frac{\sum_{k=1}^K Q_{0k} \delta(x - x_k) \delta(y - y_k) + c_u c_\varphi |u_{b+h}| |\varphi_{b+h}|}{\beta_i - w_g + c_u c_\varphi |u_{b+h}|}, \quad (9)$$

где $|u_{b+h}| = |u|_{z=b+h}$, $\varphi_{b+h} = \varphi|_{z=b+h}$.

На верхней границе атмосферы при $z = H$ рассмотрим следующее краевое условие задачи (1):

$$\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = H. \quad (10)$$

Начальное условие выберем в виде

$$\varphi = \bar{\varphi} \quad \text{при } t = 0, \quad (11)$$

где $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\lambda, \psi, z)$ – «фоновая» концентрация примеси.

В дальнейшем ради простоты будем предполагать, что $\bar{\varphi} = 0$. На «боковых» границах задаются условия периодичности всех функций по горизонтальным координатам:

$$\begin{aligned} \varphi(0, \psi, z, t) &= \varphi(2\pi, \psi, z, t), \\ \varphi(\lambda, -\psi, z, t) &= \varphi(\lambda + \pi, \psi, z, t), \\ \varphi(\lambda, \pi + \psi, z, t) &= \varphi(\lambda + \pi, \pi - \psi, z, t). \end{aligned} \quad (12)$$

На основе сделанных предположений будем считать, что решение задачи переноса примеси в форме (1), (7), (12) – функция $\bar{\varphi}$ – непрерывно в $G \times [0, T]$ и является дифференцируемой функцией по t . Кроме того, пусть для каждого t функция $\varphi(\lambda, \psi, z, t)$ принадлежит множеству функций $D(A)$ из вещественного гильбертова пространства $L_2(G)$, непрерывных и дифференцируемых в G и таких, что они подчиняются условию

$$A\varphi \in L_2(G).$$

При этом каждая функция из $D(A)$ удовлетворяет однородным граничным условиям (10), (12). Относительно вектора скорости и сделаем предположение, что компоненты этого вектора непрерывны и дифференцируемы, причем ради простоты предположим, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Такое предположение естественно, поскольку наиболее значимой является субстанция, распространяющаяся в слое 1–3 км. В общем случае вместо этого условия следует принять $\operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0$. Относительно других функций и параметров задачи сделаем предположение, что они достаточно гладкие, так что существует единственное решение задачи (1), (7), (10)–(12).

Поскольку в глобальных атмосферных моделях пространственное разрешение по вертикали оказывается недостаточным для восстановления с нужной точностью в нижних слоях атмосферы, то метеорологические характеристики пограничного слоя будем рассчитывать с помощью параметризации планетарного пограничного слоя атмосферы, изложенной в [6, 7]. Суть ее состоит в следующем. С помощью модели планетарного пограничного слоя для каждого узла расчетной сетки в горизонтальной плоскости по известным значениям полей скорости и температуры на первом расчетном уровне определяются следующие внешние параметры:

$$\begin{aligned} Ro &= \frac{|u_{g0}|}{lz_0}, \quad S_T = \frac{\beta \delta \hat{\theta}}{l|u_{g0}|}, \\ \eta_x &= \frac{\kappa^2}{l} \frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{\beta \kappa^2}{l^2} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial y}, \\ \eta_y &= \frac{\kappa^2}{l} \frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{\beta \kappa^2}{l^2} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (13)$$

где Ro – число Россби; S_T – параметр стратификации; u_g, v_g – компоненты геострофического ветра \mathbf{u}_g ; $|u_{g0}|$ – модуль вектора скорости геострофического ветра у подстилающей поверхности; l – параметр Кориолиса; η_x, η_y – параметры бароклинности; $\hat{\theta}$ – потенциальная температура; $\beta = g/\hat{\theta}$ – параметр плавучести; g – ускорение силы тяжести; $\delta \hat{\theta}$ – разность между значениями потенциальной температуры на границе планетарного пограничного слоя и подстилающей поверхности. По значениям Ro, S_T, η_x, η_y находим величины: $C_g = u_*/\mathbf{u}_g$ – коэффициент геострофического сопротивления; α – угол между напряжениями турбулентного трения у подстилающей поверхности и

$|\mathbf{u}_{g0}|$; $\mu = h_0/L_0$ – безразмерный «внутренний» параметр стратификации. Здесь приняты следующие обозначения: $h_0 = \kappa u_* / l$ – «внутренний» масштаб высоты пограничного слоя; $L_0 = -c_p \rho u_*^3 / \kappa \beta q_0$ – масштаб длины Монина – Обухова; c_p – теплоемкость воздуха; ρ – плотность воздуха; q_0 – поток тепла у Земли. По значениям C_g , α , μ находится величина q_0 , а затем по C_g и u_g рассчитываются величина u_* и коэффициенты турбулентного обмена на высотах $z \geq h$ по формуле

$$\nu(\mu) = \frac{\kappa^2 u_*^2}{l^2} \begin{cases} h/(1 + 10\mu h) & \text{при } \mu \geq 0, \\ h & \text{при } 2,33 \leq \mu \leq 0, \\ (-0,07/\mu)^{-1/3} h^{4/3} & \text{при } \mu \leq -2,33, \end{cases} \quad (14)$$

где h – высота приземного слоя.

Компоненты вектора скорости можно выписать с помощью следующих выражений:

$$u = |\mathbf{u}_{g0}| \cos \alpha + \frac{u_*}{\kappa} \alpha_1, \quad v = -|\mathbf{u}_{g0}| \sin \alpha + \frac{u_*}{\kappa} \alpha_2, \quad (15)$$

где α_1 , α_2 – безразмерные «дефекты скорости», которые рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \kappa \frac{u - u_g}{u_*} = -\exp(-a_3) (\cos a_3 - \sin a_3) / a_4, \\ \alpha_2 &= \kappa \frac{v - v_g}{u_*} = -\exp(-a_3) (\cos a_3 + \sin a_3) / a_4, \end{aligned} \quad (16)$$

где $a_3 = \frac{z-h}{a_4}$, $a_4 = (2\nu)^{0,5}$.

Вертикальную скорость w_{h0} на верхней границе пограничного слоя атмосферы можно определить и по методике, изложенной в [7].

Для глобального переноса особый интерес представляют примеси с малыми скоростями гравитационного оседания, которые значительное время находятся во взвешенном состоянии и переносятся вместе с воздушными массами. В этом случае для примесей применимы положения теории турбулентности, используемые в моделях общей циркуляции для описания турбулентного обмена температуры и влажности. В частности, для определения коэффициента горизонтального турбулентного обмена используется следующая модель [8]:

$$\mu = k_1^2 \Delta S |D_N|,$$

где

$$D_N = (D_T^2 + D_S^2)^{0,5}, \quad (17)$$

$$D_T = \frac{1}{a \sin \psi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \psi}, \quad D_S = \frac{1}{a \sin \psi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \psi},$$

ΔS – площадь элементарной ячейки сеточной области, k_1 – безразмерный параметр.

Вычислительные алгоритмы, используемые для решения сформулированной задачи, основаны на методе расщепления и описаны в [9–11]. При этом на каждом интервале Δt приходим к численной схеме, описывающей дифференциальный оператор переноса примеси по траекториям, и схеме, аппроксимирующей турбулентную диффузию. На первом этапе используется явная монотонная схема, обладающая свойством консервативности и имеющая второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и по времени [4, 12, 13]. На втором этапе используется схема с неявной аппроксимацией [9, 10].

Перейдем теперь к рассмотрению функционалов от решения φ следующего вида:

$$J = \int_0^T dt \int_G p \varphi dG, \quad (18)$$

где $p = p(\lambda, \psi, z, t)$ – заданная функция из $L_2(G \times [0, T])$. Если, например,

$$p = \begin{cases} p_0, & (\lambda, \psi, z, t) \in \omega, \\ 0, & (\lambda, \psi, z, t) \in \omega \setminus \omega, \end{cases} \quad p_0 > 0, \quad G \subset G, \quad (19)$$

то функционал J представляет собой суммарную концентрацию примеси в выделенной подобласти ω области G , взвешенную с весом p_0 . Ради простоты будем считать $p_0 = \text{const}$ в ω . Область ω соответствует зоне, где производится оценка загрязнения. В зависимости от задания области ω мы можем получить различные интегральные характеристики поля загрязнения примесей. Итак, задача сводится к оценке функционалов вида (18), определенных на множестве функций состояния, удовлетворяющих исходной задаче (1), (7), (10)–(12). Оценка функционалов требует знания поля функции φ , включая фактическую информацию об источниках примесей, действующих в области $G \times [0, T]$, и о начальном состоянии загрязнения атмосферы области G в фиксированный момент времени $t = 0$.

Для оценки функционала J целесообразно реализовать подход, основанный на использовании сопряженных задач [9–11]. С его помощью можно оценить степень потенциальной опасности загрязнения атмосферы и области ω от всех источников, расположенных в области $G \times [0, T]$ при заданных сценариях метеорологического режима атмосферы. Теперь построим сопряженную задачу, соответствующую задаче (1), (7), (10)–(12). Она будет иметь вид

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{u}{a \sin \psi} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \psi} - (w - w_g) \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial \lambda} + \frac{1}{a^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \sin \psi \frac{\partial \varphi^*}{\partial \psi} \right) = p, \quad (20)$$

$$\varphi^* = 0 \quad \text{при } z = 0,$$

$$\nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = \alpha \varphi^* \quad \text{при } z = 0,$$

$$\nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = H, \quad (21)$$

$$\varphi^*(0, \psi, z, t) = \varphi^*(2\pi, \psi, z, t),$$

$$\varphi^*(\lambda, -\psi, z, t) = \varphi^*(\lambda + \pi, \psi, z, t), \quad (12)$$

$$\varphi^*(\lambda, \pi + \psi, z, t) = \varphi^*(\lambda + \pi, \pi - \psi, z, t),$$

где p – функция, определяющая функционал (18).

Будем предполагать, что решение φ^* задачи (20)–(21) непрерывно в $G \times [0, T]$ и является дифференцируемой по t функцией. Кроме того, пусть для каждого t функция φ^* принадлежит множеству функций $D(A^*) = D(A)$ из L_2 . Относительно других функций и параметров задачи используется, как и ранее, предположение, что они достаточно гладкие, так что существует единственное решение задачи (20)–(21). Как следует из общей теории, задача (20)–(21) корректна при решении от $t = T$ к $t = 0$. Поэтому в качестве «начального» условия в (21) выбран $\varphi^* = 0$ при $t = T$.

Для обеспечения устойчивости вычислительного алгоритма схема его реализации получается транспонированной по пространству, времени и этапам расщепления относительно схем реализации дискретных аналогов основной задачи (1), (7), (10)–(12).

Проведем некоторые преобразования. Умножим уравнение (1) на φ^* скалярно в $L_2(G)$, а уравнение (20) – на φ , результаты вычтем один из другого и проинтегрируем по t на отрезке $[0, T]$. Интегрированием

по частям с учетом граничных условий из полученного соотношения обычным образом приходим к другому представлению для того же функционала J :

$$J = \int_0^T dt \int_G F \varphi^* dG + \int_0^T dt \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi \alpha \varphi_0 \varphi^* \Big|_{z=b} d\psi. \quad (22)$$

Имея в виду, что при большом T функция φ^* становится малой, во многих случаях вторым членом в формуле (22) можно пренебречь. В результате формулу (22) можно записать в виде

$$J = \int_0^T dt \int_G F \varphi^* dG.$$

Таким образом, общее количество примеси в области ω можно получить, используя решение φ^* сопряженной задачи (20)–(21). Поясним физический смысл функции φ^* . Она является весовой функцией, определяющей вклад каждого источника загрязнения F и начального состояния функции $\varphi = \varphi_0$ в величину загрязнения атмосферы в выделенной подобласти ω . Таким образом, она характеризуют степень опасности загрязнения атмосферы в области ω от источника, который может находиться в любой точке D_t , т. е. вклад источника в функционале равен произведению мощности выброса на значение функции φ^* при каждом t в той области, где размещен источник. По значениям функции φ^* можно районировать область D_t , выделяя опасные зоны по отношению к загрязнению атмосферы в области ω . Конструктивно это районирование определяется с помощью функции φ^* , ради простоты нормированной на свое максимальное значение.

Для иллюстрации приведем некоторые результаты численных экспериментов, выполненных по изложенным выше моделям. Рассмотрим оценки влияния загрязнения в следующих четырех регионах планеты: Арктика, Европа, США – Канада и Африка. Расчеты проводились при следующих значениях входных параметров: число узлов сеточной области по долготе соответствует шагу $\Delta\lambda = 5^\circ$, по широте – шагу $\Delta\psi = 2,5^\circ$; число уровней по вертикали – 15; координатные поверхности в метрах выбраны в следующей последовательности: 50, 300, 600, 900, 1200, 1500, 3040, 4370, 7200, 9220, 11 830, 13 660, 16 250, 21 374, 25 290. Шаг интегрирования по времени $\Delta t = 30$ мин. Численные эксперименты проводились с использованием метеорологической информации *TOGA Data Set*, которая представляет собой данные

объективного анализа, восстановленные в Европейском центре среднесрочных прогнозов. Численные эксперименты по глобальному переносу примеси и определению функции чувствительности на сфере проводились для срока с 1 января по 1 марта 1986 г. ($T = 60$ дней).

На основе численного моделирования вычислялась функция чувствительности φ^* для каждого из четырех выбранных регионов и интервалов времени $t = 10$ и 60 дней. Они характеризуют относительный вклад в суммарную концентрацию над выделенными регионами всех наземных источников в нижнем полуторакилометровом слое атмосферы.

Рассмотрим функционалы загрязнения для отдельных регионов в виде

$$J = \int_0^T dt \int_G p_i \varphi dG = \int_0^T dt f \varphi_i^* dG, \quad (23)$$

где p_i – весовые функции, вообще говоря, различные для разных регионов. Функцию p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) определим следующим образом:

$$p_i(\lambda, \psi, z, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta \tilde{z} \text{mes}(\omega_i)}, & \text{если } (\lambda, \psi, z) \in \omega_i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\Delta \tilde{z} = 1500$ м; ω_1 соответствует Арктике; ω_2 – Европе; ω_3 – США и Канаде; ω_4 – Африке; а $\text{mes}(\omega_i)$ площадь ω_i ($i = 1, 2, 3, 4$). На рисунках областям ω_i соответствует заштрихованная часть.

Как отмечалось выше, функционалы J целесообразно оценивать, используя решение φ^* сопряженной задачи (20)–(21). На графиках функция влияния φ^* изображены изолиниями с номерами 1–9. Они соответствуют значениям $\varphi_i^* = d_i \varphi_{i, \max}^*$ ($i = 1, \dots, 9$), где $d_1 = 0,01$; $d_2 = 0,05$; $d_3 = 0,10$; $d_4 = 0,25$; $d_5 = 0,40$; $d_6 = 0,55$; $d_7 = 0,70$; $d_8 = 0,85$; $d_9 = 0,95$. Ниже представлены результаты численных экспериментов, проведенные для каждого из регионов по отдельности. Арктический регион охватывает область, расположенную в интервале $77.5^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$ северной широты.

На рис. 1 представлены двумерные разрезы функции чувствительности φ^* в плоскости (λ, ψ) для интервалов времени $t = 10$ дней (рис. 1а) и 60 дней (рис. 1б). Они характеризуют относительный вклад в суммарную концентрацию над выделенным регионом от всех наземных источников в нижнем полуторакилометровом слое атмосферы. Анализ рисунков показывает, что наибольшее влияние на Аркти-

ческую зону оказывают источники, расположенные в Канаде, Сибири, а также в северной части США.

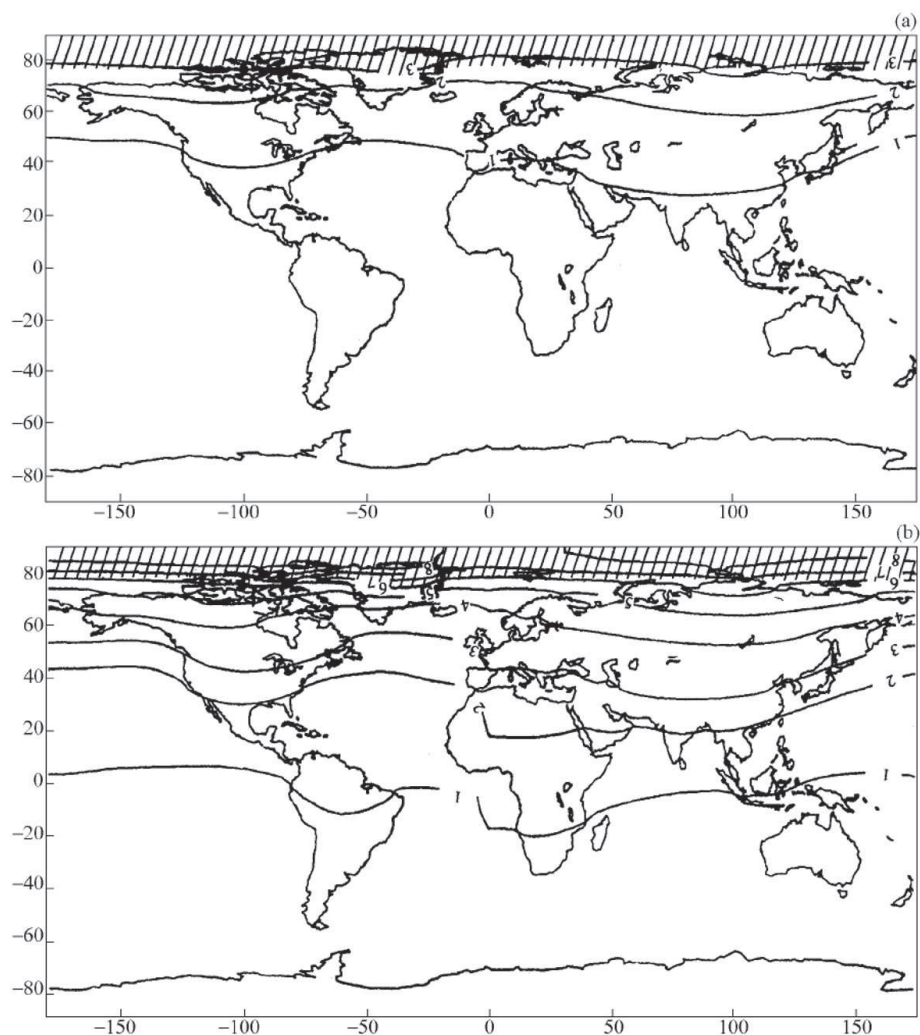


Рис. 1. Изолинии функции чувствительности φ^* , «охраняемая зона» – Арктический регион, для моментов времени $t = 10$ дней (а) и $t = 60$ дней (б), $\varphi_{max}^* = 2,76 \cdot 10^{-8}$

Изолинии φ^* для региона Европы приведены на рис. 2а и рис. 2б. Для этого региона функция влияния достигает территории США и Канады. Заметно влияние Атлантики на формирование поля функции чувствительности.

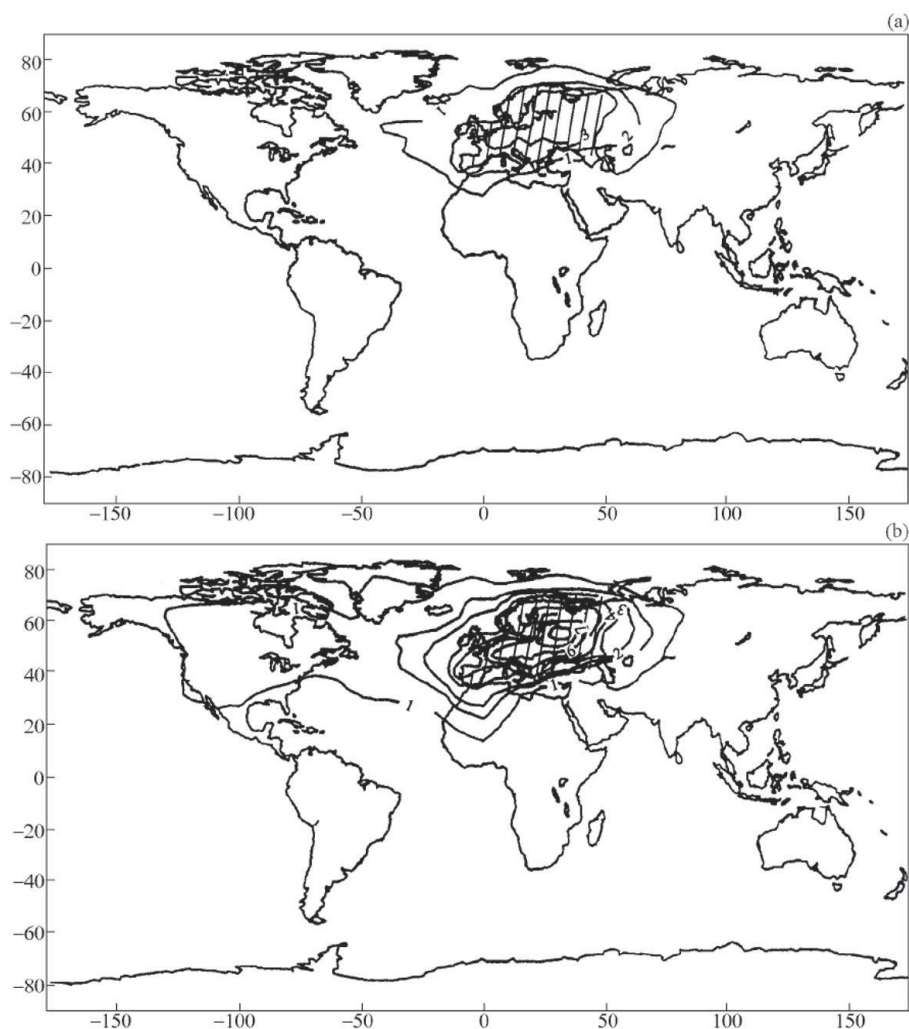


Рис. 2. Изолинии функции чувствительности φ^* , «охраняемая зона» – Европа, для моментов времени $t = 10$ дней (а) и $t = 60$ дней (б), $\varphi_{max}^* = 8,43 \cdot 10^{-8}$

На рис. 3а, 3б приведены поля изолиний для региона Северной Америки для $t = 10$ и 60 дней. Как видно из рисунков, уже через два месяца оказываются ощутимыми влияния восточной Сибири на загрязнение этого региона.

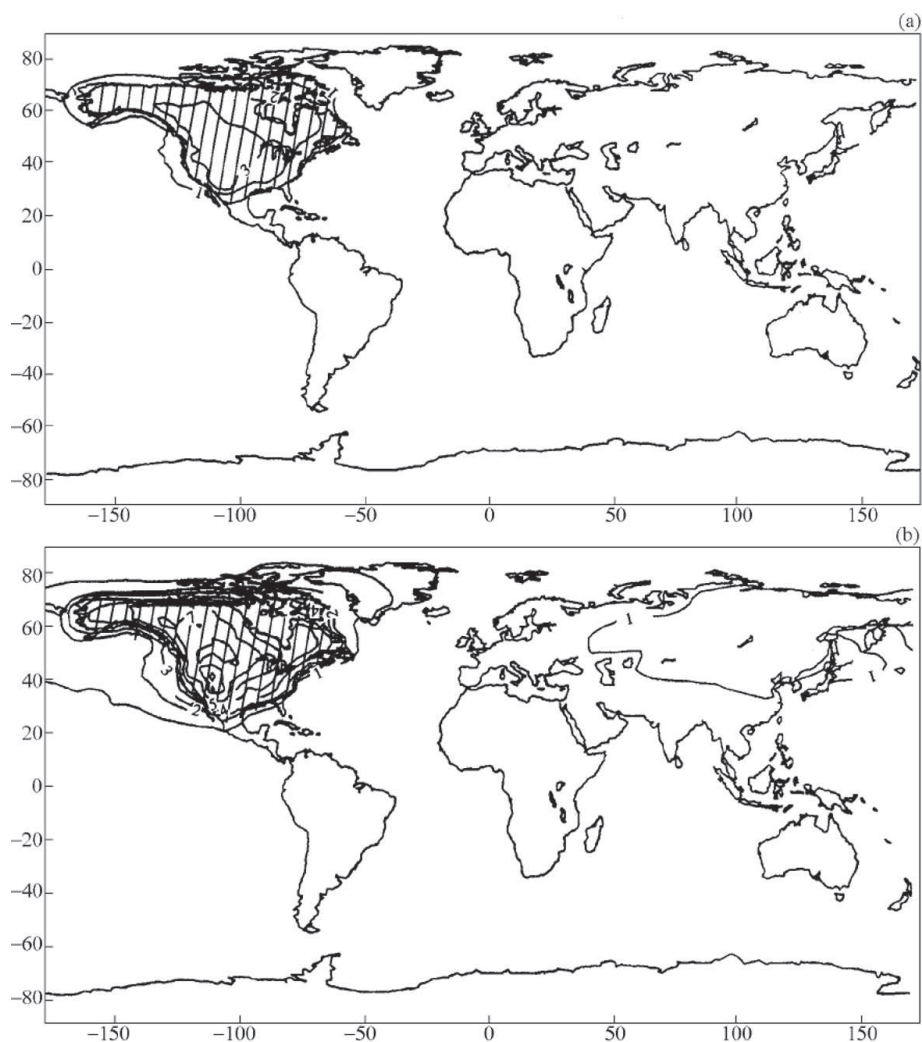


Рис. 3. Изолинии функции чувствительности φ^* , «охраняемая зона» – регион Северной Америки, для моментов времени $t = 10$ дней (а) и $t = 60$ дней (б), $\varphi_{max}^* = 8,61 \cdot 10^{-8}$

Для региона Африки, в отличие от других регионов, изолинии функции чувствительности расположены в основном около материка, что связано со слабым зональным полем ветра. Поэтому в этих широтах атмосферная циркуляция развивается в основном из-за разности температур между материком и океаном. Однако в северной и южной областях зона функции влияния расширяется, что связано с атмосферной циркуляцией, обусловленной внетропической зоной

конвергенции. Соответствующие рисунки для φ^* для $t = 10, 60$ дней даны на рис. 4а и 4б.

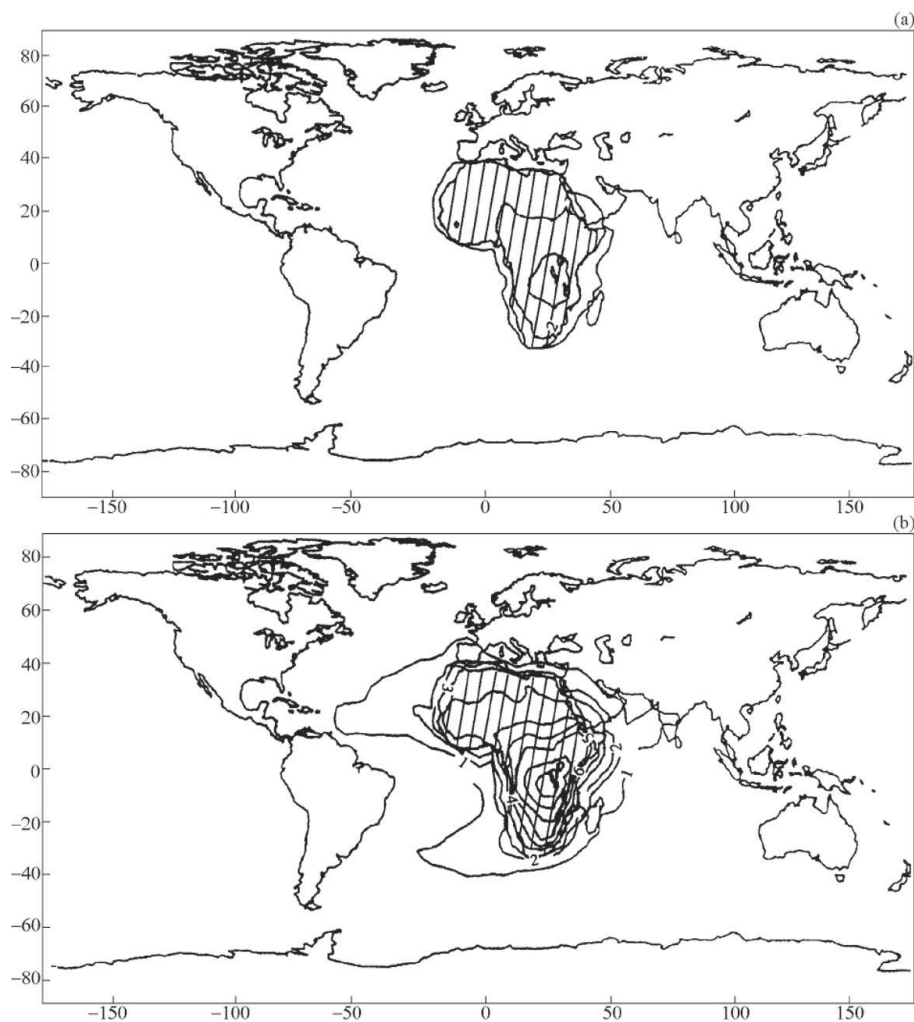


Рис. 4. Изолинии функции чувствительности φ^* , «охраняемая зона» – Африка, для моментов времени $t = 10$ дней (а) и $t = 60$ дней (б), $\varphi_{max}^* = 1,26 \cdot 10^{-7}$

На основе анализа функции φ^* можно сделать заключение, что максимальные значения φ^* , как правило, достигаются в выделенном регионе, размеры этих регионов скромны. Это естественно, поскольку вклад ближних источников всегда больше, а степень опасности загрязнения уменьшается по мере удаления их от рассматриваемых

регионов. Поскольку в расчетах функционалов участвует произведение функции чувствительности на мощность источника, то может случиться, что источники с низкой степенью опасности дадут больший вклад в суммарный функционал загрязнения региона. Это связано с тем, что может иметь место большой выброс от предприятия. Размеры и конфигурация областей зависят от текущего состояния атмосферы.

Итак, анализ результатов экспериментов показывает, что пространственно-временная структура решений сопряженных задач дает информацию о том, какие зоны могут оказать то или иное влияние в загрязнение конкретного выбранного региона ω . Если в качестве исследуемых выбрать регионы отдельных государств, то на основе расчет сопряженных функций и функционалов можно оценить трансграничный перенос загрязнения области ω всеми другими регионами планеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Обухов А. М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Тр. Геофиз. ин-та АН СССР. 1954. № 24(151). С. 163–187.
2. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 640 с.
3. Алоян А. Е., Йорданов Д. М., Пененко В. В. Численная модель переноса примесей в пограничном слое атмосферы // Метеорология и гидрология. 1981. № 8. С. 32–43.
4. Пененко В. В., Алоян А. Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985.
5. Eliassen A. The OECD study of long range transport of air pollutants: Long-range transport modelling // Atmos. Environ. 1978. V. 12, No. 1-3. Pp. 479–487.
6. Йорданов Д. Л., Пененко В. В., Алоян А. Е. Параметризация стратифицированного планетарного пограничного слоя для численного моделирования атмосферных процессов // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 14, № 8. С. 815–823.
7. Йорданов Д. Л., Пененко В. В., Алоян А. Е. О вертикальной скорости на верхней границе планетарного пограничного слоя над орографически и термически неоднородной подстилающей поверхностью // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15, № 11. С. 1204–1208.

8. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations: 1. The basic experiment // *Mon. Wea. Rev.* 1963. V. 91, No. 2. Pp. 99–164.
9. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. М.: Наука, 1973. 303 с.
10. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.
11. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
12. Bram van Leer. Towards the ultimate conservative-difference scheme: 2. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme // *J. Comp. Phys.* 1974. V. 14. Pp. 360–370.
13. Дымников В. П., Алоян А. Е. Монотонные схемы решений уравнений переноса в задачах прогноза погоды, экологии и теории климата // *Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана.* 1990. Т. 26, № 12. С. 1237–1246.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ С УЧЕТОМ КОНДЕНСАЦИИ ⁴

Построена математическая модель распространения загрязняющих примесей в атмосфере с учетом кинетики конденсации парообразных составляющих этих примесей на естественном атмосферном аэрозоле. Модель предназначена для расчета дальнего переноса примесей и сопровождающих его конденсационных процессов и в качестве входных параметров позволяет использовать данные о полях метеозлементов из существующих банков данных. Модель применена для расчета полей концентраций двуокиси серы и паров серной кислоты, а также спектров частиц образующегося кислотосодержащего аэрозоля в трехмерной сеточной области, охватывающей большую часть территории Европы. Проведенные по модели расчеты позволили выделить локальные области повышенного присутствия кислотосодержащего атмосферного аэрозоля.

⁴Известия АН. Серия: Физика атмосферы и океана, 1996, т. 32, № 5, с. 745–752. Совместно с А. Е. Алояном, В. Н. Пискуновым, В. Д. Егоровым.

Промышленному развитию последних десятилетий сопутствуют гигантские выбросы загрязняющих атмосферу веществ. Объемы выбросов достигают ежегодно многих миллионов тонн. При распространении в атмосфере загрязняющие вещества претерпевают физические и химические превращения. В результате этих превращений появляются еще более опасные вещества, которые, попадая на подстилающую поверхность, наносят серьезный ущерб экосистеме. Превращения загрязняющих веществ в атмосфере носят сложный характер, а их воздействие на экосистему все еще до конца не изучено.

В настоящей работе построена математическая модель распространения загрязняющих примесей в атмосфере [1] с учетом кинетики процессов конденсации парообразных составляющих этих примесей [2] на естественном атмосферном аэрозоле.

Модель предназначена для расчета дальнего переноса примесей и сопровождающих его конденсационных процессов в атмосфере, а также включает использование параметров гидрометеорологического режима, полученных по совместной модели гидротермодинамики региональных атмосферных процессов [3, 4], или непосредственное использование фактической информации о величинах таких параметров из существующих банков данных.

Построенная модель применена в работе для расчета распространения двуокиси серы и образующихся паров серной кислоты, а также конденсации этих паров на естественных атмосферных частицах. При этом определяются концентрации двуокиси серы, паров серной кислоты и функции распределения кислотосодержащих частиц по размерам в каждой точке трехмерной сеточной области, охватывающей большую часть территории Европы. Модельный расчет осуществляется на время до нескольких суток. В качестве входной информации о параметрах метеорологического режима в расчете используются реальные данные о полях температуры и величинах компонент скорости ветра для январских метеоусловий 1986 г. *TOGA Data Set*, восстановленные в Европейском центре среднесрочных прогнозов. В качестве начальной информации о спектрах естественных атмосферных аэрозолей использованы функции распределения частиц по размерам в форме Юнге [5].

Рассмотрим процессы кинетики конденсации парообразных составляющих распространяющихся в атмосфере примесей на уже существующих частицах, а также зародышеобразования новой фазы в перенасыщенном паре, следуя работам [6, 7]. При этом изменение сво-

бодной энергии в процессе конденсации парообразного вещества на капле радиуса r описывается формулой

$$\Phi(r) = \frac{4\pi(\mu_{\text{ж}} - \mu_{\text{г}})}{3V_{\text{ж}}} + 4\pi\sigma r^2, \quad (1)$$

где $\mu_{\text{ж}}$ и $\mu_{\text{г}}$ – химические потенциалы конденсирующегося вещества в жидкой и газовой фазе; $V_{\text{ж}}$ – объем молекулы в жидкой фазе; σ – коэффициент поверхностного натяжения. Следовательно, существует некоторый критический радиус частицы

$$r_* = \frac{2\sigma V_{\text{ж}}}{\mu_{\text{г}} - \mu_{\text{ж}}},$$

при котором достигается максимум свободной энергии. При радиусах больше критического частицам в перенасыщенном паре энергетически выгодно расти – в этом случае начинается интенсивный рост частиц при конденсации пара.

Пусть f_g – неравновесная функция распределения частиц по размерам, где g – число молекул в капле радиуса r :

$$g = \frac{4\pi r^3}{3V_{\text{ж}}}.$$

Тогда изменение функции распределения с течением времени описывается уравнением

$$\frac{\partial f_g}{\partial t} = I_g - I_{g+1}, \quad (2)$$

где I_g – число вновь образовавшихся частиц, переходящих в единицу времени от размера $g - 1$ к размеру g . Если β_g – число молекул пара, поглощаемых в единицу времени каплей из g молекул, а n_g – неравновесная функция распределения частиц по размерам

$$n_g = n_0(g) \exp \left[-\frac{\Phi(g)}{kT} \right],$$

то можно получить следующее выражение для интенсивности вновь образовавшихся частиц [7]:

$$I = \frac{V_{\text{ж}}\beta_{g_*}n_{g_*}}{2\pi r_*^2} \sqrt{\frac{\sigma}{kT}},$$

или в пересчете на одну молекулу [8]

$$J(t) = \frac{V_{\text{ж}} \beta_{g*}}{2\pi r_*^2} \sqrt{\frac{\sigma}{kT}} e^{-\frac{\Phi(g_*)}{kT}}, \quad (3)$$

где T – абсолютная температура, k – постоянная Больцмана, а индекс $(*)$ относится к критическому размеру частиц. Таким образом, $J(t)$ – число вновь образующихся в процессе конденсации частиц размера g_* в единицу времени. Вместе с тем каждая частица, если она только имеет размер больше критического, в процессе взаимодействия с окружающим паром будет расти со скоростью [9]

$$v_g = \frac{\alpha \pi d^2 n v_T g^{2/3}}{4(1 + 3dg^{1/3}/8l)} \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\lambda \theta}{kT} \left(\frac{g_*^{1/3}}{g^{1/3}} - 1 \right) \right] \right\} \quad (4)$$

в произвольном режиме обмена пара с частицей. Здесь d – диаметр молекулы объема $V_{\text{ж}}$; n – концентрация пара; v_T – средняя тепловая скорость молекул пара с концентрацией n ; l – длина свободного пробега молекул пара в среде; α – коэффициент аккомодации; λ – теплота конденсации пара при заданном давлении; θ – степень переохлаждения.

В результате в пространственно однородном случае формулируется следующее кинетическое уравнение, описывающее изменение функции распределения частиц в процессе конденсации пара в фазовом пространстве их размеров:

$$\frac{\partial f_g}{\partial t} + \frac{\partial v_g f_g}{\partial g} = J(t) \delta [g - \gamma g_*(t)],$$

в котором зададим величины $J(t)$ и γ_g в виде (2) и (4), а множитель $\gamma \approx 1$. Это уравнение представляет собой удобную для практических расчетов форму записи уравнения непрерывности в пространстве размеров частиц. Его правая часть определяет поток вновь образующихся частиц, а член, содержащий величину v_g , характеризует конденсационный рост уже имеющихся частиц. Применительно к атмосферному случаю функция распределения аэрозольных частиц по размерам в каждой точке пространства будет изменяться с течением времени также благодаря адвективному переносу, турбулентному перемешиванию и гравитационному оседанию частиц, зависящему от их размеров. Общее кинетическое уравнение для описания изменения размера частиц имеет вид [1, 2, 8, 10]

$$\frac{\partial f_g}{\partial t} + \mathbf{u}_g \text{grad } f_g + \frac{\partial}{\partial g} v_g f_g = F + J(t) \delta [g - \gamma g_*(t)] + F_1 + F_2. \quad (5)$$

Здесь используются следующие обозначения: x, y, z – декартовы координаты;

$$\sigma = \frac{z - \bar{\delta}(x, y)}{H - \bar{\delta}(x, y)};$$

$\bar{\delta}(x, y)$ – функция рельефа; H – высота области интегрирования; u, v, ω – компоненты вектора скорости ветра в направлении x, y, σ соответственно; F – функция источников;

$$F_1 = \frac{\partial}{\partial x} k_{xx} \frac{\partial f_g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_{yy} \frac{\partial f_g}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \chi_1 \frac{\partial f_g}{\partial \sigma};$$

$$F_2 = \frac{\partial}{\partial x} a_1 k_{xx} \frac{\partial f_g}{\partial \sigma} + a_1 \frac{\partial}{\partial \sigma} k_{xx} \frac{\partial f_g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} a_2 k_{yy} \frac{\partial f_g}{\partial \sigma} + a_2 \frac{\partial}{\partial \sigma} k_{yy} \frac{\partial f_g}{\partial y};$$

$$a_1 = (\sigma - 1) \frac{H}{H - \bar{\delta}(x, y)} \bar{\delta}_x(x, y);$$

$$a_2 = (\sigma - 1) \bar{\delta}_y(x, y) \frac{H}{H - \bar{\delta}(x, y)};$$

$$a_3 = \frac{H}{H - \bar{\delta}(x, y)};$$

$$\chi_1 = a_1^2 k_{xx} + a_2^2 k_{yy} + a_3^2 k_{\sigma\sigma};$$

$$\mathbf{u}_g \text{grad } f_g = u \frac{\partial f_g}{\partial x} + v \frac{\partial f_g}{\partial y} + (\omega - \bar{\omega}_g) \frac{\partial f_g}{\partial \sigma};$$

$\bar{\omega}_g = \text{diag}(\bar{\omega}_g)$ – диагональная матрица, элементы которой – суть аналогии скоростей гравитационного оседания в σ -системе координат; k_{xx} , k_{yy} и $k_{\sigma\sigma}$ – коэффициенты турбулентной диффузии в направлении x, y, σ соответственно. Коэффициенты турбулентной диффузии зависят от тензора деформации среднего движения и числа Ричардсона (конкретный вид этих зависимостей приведен в работах [4, 11–13]). Решение уравнения (5) осуществим методом покоординатного расщепления [14]. При этом уравнение переноса, возникающее при расщеплении задачи по координате g , будем решать методом частиц [2, 8, 15]. Поскольку при использовании начальных спектров атмосферных частиц

особый интерес представляет диапазон их размеров от 0,1 до примерно 10 мкм [5], то при решении будем использовать от полутора до двух десятков фракций размеров частиц в логарифмическом масштабе возрастания величины их радиуса. Это обеспечивает приемлемую для данной задачи точность получаемого решения. В отдельные фракции выделим двуокись серы и образующиеся из нее пары серной кислоты. Таким образом, после расщепления по пространственным координатам будем решать задачу переноса и диффузии многокомпонентной примеси. Пример постановки такой задачи в случае отсутствия орографии для двухкомпонентной примеси имеет вид [3]

$$\varphi_1 = [SO_2], \quad \varphi_2 = [SO_4],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \text{div} \mathbf{u} \varphi_1 = & -(k_1 + k_{1,2}) \varphi_1 + F(1 - \tilde{\beta}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} k_{xx} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_{yy} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \text{div} \mathbf{u} \varphi_2 = & -k_2 \varphi_2 + \tilde{\alpha} (\tilde{\beta} F + k_{1,2} \varphi_1) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} k_{xx} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_{yy} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k_1 = \frac{\nu_d}{H}, \quad k_2 = \frac{\nu_d}{H}, \\ \nu_d = \begin{cases} 0,8 \text{ см/с} & \text{для } SO_2 \\ 0,2 \text{ см/с} & \text{для } SO_4 \end{cases} \end{aligned}$$

при следующих начальных и граничных условиях [4]:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \bar{\varphi}_1, \quad \varphi_2 = \bar{\varphi}_2 \quad \text{при } t = 0, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \alpha_{\vartheta} (\varphi_1 - \varphi_{10}), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \alpha_{\vartheta} (\varphi_2 - \varphi_{20}) \quad \text{при } z = h, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = H, \\ \varphi_1 = \bar{\varphi}_1, \quad \varphi_2 = \bar{\varphi}_2 \quad \text{при } x = \pm X, \quad y = \pm Y. \end{aligned}$$

Здесь ν_d – скорость осаждения примеси; $k_{1,2} = 0,02 \text{ ч}^{-1}$ характеризует скорость превращения SO_2 в SO_4 ; $\tilde{\beta} = 0,05$ – часть выбросов SO_2 , трансформирующихся непосредственно в SO_4 ; $\tilde{\alpha}$ – коэффициент,

учитывающий соотношение молекулярных весов SO_4 и SO_2 ; α_θ – параметр, характеризующий взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью [16]; h – высота приземного слоя; ν – коэффициент турбулентной диффузии по вертикали.

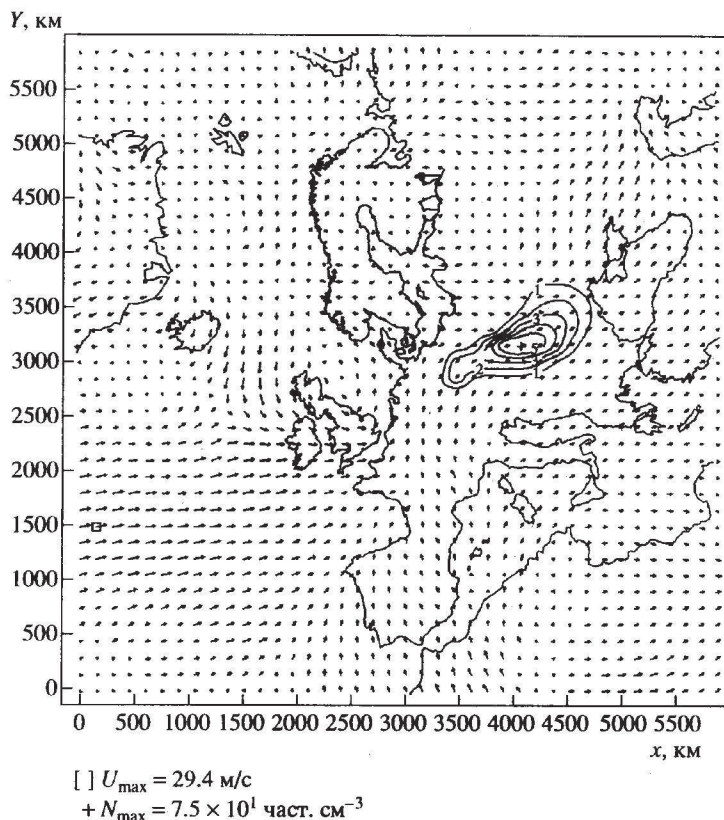


Рис. 1. Изолинии концентрации фракции атмосферного аэрозоля с радиусом частиц 0,25 мкм, полученные по модели распространения серосодержащих примесей с учетом конденсации образующихся паров серной кислоты на естественном аэрозоле для Европейского региона после 2,5 сут модельного счета на высоте 2000 м от поверхности.

Модельный счет осуществлен по реальным данным о полях метеозлементов Европейского центра, причем на рисунке изображено векторное поле скорости ветра в горизонтальной плоскости для момента времени и на уровне высоты расположения изолиний

Решение задачи для многокомпонентной примеси осуществляем аналогично случаю двухкомпонентной примеси [3] в трехмерной сеточной области, охватывающей территорию Европейского региона.

Сеточная область имеет 40 узлов в направлении координат x и y с постоянным шагом $\Delta x = \Delta y = 150$ км и включает 10 уровней по вертикали. Поскольку в качестве входной информации о полях температуры и величинах компонент скорости ветра используются данные, представленные на уровнях давления от 850 мб и ниже, то для восстановления полей метеозадающих элементов на высотах ниже этого уровня используем параметризационную модель планетарного пограничного слоя [4]. При этом на высотах ниже уровня 850 мб величина шага сетки по вертикальной координате выбрана постоянной и равной $\Delta z = 200$ м. Уровни высоты в модели, расположенные выше поверхности, соответствующей уровню давления 850 мб, также выбраны более часто расположенными в сравнении с представленными в данных Европейского центра, так что при использовании этих данных осуществляется интерполяция на промежуточные уровни высоты. Причем верхняя граница области интегрирования соответствует высоте $z \approx 5$ км. Интегрирование по времени в модели осуществляется с шагом $\Delta t = 5$ мин. Выбор сравнительно малого шага при интегрировании по времени связан с тем, что рассматриваемые в данной задаче конденсационные процессы в условиях атмосферы являются достаточно быстро протекающими. Характерное время осуществления таких процессов зависит от степени перенасыщения пара в каждой точке области и может оказаться меньше характерного времени изменения полей метеозадающих элементов на рассматриваемых пространственных масштабах. В качестве входной информации об источниках двуокиси серы для описанной сеточной области в модели используются данные об осредненных за год выбросах из отчета Европейской экономической комиссии по инвентаризации источников загрязнения [17]. Выбор величин других входных параметров соответствует принятым в работе [3].

В результате решения задачи, осуществленного на модельное время свыше десяти суток, кроме найденных полей концентраций двуокиси серы и паров серной кислоты были получены функции распределения частиц по размерам в каждой точке описанной выше пространственной сеточной области. Эти функции отличаются от начальных функций распределения частиц по размерам для естественного атмосферного аэрозоля в связи с ростом размеров частиц из-за конденсации на них паров серной кислоты. Поскольку изменения в функциях распределения на рассматриваемых временных масштабах оказываются сравнительно невелики, то для иллюстрации результатов расчетов бы-

ли построены изолинии концентраций отдельных фракций размеров атмосферных частиц, полученных в результате решения задачи. Так, например, на рис. 1 изображены изолинии концентраций фракции атмосферного аэрозоля, имеющей радиус частиц, равный 0,25 мкм, на высоте 2000 м от поверхности через 2,5 сут модельного счета, начатого для 0 ч 2 января. Здесь также изображено векторное поле скорости ветра на этом же уровне высоты, каким оно было на время 2,5 сут от начала счета по данным Европейского центра с учетом интерполяции на используемую сетку. Непрерывными кривыми изображены контуры береговой линии для Европейского региона. Анализ рисунка говорит о том, что максимальные концентрации кислотосодержащих аэрозольных частиц в это время локализованы над центральной частью Европы. Следует отметить, что рисунок получен в результате расчетов, проведенных только с учетом источников двуокиси серы, расположенных за пределами бывшего СССР.

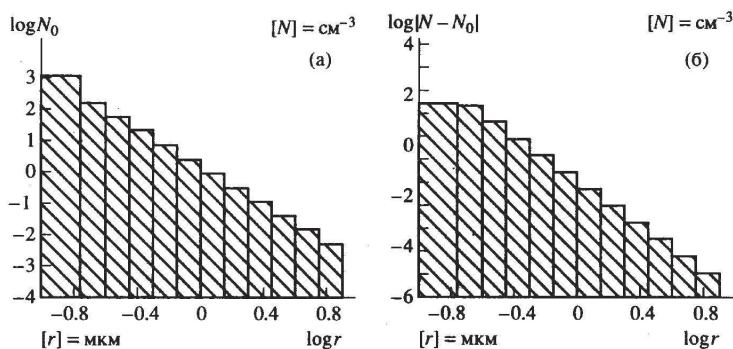


Рис. 2. Примеры гистограмм распределения частиц по фракциям для используемого в расчетах начального спектра частиц (а), а также для отклонений в спектре от начального (б) в точке максимума концентраций, соответствующей рис. 1

На рис. 2 приведены примеры гистограмм распределения частиц по фракциям для используемого в расчетах начального спектра частиц (рис. 2а), а также для отклонений в спектре от начального (рис. 2б) в точке максимума концентраций, соответствующей полю, изображенному на рис. 1.

На рис. 3 изображены изолинии концентраций фракции, имеющей радиус частиц, равный 0,125 мкм, на высоте 1000 м от поверхности через 5 сут модельного счета. Анализ рисунка говорит, что макси-

мальные концентрации кислотосодержащих частиц в это время уже сосредоточены как над центральной частью Европы, так и в районе Скандинавского полуострова. В картине поля ветра здесь хорошо заметны также некоторые образования, вероятно, циклонического характера.

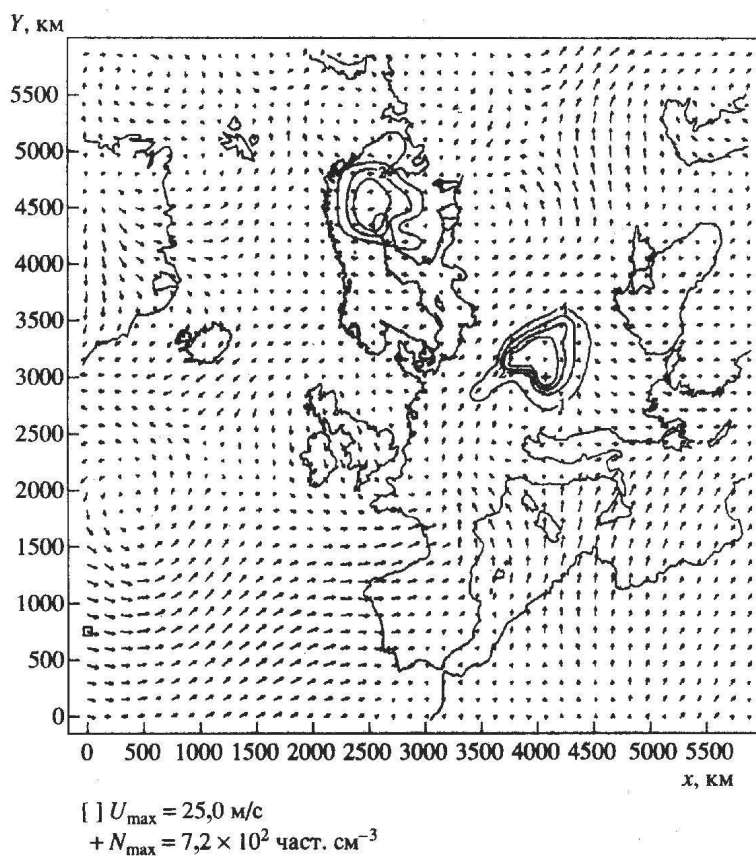


Рис. 3. Изолинии концентрации фракции с радиусом частиц 0.125 мкм после 5 суток модельного счета на высоте 1000 м от поверхности

Рис. 4 иллюстрирует развитие ситуации при моделировании на время до 10 сут. Смена типа атмосферной циркуляции над Скандинавским полуостровом привела к рассеянию облака кислотосодержащих аэрозольных частиц в этом районе. Вместе с тем локальная область повышенного присутствия кислотных аэрозольных частиц в Центральной Европе сместилась несколько на север и видоизменила свои очертания.

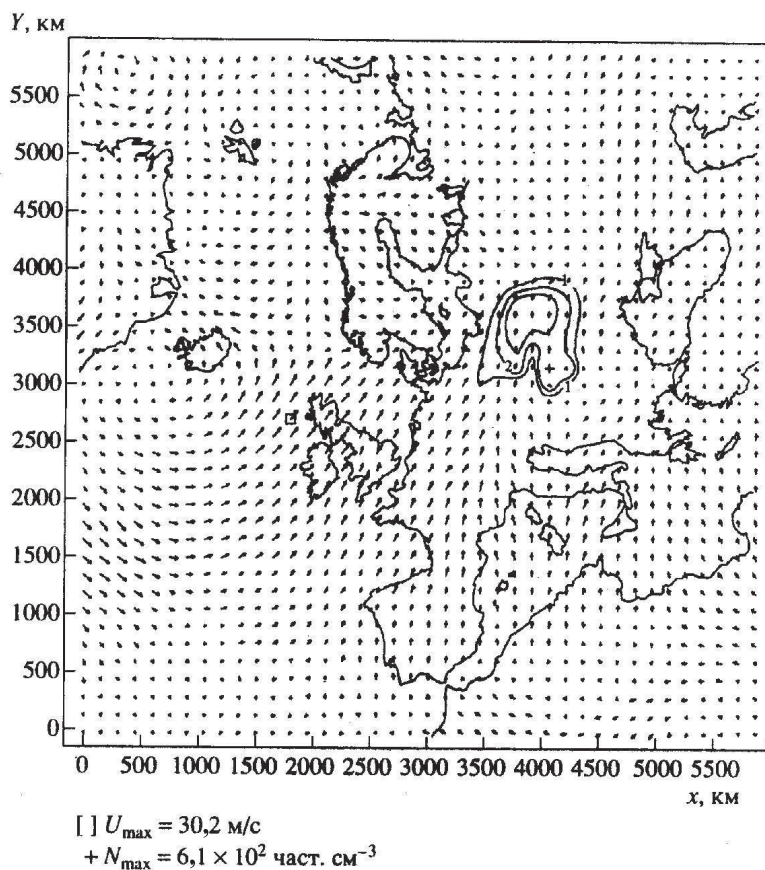


Рис. 4. То же, что на рис. 3, после 10 сут модельного счета

На рис. 5 изображена соответствующая картина, полученная в результате расчета на время 11 сут. На этом рисунке заштрихованы области высокой относительной влажности атмосферного воздуха $>80\%$ на высотах верхних уровней модели, которые можно связать с вероятным присутствием облачности. Возможное наличие в заштрихованных областях облачности качественно подтверждается также анализом характера развития циклонических образований. Следовательно, изображенная на этом рисунке область повышенного присутствия кислотосодержащих частиц на уровне высоты 1000 м оказывается расположенной в зоне облачности. Выпадение осадков в этой области в промежутке времени, к которому относятся результаты расчета, приведет к вымыванию кислотосодержащих частиц и повышенной кислотности дождевой воды.

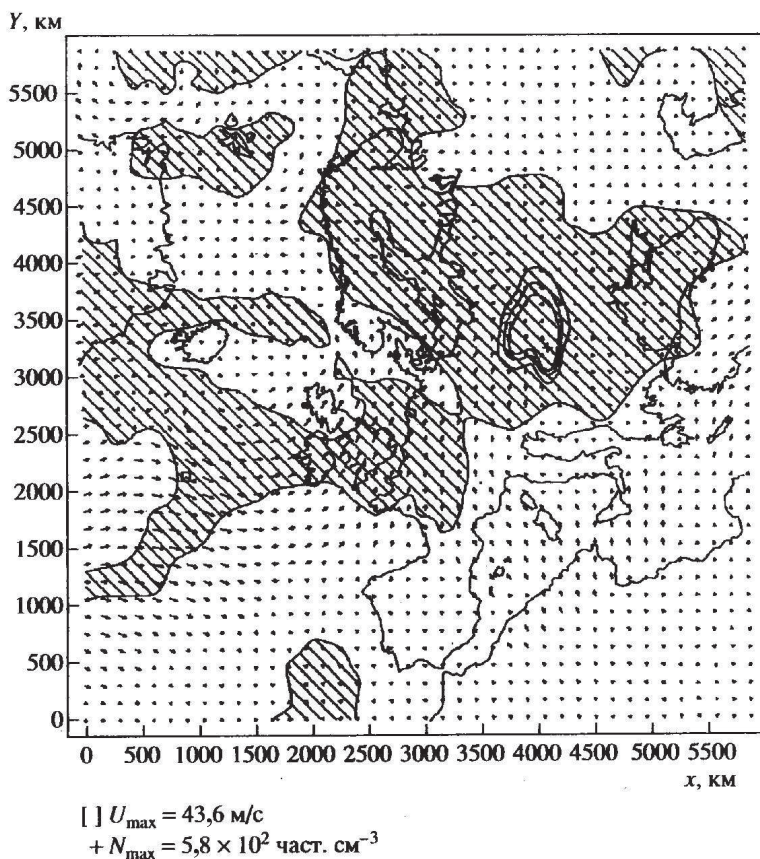


Рис. 5. То же, что на рис. 4, после 11 сут модельного счета. Здесь также заштрихованы области, которые можно условно связать с наличием облачности на верхних уровнях модели

В заключение следует отметить, что учет кинетики конденсационных процессов при моделировании распространения загрязняющих примесей в атмосфере позволил выделить локальные области повышенного присутствия кислотосодержащих аэрозольных частиц. Расположение этих локальных областей зависит от метеоситуации и качественно согласуется с известным из данных наблюдений положением районов повышенной кислотности дождевых осадков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И., Алоян А. Е. Математическое моделирование в задачах экологии. М.: Препринт ОВМ АН СССР, 1989. № 234. 38 с.

2. Марчук Г. И., Алоян А. Е., Пискунов В. Н., Егоров В. Д., Голубев А. И. Распространение аэрозолей в атмосфере с учетом кинетики процессов конденсации. М.: Препринт ИВМ РАН, 1992. № 285. 24 с.
3. Алоян А. Е. Численное моделирование дальнего переноса примесей в атмосфере. Численные методы в задачах физики атмосферы и охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. С. 59–72.
4. Пененко В. В., Алоян А. Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
5. Юнге Х. Химический состав и радиоактивность атмосферы. М.: Мир, 1965. 424 с.
6. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. 592 с.
7. Зельдович Я. Б. К теории образования новой фазы. Кавитация // ЖЭТФ. 1959. Т. 12, вып. 11-12. С. 1741–1750.
8. Пискунов В. Н. Физика дисперсных систем. М.: ЦНИИАтоминформ, 1990. 110 с.
9. Сутугин А. Г., Токарь Я. И. Образование конденсационных аэрозолей в пространственно-неоднородной системе // Коллоидный журнал. 1985. Т. 47, № 2. С. 341–347.
10. Aloyan A. E., Egorov V. D., Marchuk G. I. Piskunov V. N. Aerosol formation mathematical modeling with consideration for condensation kinetics // Russ. J. Numer. Analys. Math. Modelling. 1992. V. 7, No. 6. Pp. 457–471.
11. Clark T. L. A small-scale dynamic using a terrain-following coordinate transformation // J. Comp. Phys. 1977. V. 24. Pp. 184–215.
12. Deardorf J. W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers // J. Fluid. Mech. 1970. V. 41. Pp. 453–480.
13. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations: 1. The basic experiment // Mon. Weather Rev. 1963. V. 91, No. 2. Pp. 99–164.
14. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
15. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987. 638 с.
16. Алоян А. Е., Йорданов Д. Л., Пененко В. В. Численная модель переноса примесей в пограничном слое атмосферы // Метеорология и гидрология. 1981. № 8. С. 32–43.

17. Dovland H., Saltbones J. Emissions of sulphur dioxide in Europe in 1978 // EMEP CCC Report. 1979. No. 2.

AEROSOL FORMATION MATHEMATICAL MODELLING WITH CONSIDERATION FOR CONDENSATION KINETICS⁵

A coupled model of hydrothermodynamics of the mesoscale boundary atmospheric layer and an equation of the polydisperse aerosol have been developed having regard to condensation kinetics. To solve the coupled problem a three-dimensional non-hydrostatic numerical model of atmosphere hydrothermodynamics is used taking into account orographic and thermal inhomogeneities. A system of kinetic equations is solved using the values of meteorological and turbulent atmosphere characteristics obtained from the dynamic model. The model involved allows us to simulate the processes of the fluctuational new particle creation and the further growth of particles in the supersaturated vapour which results in the appearance and development of the disperse phase. The model described makes it possible to reproduce the volume condensation processes in various situations if the laws of changing the thermodynamic variables are known. The results of numerical experiments and their analysis as applied to the sulphuric acid aerosol formation in the atmosphere are given. We have also estimated the condensation rate depending on the presence of the natural nuclei of condensation in the atmosphere.

The man's economic activity results in polluting the atmosphere with large amounts of chemical substances in gaseous and aerosol state. In the atmosphere these substances undergo a variety of physical and chemical modifications via the mechanisms of photochemical transformation, particle coagulation, and supersaturated vapour condensation. All the mechanisms are in mutual relations, each of them being a part of a general complex ecological problem. Amongst the man-made pollutants the most dangerous are the sulphur and nitrogen oxides, the metallic

⁵Russ. J. Numer. Analysis Math. Modelling. 1992. V. 7, No. 6, pp. 457–471. Jointly with A. E. Aloyan, V. D. Egorov, V. N. Piskunov.

dust, etc. For example, acid rains having a severe impact on the biosphere are favoured by the sulphur oxide pollutions transferring to the aerosol phase. In addition, the pollutions bring into existence several toxic effects observed in smog.

The increase of the aerosol particle sizes is known to occur in the coagulation processes and the gas-particle transformations. These two mechanisms are responsible for the change of the particle size spectrum. The rate of the gas-particle transformations can be determined from the rate of the vapour molecule diffusion to the particle surface and the rate of the reaction of the adsorbed vapour molecule and the substance of the particle surface. In these processes it is important to reveal the mechanisms of the gas-particle transformations leading to the formation of condensable substances such as sulphuric acid, ammonium sulphate, ammonium nitrate, etc.

The atmospheric pollutants as a rule are polydisperse in character, therefore for the mathematical modelling of their dynamics the following two mechanisms should be taken into account: the transfer and turbulent diffusion of the pollutant, and the variation of the disperse composition and concentration of aerosol due to kinetic processes of condensation, coagulation, precipitation, etc. As these processes take place in the turbulent atmosphere and the ground surface is for the most part orographically and thermally inhomogeneous, the aerosol dynamics problem has to be solved using hydrothermodynamic models. Such an approach allows one to reproduce most closely the space and temporal variations in the field of meteorological elements, the turbulent characteristics of flows, and the parameters of aerosol particles. The models of the type mentioned were constructed in [12, 14, 19]. A numerical model of the pollutant transfer in the lower troposphere with the photochemical transformation was considered in [2, 14] and the polydisperse aerosol transfer model allowing for coagulation processes was discussed in [15].

In the present work a combined model is developed on the basis of models from [9, 12, 14, 19, 20]. The model describes the transfer and diffusion of pollutants with taking into account the condensation processes as applied to the sulphuric acid aerosol forming under the atmospheric conditions.

1. The numerical model of hydrothermodynamics of the mesoscale boundary atmospheric layer

To take into account the orography in the numerical models, let us turn from the Cartesian coordinate system $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ to the generalized one (x, y, σ) using the formulae

$$x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}, \quad \sigma = \frac{\bar{z} - \delta(\bar{x}, \bar{y})}{H - \delta(\bar{x}, \bar{y})} H, \quad (1.1)$$

where H is the conditional height of the boundary atmospheric layer, $\delta(\bar{x}, \bar{y})$ is the function describing the relief. As a result, the curved ground surface becomes a coordinate surface. The hydrothermodynamic equations describing the mesoscale atmospheric motions take the following form in the new coordinate system [14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}'}{\partial t} + \text{div } \mathbf{u} \hat{u} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + a_1 \frac{\partial p'}{\partial \sigma} + l \hat{v}' + \\ &+ \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu \frac{\partial \hat{u}}{\partial \sigma} + F_1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}'}{\partial t} + \text{div } \mathbf{u} \hat{v} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + a_2 \frac{\partial p'}{\partial \sigma} - l \hat{u}' + \\ &+ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu \frac{\partial \hat{v}}{\partial \sigma} + F_2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\omega}'}{\partial t} + \text{div } \mathbf{u} \hat{\omega} &= -a_3 \frac{\partial p'}{\partial \sigma} + \lambda \hat{\theta}' (1 + 0.61q) + \\ &+ \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \sigma} + F_3, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\theta}'}{\partial t} + \text{div } \mathbf{u} \hat{\theta} + \frac{S \hat{\omega}}{a_3} &= -\frac{S}{a_3} (\delta_x \hat{u}' + \delta_y \hat{v}') + \frac{L_w \rho \Phi}{c_p} + \\ &+ \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_\theta \frac{\partial \hat{\theta}'}{\partial \sigma} + F_4, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{q}'}{\partial t} + \text{div } \mathbf{u} \hat{q}' &= -\rho \Phi - a_3 \hat{\omega} \frac{\partial Q}{\partial \sigma} + \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} + \\ &+ a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_\theta \frac{\partial \hat{q}'}{\partial \sigma} + F_5, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \hat{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \sigma} = 0, \quad (1.7)$$

where

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\delta_x(\sigma - H)}{H - \delta}, \quad a_2 = \frac{\delta_y(\sigma - H)}{H - \delta}, \\ a_3 &= \frac{H}{H - \delta}, \quad \hat{\varphi} = p\varphi, \quad \varphi = (u, v, w, \theta', q'), \\ \operatorname{div} \mathbf{u}\hat{\varphi} &= \frac{\partial u\hat{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial v\hat{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial w\hat{\varphi}}{\partial \sigma}, \quad \omega = a_3w + a_1u + a_2v, \quad \delta_x = \frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad \delta_y = \frac{\partial \delta}{\partial y}, \\ F_i &= \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1\tau_{i1} + a_2\tau_{i2}), \quad i = 1, 2, 3, \quad F_4 = \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1H_1 + a_2H_2), \\ F_5 &= \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1P_1 + a_2P_2). \end{aligned}$$

Here t is the time; u, v, ω are the wind velocity components in the directions x, y, σ respectively; w is the vertical velocity in the Cartesian system; θ is the potential temperature; q is the specific humidity; ρ is the density; L_w is the latent heat of condensation; Φ is the liquid phase formation rate; c_p is the specific heat of air at constant pressure; p is the pressure; l is the Coriolis parameter; $S = (\gamma_{ma} - \gamma)$ is the stratification parameter; γ_{ma} is the moist-adiabatic temperature gradient; γ is the vertical temperature gradient of normal air; $\gamma = g/T$ is the convection parameter; T is the temperature; $\tau_{ij}, i = 1, 2, j = 1, 2$, are the horizontal components of the Reynolds viscous stress tensor; H_i, P_i are the heat and moisture fluxes in the directions x, y , respectively. The meteorological fields in (1.2)–(1.7) are represented in the form

$$\begin{aligned} u &= U + u', \quad v = V + v', \quad w = W + w', \\ \theta &= \Theta + \theta', \quad p = P + p', \quad q = Q + q', \end{aligned} \quad (1.8)$$

where the capital letters denote the background large-scale components of the meteorological fields and the primed letters denote the variations.

To describe the structure of the lowest atmospheric layer let us use the Monin – Obukhov similarity theory [18] and the Businger empirical functions [6]. Finally we will write the lowest atmospheric layer model in the following form [14, 19]:

$$\kappa z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = u_* \varphi_u(\zeta), \quad \kappa \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = \tilde{p}_* \varphi_\theta(\zeta), \quad \tilde{p} = \theta, q,$$

$$\begin{aligned}
\kappa \mathbf{u} &= u_* f_u(\zeta, \zeta_u), \quad \tilde{p} - \tilde{p}_0 = \tilde{p}_* f_\theta(\zeta, \zeta_\theta), \quad \zeta = \frac{z}{L}, \quad \zeta = \frac{z}{L}, \quad \zeta_h = \frac{h}{L}, \\
\nu &= \frac{\kappa u_* z}{\varphi_i(\zeta)}, \quad a_i = \frac{\varphi_i(\zeta)}{f_i(\zeta_h, \zeta_i)}, \quad L = \frac{u_*^2}{\kappa^2 \lambda \theta_*}, \quad i = u, \theta, \\
f_u(\zeta, \zeta_u) &= \int_{\zeta_u}^{\zeta} \frac{\varphi_u(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad f_\theta(\zeta, \zeta_\theta) = \int_{\zeta_u}^{\zeta} \frac{\varphi_\theta(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad (1.9)
\end{aligned}$$

where $\mathbf{u} = \sqrt{u^2 + v^2}$ is the wind velocity vector module; u_* is the friction velocity; θ_* , q_* are the scales of the potential temperature and specific humidity, respectively; h is the height of the lowest atmospheric layer; L is the length scale; z_u is the roughness parameter; ζ is the dimensionless height representing the hydrostatic stability parameter; φ_i , i are continuous universal functions.

Let us solve the system of equations (1.2)–(1.9) in the domain $D_t = D \times [0, \bar{t}]$, $D = \{-X \leq x \leq X, -Y \leq y \leq Y, 0 \leq \sigma \leq H\}$ under the following initial and boundary conditions:

$$\hat{u}' = 0, \quad \hat{v}' = 0, \quad \hat{w}' = 0, \quad \hat{\theta}' = 0, \quad \hat{q}' = 0, \quad t = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \hat{u}'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{v}'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\omega}'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\theta}'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{q}'}{\partial x} = 0, \quad x = \pm X, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \hat{u}'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\omega}'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\theta}'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{q}'}{\partial y} = 0, \quad y = \pm Y, \quad (1.12)$$

$$\hat{u}' = 0, \quad \hat{v}' = 0, \quad \hat{w}' = 0, \quad \hat{\theta}' = 0, \quad \hat{q}' = 0, \quad z = H, \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned}
a_3 h \frac{\partial \hat{u}}{\partial \sigma} &= a_u \hat{u}, \quad a_3 h \frac{\partial \hat{v}}{\partial \sigma} = a_u \hat{v}, \quad a_3 h \frac{\partial \hat{\theta}'}{\partial \sigma} = a_\theta (\hat{\theta} - \hat{\theta}_0), \\
a_3 h \frac{\partial \hat{q}'}{\partial \sigma} &= a_\theta (\hat{q} - \hat{q}_0'), \quad z = h, \quad \hat{w} = 0, \quad \sigma = 0. \quad (1.14)
\end{aligned}$$

The parameters $a_u(x, y)$, $a_\theta(x, y)$ are determined from the lowest atmospheric layer model [12, 19].

Since the horizontal and vertical spatial resolutions differ considerably, it is advisable to restrict our consideration to the horizontal two-dimensional tensor and to determine the vertical turbulent exchange coefficients from the turbulent energy balance equation. The horizontal turbulent

exchange operators are approximated using the viscous stress two-dimensional tensor [7]

$$\tau_{i,j} = K_m D_{i,j}, \quad H_i = k_H \frac{\partial \theta'}{\partial x_i}, \quad P_i = k_H \frac{\partial q'}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2. \quad (1.15)$$

The deformation tensor D_{ij} is determined from the formula

$$D_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k},$$

where δ_{ij} is the Kronecker's symbol ($u_1 = u$, $u_2 = v$). Let us represent the kinematic viscosity in the form:

$$k = \begin{cases} (\tilde{K}\bar{\Delta})^2 |Def|, & Ri > 1, \\ (\tilde{K}\bar{\Delta})^2 |Def| (1 - Ri)^2, & Ri \leq 1, \end{cases} \quad (1.16)$$

where

$$Ri = \frac{g}{\Theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} (Def)^{-2}; \quad (Def)^2 = \frac{1}{2} (D_{11}^2 + D_{22}^2) + D_{12}^2;$$

$\Delta = (\Delta x \Delta y)^{1/2}$ is the horizontal spatial resolution of the grid domain; \tilde{k} is an empirical constant. The vertical turbulent exchange coefficients are determined from the turbulent energy balance equation using the Kolmogorov approximate similarity hypothesis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{u} \text{grad } b &= a_3 \nu_u \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \sigma} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \lambda \alpha_\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) \right] + a_3^2 \alpha_\beta \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_u \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{c_0 b^2}{\nu_u}, \quad (1.17) \\ \nu_u &= c_1 l_m b^{1/2}, \quad l_m = -a_3 \kappa \psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right)^{-1}, \quad \psi = b^{1/2} l_m, \end{aligned}$$

where l/m is the scale of turbulence; α_θ , c_0 , c_1 , α_β are dimensionless universal constants.

Let us solve equation (1.17) under the following initial and boundary conditions:

$$b = 0, \quad t_0; \quad b = \tilde{b}^2(\zeta_h, \zeta_u), \quad \sigma = a_3 \left[h - \tilde{\delta}(x, y) \right],$$

$$\frac{\partial b}{\partial \sigma} = 0, \sigma = H; \quad \frac{\partial b}{\partial x} = 0, x = \pm X; \quad \frac{\partial b}{\partial y} = 0, y = \pm Y, \quad (1.18)$$

where $b(\zeta_h, \zeta_u)$ is the value of the turbulent pulsation energy on the upper boundary of the lowest atmospheric layer. The temperature on the underlying surface is determined from the heat balance condition on the atmosphere-soil boundary [12, 14, 19]. To solve problem (1.2)–(1.18) one uses the method of splitting into physical processes [13]. The finite difference approximation and the solution technique are presented in [1, 12, 14, 19],

2. The model of spreading pollutants in the atmosphere with consideration for the condensation kinetics

The process of fluctuational new particle creation and further condensation growth of particles in the supersaturated vapour is one of the most important processes leading to the onset and development of the disperse phase. The vapour supersaturation would suffice for the pollutant particles, if any, to absorb the vapour. On the contrary, the initial state of the pure supersaturated vapour is metastable, hence only with the availability of particles larger than some critical size the condensation starts. The supercritical-sized particles are stable and their further growth is thermodynamically favoured. Since the formulation of the kinetic equation is based on the classical Zeldovich – Frankel interpretation thoroughly elucidated in the literature [8, 16, 25], we will only retrace the main points. When a droplet of radius r forms in the vapour, the free energy change $\Phi(r)$ is thought to be expressed by the sum

$$\Phi(r) = (\mu_l - \mu_g)g + 4\pi r^2 \sigma,$$

where g is the number of molecules in the droplet, σ is the surface tension, μ_l , μ_g are the chemical potentials of molecules in the liquid and gaseous phases, respectively. An important point is that for the supersaturated vapour, i. e. when $\mu_g > \mu_l$ the function $\Phi(r)$ has a maximum at the point r_* which is the critical radius

$$r_* = \frac{2\sigma v_l}{\mu_g - \mu_l}, \quad \Phi(r_*) = \frac{16\pi v_l^2 \sigma^3}{3(\mu_l - \mu_g)^2}, \quad (2.1)$$

where v_l is the molecule volume in the liquid phase. The vapour is supersaturated with respect to all the droplets with $r > r_*$, hence these

droplets must grow, while the smaller ones must evaporate out. The equilibrium function of the droplet distribution in sizes n_g which is determined according to the Boltzmann formula increases when $r > r_l$, which is physically meaningless. It is evident that condensation is a dynamic process and the droplet size change must be described by the rates $v_g = \partial g / \partial t$ determining the balance between the increase and decrease of the number of molecules in the droplet g . In addition, one has to take into account the process of the fluctuational new particle creation, i.e. stochastic formation of the supercritical clusters capable of further growing. The quasi-stationary value of the particle flux to the region of large sizes was determined in [8, 25]:

$$J = \frac{v_l \beta_{g_*} n_{g_*}}{2\pi r_*^2} \sqrt{\frac{\sigma}{kT}}, \quad (2.2)$$

where g_* is the number of molecules in the critical droplet and the function β_g prescribes the rate of absorption of vapour by the droplet g . As in [20, 21] the functions f_g , J are normalized to the molecule of the substance in the initial state.

Let us assume that only the droplets of the size γg_* , $\gamma > 1$, are formed, and the intensity J and the critical size depend on time. One must also keep track of the changes of the thermodynamic quantities. Then in the spatially homogeneous case the kinetic equation takes the form

$$\frac{\partial f_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial g} v_g f_g = J(t) \delta [g - \gamma_*(t)], \quad (2.3)$$

where $f_g(t)$ is the non-equilibrium distribution function (the spectrum of the particles), and

$$J(t) = \frac{v_l}{\beta_{g_*}} 2\pi r_*^2 \sqrt{\frac{\sigma}{kT}} \exp - \frac{\Phi(g_*)}{kT}. \quad (2.4)$$

If one considers the particles as a passive pollutant and neglects the diffusion processes, then equation (2.3) is also true for a moving medium. In this case the general kinetic equation describing the droplet size change with allowance made for coordinate system transform (1.1) takes the following form:

$$\frac{\partial f_g}{\partial t} + \mathbf{u}_g \text{grad } f_g + \frac{\partial}{\partial g} v_g f_g = F + J(t) \delta [g - \gamma_*(t)] + F_1 + F_2, \quad (2.5)$$

where

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{\partial}{\partial x} k_{xx} \frac{\partial f_g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_{yy} \frac{\partial f_g}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \chi_1 \frac{\partial f_g}{\partial \sigma}, \\
 F_2 &= \frac{\partial}{\partial x} a_1 k_{xx} \frac{\partial f_g}{\partial x} + a_1 \frac{\partial}{\partial \sigma} k_{xx} \frac{\partial f_g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} a_2 k_{yy} \frac{\partial f_g}{\partial \sigma} + a_2 \frac{\partial}{\partial \sigma} k_{yy} \frac{\partial f_g}{\partial y}, \\
 a_1 &= (\sigma - 1) \frac{H}{H - \bar{\delta}(x, y)} \bar{\delta}_x(x, y), \\
 a_2 &= (\sigma - 1) \bar{\delta}_y(x, y) \frac{H}{H - \bar{\delta}(x, y)}, \\
 a_3 &= \frac{H}{H - \bar{\delta}(x, y)}, \\
 \chi_1 &= a_1^2 k_{xx} + a_2^2 k_{yy} + a_3^2 k_{\sigma\sigma}.
 \end{aligned}$$

Here

$$\mathbf{u}_g \text{ grad } f_g = u \frac{\partial f_g}{\partial x} + v \frac{\partial f_g}{\partial y} + (\omega - \bar{\omega}_g) \frac{\partial f_g}{\partial \sigma};$$

$\bar{\omega}_g = \text{diag}(\bar{\omega}_g)$ is the diagonal matrix whose elements are equal to the gravity sedimentation rates of the particles; k_{xx} , k_{yy} , and $k_{\sigma\sigma}$ are the turbulent diffusion coefficients in the directions x , y , σ , respectively; F is the function describing the distribution and capacity of the pollutant sources. The turbulent diffusion coefficients are determined using the one-point second moments of the turbulent pulsations in the form of functions depending on the average atmosphere parameters, air flow shift, stratification, and the turbulence energy. Therefore, we will solve the kinetic equation of condensation (2.5) along with the equations of hydrothermodynamics. The specific form of the functions k_{xx} , k_{yy} , and $k_{\sigma\sigma}$ is given in [17, 23].

The atmospheric condensation nuclei accelerating the aerosol formation processes in the air are important for the practical problems of atmosphere physics. In such a formulation of the problem one can easily calculate the condensation on the pollutant particles by specifying these particles as the initial spectrum and forbidding evaporation when the size of droplets gets less than the initial one. Thus the pollutant particles serve as a basis for the condensation; the spectrum of the particles generated by the source must be calculated separately. The solution to kinetic equation (2.4) allows one to determine the degree of the

condensation $x(t)$ and the number of droplets formed per one molecule of the initial substance $v(t)$:

$$\varphi(t) = \int_0^\infty g f_g(t) dg, \quad v(t) = \int_0^\infty f_g(t) dg. \quad (2.6)$$

Let us turn to the particular determination of the main quantities appearing in equation (2.3). We will choose the vapour pressure and temperature as independent thermodynamic parameters. We consider vapour to be an ideal gas and use the following expressions for the difference $\mu_g - \mu_l$ and the critical size r_* :

$$\begin{aligned} \mu_g - \mu_l &= \lambda_1 \ln \frac{T_p}{T} = \lambda_1 \theta, \\ r_* &= \frac{2\sigma v_l}{\lambda_1 \theta}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

where λ_1 is the condensation heat per one molecule, T_p is the saturation temperature at the given pressure p , θ is the vapour supercooling.

In practice, the temperature T -dependence of the saturated vapour pressure p_s is in common usage with the interpolation of the form

$$\ln p_s = -\frac{A_p}{T} + B_p + C_p \ln T + D_p T. \quad (2.8)$$

To find $T_p(t)$ one must thereby solve the transcendental equation $p_s[T_p(t)] = p(t)$.

To determine the specific form of the source $J(t)$ in (2.7) we will use the fact that the size of the particles being created is practically always much less than the vapour molecule range in the medium l_1 . In this case the vapour absorbing rate is determined by the gas-kinetic flow (free molecular regime of absorption):

$$\beta_g = \frac{\alpha \pi d^2 n v_T}{4}, \quad v_T = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad (2.9)$$

where $d = (6v_l/\pi)^{1/3}$ is the molecule diameter, v_T is the molecule thermal velocity, $n = p/kT$ is the vapour concentration, α is the accommodation coefficient (a fraction of the vapour molecules adhering to the droplet surface at collision). Using (2.7), (2.9) we obtain for $J(t)$:

$$J(t) = \frac{\alpha n v_T v_l}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{kT}} \exp \left[-\frac{b}{T\theta^2} \right], \quad b = \frac{16\pi\sigma^3 v_l^2}{3k\lambda^2}. \quad (2.10)$$

In this case the quantity $g_* = 2bk/\lambda\theta^3$.

The regime of particle growth and evaporation depends on the relation of the particle size and the vapour molecule range in the medium l_1 . We will present a simplified dependence of the velocity v_g applicable for an arbitrary regime of the vapour-particle surface exchange [22]

$$v_g = \frac{\alpha\pi d^2 n v_T g^{2/3}}{4(1 + 3dg^{1/3}/8l)} \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\lambda\theta}{kT} \left(\frac{g_*^{1/3}}{g^{1/3}} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (2.11)$$

Formula (2.11) gives the growth rate at large g , namely $g \gg 1/d^3$ in the diffusive regime [11] and at small $g_* \ll g \ll 1/d^3$ in the free molecular regime [21]. Formula (2.11) is applicable for the evaporation process of particles in the undersaturated vapour, if one considers the critical size to be negative. To do this would require the replacement $g_*^{1/3} \rightarrow -|g_*|^{1/3}$.

The approach presented above allows one to model the volume condensation processes in various situations if the laws of changing the thermodynamic variables $T(t)$, $p(t)$ are known. It must be emphasized that the vapour pressure itself changes due to the condensation. Therefore it is more convenient to take the specific volume of the condensating substance $v(t)$ as the initial quantity and to find the pressure from the formula

$$p(t) = (1 - c(t)) kT(t) \frac{n(0)v(0)}{v(t)}, \quad (2.12)$$

where $n(0)$ is the vapour concentration at the initial moment of time, $c(t)$ is the degree of condensation determined according to (2.6). The change of $v(t)$ is specified either by the external conditions (e. g. the change of the height of a cloud lift in the atmosphere) or can be taken from the atmosphere thermodynamics model. The condensation process affects also the temperature change $T(t)$. For example, when expanding the mixture of air and saturated water vapour in the cloud chamber, the gas temperature may even increase with increasing the operating volume due to liberation of heat via condensation. The equation determining the temperature change with consideration for the concentration is derived for adiabatic processes in [21]. We will present the form of the equation for a more general case, when vapour is mixed with the gas medium, e. g. with air (quantities referring to the gas medium have the subscript *gas*)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} [ac_{gas} + (1 - \chi)c_g + c_l\chi] + \frac{\partial \chi}{\partial t} \left[T(c_l - c_g) - \frac{\lambda_1}{k} \right] = \\ = -T(a + 1 - \chi) \frac{\partial \ln v}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

where $c_i = c_{vi}A_i/R$ are the dimensionless heat capacities; $a = \rho_{gas}A/\rho_0A_{gas}m$ are the initial densities of the condensing substance and gas medium. For small relative densities and high temperatures one can neglect the condensation effect on the gas medium parameters and consider the condensation kinetics with given $v(T)$ and $T(t)$.

Let us formulate the main points of the numerical algorithm of equations (2.3), (2.13). To do this we will write equation (2.13) in the form

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[T [ac_{gas} + (1 - \chi)c_g + c_l\chi] - \frac{\lambda_1\chi}{k} \right] = -T(a + l - \chi) \frac{\partial \ln v}{\partial t}. \quad (2.14)$$

To solve equation (2.3) we will use the method of particles, widely used when modelling the physical processes in plasma [5]. As the spectrum f_g is represented in a combination of the δ -functions, it is convenient to turn from equation (2.3) to its integral analogue. For this purpose let us multiply (2.3) by the arbitrary smooth function $\varphi(g)$ and integrate with respect to g :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \varphi f_g dg - \int_0^\infty v_g f_g \frac{\partial \varphi}{\partial g} dg = J\varphi [\gamma g_*(t)]. \quad (2.15)$$

When integrating we take into account the boundary conditions for f_g :

$$\left. \frac{\partial f_g}{\partial g} \right|_{g=0} = \left. \frac{\partial f_g}{\partial g} \right|_{g=\infty} = 0.$$

Let us suppose that on the segment $[t^n, t^{n+1} = t^n + \Delta t]$ the function f_g can be represented in the form

$$f_g = \sum_{i=1}^N N_i(t) \delta[g - g_i(t)] + N_{N+1}(t) \delta[g - g_{N+1}(t)] \quad (2.16)$$

and $N_{N+1}(t^n) = 0$. Substituting (2.16) in (2.15) and integrating, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{i=1}^N N_i \varphi(g_i) + N_{N+1} \varphi(g_{N+1}) - \sum_{i=1}^N N_i v_g(g_i) \frac{\partial \varphi}{\partial g_i} + \right. \\ \left. + N_{N+1} \varphi(g_{N+1}) \frac{\partial \varphi}{\partial g_{N+1}} \right] = J \varphi[\gamma g_*(t)], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial g_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial g} \Big|_{g=g_i}. \end{aligned}$$

Integrating the relation with respect to Δt and using the arbitrariness of $\varphi(g)$, we obtain the system of equations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial t} &= 0, \quad i = 1, \dots, N, \\ \varphi(g_{N+1}) \frac{\partial N_{N+1}}{\partial t} &= J \varphi(g_*), \\ \frac{\partial g_i}{\partial t} &= v_g(g_i), \quad i = 1, \dots, N+1. \end{aligned} \tag{2.17}$$

The second equation implies that particles are created with the intensity J on a portion of the curve $g_*(t)$ at $t^n \leq t \leq t^{n+1}$. Let us integrate the equation with respect to t :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \varphi[g_{N+1}(t)] \frac{\partial N_{N+1}}{\partial t} dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} J \varphi[g_*(t)] dt.$$

According to (2.13) we replace all the particles created on the segment $[t^n, t^{n+1}]$ by one model particle, therefore it is important that the following equality should be valid:

$$N_{N+1}(t^{n+1}) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} J(t) dt, \tag{2.18}$$

i. e. a proper number of the particles created should be obtained. Concerning the initial coordinate of the model particle, obviously it should be chosen on the portion of the curve $g_*(t)$ at $t^n \leq t \leq t^{n+1}$. When solving

the system of equations for g numerically, we will use the Runge – Kutta second-order scheme [10]:

$$g_i^{n+1/2} = g_i^n + \frac{\Delta t}{2} v_g^n, \quad g_i^{n+1} = g_i^n + \Delta t v_g^{n+1/2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.19)$$

where the superscript denotes the time moment which the given quantity is referred to, and $t^{n+1/2} = t^n + \Delta/2$. According to (2.18) the weight of the created particle is calculated using the formula

$$N_{N+1}^{n+1} = J^{n+1/2} \Delta t.$$

After the value J^{n+1} is determined at the moment $t = t^n + t^{n+1}$, its weight is corrected:

$$N_{N+1}^{n+1} = (J^{n+1/2} + J^n) \Delta t / 2.$$

Calculations show that it improves significantly the accuracy of the algorithm. The initial coordinate of the $(N + l)$ -th particle is taken to be equal to $g_{N+1} = g_*^{n+1/2}$ and the coordinate at the moment $t = t^{n+1}$ is calculated according to the formula

$$g_{N+1}^{n+1} = g_{N+1}^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} v_g^{n+1/2}.$$

Let us note the following circumstance. Since the particles are created at each step in Δt , their number may happen to be too large to do a good job of calculating. To avoid this, one uses the following procedure reducing the number of model particles from each pair of the particles $(2i, 2i-l)$ one particle is formed with the weight N_i and the coordinate g_i :

$$N_i = N_{2i-1} + N_{2i}, \quad g_i = \frac{g_{2i-1} N_{2i-1} + g_{2i} N_{2i}}{N_i}. \quad (2.20)$$

This procedure retains the countable concentration of the particles ν in the system and the degree of the condensation χ calculated according to the formula:

$$\chi = \sum_{i=1}^N g_i N_i.$$

Equation (2.14) describing the temperature change at each time-step is solved twice: to obtain $T^{n+1/2}$ and T^{n+1} . In both cases one uses the scheme of the form:

$$\begin{aligned}
& \{T[ac_{gas} + (1 - \chi)c_g + c_l\chi] - \lambda_1\chi/k\} - \\
& - \{T^n[ac_{gas} + (1 - \chi^n)c_g + c_l\chi^n] - \lambda_1^n\chi/k\} = \\
& = -\frac{1}{2}\tau [T(a + 1 - \chi)Q + T^n(a + 1 - \chi^n)Q^n],
\end{aligned}$$

where the quantities without a superscript refer to the moment $t^{n+1/2}$ or t^{n+1} or Δt ; $Q = \partial \ln / \partial t$. The saturation temperature T_p in equation (2.5) is determined using the iterative Newton method. In conclusion, let us consider the question of specifying the initial pollutant particle spectrum. When calculating the condensation on pollutant particles, as the frame we will often use the Junge spectra [24] of atmospheric aerosols in the form

$$f_g = Ag^{-\nu}, \quad r_{min} \leq r \leq r_{max}, \quad g = \frac{4\pi r^3}{3v_l}, \quad (2.21)$$

where the volume of the frame particles g is measured by the number of the condensing vapour molecules. The constant A is determined from the condition of norming the function f_g :

$$\nu_0 = \frac{N}{n_0} = A \int_{g_{min}}^{g_{max}} g^{-\nu} dg,$$

where N is the total concentration of the pollutant particles, n_0 is the initial vapour concentration.

When specifying the model particles which correspond to spectrum (2.21), one must first of all define the method of splitting the interval $[r_{min}, r_{max}]$ into elementary segments. Let the number of such segments be N_p . The calculation practice shows that it is advisable to construct the splitting using one of the following methods: (a) we split the interval $[r_{min}, r_{max}]$ into N_p identical segments $[r_i, r_{i+1}]$ from (2.21) we find their corresponding limits g_i ; (b) we construct the splitting on g in such a way that the equal number of pollutant particles $N/(n_0 N_p)$ find themselves in each interval $[g_i, g_{i+1}]$, case one can easily see that g_{i+1} should be obtained from the relation:

$$g_{i+1}^{1-\nu} = g_i^{1-\nu} - N_p^{-1} (g_{min}^{1-\nu} - g_{max}^{1-\nu}), \quad \nu \neq 1. \quad (2.22)$$

Having constructed the intervals $[g_i, g_{i+1}]$ in each of them one has to choose the initial coordinate value g_{0i} for the model particles and ascribe

to them the corresponding weights N_i . The following conditions must obviously be satisfied:

$$N_i = A \int_{g_i}^{g_{i+1}} g^{-\nu} dg, \quad g_{0i} = A \int_{g_i}^{g_{i+1}} g^{1-\nu} dg / N,$$

which ensure that the values of the total countable concentration and mass concentration of the pollution are equal to those calculated using the set of model particles.

3. Numerical calculation results

The developed technique of solving the kinetic equation was used to calculate the sulphuric acid vapour concentration process under atmospheric conditions. The vapour molecule range in the medium l_1 was calculated from the geometrical cross-section of the interacting particles; the constant γ in kinetic equation (2.3) was taken to be equal to 1.1; the accommodation coefficient α was equal to 0.027 [4]. The specific volume was constant, the initial temperature was 280 K. The constants in expression (2.8) were taken for the 98 percent sulphuric acid [4]: $A_p = 8273.2$, $B_p = 19.503$, $C_p = D_p = 0$. The condensation heat $U = 50\,170$ J/mole, the heat capacities $c_g = 6.86$, $c_l = 16.78$, the condensate density $\rho = 1.83 \cdot 10^3$ kg/m³, $A = 98.08$, the ambient medium was air. The initial vapour density $\rho_0 = 1.22 \cdot 10^{-5}$ kg/m³, that is 50 times greater than the saturated vapour density at the given temperature. The calculations show that in this case the liberation of heat via condensation is negligible and the temperature is practically constant.

Three numerical experiments were performed. In the first experiment the condensation kinetics was studied when the pollutant particles were absent. The degree of condensation $c = 0.95$ was achieved at the time $t = 3.2 \cdot 10^5$ s the number of the centres formed $\nu = 1.16 \cdot 10^{-14}$, the maximum supercooling $\theta_{max} = 0.142$, the average particle size $\bar{r} = 12$ μm . In the second experiment the condensation on the pollutant particles was studied. The pollutant particles had the following parameters of the spectrum: the countable concentration $N = 1.2 \cdot 10^9$ particles/m³; the spectrum boundaries $r_{min} = 0.1$ μm , $r_{max} = 10$ μm the index of a power in (2.21) $\nu = 2$. The calculations reveal that both techniques of splitting the interval $[g_{min}, g_{max}]$ into elementary segments (see Section 2) are approximately equivalent and allow one to find the

degree of condensation to an accuracy of a few percent using only 5 to 10 model particles. In this problem the fluctuational formation of droplets is negligible and the condensation proceeds on the pollutant particles, $\nu = \nu_0 = 1.6 \cdot 10^{-11}$. The degree of condensation $c = 0.95$ is achieved much more rapidly at $t = 2.6 \cdot 10^3$ s. The average size of the grown particles is $1.1 \mu\text{m}$, i. e. one order of magnitude smaller than that in the first problem. The calculations for other initial conditions show that the process of the fluctuational new particle creation has a threshold for the H_2SO_4 vapour and starts at the supersaturations $S > S_{cr} \equiv 30$. The condensation on the pollutant particles proceeds at any supersaturation $S > 1$. For example, for $S = 1.1$ and the time $t = 2.6 \cdot 10^3$ s, which is characteristic of the second experiment, the degree of condensation c is $2 \cdot 10^{-2}$. The strong dependence of the saturated vapour pressure p_s [4] on the acid concentration in a droplet has engaged our attention, since it points to the fact that the processes of simultaneous condensation of water and acid vapours must be taken into account in actual problems.

In the third experiment the numerical calculations according to the models discussed were performed with the aim to reproduce the hydrometeorological regime and the expansion of the sulphuric acid vapour with due regard for the condensation both on natural aerosol spectra (e. g. Junge's ones) and on the particles created via the fluctuational new particle creation process. The territory covering the water area of Lake Baikal and its surrounding region were considered. Since the spatial pollution transfer model is not stationary, the input data for the model are functions of the space coordinates and time. The calculations were performed for the following values of the input parameters: the grid domain dimensions $(22 \times 32 \times 12)$, the horizontal steps $\Delta x = \Delta y = 25$ km, the vertical steps $\Delta z_1 = z_u$ (roughness), $\Delta z_2 = 50$ m, $\Delta z_3 = \Delta z_4 = 100$ m, $\Delta z_k = 200$ m ($k = 5, \dots, 12$); $X = 425$ km, $y = 775$ km, the time-step is $t = 20$ min for the model of hydrothermodynamics. The time-step to describe the condensation processes considered in the model depends on the vapour supersaturation degree and may be relatively small. This fact has motivated the step choice $t \leq 5$ min. The initial time moment in the calculations corresponded to 6 a. m. local time. The single source of the sulphuric acid vapour of the capacity 10^{11} mol/s \cdot cm³ was placed at the height $z = 250$ m at the distance of approximately 60 km to the west from Lake Baikal.

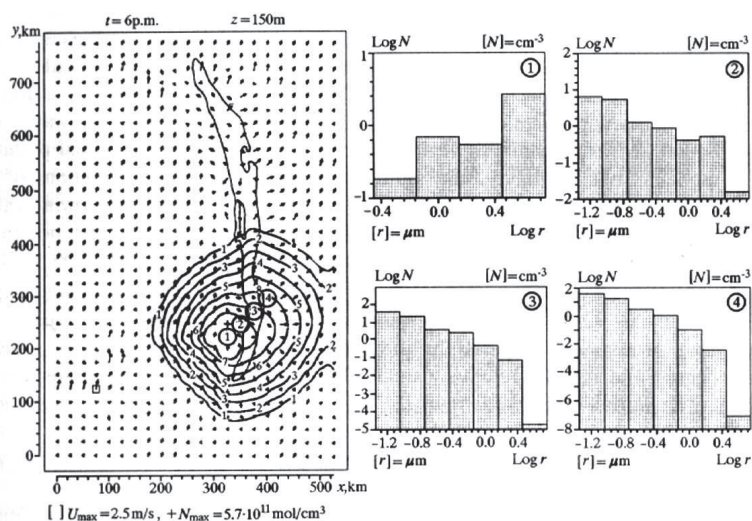


Fig. 1. Isolines of the pollutant concentration and the velocity field (the left-hand part) and the size distribution of the sulphuric acid particles (the right-hand part) for the lime moment $t = 6$ p. m., $z = 150$ m

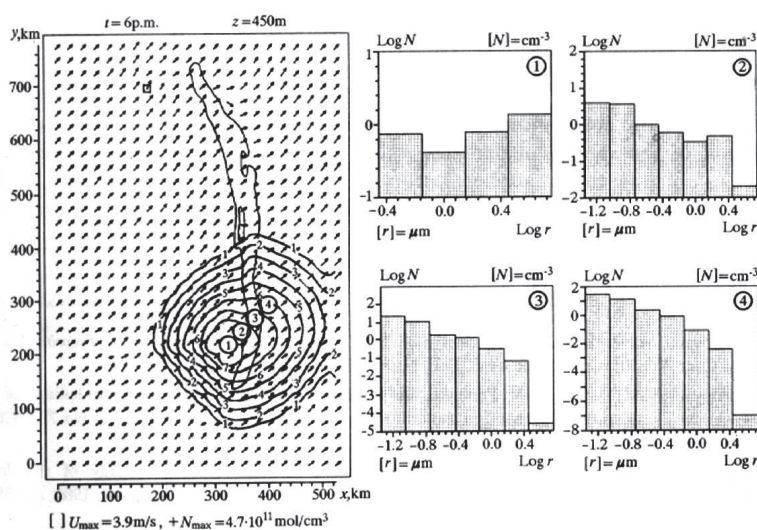


Fig. 2. Isolines of the pollutant concentration and the velocity field (the left-hand part) and the size distribution of the sulphuric acid particles (the right-hand part) for the lime moment $t = 6$ p. m., $z = 450$ m

Fig. 1, 2 present the synthesized plots of the results obtained for the heights $z = 150$ m and $z = 450$ m at the time moment $t = 6$ p. m. In the

left-hand part of each figure the two-dimensional sections of the velocity vector and isolines of the concentration of the vaporous sulphuric acid in the plane (x, y) are presented. In the right-hand part we present the size distributions of the sulphuric acid particles in the liquid phase at the logarithmic scale at various distances from the source (indices 1 to 4 in the figures). One can see that near the source the large bimodally distributed fractions with particles of size about $1 \mu m$ and larger are dominant, but as one recedes from the source, the fractions with smaller size particles prevail. The reason is that the vaporous sulphuric acid concentration decreases as one recedes from the source. The calculation of the spectra of particles which are created when condensation of the substances polluting the atmosphere occurs is important for a wide range of ecological problems dealing with the atmospheric aerosol formation and transfer. The model described can be a constituent part of more general ecological problems.

REFERENCES

1. Aloyan A. E. Non-hydrostatic numerical models of local atmospheric processes. Novosibirsk: Preprint, No. 451, Comp. Cent. Sib. Branch, USSR Acad. Sci., 1984 (in Russian).
2. Aloyan A. E., Bazhin N. M., Pcnenko V. V., Skubnevskaya G. I. Numerical modelling of the photochemical oxidation of methane in the atmosphere of industrial regions. Novosibirsk: Preprint No. 772, Comp. Cent. Sib. Branch, USSR Acad. Sci., 1987 (in Russian).
3. Aloyan A. E., Lazriev G. I. On the parametrization of the turbulent energy of the lowest atmospheric layer // In: *Mathematical Models of Atmospheric Movements*. Novosibirsk, 1980. Pp. 85–94 (in Russian).
4. Amelin A. G. Theoretical Bases of Fog Formation via Vapour Condensation. M.: Khimiya, 1966 (in Russian).
5. Birdsall Ch., Langdon A. *Plasma Physics and Computer Simulation*. Los Alamos Book Company, McGraw-Hill, 1985.
6. Businger J. A., Wyngard J. C., Izumi Y., Bradley E. F. Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer // *J. Atmos. Sci.* 1971. V. 28, No. 2. Pp. 181–189.
7. Iark T. L. A small-scale dynamics using a terrain-following coordinate transformation // *J. Comp. Physics*. 1977. V. 4, No. 2. Pp. 186–215.
8. Frenkel Ya. I. *Kinetic Theory of Liquids*. L.: Nauka, 1985 (in Russian).

9. Golubev A. I., Piskunov V. N., Povyshev V. M. Modelling the kinetics of volume condensation processes // Problems of Atomic Science and Engineering. Ser: Theoretical and Applied Physics. 1991. No. 2. Pp. 3–9 (in Russian).
10. Kalitkin N. N. Numerical Methods. M.: Nauka, 1978 (in Russian).
11. Lifshitz I. M., Slezov V. V. On the kinetics of diffusional decay of supersaturated solid solutions // JETP. 1958. V. 35, No. 2. Pp. 479–492 (in Russian).
12. Marchuk G. I. Mathematical Modelling in Environmental Problems. M.: Nauka, 1982 (in Russian).
13. Marchuk G. I. Numerical Solution of Problems of Atmosphere and Ocean Dynamics. L.: Gidrometeoizdat, 1974 (in Russian).
14. Marchuk G. I., Aloyan A. E. Mathematical modelling in ecological problems. M.: Preprint No. 234, Dept. Numer. Math., USSR Acad. Sci., 1989 (in Russian).
15. Marchuk G. I., Aloyan A. E., Lushnikov A. A., Zagainov V. A., Makarenko S. V. Mathematical modelling of aerosol transfer in atmosphere with consideration for coagulation. M.: Preprint No. 247, Dept. Numer. Math., USSR Acad. Sci., 1990 (in Russian).
16. Mason B. J. The Physics of Clouds. Oxford, 1971.
17. Mellor C., Yamada T. A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers // J. Atmos. Sci. 1973. V. 31, No. 7. Pp. 1791–1806.
18. Monin A. S., Obukhov A. M. Main regularities of turbulent mixing in the lowest atmospheric layer // Proc. of the Geophysical Institute USSR Acad. Sci. 1954. No. 24(151). Pp. 163–187 (in Russian).
19. Penenko V. V., Aloyan A. E. Models and Methods for Environmental Protection Problems. Novosibirsk: Nauka, 1985 (in Russian).
20. Piskunov V. N. Physics of Disperse Systems. TsNILAtom inform. M., 1990 (in Russian).
21. Raizer Yu. P. On the condensation in the cloud of evaporated substance expanding into vacuum // JETP. 1959. V. 37, No. 6(12). Pp. 1741–1750 (in Russian).
22. Sutugin A. G., Tokar Ya. I. Condensational aerosol formation in spatially inhomogeneous system // Kolloid. Zh. 1985. V. 47, No. 2. Pp. 341–347 (in Russian).
23. Yordanov D. L., Aloyan A. E. On the diffusivity tensor in calculating pollution in the planetary boundary layer // Comp. Rend. Academ. Bulgar. Sci. 1981. V. 34, No. 7. Pp. 981–983.

24. Junge C. I. Air Chemistry and Radioactivity. N. Y.: Acad. Press, 1963.
25. Zeldovich Ya. B. On the theory of new phase forming. Cavitation // JETP. 1942. V. 12, No. 11. Pp. 525–538 (in Russian).

MATHEMATICAL MODELLING OF THE ATMOSPHERIC AEROSOL TRANSFER WITH COAGULATION TAKEN INTO ACCOUNT⁶

A combined model of the atmosphere hydrothermodynamics and the pollutant transport is described. The atmospheric pollution processes are considered having regard to the aerosol coagulation. The coagulation is allowed for by the Smoluchowsky equation. To transform the equation into the form solvable numerically, we divide the mass range of particles involved in coagulation into fractions on a logarithmic scale. This allows us to describe a wide range of masses by using a small number of equations without any loss in accuracy. The coagulation kernels are taken close to reality, which allows us to take into consideration the change-over from one collision regime to another (free molecular, transition and diffuse regimes). Implementation of the numerical model and discussion of numerical experiments are presented as well.

The atmospheric aerosols (small particles suspended in the air) were known for more than a hundred years, but only in the last decade their role in global atmospheric processes stimulated their thorough investigation. By now the atmospheric aerosols are known to affect the weather and climate on our planet, the radiation and energy balances of the atmosphere, the precipitation and cloud formation processes.

Though the natural aerosols account for about 90% of the total aerosol mass, the important role of the anthropogenic aerosols becomes more and more clear, since the remaining 10% of the anthropogenic aerosols possesses anomalous physical and chemical properties and can induce and transform many chemical processes in the atmosphere. On the one hand, these processes supply the atmosphere with contaminations

⁶Russ. J. Numer. Analysis Math. Modelling, 1993, V. 8, No. 1, 1993, pp. 17–30. Jointly with A. E. Aloyan, A. A. Lushnikov, S. V. Makarenko, V. A. Zagainov.

causing smog, global geophysical phenomena, acid rains, etc., on the other hand, they can provide efficient mechanisms for removing the anthropogenic pollution from the atmosphere.

As a rule, the atmospheric pollutants are polydisperse, hence to model their dynamics numerically one needs to consider two main mechanisms: (1) the transport and diffusion of pollutants and (2) the changes of the aerosol concentration and disperse composition due to such kinetic processes as condensation, coagulation, nucleation, precipitation, etc. As these processes take place in the turbulent atmosphere, the problem of the aerosol dynamics must be solved using the hydrodynamic models. This allows one to reproduce the space and temporal variations in the fields of meteorological elements and in the turbulent characteristics of the atmosphere.

Some physical mechanisms of the aerosol formation are being intensively investigated in recent years. A wide range of problems is discussed in the Proceedings of the International Conference on Atmospheric Aerosols [2]. However, these papers are practically devoid of complex models which simultaneously allow for the aerosol transfer, transformation, origin and destruction processes taking place in the conditions of the atmospheric circulation. It is obvious that nowadays the development of such models is of great importance, since they allow one to describe precisely the aerosol dynamics in the atmosphere.

1. Numerical model of aerosol dynamics with coagulation taken into account

In the present paper a combined model describing the atmospheric aerosol dynamics is developed from the models constructed in [1, 7, 8, 11] with due regard for its evolution due to coagulation which changes the aerosol concentration and disperse constitution.

Considering the aerosol pollutant to be hydrodynamically passive, one can describe its behaviour in terms of the equation of continuity. In the most general case the equation can be written in the following form:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \text{div} \vec{u} \varphi_i = F_i(\varphi_i, x, y, z, t), \quad (1.1)$$

where φ_i is the concentration of the particles with a given set of physical and chemical properties, denoted by the subscript i ; \vec{u} is the velocity vector of the gas carrier. The term in the right-hand side is a generalized

function of the particle sources, which depends on the physical and chemical conditions (velocity and temperature) and also on the presence of particles with other values of i .

As the ecologically important regions are usually located in rugged terrain, we will write down the initial system of equations with due regard for the orography. With this in mind, let us turn from the Cartesian coordinates (x, y, z) in (1.1) to the generalized ones $(\bar{x}, \bar{y}, \sigma)$:

$$x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}, \quad \sigma = \frac{z - \delta(x, y)}{H - \delta(x, y)} H. \quad (1.2)$$

Here H is the conventional height of the upper boundary of the lowest atmospheric layer, $\delta(x, y)$ is the function describing the relief.

Let us now average equation (1.1) by the substitution $\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'$ ($\bar{\varphi}$, where $\bar{\varphi}$ is the averaged value, φ' is the deviation. We determine the pollutant flows from an approximation of the gradient form $\overline{u'_i \varphi} = -\mu_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ ($i = \overline{1, 3}$; $j = \overline{1, 3}$). Here μ_{ij} is the tensor of diffusion coefficients, and the bar is the symbol of averaging. We assume the tensor main axes to coincide with the axes of the Cartesian coordinates and thereby we restrict ourselves only by consideration of the diagonal elements.

According to (1.2) we transform the coordinate system in the deviation equation obtained. Hence we have the turbulent diffusion equation for the concentration of particles of size g , which describes the polydisperse aerosol transfer with coagulation processes taken into account. The form of the equation is as follows:

$$\frac{\partial \varphi'_g}{\partial t} + \vec{u} \text{grad} \varphi'_g = I(\varphi'_g, x, y, z, t) + \tilde{K}_{ij}(\varphi'_i, \varphi'_j) + F_1 + F_2, \quad (1.3)$$

where

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \mu_{xx} \frac{\partial \varphi'_g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu_{yy} \frac{\partial \varphi'_g}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \chi_1 \frac{\partial \varphi'_g}{\partial \sigma}, \\ F_2 &= \frac{\partial}{\partial x} a_1 \mu_{xx} \frac{\partial \varphi'_g}{\partial \sigma} + a_1 \frac{\partial}{\partial \sigma} \mu_{xx} \frac{\partial \varphi'_g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} a_2 \mu_{yy} \frac{\partial \varphi'_g}{\partial \sigma} + a_2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \mu_{yy} \frac{\partial \varphi'_g}{\partial y}, \\ a_1 &= (\sigma - 1) \frac{H}{H - \tilde{\delta}(x, y)} \tilde{\delta}_x(x, y), \\ a_2 &= (\sigma - 1) \frac{H}{H - \tilde{\delta}_y(x, y)} \tilde{\delta}_y(x, y), \end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{H}{H - \tilde{\delta}(x, y)},$$

$$\chi_1 = a_1^2 \mu_{xx} + a_2^2 \mu_{yy} + a_3^2 \mu_{\sigma\sigma}.$$

Here $\varphi_g = \{\varphi_g\}$ ($g = 1, \dots, n$) is the vector of the concentration of particles with the mass ranged from g to $g + dg$;

$$\mathbf{u} \text{ grad } \varphi = u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (w - \tilde{w}_g) \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma};$$

$\tilde{w}_g = \text{diag}\{\tilde{w}_g\}$, $g = 1, \dots, n$ is the diagonal matrix whose elements are equal to the velocities of the gravitational subsidence of particles; $K_{ij}(\varphi_i, \varphi_j)$ ($i, j = 1, \dots, n$) is the matrix operator describing the coagulation process; $I(\varphi_g, \vec{x}, t)$ is the source function of new particles of size g ; μ_{xx} , μ_{yy} , $\mu_{\sigma\sigma}$ are the turbulent diffusion coefficients in the directions x , y , σ respectively.

The turbulent diffusion coefficients are determined through the use of the one-point second moments of the turbulent pulsations in the form of functions depending on the mean atmosphere parameters, air flow shear, stratification and the turbulent kinetic energy. Therefore the aerosol particle transfer equation with allowance made for coagulation is solved simultaneously with the atmosphere hydrothermodynamics equation [6–8, 10]. In this case the diagonal diffusion coefficients take the following form in the new coordinate system:

$$\mu_{xx} = \delta \left[K'' + (2\delta' K_M - K') a_3 \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right]^2,$$

$$\mu_{yy} = -\delta (K_M + \mu_{\sigma\sigma}) a_3 \frac{\partial u}{\partial \sigma}, \quad (1.4)$$

$$\mu_{\sigma\sigma} = \frac{A_2 D_4 \bar{b}^{1/2} l^2}{1 + D_1 R_i / \bar{b}} = \frac{A_2 l D_4 \bar{b}^{1/2}}{1 + D_1 R_i / \bar{b}}.$$

$A_1, A_2, D_1, D_4, D_5, C_1, C_2, C_3$ are empirical functions. The dimensionless turbulent energy (\bar{b}) and the Richardson number (Ri) have the form

$$\bar{b} = \frac{b}{l^2 \bar{S}^2}, \quad Ri = \frac{\lambda a_3}{\bar{S}^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma}, \quad (1.5)$$

where $b = \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}$ is the turbulent kinetic energy, $\bar{S}^2 = a_3^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 \right]$ is the wind shear.

Let us consider in more detail the mathematical model describing the particle coagulation. Changes in the size range and the concentration of particles are described by the Smoluchowsky equation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} = & \frac{1}{2} \int_0^g \tilde{K}(g - g_1, g_1) \varphi_{g-g_1} \varphi_{g_1} dg_1 - \\ & - \varphi_g \int_0^\infty \tilde{K}(g, g_1) \varphi_{g_1} dg_1 + I(\varphi_g, t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

where g_1 is the integration variable (mass), φ_g is the concentration of particles with the masses ranged from g to $g+dg$; $\tilde{K}(x, y)$ is the collision frequency of particles of masses x and y ; $I(\varphi_g, t)$ is rate of formation of new particles of mass g . The first term in the right-hand side of (1.6) describes the increase of the number of particles of size g at the expense of the coagulation of the smaller particles, the second term describes the decrease of the number of particles of size g at the expense of the coagulation with all the other particles.

We solve equations (1.1)–(1.6) in the domain

$$D_t = D \times [0, T], \quad D = \{(x, y, \sigma) : x \in [-X, X], y \in [-Y, Y], \sigma \in [0, H]\}$$

under the following initial and boundary conditions:

$$\varphi_g|_{t=0} = \varphi_g^0, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_g}{\partial y} = 0, \quad x = \pm X, \quad y = \pm Y, \quad (1.8)$$

$$\varphi_g = \varphi_{BG}, \quad \sigma = H, \quad (1.9)$$

where φ_{BG} is the background value of the particle concentration.

Let us set the boundary condition on the lower boundary of the integration domain in the following parametric form:

$$a_3 \frac{\partial \varphi_g}{\partial \sigma} = \frac{a_{\vartheta}(\tilde{\beta}_g - f_s)}{\tilde{\beta}_g + a_{\vartheta} \mu_{\sigma\sigma}}, \quad \sigma = \frac{h - \tilde{\delta}}{H - \tilde{\delta}} H, \quad (1.10)$$

where $\tilde{\beta}_g = \beta_g u_* - \omega_g$; X, Y are the side boundaries of the domain of integration with respect to the space variables x and y , respectively; β_g are the quantities characterizing the pollutant interaction with the

underlying surface. The function $f_g(x, y, t)$, ($g = \overline{1, n}$) describes the pollution sources at the level of coarseness, φ_{gh} is the pollutant concentration at the upper boundary of the lowest atmospheric layer.

We seek for a solution of problem (1.3)–(1.10) in the interval $t \in [0, \bar{t}]$ on the set of non-negative solutions satisfying boundary conditions (1.7)–(1.10).

The form of the function $\tilde{K}(x, y)$ determines the complexity of solving problem (1.6). Analytical solutions of problem (1.7) can be found for the simplest forms of the function, when $\tilde{K}(x, y) = 1$, $\tilde{K}(x, y) = x + y$, $\tilde{K}(x, y) = x \cdot y$ [4]. However, in the general case it is not feasible to obtain the analytical solution for the processes taking place in the real atmosphere.

In the simplest case, where the spherical particles are assumed to collide and their free path in the gas carrier is many times greater than the particle sizes ($Kn \ll 1$, Kn is the Knudsen number), the particles can be treated as heavy molecules. Then one can assume $\tilde{K} \sim \langle \tilde{v} \rangle / \langle \sigma \rangle$, where $\langle \tilde{v} \rangle$ is the mean relative velocity of colliding particles, $\langle \sigma \rangle$ is the collision cross-section. In this case $\tilde{K}(x, y)$ can be represented in the following form:

$$\tilde{K}(x, y) = a \left(\frac{x + y}{xy} \right)^{1/2} (x^{1/3} + y^{1/3})^2, \quad (1.11)$$

which characterizes the so-called free molecular collision regime, a is the dimensional factor. However, the situation is complicated by the fact that the coagulation process to be discussed involves not only the particles whose size is much less than the free path, but also those whose size and the free path are comparable ($Kn \sim 1$). The following empiric formula with the Cunningham correction [3] was obtained to describe the collisions in this regime called transition:

$$\tilde{K}(x, y) = A (x^{1/3} + y^{1/3}) (D_x + D_y) \beta_{xy}, \quad (1.12)$$

where D_x is the diffusion coefficient for a particle of mass x ; β_{xy} is the correction factor determined in [11]. In this case

$$D_x = \frac{kT}{6\pi\eta x^{1/3}} \left[1 + Kn \left(A + Q \exp\left(-\frac{b_3}{Kn}\right) \right) \right], \quad (1.13)$$

where b_3 , A , and Q are empiric constants: $A = 1.25$, $Q = 0.4$, $b_3 = 1.1$. The correction factor is determined by the relation:

$$\beta_{xy} = \left(\frac{x^{1/3} + y^{1/3}}{x^3 + y^3 + \delta_{xy}} + \frac{4(D_x + D_y)}{(V_x^2 + V_y^2)^{1/2}(x^{1/3} + y^{1/3})} \right). \quad (1.14)$$

Thus, equation (1.12) holds for either of the two colliding particles when $Kn \ll 1$; the change-over to the transition regime occurs when $Kn \sim 1$ for one of the particles. Care should be taken to avoid discontinuities at the boundary when changing over from one regime to the other. This can be achieved by fitting the parameters of the empiric formula.

To solve (1.6)–(1.14) it is reasonable to bring the equations to a more convenient (for numerical realization) form. Such a transformation should meet the following requirements. Firstly, it is necessary to consider the particle size range as widely as possible. Secondly, the scheme of calculations must not be too cumbersome lest its computation costs be large. Thirdly, the algorithm must give a solution closely approximating the exact solution and must be stable lest the error be accumulated and lead to high deviation from the exact solution.

Preparatory to solving the problem, taking into account the above-mentioned requirements, let us select the range of the particles taking part in coagulation. We limit the large sizes of the particles by the mass G . So that the concentration of the particles of mass larger than G should be negligible compared to the total concentration of the particles and should not become comparable with the total concentration during the reasonable coagulation time. All the particles which become larger than G as the result of coagulation are considered to be removed from the system and they are not involved in the further coagulation process. This can be regarded as a run-off of the particles, for instance, at the expense of gravitational subsidence, which is natural for the system.

To describe more fully the dynamics of changing the particle size range, let us divide the mass range in the range from 0 to G into fractions on a logarithmic scale. For simplicity let us perform this by doubling the masses, i. e. $2g_i = g_{i+1}$; such subdivision results in the simplest form of the equations.

Let us now derive an equation for the number of particles in each fraction. To accomplish this we integrate equation (1.6) for each i -th fraction in the range from g to g_{i+1} . For the left-hand side of equation (1.6) we obtain

$$\int_{g_i}^{g_{i+1}} \frac{\partial \varphi_g^c}{\partial t} dg = \frac{dN_i^c}{dt}. \quad (1.15)$$

In the right-hand side of equation (1.6) we remove the mean values $\bar{\varphi}_x, f_y$ from the integration sign and after simple transformations we obtain the following equation:

$$\begin{aligned} \frac{dN_i}{dt} = & \frac{1}{2} \sum_{j \neq 1}^{i-2} \tilde{K}_{i-1,j}^1 N_{i-1} N_j + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\tilde{K}_{ij}^0 - \tilde{K}_{ij}^1 \right) N_i N_j - \\ & - \sum_{j=1}^I \tilde{K}_{ij}^0 N_i N_j \end{aligned} \quad (1.16)$$

with the corresponding initial conditions:

$$N_i|_{t=0} = N_i^0, \quad (1.17)$$

where

$$\begin{aligned} K_{ij}^1 = & (g_{i+1} - g_i)^{-1} (g_{j+1} - g_j)^{-1} \int_{x+y > g_{i+1}}^{g_{i+1}} \int_{g_{j+1}}^{g_{j+1}} \tilde{K}(x, y) dx dy, \\ K_{ij}^0 = & (g_{i+1} - g_i)^{-1} (g_{j+1} - g_j)^{-1} \int_{g_i}^{g_{i+1}} \int_{g_j}^{g_{j+1}} \tilde{K}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

The solution of the system of differential equations (1.16), (1.17) allows one to describe the temporal changes of the coagulating particles with arbitrary coagulation kernels.

After solving problem (1.16), (1.17) the question might come to mind about the correctness of the transformations performed and the accuracy of the solution obtained. For some coagulation kernels $\tilde{K}(x, y)$ analytical solutions exist. Such solutions were obtained to test the correctness. As we have already mentioned $\tilde{K}(x, y) = 1$, $\tilde{K}(x, y) = x + y$ [4] belong to the kernels of this type. The comparison of the exact solution of (1.6)–(1.8) with the solution of (1.16), (1.17) shows the discrepancy not greater than 10^{-4} in the total concentration and 10^{-2} in the mass range, but the solution is stable and the errors are not accumulated. Equation (1.6)

differs essentially from (1.16): system (1.6) is infinite since there is no upper bound on the size of particles while system (1.16) is finite since the particles of critical mass G are removed from the system on further coagulating. As long as the mass of the largest fraction is negligible compared to the total mass of the system, the mass loss from the last fraction is small. A considerable mass of the largest fraction results in a considerable mass loss from the system via the last fraction. Hence exact solution (1.6) deviates distinctly from approximate solution (1.16). This is natural, since system (1.16) is more realistic than equation (1.6), wherein particles of infinitely large mass are present.

For the kernel $\tilde{K}(x, y) = x + y$ the self-similar spectrum of the form presented in [9] cannot exist in the infinite system. For the same kernel of kinetic equation (1.16) the self-similar spectrum of the form presented here was obtained in [11]. As noted above, the discrepancy between solutions (1.6) and (1.16) is not surprising at large values of time when the spectrum goes into the asymptotic regime. Fuks succeeded in obtaining the exact solution for the system with bounded mass of particles [3]. For the exact solution of the finite system the self-similarity was shown to exist, which coincides with the self-preserving spectrum found for system (1.16). This fact can prove the validity of the model put forward.

Using the proposed model can significantly extend the class of coagulation problems which could not be solved previously due to complications caused by the complexity of the coagulation kernel $\tilde{K}(x, y)$.

Now one can obtain the solutions for an arbitrary dependence $\tilde{K}(x, y)$ even when the analytical form of the dependence $\tilde{K}(x, y)$ changes in the process of solving, which is the case in the present paper.

The terms describing the source $I(\varphi_g, \vec{x}, t)$ of new particles of an arbitrary shape can be entered into the right-hand side of equation (1.16). One can also insert (linear in φ_g) terms describing a particle run-off. In the present paper we insert the particle source into the smallest fraction; hereinafter this source imitates the new particle creation due to nucleation.

When applying the model, one must keep watch on the conservation of mass in the system. The point is that if one uses 30 fractions when doubling the mass (as shown above), then the mass range of particles involved in coagulation covers more than nine orders of magnitude. Thus, even the accuracy within six orders of magnitude in the particle concentration is insufficient for the mass concentration, since a small

error in the particle concentration of large fractions may cause considerable errors in the mass for the whole system. One can avoid these difficulties by writing the original equation for the mass concentration.

Multiplying equation (1.6) by g and making simple transformations we obtain the following evolutionary equation for the mass concentrations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_g^c}{\partial t} = & \frac{1}{2} \int_0^g \left(\tilde{K}^m(g - g_1) + \tilde{K}(g - g_1, g_1) \right) \times \\ & \times m_{g_1} m_{g-g_1} dg_1 - m_g \int_0^\infty \tilde{K}(g, g_1) m_{g_1} dg_1, \end{aligned} \quad (1.18)$$

where $g\varphi_g = m_g$, $\tilde{K}_g^m(x, y) = \tilde{K}(x, y)y^{-1}$. Accordingly, the initial condition has the form

$$m_g|_{t=0} = m_g^0. \quad (1.19)$$

Similarly to (1.16), we will obtain the discrete analogue by integrating both sides of equation (1.18) between g_i and g_{i+1} , within the i -th fraction. Removing the mean product of the masses \overline{m}_i and \overline{m}_j from the integration sign we obtain

$$\begin{aligned} \frac{dM_i}{dt} = & \frac{1}{2} \sum_{j \neq 1}^{i-2} \left(\tilde{K}_{i-1,j}^{m_1} + \tilde{K}_{j,i-1}^{m_1} \right) M_{i-1} M_j + \tilde{K}_{i-1,i-1}^{m_0} M_{i-1}^2 + \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\tilde{K}_{ij}^{m_0} - \tilde{K}_{ij}^{m_1} - \tilde{K}_{ji}^{m_0} - \tilde{K}_{ji}^{m_1} \right) M_i M_j - \sum_{j=1}^I \tilde{K}_{ij}^{m_0} M_i M_j \end{aligned} \quad (1.20)$$

with the initial conditions

$$M_i|_{t=0} = M_i^0, \quad (1.21)$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{ij}^{m_1} = & (g_{i+1} - g_i)^{-1} (g_{j+1} - g_j)^{-1} \int_{x+y > g_{i+1}}^{g_{i+1}} \int_{g_j}^{g_{j+1}} \tilde{K}(x, y) y^{-1} dx dy, \\ \tilde{K}_{ij}^{m_0} = & (g_{i+1} - g_i)^{-1} (g_{j+1} - g_j)^{-1} \int_{g_i}^{g_{i+1}} \int_{g_j}^{g_{j+1}} \tilde{K}(x, y) y^{-1} dx dy. \end{aligned} \quad (1.22)$$

It is a relatively simple matter to check the solution of problem (1.21)–(1.22), since the correct solution gives the initial total mass of the system. If the system involves sources and run-offs, the law of conservation of mass must hold with these sources and run-offs taken into account. We performed such procedures and obtained the solutions of the systems with and without run-offs and sources. The total mass of the system proved to be conserved with an accuracy of 10^{-5} to 10^{-4} (in relative units). Thus, to obtain the solution for the particle concentration one has to solve the system of equations (1.16), (1.17). Solving the system of differential equations (1.20) with initial conditions (1.22) is sufficient to determine the mass concentrations. The corresponding initial condition takes the form

$$m_g|_{t=0} = m_g^0. \quad (1.23)$$

To construct the computational algorithm of solution of problem (1.3)–(1.23) we use the method of splitting into physical processes. Let us consider the following scheme on each small time interval $[t_j, t_{j+1}]$ of length Δt . The scheme consists of three principal steps:

- (1) the aerosol substance transfer along trajectories;
- (2) the turbulent diffusion;
- (3) the local change of the aerosol dispersivity due to coagulation.

The numerical algorithm and the method of solving problem (1.3)–(1.23) are given in [6–8, 10, 11].

2. Model of hydrothermodynamics of regional atmospheric processes

The principal hydrothermodynamic equations used in the model have the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \text{div} \vec{u} \hat{u} &= -\frac{\partial P'}{\partial x} + a_1 \frac{\partial P'}{\partial \sigma} + l \hat{v}' + F_u + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_u \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{u}}{\bar{\rho}} \right), \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \text{div} \vec{v} \hat{v} &= -\frac{\partial P'}{\partial y} + a_2 \frac{\partial P'}{\partial \sigma} - l \hat{u}' + F_v + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_u \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{v}}{\bar{\rho}} \right), \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + \text{div} \vec{w} \hat{w} &= -a_3 \frac{\partial P'}{\partial \sigma} + \lambda \vartheta' (1 + \gamma q) + F_w + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_u \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{w}}{\bar{\rho}} \right), \\ \frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial t} + \text{div} \vec{w} \hat{\vartheta} + \frac{S}{a_3} (\hat{w}' + \tilde{\delta}_x \hat{u}' + \tilde{\delta}_y \hat{v}') &= \frac{L_w \Phi \bar{\rho}}{C_p} + F_\vartheta + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_\vartheta \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{\vartheta}}{\bar{\rho}} \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \text{div} \vec{u} \hat{q} = -a_3 \hat{w} \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \Phi \bar{\rho} + F_q + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_q \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{q}}{\bar{\rho}} \right),$$

$$\frac{\partial \hat{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \sigma} = 0,$$

where $u = U + u'$, $v = V + v'$, $w = W + w'$, $\vartheta = \Theta + \vartheta'$, $q = Q + q'$, $p = P + p'$ (the capital letters denote the large-scale components of the meteorological fields, the primed letters denote the deviations).

Here the following notation is used:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tilde{\delta}_x \frac{\sigma - \hat{H}}{H - \tilde{\delta}(x, y)}, \quad a_2 = \tilde{\delta}_y \frac{\sigma - \hat{H}}{H - \tilde{\delta}(x, y)}, \quad a_3 = \frac{\hat{H}}{H - \tilde{\delta}(x, y)}, \\ \text{div} \vec{u} \hat{\varphi} &= \frac{\partial u \hat{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial v \hat{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial w \hat{\varphi}}{\partial \sigma}, \quad \hat{\varphi} = \rho \varphi, \quad \varphi = (u, v, w, \vartheta', q'), \\ \tilde{\delta}_x &= \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial x}, \quad \tilde{\delta}_y = \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial y}, \quad w = a_1 u + a_2 v + a_3 w, \\ F_u &= \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 \tau_{11} + a_2 \tau_{12}), \\ F_v &= \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 \tau_{21} + a_2 \tau_{22}), \\ F_w &= \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 \tau_{31} + a_2 \tau_{32}), \\ F_\vartheta &= \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 H_1 + a_2 H_2), \\ F_q &= \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 Q_1 + a_2 Q_2), \end{aligned} \tag{2.2}$$

t is time; u , v , w are the components of the wind velocity vector in the directions of curvilinear coordinates x , y , σ ; $\vec{u} = (u, v, w)$; ϑ is the potential temperature; ρ is the density; l is the Koriolis parameter; q is the specific humidity; p is the pressure; L_w is the latent heat of condensation; $\tilde{\delta}(x, y)$ is the function describing the terrain relief; S is the stratification parameter; $\lambda = g/T$ is the buoyancy parameter; $\bar{\rho}(z)$ is the background density; τ_{ij} , H_i , Q_i , ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$) are the Reynolds viscous stress tensor and turbulent flows of heat and moisture, respectively; ν_u and $n\nu_\vartheta$ are the vertical turbulent coefficients for the moments of momentum, heat and moisture.

We will solve the system of equations (2.1), (2.2) in the domain

$$D_t = D \times [0, T], \quad D = \{(x, y, \sigma) : x \in [-X, X], y \in [-Y, Y], \sigma \in [0, H]\}$$

under the following initial and boundary conditions:

$$\begin{aligned} \hat{u}' = \hat{v}' = \hat{w}' = 0, \quad \hat{\vartheta}' = 0, \quad \hat{q}' = 0, \quad t = 0, \\ \frac{\partial \hat{u}'}{\partial x} = \frac{\partial \hat{v}'}{\partial x} = \frac{\partial \hat{w}'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\vartheta}'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{q}'}{\partial x} = 0, \quad x = \pm X, \\ \frac{\partial \hat{u}'}{\partial y} = \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} = \frac{\partial \hat{w}'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\vartheta}'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{q}'}{\partial y} = 0, \quad y = \pm Y, \\ \hat{u}' = \hat{v}' = \hat{w}' = 0, \quad \hat{\vartheta}' = 0, \quad \hat{q}' = 0, \quad \sigma = H, \quad (2.3) \\ a_3 h \frac{\partial \hat{u}}{\partial \sigma} = a_u \hat{u}, \quad a_3 h \frac{\partial \hat{v}}{\partial \sigma} = a_v \hat{v}, \quad a_3 h \frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial \sigma} = a_\vartheta (\hat{\vartheta} - \hat{\vartheta}_0), \\ a_3 h \frac{\partial \hat{q}}{\partial \sigma} = a_\vartheta (\hat{q} - \hat{q}_0), \quad \frac{\hat{w}}{h} = -\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}\right), \quad \sigma = \frac{(h - \hat{\delta}(x, y))\hat{H}}{H - \hat{\delta}(x, y)}. \end{aligned}$$

The parameters $a_u(x, y)$, $a_v(x, y)$ are determined using the model of the lowest atmospheric layer. The operators of the horizontal turbulent exchange F_u , F_v , F_ϑ , F_q are approximated by the viscous stress tensor. To do this, the symmetrical stress tensor τ_{ij} is represented in the form of the function dependent on the deformation tensor D_{ij} of the average motion. The temperature of the earth's surface is determined from the heat balance equation, with allowance made for the heat and moisture exchanges in the soil.

The vertical turbulent exchange coefficients are determined by the turbulent energy balance equation by using the Kolmogorov approximate similarity hypothesis. According to the theory, the turbulent exchange coefficients ν_u and the rate of the turbulent energy dissipation into the heat ϵ are single-valued functions of the kinetic turbulent energy b and the turbulence scale l_0 . As a result the system takes the following form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} + \vec{u} \text{grad}(b) = a_3 \nu_u \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 - \lambda \alpha_T \frac{\partial \vartheta'}{\partial \sigma} - \right. \\ \left. - \frac{\lambda \alpha_T S}{a_3} - \lambda \alpha_T \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right] + a_3^2 \alpha_b \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_u \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{cb^2}{\nu_u}, \quad (2.4) \end{aligned}$$

where α_T , α_θ , and c are dimensionless universal constants. The turbulence scale is calculated using the generalized Karman formula for the mixing length:

$$l_0 = -a_3 \kappa \psi / \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad \psi = b^{1/2} l_0. \quad (2.5)$$

We solve (2.4), (2.5) under the initial and boundary conditions:

$$\begin{aligned} b &= 0, \quad t = 0, \\ b &= \tilde{b}^2(\zeta_h, \zeta_0), \quad \sigma = \left[h - \tilde{\delta}(x, y) \right] a_3, \\ \frac{\partial b}{\partial \sigma} &= 0, \quad \sigma = H, \\ \frac{\partial b}{\partial \kappa} &= 0, \quad \kappa = \pm X, \\ \frac{\partial b}{\partial y} &= 0, \quad y = \pm Y, \end{aligned} \quad (2.6)$$

where $\tilde{b}^2(\zeta_h, \zeta_0)$ is the value of the turbulent pulsation energy at the upper boundary of the lowest atmospheric layer.

In order to find a solution of problem (2.1)–(2.6) as the function of time, the method of splitting into physical processes is applied. The finite difference approximation and the solution technique are given in [1, 6–8, 10].

The sequence of solving general problem (1.3)–(2.6) is as follows:

(1) problem (2.1)–(2.6) of the atmosphere hydrothermodynamics is solved. From the solution obtained we find the values of the meteorological fields (u , v , w , ϑ , q) and the corresponding turbulent characteristics and functions allowing for the interaction of the air mass with the earth's surface;

(2) using the known values of the meteorological fields one solves problem (1.3)–(1.23) of the polydisperse aerosol spreading, with allowance made for coagulation.

3. Results of numerical experiments

Using the numerical model presented above, numerical experiments were performed with the aim to reproduce the hydrometeorological regime for a summer season and the aerosol spreading with coagulation taken into account. The numerical experiment was performed in two

steps: (1) modelling the atmospheric circulation in the mountainous terrain covering the territory around Lake Baikal and its surrounding region, given values of the input parameters of the model and the background flow; (2) modelling the aerosol spreading from the point source with the coagulation taken into account.

The calculations were performed in the grid domain with dimensions $22 \times 32 \times 12$ for the following values of input parameters: the horizontal steps $\Delta x = \Delta y = 25$ km, the vertical steps $\Delta z_1 = z_0$, $\Delta z_2 = 50$ m, $\Delta z_3 = \Delta z_4 = 100$ m, $\Delta z_k = 200$ m ($k = 5, \dots, 12$), $X = 425$ km, $Y = 775$ km, $H = 1600$ m. The time-step was $\Delta t = 20$ min for the model of hydrothermodynamics, $\Delta t = 5$ min for model (1.3)–(1.23), $U|_{z=H} = 5$ m/s, $V|_{z=H} = 0$. The unit source (marked by a cross in Figs. 1, 2) was located at a distance of about 60 km to the west of Lake Baikal. The pollutant source was located at an altitude of 250 m, its capacity was 10^8 particles/cm³, the diameter of particles was 10 \AA . The zero time in calculations was 6 a. m. local time. The changes of particle masses were made on the logarithmic scale $2g_i = g_{i+1}$ where i and $i + 1$ are the successive fractions on the scale of linear dimensions (diameters). The successive fractions are related by the expression $\sqrt[3]{2}d_i = d_{i+1}$ ($i = 1, \dots, 20$).

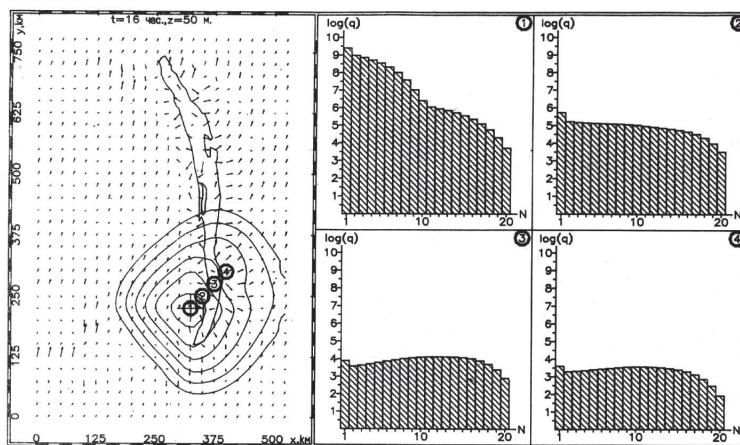


Fig. 1. (a) Horizontal cross-sections of the wind velocity vector and the pollutant concentration for the lightest fraction. The concentration is plotted on the contour map. The isolines are given on the logarithmic scale, (b) particle diameter distribution at the altitude of 50 m for $t = 16$ hr

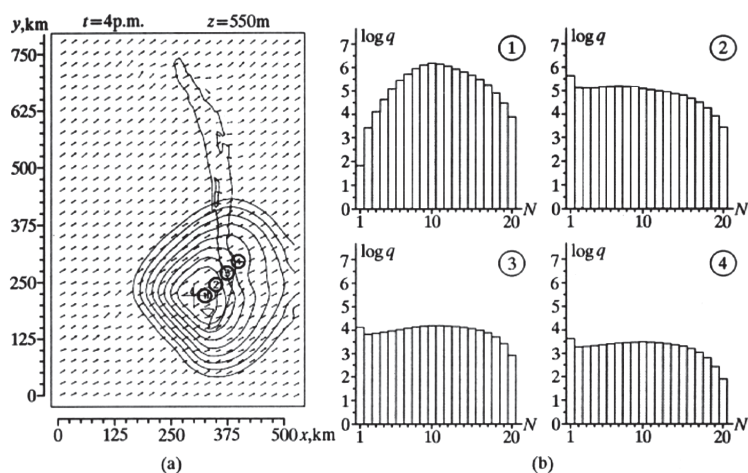


Fig. 2. (a) The horizontal cross-sections of the wind velocity vector and the pollutant concentration for the lightest fraction. The concentration is plotted on the contour map. The isolines are given on the logarithmic scale, (b) the particle diameter distribution at an altitude of 550 m for $t = 16$ hr

Fig. 1, 2 present the results obtained for various altitudes and time. The notations of the corresponding parameters are shown in the plots. Fig. 1a and 2a present the two-dimensional cross-sections of the velocity vector and the isolines of the pollutant concentration for the lightest fraction on the logarithmic scale in the plane (x, y) . Fig. 1b and 2b show the aerosol particle diameter distributions (histograms) for various distances from the source (numbers 1 to 4 in circles) and for various altitudes and coagulation times. One can see that in most cases the maximum concentrations correspond to the first fraction, which one would expect since this fraction is replenished by the source. However, the fourth fraction rather than the first one dominates at higher altitudes, for instance, for $z = 550$ m. This is because the meteorological fields and turbulent characteristics vary with altitude.

The results obtained show that the model developed allows one to predict the coagulating aerosol spreading and to determine the particle diameter distributions at various distances from the source and at various altitudes in relation to the coagulation time. This in turn allows one to calculate the particle concentrations and size distributions in a given region for various capacities of the natural and anthropogenic sources.

REFERENCES

1. Aloyan A. E. Nonhydrostatic numerical models of local atmospheric processes. Novosibirsk: Preprint No. 451, Comp. Cent. Sib. Branch, USSR Acad. Sci., 1984 (in Russian).
2. Atmospheric Aerosol and Nucleation / Eds. G. Valt and P. Wagner. Springer, 1988.
3. Fuks N. L. Mechanics of Aerosols. M.: USSR Acad. Sci., 1965 (in Russian).
4. Lushnikov A. A., Piskunov V. N. Three new exactly solvable models in the theory of coagulation // Tr. Akad. Nauk SSSR. 1982. V. 268, No. 1. Pp. 132–136 (in Russian).
5. Marchuk G. I. Computational Mathematics Methods. M.: Nauka, 1977 (in Russian).
6. Marchuk G. I. Mathematical Modelling in Environmental Problems. M.: Nauka, 1982 (in Russian).
7. Marchuk G. I., Aloyan A. E. Mathematical modelling in ecological problems. M.: Preprint No. 234, Dept. Numer. Math., USSR Acad. Sci., 1989 (in Russian).
8. Penenko V. V., Aloyan A. E. Models and Methods for Environmental Protection Problems. Novosibirsk: Nauka, 1985 (in Russian).
9. Voloshchuk V. M., Sedunov Yu. S. Coagulation Processes in Disperse Systems. L.: Gidrometeoizdat, 1975 (in Russian).
10. Yordanov D. L., Aloyan A. E. On the diffusivity tensor in calculating pollution in the planetary boundary layer // Comp. Rend. Academ. Bulgar. Sci. 1981. V. 34, No. 7. Pp. 981–983.
11. Zagainov V. A., Lushnikov A. A. Modelling of the atmospheric coagulating aerosol // In: Atmospheric Aerosol and Nucleation. Springer. 1988. Pp. 93–95.

DYNAMICS OF MESOSCALE BOUNDARY ATMOSPHERIC LAYER AND IMPURITY SPREADING WITH THE PHOTOCHEMICAL TRANSFORMATION ALLOWED FOR⁶

The papers considers the joint computational model (i) of hydro- and thermodynamics for the boundary atmospheric

⁶Russ. J. Numer. Analysis Math. Modelling, 1995, V. 10, No. 2, pp. 93–114. Jointly with A. E. Aloyan, V. O. Arutyunyan.

layer, with thermal and orographic nonhomogeneities of the underlying surface taken into account, and (ii) of the spreading of multicomponent impurity, with the photochemical transformations taken into account. The coefficients of horizontal turbulent exchange are determined by means of the Reynolds stress tensor. The coefficient of vertical exchange is determined from equations for the kinetic turbulent energy and the rate of dissipation of energy into heat. The model takes into account the main sequences of photochemical reactions which are characteristic of the lower troposphere, large cities and industrial areas. The results of computational experiments on impurity spreading in the atmosphere and investigation of sensitivity of small gas constituents to variations in stable particles are presented.

In mathematical modelling the problems on environmental control, it is important to take into account the secondary pollution of the atmosphere. The impurities from various sources (industrial objects, motor transport, etc.) are transformed in the atmosphere so that substances more toxic than the released ones can emerge. A great amount of organic and inorganic chemical substances escape into the atmosphere as gases, liquids and solid particles. Sulphur and nitric oxides, carbon oxides and carbon dioxides, etc. are the most essential anthropogenic inorganic substances. Sulphur oxides, for example, have a detrimental effect upon vegetation. In actual conditions the list of the substances released and formed in the course of chemical and photochemical reactions is very long and the number of these substances gradually increases. Gas impurities which escape into the atmosphere and have a pronounced effect on the climate and environment are methane (CH_4), carbon oxide (CO), formaldehyde (CH_2O) etc. With the incomplete combustion of these substances, a number of intermediate substances emerge such as methyl-peroxide (CH_3OOH), formic acid ($HCOOH$), methyl-nitrate (CH_3ONO_2) etc.

The description of the transformations of substances can be detailed to a greater or lesser extent in accordance with the specific physical problem and our purposes. Here the determining characteristic is the lifetime for each substance. In the paper photochemical transformations are considered for substances including nitrogen, sulphur, and carbon.

Since all the processes take place in the turbulent atmosphere, the problem on dynamics of a multicomponent impurity should be solved

together with hydrodynamic models. This allows us to model the temporal changes of the fields of small gas constituents, the fields of meteorological elements, and the turbulent characteristics of the atmosphere. Besides, the coefficients of turbulent diffusion are functions of field gradients and atmosphere stability.

Based on the models developed in [1, 2, 12, 13, 16], we construct a new version of joint models for dynamics of atmospheric processes and transfer of multicomponent impurity, with photochemical transformation taken into account. Unlike [1, 2, 12, 13, 16], the coefficients of vertical turbulent exchange are determined solving simultaneously the equations for kinetic energy of turbulence and the velocity of dissipation of energy into heat. The processes of photochemical transformation are described using the model from [2] complemented by chemical reactions which take into account ammonia transformations.

1. Main equations

The system of hydrothermodynamic equations in the nonhydrostatic approximation is used for describing mesoscale atmospheric processes. In order to take into account the orography in numerical models, we switch from the Cartesian coordinates x, y, z to the conventional generalized system of coordinates $(\bar{x}, \bar{y}, \sigma)$ by means of the formulae

$$x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}, \quad \sigma = \frac{z - \tilde{\delta}(x, y)}{H - \tilde{\delta}(x, y)} \hat{H}, \quad (1.1)$$

where H and \hat{H} are the height of upper boundary in the σ - and z -systems of coordinates, respectively, and $\tilde{\delta}(x, y)$ is the function describing the relief. The equations in the new system of coordinates are (see [1, 12, 13, 16])

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \text{div} \vec{u} \hat{u} = -\frac{\partial P'}{\partial x} + a_1 \frac{\partial P'}{\partial \sigma} + l \hat{v}' + F_u + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_u \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{u}}{\bar{\rho}} \right), \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \text{div} \vec{v} \hat{v} = -\frac{\partial P'}{\partial y} + a_2 \frac{\partial P'}{\partial \sigma} - l \hat{u}' + F_v + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_u \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{v}}{\bar{\rho}} \right), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + \text{div} \vec{w} \hat{w} = -a_3 \frac{\partial P'}{\partial \sigma} + \lambda \vartheta' (1 + 0.61q) + F_w + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_u \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{w}}{\bar{\rho}} \right), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial t} + \text{div} \vec{u} \hat{\vartheta} + \frac{S}{a_3} (\hat{w}' + \tilde{\delta}_x \hat{u}' + \tilde{\delta}_y \hat{v}') = \frac{L_w \Phi \bar{\rho}}{C_p} + F_\vartheta + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_\vartheta \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{\vartheta}}{\bar{\rho}} \right), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \text{div} \vec{u} \hat{q} = -a_3 \hat{w} \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \Phi \bar{\rho} + F_q + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_q \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{q}}{\bar{\rho}} \right), \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \hat{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \sigma} = 0, \quad (1.7)$$

$$u = U + u', \quad v = V + v', \quad w = W + w', \\ \vartheta = \Theta + \vartheta', \quad q = Q + q', \quad p = P + p'.$$

(the capital letters denote large-scale components of meteorological fields, the primed letters denote deviations). Here we use the notations:

$$a_1 = \tilde{\delta}_x \frac{\sigma - \hat{H}}{H - \tilde{\delta}(x, y)}, \quad a_2 = \tilde{\delta}_y \frac{\sigma - \hat{H}}{H - \tilde{\delta}(x, y)}, \quad a_3 = \frac{\hat{H}}{H - \tilde{\delta}(x, y)}, \\ \text{div} \vec{u} \hat{\varphi} = \frac{\partial u \hat{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial v \hat{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial w \hat{\varphi}}{\partial \sigma}, \quad \hat{\varphi} = \rho \varphi, \quad \varphi = (u, v, w, \vartheta', q'), \\ \tilde{\delta}_x = \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial x}, \quad \tilde{\delta}_y = \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial y}, \quad w = a_1 u + a_2 v + a_3 w, \\ F_u = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 \tau_{11} + a_2 \tau_{12}), \\ F_v = \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 \tau_{21} + a_2 \tau_{22}), \\ F_w = \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 \tau_{31} + a_2 \tau_{32}), \\ F_\vartheta = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 H_1 + a_2 H_2), \\ F_q = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 Q_1 + a_2 Q_2), \quad (1.8)$$

where t is time; u, v, w are components of the wind velocity vector in the coordinate system \bar{x}, \bar{y}, σ , i. e. $\vec{u} = (u, v, w)$; ϑ is potential temperature; ρ is density; l is the Coriolis parameter; q is the specific humidity; L_w is the latent heat of condensation; Φ is the rate of forming the liquid phase; $S(x, y)$ is a function describing the relief; S is the parameter of stratification; $\lambda = g/T$ is the buoyancy parameter; $\bar{\rho}(z)$ is the background

density; τ_{ij}, H_i, Q_i ($i = \overline{1,3}; j = \overline{1,2}$) is the tensor of Reynolds stress; ν_u, ν_ϑ are vertical coefficients of turbulence for the momentum, heat and moisture.

In order to describe the structure of the lowest atmospheric layer we use the Monin–Oboukhov theory of similarity and the Businger empiric functions [7, 14]. In approximating vertical profiles of meteorological fields in the lowest atmospheric layer we use the "1/3-law" for the case of strong instability and, as in [7, 14], the linear dependence for the case of strong stability. The ultimate model of the lowest atmospheric layer is written as follows:

$$\begin{aligned} \kappa z \frac{\partial |\vec{u}|}{\partial z} &= u_* \varphi_u(\zeta), \quad \kappa \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} = \tilde{P}_* \varphi_\vartheta(\zeta), \quad (P = \vartheta, q), \\ \kappa |\vec{u}| &= u_* f_u(\zeta, \zeta_u), \quad P - P_0 = \tilde{P}_* f_\vartheta(\zeta, \zeta_\vartheta), \quad \zeta = \frac{z}{L}, \quad \zeta_h = \frac{h}{L}, \\ \nu_i &= \frac{u_* \kappa z}{u_i(\zeta)}, \quad (\nu_i)_h = \frac{u_* \kappa h}{\varphi_i(\zeta_h)}, \quad a_i = \frac{\varphi_i(\zeta)}{f_i(\zeta_h, \zeta_i)}, \quad L = \frac{u_*^2}{\kappa^2 \lambda \varphi_*}, \quad (i = u, \varphi), \\ f_u(\zeta, \zeta_0) &= \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\varphi_u(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad f_\vartheta(\zeta, \zeta_0) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\varphi_\vartheta(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \end{aligned} \quad (1.8)$$

where $|\vec{u}| = (u^2 + v^2)^{1/2}$ is the absolute value of the velocity vector; u_* is the friction rate; ϑ_* and q_* are the scales of the potential temperature and the specific humidity, respectively; h is the height of the lowest atmospheric layer; L is the scale of length; z_u and z_ϑ are parameters of roughness for the wind and temperature, respectively; ζ is the dimensionless height which is the parameter of hydrostatic stability; and φ_i and f_i are directed universal functions. In the lowest atmospheric layer we also take into account a correction to the potential temperature due to moisture. In doing so, the scale L slightly changes. We introduce the new scale of the length $L_* = L(J_* + 1)$ and corresponding dimensionless height

$$\zeta^* = \frac{z}{L_*} = \zeta(1 + J_*),$$

where $J_* = 0.61T(q_h - q_{z_0})/(\vartheta_h - \vartheta_{z_0})$ is a dimensionless number, which is a measure of relative significance of moisture and thermal stratification. The universal functions φ_i and f_i logically, remain the same.

We solve the system of equations (1.2)–(1.9) in the domain

$$D_t = D \times [0, \bar{t}], \quad D = \{(x, y, \sigma) : x \in [-X, X], \quad y \in [-Y, Y], \quad \sigma \in [0, H]\}$$

under the initial and boundary conditions

$$\hat{u}' = \hat{v}' = \hat{w}' = 0, \quad \hat{\vartheta}' = 0, \quad \hat{q}' = 0, \quad t = 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \hat{u}'}{\partial x} = \frac{\partial \hat{v}'}{\partial x} = \frac{\partial \hat{w}'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\vartheta}'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{q}'}{\partial x} = 0, \quad x = \pm X, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \hat{u}'}{\partial y} = \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} = \frac{\partial \hat{w}'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\vartheta}'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{q}'}{\partial y} = 0, \quad y = \pm Y, \quad (1.12)$$

$$\hat{u}' = \hat{v}' = \hat{w}' = 0, \quad \hat{\vartheta}' = 0, \quad \hat{q}' = 0, \quad \sigma = H, \quad (1.13)$$

$$a_3 h \frac{\partial \hat{u}}{\partial \sigma} = a_u \hat{u}, \quad a_3 h \frac{\partial \hat{v}}{\partial \sigma} = a_v \hat{v}, \quad a_3 h \frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial \sigma} = a_\vartheta (\hat{\vartheta} - \hat{\vartheta}_0),$$

$$a_3 h \frac{\partial \hat{q}}{\partial \sigma} = a_q (\hat{q} - \hat{q}_0), \quad \frac{\hat{w}}{h} = - \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right),$$

$$\sigma = \frac{(h - \hat{\delta}(x, y)) \hat{H}}{H - \hat{\delta}(x, y)}, \quad (1.14)$$

$$\hat{w}' = 0, \quad \sigma = 0.$$

The temperature over the water surface is assumed to be given, and the specific humidity is calculated according to the Magnus formula. The temperature of the ground is determined solving simultaneously the equation of heat balance and the equation of heat conduction in the ground. The flux of short-wave length solar radiation is calculated according to the Albrecht formula, and the effective radiation is calculated according to the Brent formula. Artificial heat sources in town are taken into account in the heat balance equation.

2. Parametrization of turbulent diffusion of subgrid scale

Since $Re \gg 10^3$ (Re is the Reynolds number) in the majority of problems of aerophysics, we should write the subgrid turbulent motions in a parametrized form and thus separate the motions whose scale is less than the dimension of the calculated cell. Then, on averaging over the volume of the calculated cell, in the hydrothermodynamic equations we obtain common terms describing the Reynolds stress of subgrid scale. Following [1, 10], we represent the symmetric tensor of the stress $\tau_{i,j}$ as a function depending on the strain tensor $D_{i,j}$ of the averaged motion, namely

$$\tau_{i,j} = \bar{\rho} K_M D_{i,j}, \quad (2.1)$$

where

$$D_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\delta_{ij}}{\delta_{ii}} \nabla u_i, \quad (i = 1, 2; j = 1, 2). \quad (2.2)$$

We determine the heat flow by the formula

$$H = \bar{\rho} K_H \delta_{ii} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}. \quad (2.3)$$

Here K_M and K_H are parameters of kinematic viscosity and diffusion, respectively. In (2.1)–(2.3) we use tensor notation of summation over repeating indices. In order to determine the changes of the parameter K_M in time and space, we use the scheme of closure

$$K_M = \begin{cases} (\tilde{K}\bar{\Delta})^2 |Def|, & \text{if } Ri > 1, \\ (\tilde{K}\bar{\Delta})^2 |Def| (1 - (K_H/K_M) Ri), & \text{if } Ri \leq 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

where $K_H/K_M = 1/Pr \approx 3$, $\bar{\Delta} = A^{1/2}$, $A = \Delta x \Delta y$ – is the volume of the calculated cell, \tilde{K} is a constant. The deformation Def is determined by the formula

$$(Def)^2 = \frac{1}{2} (D_{11}^2 + D_{22}^2) + D_{12}^2. \quad (2.5)$$

The Richardson number Ri is represented as

$$Ri = \frac{g}{\Theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} / (Def)^2. \quad (2.6)$$

Writing equation (2.4), we assume that the subgrid turbulence is adjusted instantaneously to the average flow of momentum and the turbulent flow of heat.

If the horizontal scales of processes under investigation are larger than the vertical scales, a combined method is used, namely the horizontal coefficients of turbulent exchange are determined from (2.1)–(2.6) and the vertical coefficients are determined from

(i) the balance equation for turbulent energy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} + \vec{u} grad(b) = \nu_u \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - \lambda \alpha_T \left(\frac{\partial \vartheta'}{\partial z} + S \right) - \alpha_q g \frac{\partial q}{\partial z} \right] + \\ + \alpha_b \frac{\partial}{\partial z} \nu_u \frac{\partial b}{\partial z} - c \frac{b^2}{\nu_u}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

where $\alpha_T = \nu_\vartheta/\nu_u = \varphi_u(\zeta)/\varphi_\vartheta(\zeta)$, a_b and C are dimensionless universal constants, and

(ii) the equation for the rate of dissipation of turbulent energy into heat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{u} \text{grad}(\epsilon) = \alpha_1 \frac{\epsilon}{b} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - \alpha_{\theta_\epsilon} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \alpha_{\theta_\epsilon} \frac{\partial q}{\partial z} \right] + \\ + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial z} - \alpha_3 \frac{\epsilon^2}{b}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

The initial and boundary conditions are (see [3])

$$b = 0, \quad \epsilon = 0 \quad \text{for } t = 0, \quad t = H,$$

$$b = b_u^2(\zeta_h, \zeta_0), \quad \epsilon = \epsilon_h(\zeta_h, \zeta_0) \quad \text{for } z = h.$$

3. Transfer of impurity with photochemical transformations taken into account

Assume that there exist n gas components of impurity with the concentrations

$$\varphi_i = \varphi_i(\vec{x}, t), \quad \vec{x} = (x, y, z), \quad (i = \overline{1, n}).$$

Denote by $\vec{\varphi}_i = \{\varphi_i\}$, $(i = \overline{1, n})$ the vector of the concentrations. Then the system of equations for transfer of impurities and their photochemical transformations is

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial y} + (w - w_g) \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial z} = \vec{f} + B(\vec{\varphi}, \vartheta) + F_1 + F_2. \quad (3.1)$$

Here $\vec{f} = \{f_i\}$, $(i = \overline{1, n})$ is the source of impurities, and

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \mu_{xx} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu_{yy} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \chi_1 \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \sigma}, \\ F_2 &= \frac{\partial}{\partial x} a_1 \mu_{xx} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \sigma} + a_1 \frac{\partial}{\partial \sigma} \mu_{xx} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} a_2 \mu_{yy} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \sigma} + a_2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \mu_{yy} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial y}, \\ a_1 &= \tilde{\delta}_x \frac{\sigma - H}{H - \tilde{\delta}(x, y)}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$a_2 = \tilde{\delta}_y \frac{\sigma - H}{H - \tilde{\delta}(x, y)}, \quad a_3 = \frac{H}{H - \tilde{\delta}(x, y)},$$

$$\chi_1 = a_1^2 \mu_{xx} + a_2^2 \mu_{yy} + a_3^2 \mu_{\sigma\sigma}.$$

The diffusion coefficients are given in [9, 13, 16, 18].

We can assume that the turbulence is symmetric in the lowest atmospheric layer, unlike the boundary layer. Therefore $\overline{\rho u'v'} = 0$, i. e. $\tau_{xy} = 0$. If we neglect the influence of the Coriolis force in the lowest atmospheric layer, then the formulae for tensor elements are quite simple. As before, we assume that the atmosphere is stationary and horizontally uniform in the lowest atmospheric layer. Under these conditions the equation of turbulent diffusion is (see [18])

$$\begin{aligned} \overline{u'\varphi'} &= -\mu_{xz} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, & \overline{v'\varphi'} &= -\mu_{yz} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, & \overline{w'\varphi'} &= -\mu_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \overline{w'\vartheta'} &= -\nu_{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, & \overline{u'w'} &= -\nu_u \frac{\partial u}{\partial z}, & \overline{v'w'} &= -\nu_u \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

For simplicity sake, (3.3) is written in the Cartesian system of coordinates and we can switch to the generalized system by the formula

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu_{xz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \mu_{yz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \mu_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (3.4)$$

The relations

$$(\nu_{\vartheta})_h \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \kappa u_* \vartheta_*, \quad (\mu_{zz})_h \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \kappa u_* \varphi_*, \quad (\nu_u)_h \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right| = u_*^2 \quad (3.5)$$

hold in the layer of constant flows. If we direct the x -axis parallel to the wind velocity vector, then we get

$$\nu = 0, \quad \overline{w'\varphi'} = 0, \quad \mu_{yz} = 0, \quad \overline{u'\varphi'} = -\mu_{xz} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \nu_u \frac{\partial u}{\partial z} = u_*^2. \quad (3.6)$$

In the general case, where the angle between the lowest atmospheric vector and the x -axis is $\tilde{\gamma}$, we have

$$\mu_{xz} = \frac{|\mu_{xz}|}{(\nu_{\vartheta})_h} (\nu_{\vartheta})_h \cos \tilde{\gamma}, \quad \mu_{yz} = \frac{|\mu_{yz}|}{(\nu_{\vartheta})_h} (\nu_{\vartheta})_h \sin \tilde{\gamma}, \quad \mu_{zz} = (\nu_{\vartheta})_h, \quad (3.7)$$

$$\nu_u \frac{\partial u}{\partial z} = u_*^2 \cos \tilde{\gamma}, \quad \nu_u \frac{\partial v}{\partial z} = u_*^2 \sin \tilde{\gamma}, \quad (3.8)$$

where $\tan \tilde{\gamma} = v_h/u_h$, u_h и v_h are the components of velocity on the upper boundary of the lowest atmospheric layer $z = h$. In this case we have

$$(\mu_{xz}^2 + \mu_{yz}^2)^{1/2} = |\mu_{xz}|, \quad \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right)^{1/2} = \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right|. \quad (3.9)$$

Since the operator of turbulent exchange is symmetric in the lowest atmospheric layer, the angle does not change with height.

Integrating (3.4) between $z = z_\vartheta$ and $z = h$ and taking (3.6) into account, we obtain the boundary condition for the equation of impurity transfer at the height $z = h$:

$$\begin{aligned} & \kappa \frac{\partial}{\partial x} (a_h u_* \varphi_* \cos \tilde{\gamma}) + \kappa \frac{\partial}{\partial y} (a_h u_* \varphi_* \sin \tilde{\gamma}) + \\ & + (\mu_{zz})_h \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=h} - (\mu_{zz})_h \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=z_\vartheta} = \beta \varphi_0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

where

$$a_h = \int_{z_\vartheta}^h \frac{\mu_{xz}}{\nu_h} dz. \quad (3.11)$$

The integrand in (3.11) is determined either from experimental data or by means of the model, using the correlation functions of second moments for the equation of turbulent diffusion [18]. In practical calculations the derivatives with respect to horizontal variables in (3.4) are taken from the previous time-step. The other boundary conditions for the concentration of impurities are given as

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} &= 0 \quad \text{for } z = \overline{H} \\ \varphi &= \varphi_\Phi, \quad x = \pm X, \quad y = \pm Y \\ \varphi &= \varphi_\Phi \quad \text{at } t = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

The matrix operator $B(\vec{\varphi}, \vartheta) = B(\vec{x}, t, \vec{\varphi}, \vartheta) = \{B_{ij}(\vec{x}, t, \vec{\varphi}, \vartheta)\}$, $(i = \overline{1, n})$ determines the rates of concentration changes due to transformations. Chemical reactions are not linear, i. e. the elements of the operator B depend not only on the spatial coordinates and time but on the concentrations and temperature as well.

Now we describe the modelling of processes of impurity transformations in the nonlinear approximation. Assume that the gas components with the concentrations

$$\{SO_2, NO, NO_2, CO, CH_4, H_2CO, NH_3\} \quad (3.13)$$

escape into the atmosphere. Some substances, such as SO_2 , NO_2 , H_2CO , selectively absorb the sunlight in the ultraviolet range and pass to the electron-excited states, which enhances the photochemical transformations. This results in a series of new chemically active atoms, free radicals and other substances, which we write in the same way as in (3.13) in the form of the concentration vector

$$\begin{aligned} &\{O(^1D), O(^3P), O_3, OH, HO_2, H, NO_3, NO, \\ &NO_2, SO_2, H_2CO, HCO, H_2O_2, CO, CH_4, HNO_2, HNO_3, SO_3, \\ &SO_2^*, N_2O_5, HNOH, HNO\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

where SO_2^* is the electron-excited state of SO_2 and $O(^1D)$ and $O(^3P)$ are atoms of oxygen in different electron-excited states. The representation (3.14) is typical for the sulphur – nitrogen cycle.

Along with atoms and free radicals, photochemical reactions result in stable products which were not present in primary releases. Thus, for example, nitric acids HNO_2 and HNO_3 appear in reactions of the radical OH and either NO or NO_2 and are accumulated in the air [2, 5, 6, 11]:



where M is any air molecule. In order to describe the carbon cycle as in (3.14), eleven new gas components containing carbon are additionally introduced, namely

$$\begin{aligned} &\{CH_4, CH_3, CH_3O_2, CH_3O, H_2CO, HCO, CO, CO_2, CH_3NO^2, \\ &CH_3OOH, CH_3ONO_2, CH_3OH, HOCH_2O_2, HOCH_2O, HCOOH\}. \end{aligned}$$

Taken alone, the modelling of chemical processes in the atmosphere is also of interest. Systems of differential equations describing them are nonlinear. The constants of reaction rates differ by tens of orders. The systems of determining differential equations can be classified as stiff systems characterized by a large spread in the spectra of variance matrices.

4. Numerical algorithm

Discrete approximations for problem (1.2)–(1.7) and (1.10)–(1.14) are constructed on the basis of variational principle combined with the method of splitting [1, 12, 16]. With this approach the variational principle ensures that various parts of the model are consistent at all the stages of numerical modelling, and the splitting method allows one to realize easily the discrete model on a computer. All the constructions are based on the integral identity which is put in correspondence with the initial problem (1.2)–(1.7) in the differential formulation. The identity is introduced so that the two descriptions of the model in terms of the identity and in terms of the initial system of equations and the initial conditions are equivalent for the class of sufficiently smooth functions.

Let us write (1.2)–(1.7) in the operator form

$$B \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \vec{G}(\vec{\varphi}, \vec{Y}) = 0, \quad (4.1)$$

where $B = \text{diag}\{1, 1, 1, 1, 1, 0\}$ is a diagonal matrix; $\vec{\varphi} = (u, v, w, \vartheta, q, p)$, $\vec{G}(\vec{\varphi}, \vec{Y})$ is a vector function determined by the corresponding left-hand sides of equations (1.2)–(1.7), except for the time derivatives; and \vec{Y} is the vector of input model parameters. The identity is obtained by taking the scalar product of (1.2)–(1.7) and an arbitrary vector function $\vec{\varphi}^* = (u^*, v^*, w^*, \vartheta^*, q^*, p^*)$, i. e.

$$\left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \vec{G}(\vec{\varphi}, \vec{Y}), \vec{\varphi}^* \right) = I(\vec{\varphi}, \vec{Y}, \vec{\varphi}^*),$$

and then by integrating it by parts, with the initial and boundary conditions taken into account and symmetric and antisymmetric terms separated.

In D_t we introduce the grid domain D_t^h , define a space of grid functions on D_t^h and approximate the functional $I(\vec{\varphi}, \vec{Y}, \vec{\varphi}^*)$ by a summator functional $I^h(\vec{\varphi}^h, \vec{Y}^h, \vec{\varphi}^{*h})$.

To do this, in the identity we replace integrals by quadrature formulae, and replace the first derivatives by appropriate finite difference relations. If the first derivatives in the symmetric and antisymmetric terms are approximated in the same way, then we obtain a family of finite difference approximations which ensure that the energy balance is provided in the finite difference form for $\vec{\varphi}^{*h} = \vec{\varphi}^h$.

Finally, the finite difference equations for system (1.2)–(1.7) and (1.10)–(1.14) are determined at any point of the grid domain D_t^h from condition that the summator functional $I^h(\vec{\varphi}^h, \vec{Y}^h, \vec{\varphi}^{*h})$ is stationary, with arbitrary and independent variations of the components of the vector function $(\vec{\varphi}^{*h})$ at the point \mathbf{x} . The specific form of the summator identity is presented and discussed in detail in [1].

In order to solve problem (1.2)–(1.7) and (1.10)–(1.14) with respect to time, we use the method of splitting. On each time interval $[t_j, t_{j+1}]$ we solve the problem at two stages:

(i) the transfer of substances along the trajectory and the turbulent exchange, and

(ii) the matching of meteorological fields.

At the first stage the system of equations in the differential formulation is

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \text{div} \vec{u} \hat{u} = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial \sigma}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \text{div} \vec{u} \hat{v} = \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial \sigma}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + \text{div} \vec{u} \hat{w} = \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial \sigma}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial t} + \text{div} \vec{u} \hat{\vartheta} = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial F_4}{\partial \sigma}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \text{div} \vec{u} \hat{q} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial F_5}{\partial \sigma} \quad (4.6)$$

with the boundary conditions (1.10)–(1.14). Here we denote

$$F_1 = a_1 \tau_{11} + a_2 \tau_{12}, \quad F_2 = a_1 \tau_{21} + a_2 \tau_{22}, \quad F_3 = a_1 \tau_{31} + a_2 \tau_{32},$$

$$F_4 = a_1 H_1 + a_2 H_2, \quad F_5 = a_1 Q_1 + a_2 Q_2.$$

At the second stage we solve the problem on the matching of meteorological fields:

$$\frac{\partial \hat{u}'}{\partial t} = -\frac{\partial P'}{\partial x} + a_1 \frac{\partial P'}{\partial \sigma} + l \hat{v}', \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \hat{v}'}{\partial t} = -\frac{\partial P'}{\partial y} + a_2 \frac{\partial P'}{\partial \sigma} - l \hat{u}', \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \hat{w}'}{\partial t} = -a_3 \frac{\partial P'}{\partial \sigma} + \lambda \hat{\vartheta}', \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \hat{\vartheta}'}{\partial t} + \tilde{S} \hat{w} = -\frac{\tilde{S}}{a_3} [a_1 \hat{u}' + a_2 \hat{v}'] + \frac{L_w}{C_p} \bar{\rho} \Phi, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \hat{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \sigma} = 0. \quad (4.11)$$

We solve system (4.7)–(4.11) under the boundary conditions

$$\frac{\partial P'}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = \pm X, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = \pm Y, \quad (4.13)$$

$$w = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad z = z_u, \quad (4.14)$$

where z_u is roughness.

The system of equations (4.2)–(4.6) with the boundary conditions (1.10)–(1.14) is solved by means of the two-step scheme of splitting [12], namely

$$\frac{\varphi_i^{j+\alpha/6} - \varphi_i^{j+(\alpha-1)/6}}{\Delta t/2} + \frac{1}{2} \left[\Lambda_\alpha^h \varphi_i^{j+2/6} + \Lambda_2^h \varphi_i^{j+(\alpha-1)/6} \right] = 0, \quad (4.15)$$

$$\alpha = 1, 2,$$

$$\frac{\varphi_i^{j+4/6} - \varphi_i^{j+2/6}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left[\Lambda_3^h \varphi_i^{j+4/6} + \Lambda_3^h \varphi_i^{j+2/6} \right] = \frac{\partial F_i^{j+2/6}}{\partial \sigma}, \quad (4.16)$$

$$i = \overline{1, 5},$$

$$\frac{\varphi_i^{j+(7-\alpha)/6} - \varphi_i^{j+(\alpha-1)/6}}{\Delta t/2} + \frac{1}{2} \left[\Lambda_\alpha^h \varphi_i^{j+(7-\alpha)/6} + \Lambda_2^h \varphi_i^{j+(6-\alpha)/6} \right] = 0, \quad (4.17)$$

$$\alpha = 2, 1,$$

where Λ_α^h are difference analogues of problem (4.2)–(4.6), $\alpha = \overline{1, 3}$; $\varphi_i = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\vartheta}, \hat{q})$.

The stability of the numerical scheme is provided by the condition $\Lambda_\alpha^h(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}) \geq 0, \alpha = \overline{1, 3}$, where $\vec{\varphi}$ is an arbitrary vector function from the domain of definition of Λ_α^h and satisfies the uniform conditions. The scheme provides the second order of accuracy with respect to both space variables and time.

Substituting the difference analogues of (4.7)–(4.9) into the continuity equation written in the discrete form, we obtain the equation for determining the pressure:

$$LP'^{j+1} = F, \quad (4.18)$$

where L is the difference analogue of the differential operator with mixed derivatives and the vector F is obtained from the values of functions calculated at the previous time-steps. The conditions on the boundaries are taken into account in the coefficients of the operator L and the vector F . Denote by $L_1 = L_{xx} + L_{yy} + L_{\sigma\sigma}$ that part of the operator L , which corresponds to the second derivatives given in the subscripts, and denote by $L_2 = L_{x\sigma} + L_{y\sigma}$ that part of L which corresponds to the mixed derivatives. Since the difference approximations of divergency in the continuity equation and the gradient of the function P' in the motion equation are due to the terms of the integral identity:

$$\int_{D_t} \left[(\vec{u}^* \text{grad} P' - \vec{u} \text{grad} P'^*) + a_1 (u^* \frac{\partial P'}{\partial \sigma} - u \frac{\partial P'^*}{\partial \sigma}) + a_2 (v^* \frac{\partial P'}{\partial \sigma} - v \frac{\partial P'^*}{\partial \sigma}) \right] dD dt,$$

we see that the operator L is negative definite. The approximation of the continuity equation is divergent and therefore the condition for solvability is satisfied.

In order to solve equation (4.18), we use the iterative scheme

$$B \frac{p^{n+1} - p^n}{\varkappa} + L^n p^n = F, \quad (4.19)$$

where \varkappa where \varkappa is an iterative parameter and B is a positive definite operator.

If $\tilde{\delta}(x, y) \equiv 0$, equation (4.18) becomes essentially simpler, because $a_1 \equiv 0$ and $a_2 \equiv 0$ and thus the mixed derivatives disappear in (4.19). The discrete analogue of equation (4.19) at $a_1 \equiv 0$ and $a_2 \equiv 0$ is solved by the direct method. The solution obtained is an initial approximation in solving equation (4.19) for $\tilde{\delta}(x, y) \neq 0$. The other functions are then calculated successively from the obtained function p^{j+1} .

In order to approximate discrete analogues of equation (3.1) with respect to time, we use the method of splitting in accordance with the physical processes. On each small interval Δt we obtain a scheme consisting of three stages, namely (i) the transfer of impurity along the trajectories; (ii) turbulent diffusion; and (iii) local transformations of

impurities. The first stage is solved by means of an explicit monotonous conservative scheme providing the second order of approximation accuracy with respect to both space variables and time [8, 16, 17]. Implicit schemes of splitting with respect to space variables are used at the second stage. If the nondiagonal elements are taken into account in the operator, then the iteration correction is applied. At the third stage, at each sufficiently small time step $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ the problem is reduced to the solution of the system of equations describing the transformations of impurities:

$$B \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} = B(\vec{\varphi}, \vartheta), \quad \vec{\varphi}|_{t=t_j} = \vec{\varphi}^j, \quad (4.20)$$

where $\vec{\varphi}^j$ is obtained at the previous step of splitting. System (4.20) is considered at each point of the three-dimensional domain $x \in D^h$, independently of the other points. This local independence, which follows from the properties of the splitting method, is quite consistent with small characteristic times of the course of chemical reactions.

5. Numerical experiments

Now we present the results of numerical experiments carried out in the framework of three-dimensional models of atmospheric hydrothermodynamics and impurity transfer, with photochemical transformation taken into account. The experiments were carried out for the Moscow region. The following parameters were used: $\Delta t = 1200$ s, $\Delta x = \Delta y = 2000$ m, $\Delta z = 100$ m, at $z < 300$ m, $\Delta z = 150$ m at $300 < z < 1650$ m, $\lambda = 0.035$ m/s⁻²deg; $l = 0.0001$ s⁻¹, $S = 0.003$ deg/m.

The function $J(t)$ describing anthropogeneous heat sources is given as follows:

$$J(t) = \begin{cases} 5 + 7 \sin[\pi(t - 6)/18], & \text{if } 6 < t < 24 \text{ h,} \\ 5 & \text{for the other instants of time.} \end{cases}$$

The parameters of roughness, the surface albedo, and the coefficient of temperature conduction λ_s were prescribed as $z_0 = 1.0$ m, $A = 0.2$ and $\lambda_s = 0.62$ cal/(m s deg) for town; $z_0 = 0.1$ m, $A = 0.3$ and $\lambda_s = 0.26$ cal/(m s deg) for country; and $z_0 = 0.5$ m, $A = 0.2$ and $\lambda_s = 0.40$ cal/(m s deg) for town. The experiments were carried out with the background flow and without it ($\mathbf{V} = 0$).

Fig. 1 presents the flow field formed without the background flow at an altitude of 150 m for $t = 14$ h. In this case the local circulation in the domain is caused by thermal and thermophysical nonhomogeneities of the underlying surface.

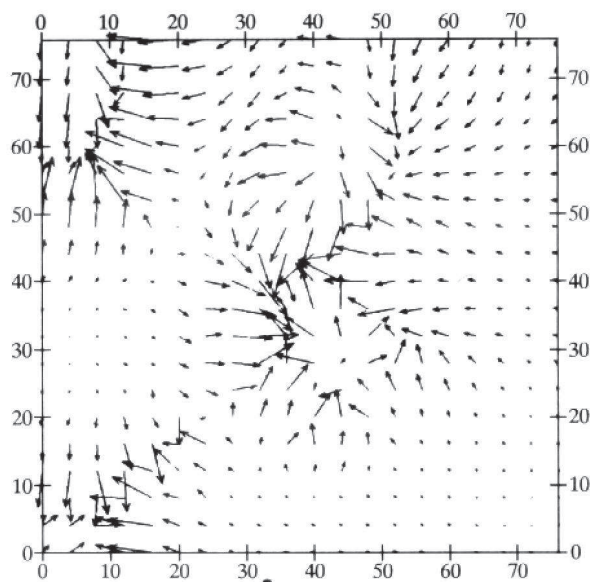


Fig. 1. The flow field without the background flow at the altitude $z = 150$ m for $t = 14$ h. The arrow corresponds to the maximal value 3 at the linear scale

Fig. 2 presents the same field with the background flow ($u = 0$ m/s, $v = 3$ m/s). It can be seen from the figures that the flow field in the lowest atmospheric layers is directed towards the town because the latter is (three to five degrees) warmer than the neighbourhoods. Therefore atmospheric pollution is transferred to the town center even if pollution sources are located in the suburbs. With the background flow, the situation is more complicated because this flow interacts with the local circulation of the heat island.

Figs. 3 and 4 present the isolines of the turbulence coefficient ν and the turbulent energy b , respectively. Fig. 5 presents the isolines of the dissipation rate ϵ in the plane (x, y) for $t = 14$ h and $z = 250$ m with the background flow. The isolines with the largest numbers correspond to the maximum values of the parameters $\nu_{max} = 3.715$, $b_{max} = 0.138$, $\epsilon_{max} = 0.000\ 306\ 2$.

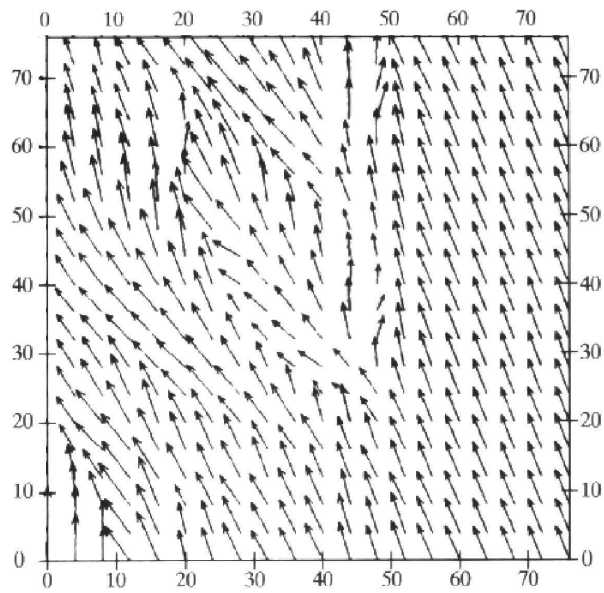


Fig. 2. The flow field with the background flow (0, 3) m/s at the altitude $z = 150$ m for $t = 14$ h. The arrow corresponds to the maximal value 4 at the linear scale

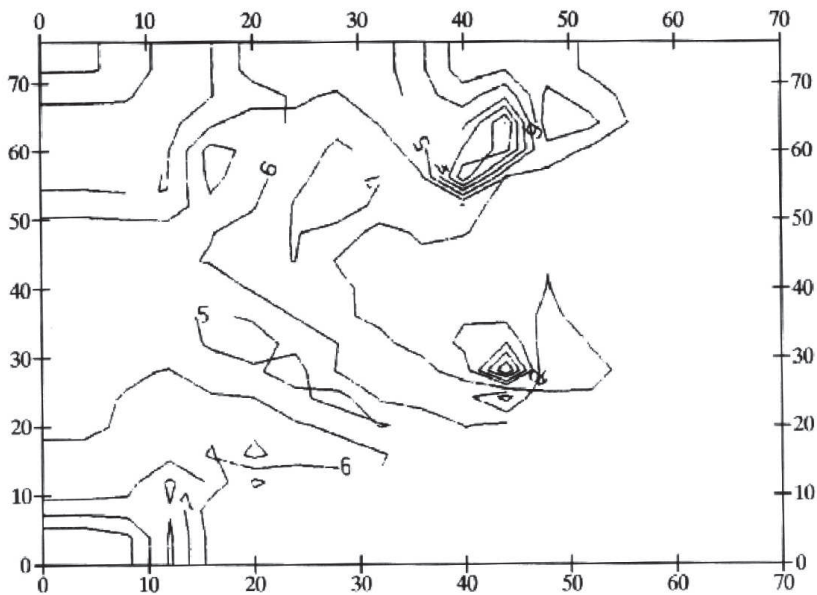


Fig. 3. Isolines of the turbulence coefficient in the (x, y) -plane with the background flow at the altitude of 250 m for $t = 14$ h

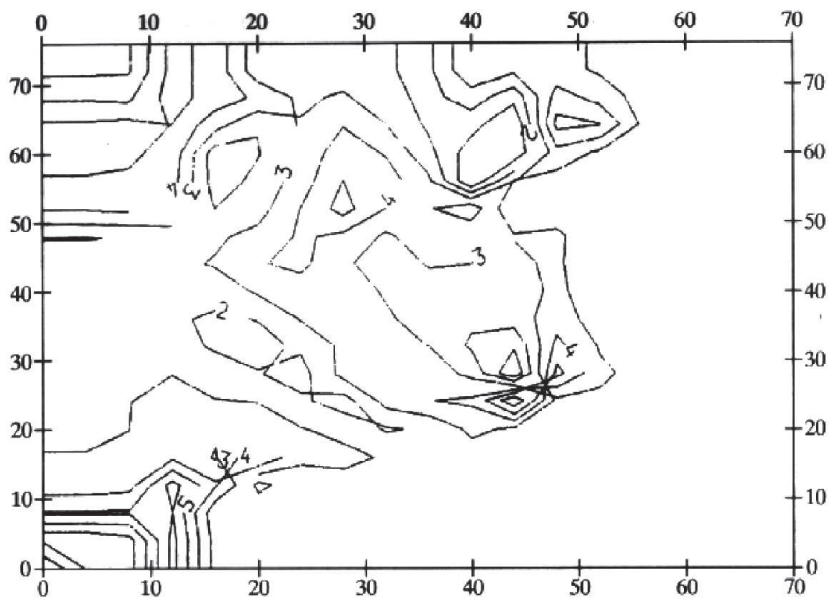


Fig. 4. Isolines of the turbulent energy in the (x,y) -plane with the background now at the altitude of 250 m for $t = 14$ h.

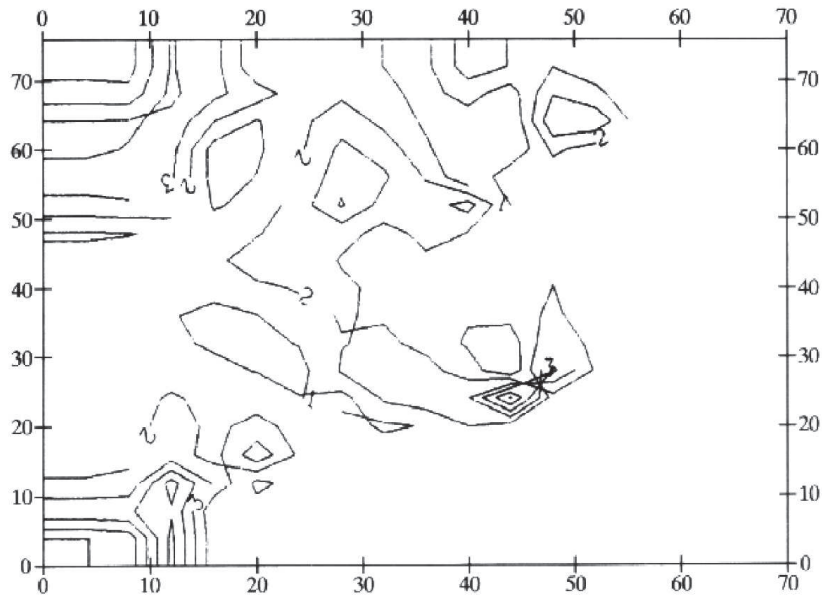


Fig. 5. Isolines of the dissipation rate in the (x,y) -plane with the background flow at the altitude of 250 m for $t = 14$ h

In [18] numerical experiments are described for reproducing the local circulation. The calculations were compared with observational data and they were in good agreement. This means that the model can describe breeze circulation.

Fig. 6 gives the ratio $\mu_{xz}/(\nu_{\theta})_h$, versus the Richardson number Ri . This ratio is calculated by the models and obtained from the experimental data (solid lines). The dashed lines correspond to the calculations by the model from [15], and the dotted lines correspond to the calculations by the above model, which is based on [18].

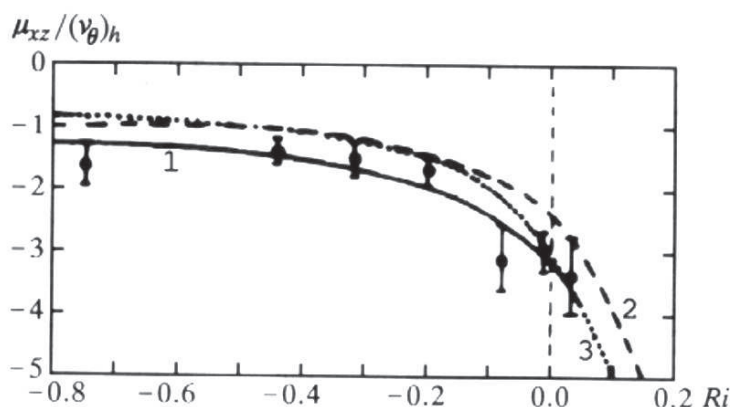


Fig. 6. The ratio $\mu_{xz}/(\nu_{\theta})_h$ versus the Richardson number (Ri) according to the model calculations and experimental data (solid lines)

Now we present some results of numerical experiments, which take into account the photochemical transformation.

In the model we consider a point source, which acts constantly from 6 a. m. (local time) at the point with the coordinates (40 km, 24 km, 150 m). A scheme including 183 chemical reactions was used in the numerical experiments (Fig. 12 presents the abridged list of these reactions and rate constants). Background concentrations of small gas constituents of the atmosphere were given as $NO = 2.7 \cdot 10^8$, $NO_2 = 2.2 \cdot 10^9$, $CH_4 = 4.2 \cdot 10^{13}$, $H_2CO = 8.0 \cdot 10^9$, $CO = 3.0 \cdot 10^{12}$, $CO_2 = 5.0 \cdot 10^{15}$, $SO_2 = 2.5 \cdot 10^9$.

In the examples we used the concentrations: $NO_x = 10^{11}$, $CH_4 = 3.0 \cdot 10^{13}$, $CO = 2 \cdot 10^{13}$, $H_2CO = 2.4 \cdot 10^{11}$ particles/cm³ min.

Fig. 7 shows the way the changes in releases of nitrogen oxides influence the kinetic characteristics of formation of the OH -radical. We

see that in the polluted atmosphere, unlike the background one, the day-time variation of particles generated by photochemical processes is governed not only by the sunlight but by particular combination of anthropogeneous releases also. This suggests that the smog induced by free radicals can emerge at different times of the day. In Fig. 7 the concentrations of OH are compared with the accumulation kinetics of products whose formation is limited by the concentrations of the radicals: HNO_3 , $HCOOH$, H_2O_2 , and CH_3OOH . Nonlinearities in the accumulation rates of these products are caused by the variation of reagents. In the afternoon the air is essentially polluted by products of secondary transformations. Substances having the properties of oxidizers (peroxides and peroxy nitrates) as well as acids, for example, $HCOOH$, HO_2NO_2 , HNO_3 , appear at this time. This deteriorates the ecological situation.

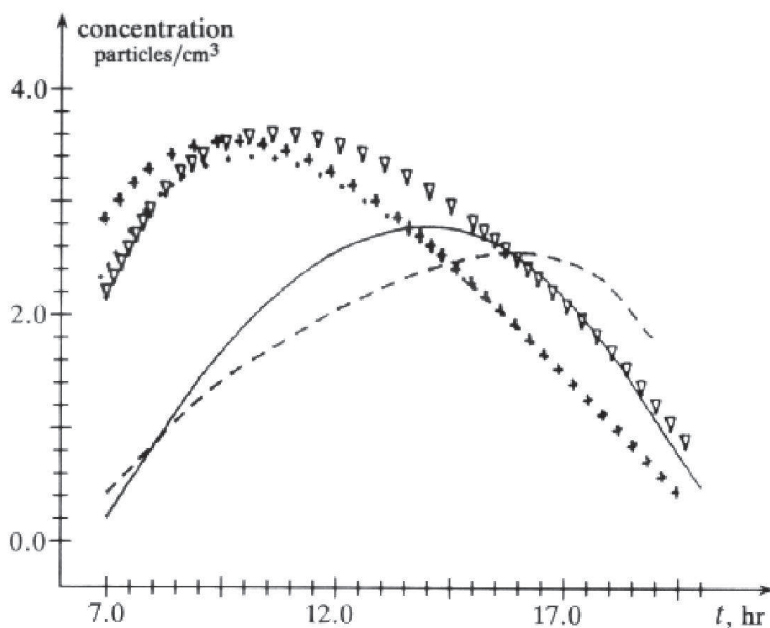


Fig. 7. The daily variation of sensitivity of OH concentration to variations of $NO_x = NO/NO_2$

Now let us consider the examples that show the sensitivity of small gas constituents to variations of concentrations of H_2CO , NO , and NO_2 . The release of H_2CO varies from 10^9 to 10^{14} . The other releases are 10^9 for NO and NO_2 , either zero or $3 \cdot 10^{13}$ for CO (Fig. 8).

The analysis of the variants without releases of CH_4 and CO reveals the contribution of H_2CO to the formation of the products. As the releases of H_2CO increase, the products are accumulated in different ways. The concentrations of CO and $HCOOH$ increase linearly, while those of HO_2NO_2 and CH_3ONO_2 increase nonlinearly. The releases of H_2CO can be divided into three ranges. First the concentrations of secondary products do not exceed the background values. Next the atmosphere is polluted by carbon oxide, acids and peroxides (the releases of H_2CO in the range from 10^{10} to 10^{11}). Further increase in the release of H_2CO (more than 10^{11}) suppresses the formation of some products such as peroxides, methanol, and acids. Note that the release of formaldehyde alone can increase the concentration of CO but cannot result in increasing the concentration of CO_2 above the background level.

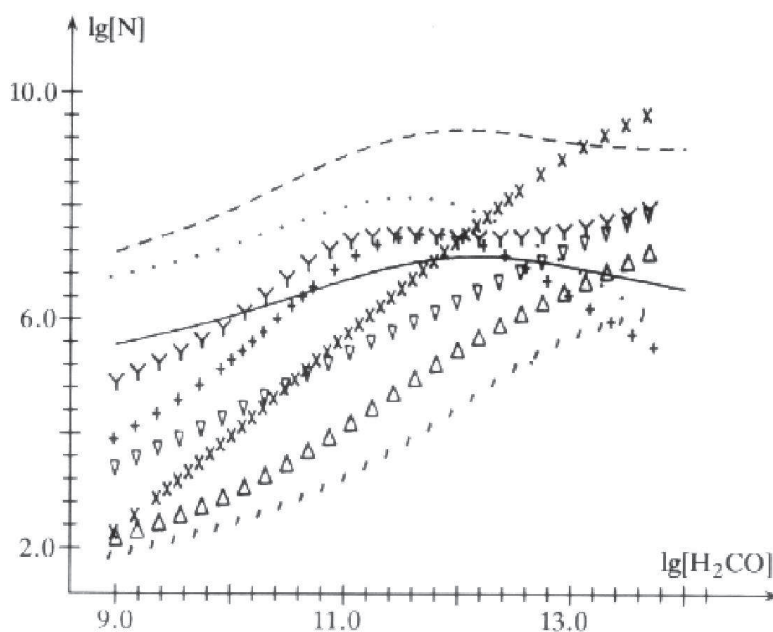


Fig. 8. Sensitivity of concentrations of OH , HO_2 , CO , CH_3O^2 , CH_3OOH , $HCOOH$, CH_3ONO_2 , HO_2NO_2 , and CH_3OH to variations of H_2CO ($10^9 \div 10^{14}$) in the logarithmic scale for $t = 12$ h

The release of NO_x varies from 10^9 to 10^{14} . Usually $NO/NO_2 = 1$ in the initial release. Fig. 9 demonstrates the way the concentration of radicals and products depends on the releases of nitrogen oxides. Many intermediate and final products are influenced by NO_x . One

can say that the increased release of nitrogen oxides not only increases the concentration of acids HNO_2 and HNO_3 but also suppresses the formation of many products such as peroxides, acids, ozone, peroxy nitrates, etc.

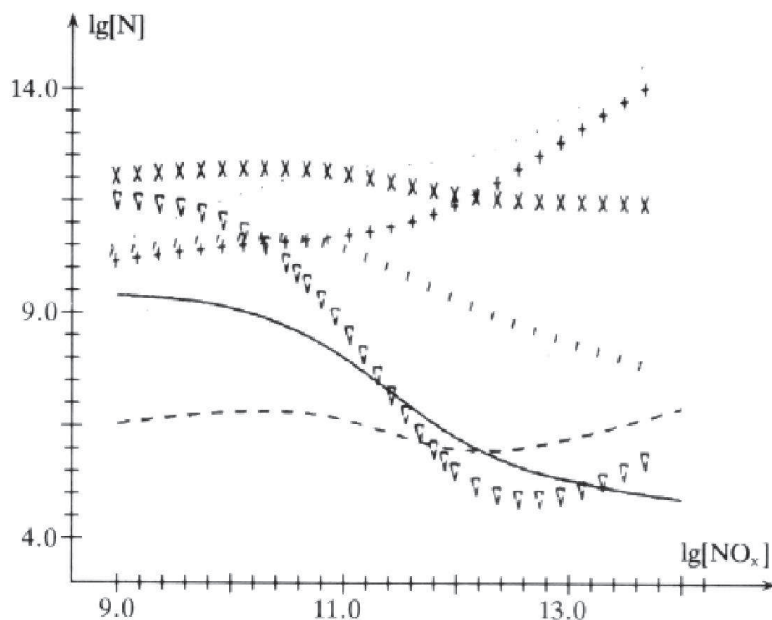


Fig. 9. Sensitivity of concentrations of OH , HO_2 , H_2O_2 , HNO_3 , HNO_2 , O_3 , and $HCOOH$ to variations of NO_x ($10^9 \div 10^{14}$) in the logarithmic scale for $t = 12$ h

Fig. 10 presents the changes of concentrations of O_3 , OH , H_2CO , CO , and HO_2 with time. It can be seen that their accumulations are essentially nonstationary.

Fig. 11 presents the isolines of concentration of O_3 in the plane (x, y) for $t = 12$ h and $z = 350$ m (without the background flow).

The numerical experiments allows one to formulate chemical tests for justifying the photochemical model. On the other hand, the agreement of the model with the results of the in-situ measurements presented in the literature allows one to formulate an adequate model of chemical transformations of impurities in the atmosphere. The complex model of hydrothermodynamics for atmospheric processes and transformed impurity can be used as a basis in estimating the anthropogenic load in some regions of the Earth.

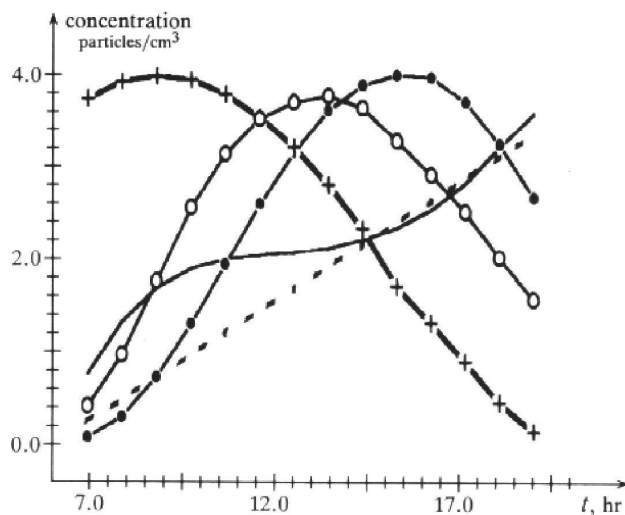


Fig. 10. Changes of concentrations of O_3 , OH , H_2CO , CO , and HO_2 with time for the releases: $NO = 10^{11}$, $NO_2 = 10^{11}$, $CH_4 = 3 \cdot 10^{13}$, $CO = 2 \cdot 10^{13}$, and $H_2CO = 2.4 \cdot 10^{13}$. The concentrations are normed in the following way: $O_3 \times 2.1 \cdot 10^{-13}$, $OH \times 1.2 \cdot 10^{-6}$, $H_2CO \times 6.0 \cdot 10^{-13}$, $CO \times 2.0 \cdot 10^{-15}$, and $HO_2 \times 7.0 \cdot 10^{-9}$

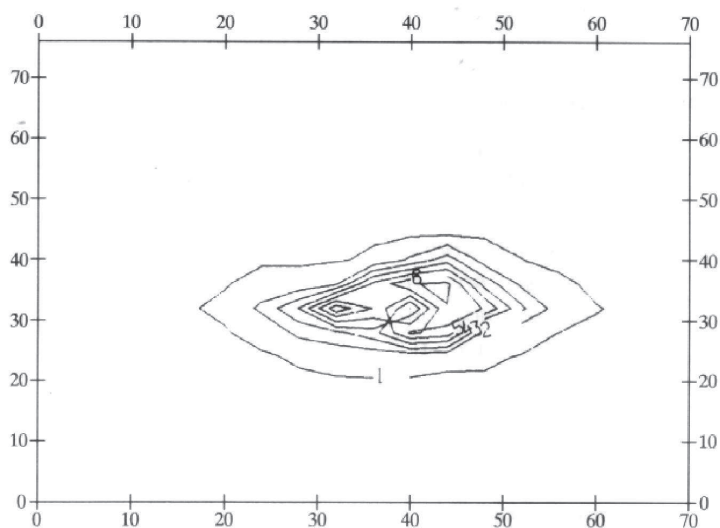


Fig. 11. Isolines of concentration of O_3 in the (x, y) -plane for $t = 12$ h and $z = 350$ m (without the background flow)

$O_3 + hv$	\rightarrow	$O_2 + O(^1D)$	4.6×10^{-6}	$N_2O_5(+M)$	\rightarrow	$NO_2 + NO_3(+M)$	4.5×10^{-2}
$O_3 + hv$	\rightarrow	$O_2 + O(^3P)$	5.5×10^{-4}	$NO_2 + NO_3(+M)$	\rightarrow	$N_2O_5(+M)$	3.0×10^{-12}
$H_2O_2 + hv$	\rightarrow	$2OH$	6.6×10^{-6}	$NO + NO_3$	\rightarrow	$2NO_2$	1.9×10^{-11}
$NO_2 + hv$	\rightarrow	$NO + O(^3P)$	8.9×10^{-3}	$O_3 + NO_2$	\rightarrow	$NO_3 + O_2$	3.2×10^{-17}
$HONO + hv$	\rightarrow	$NO + OH$	1.6×10^{-3}	$O_3 + NO$	\rightarrow	$NO_2 + O_2$	1.8×10^{-14}
$HNO_3 + hv$	\rightarrow	$NO_2 + OH$	7.0×10^{-7}	$OH + CH_4$	\rightarrow	$H_2O + CH_3$	7.9×10^{-15}
$H_2CO + hv$	\rightarrow	$HCO + H$	3.7×10^{-5}	$OH + H_2CO$	\rightarrow	$H_2O + HCO$	1.0×10^{-11}
$H_2CO + hv$	\rightarrow	$H_2 + CO$	4.9×10^{-5}	$OH + CO$	\rightarrow	$CO_2 + H$	3.0×10^{-13}
$O(^3P) + O_2(+M)$	\rightarrow	$O_3(+M)$	1.8×10^{-14}	$HO_2 + CH_3O_2$	\rightarrow	$O_2 + CH_3OOH$	6.5×10^{-12}
$O(^1D) + O_2$	\rightarrow	$O(^3P) + O_2$	4.0×10^{-11}	$CH_3 + O_2(+M)$	\rightarrow	$CH_3O_2(+M)$	1.8×10^{-12}
$H + O_2(+M)$	\rightarrow	$HO_2(+M)$	1.4×10^{-12}	$HCO + O_2$	\rightarrow	$CO + HO_2$	5.5×10^{-12}
$O(^1D) + H_2O$	\rightarrow	$2OH$	1.0×10^{-10}	$CH_3O + O_2$	\rightarrow	$H_2CO + HO_2$	1.3×10^{-15}
$O(^1D) + H_2O$	\rightarrow	$H_2 + O_2$	2.2×10^{-10}	$CH_3O_2 + NO$	\rightarrow	$CH_3O + NO_2$	7.6×10^{-12}
$OH + H_2$	\rightarrow	$H_2O + H$	6.7×10^{-15}	$SO_2 + O(^3P)(+M)$	\rightarrow	$SO_3(+M)$	2.0×10^{-14}
$OH + HO_2(+M)$	\rightarrow	$H_2O + O_2(+M)$	1.1×10^{-10}	$OH + NH_3$	\rightarrow	$H_2O + NH_2$	1.4×10^{-13}
$OH + H_2O_2$	\rightarrow	$H_2O + HO_2$	1.7×10^{-12}	$NH_2 + NO$	\rightarrow	$N_2 + H_2O$	2.2×10^{-11}
$OH + O_3$	\rightarrow	$HO_2 + O_2$	6.7×10^{-14}	$NH_2 + NO_2$	\rightarrow	$N_2O + H_2O$	1.1×10^{-11}
$HO_2 + HO_2$	\rightarrow	$H_2O_2 + O_2$	1.5×10^{-12}	$NH_2 + O_3$	\rightarrow	$HNOH + O_2$	7.6×10^{-14}
$HO_2 + O_3$	\rightarrow	$OH + 2O_2$	2.0×10^{-15}	$NH_2 + SO_2$	\rightarrow	NH_2SO_2	1.6×10^{-13}
$O(^3P) + NO_2(+M)$	\rightarrow	$NO_3(+M)$	2.0×10^{-12}	$HNOH + O_2$	\rightarrow	$NHO + HO_2$	8.0×10^{-15}
$O(^1D) + N_2$	\rightarrow	$O(^3P) + N_2$	2.6×10^{-11}	$HNOH + O_3$	\rightarrow	$OH + HNO + O_2$	6.0×10^{-14}
$HO_2NO_2(+M)$	\rightarrow	$HO_2 + NO_2(+M)$	8.5×10^{-2}	$HNO + O_2$	\rightarrow	$NO + HO_2$	8.0×10^{-16}
$HO_2 + NO_2(+M)$	\rightarrow	$HO_2NO_2(+M)$	1.4×10^{-12}	$HNO + O_3$	\rightarrow	$OH + NO + O_2$	7.7×10^{-15}
$HO_2 + NO$	\rightarrow	$NO_2 + OH$	8.3×10^{-12}	$HNO + O_3$	\rightarrow	$NO_2 + HO_2$	1.9×10^{-15}
$OH + HNO_3$	\rightarrow	$NO_3 + H_2O$	1.3×10^{-13}	$NH_3 + hv$	\rightarrow	$NH_2 + H$	1.0×10^{-20}
$OH + NO_2(+M)$	\rightarrow	$HNO_3(+M)$	1.1×10^{-11}	$NH_2 + O_2$	\rightarrow	products	1.0×10^{-20}
$OH + NO(+M)$	\rightarrow	$HONO(+M)$	6.6×10^{-12}	$HNO + hv$	\rightarrow	$H + NO$	1.0×10^{-20}

Fig. 12. Chemical reactions and rate constants

REFERENCES

1. Aloyan A. E. Nonhydrostatic computational models of local atmospheric processes. Novosibirsk: Preprint No. 479, Comp. Cent. Sib. Branch, USSR Acad. Sci., 1984 (in Russian).
2. Aloyan A. E., Bazhin N. M., Penenko V. V., Skubnevskaya G. I. Numerical modelling of photochemical oxidation of methane in the atmosphere of industrial areas. Novosibirsk: Preprint No. 772, Comp. Cent. Sib. Branch, USSR Acad. Sci., 1987 (in Russian).
3. Aloyan A. E., Lazriev G. I. On the parametrization of the turbulent energy in the lowest atmospheric layer // In: Mathematical Models of Atmospheric Motions. Novosibirsk, 1980. Pp. 85–94 (in Russian).
4. Aloyan A. E., Abramenko V. V. Computational model of impurity spreading in turbulent boundary atmospheric layer, with the ground covered by vegetation // In: Methods of Mathematical Modelling in Hydrodynamic Environmental Problems. Novosibirsk: Comp. Cent. Sib. Branch, USSR Acad. Sci., 1983. Pp. 21–35 (in Russian).

5. Atkinson R., Liou A. Evaluation of kinetic and mechanistic data for modeling of photochemical smog // *J. Phys. Chem. Ref. Data*. 1984. V. 13, No. 2. Pp. 315–444.
6. Baulch D. L. et al. Evaluated kinetic and photochemical data for atmospheric chemistry // *J. Phys. Chem. Ref. Data*. 1982. Vol. 11, No. 2; 1984. V. 13, No. 4.
7. Businger J. A., Wyngard I. C., Izumi Y., Bradley E. F. Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer // *J. Atm. Sci.* 1971. V. 28, No. 2. Pp. 181–189.
8. Dymnikov V. P., Aloyan A. E. Monotonous schemes for solving transfer equations in problems on weather forecast, ecology and climate theory // *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz. Atmos. Okean*. 1990. V. 26, No. 12. Pp. 1237–1247 (in Russian).
9. Freman B. E. Tensor diffusivity of a trace constituent in a stratified boundary layer // *J. Atm. Sci.* 1977. V. 34, No. 1. Pp. 124–136.
10. Gal-Chen T., Somerville C. J. Numerical Solution of the Navier–Stokes equations with topography // *J. Comp. Phys.* 1975. V. 17, No. 3. Pp. 276–310.
11. Kerr J. et al. Free-radical reactions in forming photochemical smog // In: *Free Radicals in Biology*. V. 2 (Ed. W. Pryor). N. Y.: Academic Press, 1976.
12. Marchuk G. I. *Mathematical Modelling in Environmental Problems*. M.: Nauka, 1982 (in Russian).
13. Marchuk G. I., Aloyan A. E. *Mathematical modelling in ecological problems*. M.: Preprint No. 234, Dept. Numer. Math., USSR Acad. Sci., 1989 (in Russian).
14. Monin A. S., Obukhov A. M. The main laws of turbulent mixing in the lowest atmospheric layer // *Tr. Geofiz. Inst. Akad. Nauk SSSR*. 1954. V. 24(151). Pp. 163–187 (in Russian).
15. Monin A. S. On symmetry properties of turbulence in the lowest atmospheric layer // *Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Fiz. Atmos. Okean*. 1965. V. 1, No. 1. Pp. 45–54 (in Russian).
16. Penenko V. V., Aloyan A. E. *Models and Methods for Environment Control Problems*. M.: Nauka, 1985 (in Russian).
17. B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme // II Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *J. Comp. Phys.*, 1974. V. 14.
18. Yordanov D. L., Aloyan A. E. On the use of the diffusivity tensor in calculating pollution in the planetary boundary layer // *Comptes*

rendus de l'Academie bulgare des sciences. 1981. V. 34, No. 7. Pp. 981–983.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ЭКОЛОГИИ⁷

Рассматривается постановка задачи математического моделирования экологических процессов. Представлена первая часть комплексной экологической модели, включающая следующие блоки: модели гидротермодинамики атмосферы, основные и сопряженные уравнения переноса и диффузии с учетом фотохимической трансформации, а также модель оптимизации, регулирующая мощности источников выброса. Приводятся результаты численных экспериментов.

Во многих регионах планеты повышенный уровень загрязнения атмосферы, почвы, водоема и др. привел к большим антропогенным нагрузкам на окружающую среду, с которыми иногда биосфера справиться не в состоянии. Прежде всего это относится к загрязнению биосферы токсичными веществами, а также к последствиям интенсивного использования природных ресурсов. В некоторых регионах возникли серьезные экологические проблемы, связанные с отрицательными результатами человеческой деятельности, влияющими на естественные циклы природных процессов и окружающую среду. Естественно, что индустриализация будет развиваться и в будущем, поэтому очень важно не допустить возможность возникновения таких ситуаций, которые привели бы к нарушению экологической устойчивости. Для предотвращения этих последствий в первую очередь требуется снизить количество загрязняющих веществ в данном регионе. Решение этой задачи связано с минимизацией антропогенной нагрузки безопасных для природной среды до пределов с учетом оптимальных темпов социально-экономического развития конкретного региона. Основные принципы построения таких моделей изложены в книге [1].

Математическое моделирование экологических процессов представляет собой мощный инструмент для количественной оценки изменения характеристик окружающей среды под воздействием различных

⁷М.: Препринт № 234 ОВМ АН СССР, 1989. Совместно с А. Е. Алояном.

антропогенных факторов. Такие исследования имеют междисциплинарный характер и, следовательно, требуют совместного участия специалистов многих специальностей.

Для комплексного решения экологической проблемы наряду с физическими моделями необходимы также химические, биологические, агрофизические и другие методы контроля окружающей среды. И особенно важно, чтобы все эти модели работали в рамках единого комплекса – это позволило бы более полно исследовать экологические процессы с учетом прямых и обратных связей. Хотя основные принципы построения моделей экологической безопасности народно-хозяйственных комплексов имеют общую платформу, однако отдельные вопросы для каждого региона являются специфическими для каждого региона, поэтому необходимо проведение специальных экологических исследований.

В данной работе представлена первая часть комплексной экологической модели, включающая следующие блоки: модели гидротермодинамики атмосферы, основные и сопряженные уравнения переноса и диффузии с учетом фотохимической трансформации, а также модель оптимизации мощности источников, минимизирующая наносимый окружающей среде ущерб.

Основные уравнения гидротермодинамики для экологической модели регионального масштаба

Поскольку экологически значимые регионы расположены на пересеченной местности, исходную систему уравнений будем записывать, учитывая орографические особенности. Для этого в численных моделях перейдем из декартовой системы координат (x, y, z) к обобщенной системе координат $(\bar{x}, \bar{y}, \sigma)$ с помощью следующих формул:

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y, \quad \sigma = \frac{z - \tilde{\delta}(x, y)}{H - \tilde{\delta}(x, y)} H, \quad (1)$$

где H – условная высота верхней границы области интегрирования, $\tilde{\delta}(x, y)$ – функция, описывающая рельеф.

В новой системе координат уравнения гидротермодинамики примут следующий вид:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \text{div} \vec{u} \hat{u} = -\frac{\partial P'}{\partial x} + a_1 \frac{\partial P'}{\partial \sigma} + l \hat{v}' + F_u + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_u \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{u}}{\bar{\rho}} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} \hat{v} = -\frac{\partial P'}{\partial y} + a_2 \frac{\partial P'}{\partial \sigma} - l \hat{u}' + F_v + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_u \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{v}}{\bar{\rho}} \right), \quad (3)$$

$$a_3 \frac{\partial P'}{\partial \sigma} = \lambda \hat{v}' (1 + 0,61q), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} \hat{\vartheta} + \frac{S}{a_3} (\hat{w}' + \tilde{\delta}_x \hat{u}' + \tilde{\delta}_y \hat{v}') = \frac{L_w \Phi \bar{\rho}}{C_p} + F_\vartheta + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_\vartheta \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{\vartheta}}{\bar{\rho}} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} \hat{q} = -a_3 \hat{w} \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \Phi \bar{\rho} + F_q + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_q \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{q}}{\bar{\rho}} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \hat{\delta}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} \hat{\delta} = \bar{\rho} + F_\delta + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\hat{\delta}}{\bar{\rho}} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \hat{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}'}{\partial \sigma} = 0, \quad (8)$$

$$u = U + u', \quad v = V + v', \quad w = W + w',$$

$$\vartheta = \Theta + \vartheta', \quad q = Q + q', \quad p = P + p'$$

(где большими буквами обозначены крупномасштабные составляющие метеополей, а буквами со штрихом — отклонения).

Здесь приняты следующие обозначения:

$$a_1 = \tilde{\delta}_x \frac{\sigma - \hat{H}}{H - \tilde{\delta}(x, y)}, \quad a_2 = \tilde{\delta}_y \frac{\sigma - \hat{H}}{H - \tilde{\delta}(x, y)}, \quad a_3 = \frac{\hat{H}}{H - \tilde{\delta}(x, y)},$$

$$\operatorname{div} \vec{u} \hat{\varphi} = \frac{\partial u \hat{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial v \hat{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial w \hat{\varphi}}{\partial \sigma}, \quad \hat{\varphi} = \rho \varphi, \quad \varphi = (u, v, \vartheta', q', \delta),$$

$$\tilde{\delta}_x = \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial x}, \quad \tilde{\delta}_y = \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial y}, \quad w = a_1 u + a_2 v + a_3 w,$$

$$F_u = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 \tau_{11} + a_2 \tau_{12}),$$

$$F_v = \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 \tau_{21} + a_2 \tau_{22}),$$

$$F_\vartheta = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 H_1 + a_2 H_2),$$

$$F_q = \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 P_1 + a_2 P_2),$$

$$F_\delta = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma}(a_1 S_1 + a_2 S_2),$$

где t – время; u, v, w – компоненты вектора скорости ветра в координатной системе \bar{x}, \bar{y}, σ ; $\vec{u} = (u, v, w)$; ϑ – потенциальная температура; ρ – плотность; l – параметр Кориолиса; q – удельная влажность; L_w – скрытая теплота конденсации; Φ – скорость образования жидкой фазы; S – параметр стратификации; δ – водность, $\lambda = g/T$ – параметр плавучести; $\bar{\rho}(z)$ – фоновая плотность; τ_{ij} , H_i , P_i , Q_i ($i = \overline{1, 3}$; $j = \overline{1, 2}$) – тензор вязких напряжений Рейнольдса и турбулентные потоки тепла, влаги и водности соответственно; ν_u , ν_ϑ , ν_δ – вертикальные коэффициенты турбулентности для моментов количества движения, тепла и влаги соответственно.

Для описания структуры приземного слоя используется теория подобия Монина – Обухова и эмпирические функции Бузингера [4]. При условии сильной неустойчивости для аппроксимации вертикальных профилей метеополей в приземном слое, используется «закон-1/3», а при сильной устойчивости, как и в [5, 6], – линейная зависимость. Окончательно модель приземного слоя записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \kappa z \frac{\partial |\vec{u}|}{\partial z} &= u_* \varphi_u(\zeta), \quad \kappa \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} = \tilde{P}_* \varphi_\vartheta(\zeta), \quad (P = \vartheta, q), \\ \kappa |\vec{u}| &= u_* f_u(\zeta, \zeta_u), \quad P - P_0 = \tilde{P}_* f_\vartheta(\zeta, \zeta_\vartheta), \quad \zeta = \frac{z}{L}, \quad \zeta_h = \frac{h}{L}, \\ \nu_i &= \frac{u_* \kappa z}{u_i(\zeta)}, \quad (\nu_i)_h = \frac{u_* \kappa h}{\varphi_i(\zeta_h)}, \quad a_i = \frac{\varphi_i(\zeta)}{f_i(\zeta_h, \zeta_i)}, \quad L = \frac{u_*^2}{\kappa^2 \lambda \varphi_*}, \quad (i = u, \varphi), \\ f_u(\zeta, \zeta_0) &= \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\varphi_u(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad f_\vartheta(\zeta, \zeta_0) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\varphi_\vartheta(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \end{aligned} \quad (9)$$

где $|\vec{u}| = (u^2 + v^2)^{1/2}$ – модуль вектора скорости; u_* – скорость трения; ϑ_* , q_* – масштабы потенциальной температуры и удельной влажности; h – высота приземного слоя; L – масштаб длины; z_u, z_ϑ – параметры шероховатости для ветра и температуры; ζ – безразмерная высота, представляющая собой параметр гидростатической устойчивости; φ_i , f_i – направленные универсальные функции. В приземном слое при этом будем учитывать поправку к потенциальной температуре за счет влаги. При этом несколько изменится значение масштаба длины L .

Введем масштаб длины $L_* = L(J_* + 1)$ и соответственно безразмерную высоту $\zeta^* = z/L_* = \zeta(1 + J_*)$, где $J_* = 0,61T(q_h - q_{z_0})/(\vartheta_h - \vartheta_{z_0})$ – безразмерное число, являющееся мерой относительной значимости эффектов стратификации влажности и температуры. Вид универсальных функций φ_i, f_i , разумеется, останется прежним.

Система уравнений (2)–(9) решается в области $D_t = D \times [0, \bar{t}]$, $D = \{(x, y, \sigma) : x \in [-X, X], y \in [-Y, Y], \sigma \in [0, H]\}$ при следующих начальных и краевых условиях:

$$\hat{u}' = \hat{v}' = \hat{w}' = 0, \quad \hat{\vartheta}' = 0, \quad \hat{q}' = 0, \quad \hat{\delta}' = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \hat{u}'}{\partial x} = \frac{\partial \hat{v}'}{\partial x} = \frac{\partial \hat{w}'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\vartheta}'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{q}'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\delta}'}{\partial x} = 0$$

при $x = \pm X$, (11)

$$\frac{\partial \hat{u}'}{\partial y} = \frac{\partial \hat{v}'}{\partial y} = \frac{\partial \hat{w}'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\vartheta}'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{q}'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\delta}'}{\partial y} = 0$$

при $y = \pm Y$, (12)

$$\hat{u}' = \hat{v}' = \hat{w}' = 0, \quad \hat{\vartheta}' = 0, \quad \hat{q}' = 0, \quad \hat{\delta}' = 0 \quad \text{при } \sigma = H, \quad (13)$$

$$a_3 h \frac{\partial \hat{u}}{\partial \sigma} = a_u \hat{u}, \quad a_3 h \frac{\partial \hat{v}}{\partial \sigma} = a_u \hat{v}, \quad a_3 h \frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial \sigma} = a_\vartheta (\hat{\vartheta} - \hat{\vartheta}_0), \quad (14)$$

$$a_3 h \frac{\partial \hat{q}}{\partial \sigma} = a_\vartheta (\hat{q} - \hat{q}_0), \quad \hat{w} = -\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}\right)h \quad \text{при } \sigma = \frac{(h - \hat{\delta}(x, y))\hat{H}}{H - \hat{\delta}(x, y)},$$

$$\hat{w} = 0, \quad \hat{\delta} = 0 \quad \text{при } \sigma = 0.$$

Поскольку при численном моделировании в большинстве задач физики атмосферы число Рейнольдса $Re \gg 10^3$, то необходимо описать подсеточные турбулентные движения в параметризованном виде и тем самым отфильтровать движения, масштаб которых меньше, чем размер расчетной ячейки сеточной области. Из соображений размерности следует, что в энергетическом спектре есть область волновых чисел, в которой влиянием вязкой диссипации можно пренебречь по сравнению с переносом энергии за счет инерционных эффектов. Поэтому будем предполагать, что характерный масштаб процессов в пределах расчетной ячейки находится внутри инерционного диапазона. Тогда после проведения осреднения в уравнениях гидротермодинамики по объему расчетной ячейки получатся новые слагаемые, описывающие

напряжения Рейнольдса подсеточного масштаба. Таким образом, операторы горизонтального турбулентного обмена будем аппроксимировать с помощью тензора вязких напряжений. Симметричный тензор напряжения τ_{ij} представим в виде функции, зависящей от тензора деформации D_{ij} среднего движения, следующим образом [9, 10]:

$$\tau_{i,j} = \bar{\rho} K_M D_{i,j}, \quad (15)$$

где

$$D_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\delta_{ij}}{\delta_{ii}} \nabla u_i, \quad (i = 1, 2; \quad j = 1, 2),$$

δ_{ij} – символ Кронекера, $u_1 = u$, $u_2 = v$, $x_1 = x$, $x_2 = y$. Коэффициент кинематической вязкости K_M представим в виде [10]

$$K_M = \begin{cases} (\tilde{K}\bar{\Delta})^2 |Def|, & \text{если } Ri > 1, \\ (\tilde{K}\bar{\Delta})^2 |Def| (1 - (K_H/K_M) Ri), & \text{если } \leq 1, \end{cases} \quad (16)$$

где K_H – эмпирическая константа, $\bar{\Delta} = \Delta x \Delta y^{1/2}$, $(Def)^2 = \frac{1}{2} (D_{11}^2 + D_{22}^2) + D_{12}^2$, $Ri = \frac{g \partial \vartheta}{\Theta \partial z} / (Def)^2$.

Поток тепла и влаги определим по формулам

$$H = \bar{\rho} K_H \delta_{il} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}, \quad P = \bar{\rho} K_H \delta_{ii} \frac{\partial q}{\partial x_j}, \quad (j = 1, 2), \quad (17)$$

где $K_H/K_M = 1/Pr \approx 3$.

Условия (17) фактически предполагает, что существует мгновенное приспособление подсеточной турбулентности к среднему потоку количества движения, а также турбулентному потоку тепла и влаги.

Для определения коэффициента вертикального турбулентного обмена рассмотрим уравнение баланса энергии турбулентности

$$\begin{aligned} & \frac{\partial b}{\partial t} + \vec{u} \text{grad}(b) = \\ & = a_3 \nu_u \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 - \lambda \alpha_T \frac{\partial \vartheta'}{\partial \sigma} - \lambda \alpha_T S / a_3 - \lambda \alpha_T \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right] + \\ & + a_3^2 \alpha_b \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_u \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{cb^2}{\nu_u}, \end{aligned} \quad (18)$$

где α_T , α_b и c – безразмерные универсальные константы, и воспользуемся гипотезой приближенного подобия Колмогорова [11], в соответствии с которой коэффициенты турбулентного обмена ν_u , скорость диссипации турбулентной энергии в тепло ϵ однозначно выражаются через кинетическую энергию турбулентности b и масштаб турбулентности l_0 , т. е.

$$\nu_u = c_1 l_0 b^{1/2}, \quad \epsilon = c b^2 / \nu_u. \quad (19)$$

Масштаб турбулентности вычислим по обобщенной формуле Кармана для пути смешения

$$l_0 = -a_3 \kappa \psi / \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad \psi = b^{1/2} l_0. \quad (20)$$

Формула (20) дает несколько завышенное значение l_0 в верхней части пограничного слоя атмосферы, поэтому для пограничного слоя кроме (20) будем пользоваться и формулой [13]

$$l_0 = \kappa \alpha_3 / \left(1 + \frac{\kappa \alpha_3}{\alpha_1} \right),$$

где α – заданная константа, а формулу (20) используем для приземного слоя.

Сформулируем теперь граничные условия для задачи (18)–(20). С помощью уравнений (10), (19), (20) можно получить параметризационные формулы для определения функции b в приземном слое атмосферы и на верхней его границе при $z = h$ или $\sigma = [h - \tilde{\delta}(x, y)] a_3$. При сделанных предположениях граничные условия можно записать в следующем виде:

$$b = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad (21)$$

$$b = \tilde{b}^2(\zeta_h, \zeta_0) \quad \text{при } \sigma = [h - \tilde{\delta}(x, y)] a_3, \quad (22)$$

$$\frac{\partial b}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{при } z = H, \quad (23)$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm X, \quad \frac{\partial b}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = \pm Y, \quad (24)$$

где \tilde{b}^2 – значение энергии турбулентных пульсаций на верхней границе приземного слоя, вид которых приведен в [1, 7, 12].

Скорость образования жидкой фазы Φ с точностью турбулентных слагаемых представим в следующем виде:

$$\Phi = i \frac{c_p}{L_w} (\gamma_a - \gamma_{ba}) w, \quad i = \begin{cases} 1, & q = q_H, \\ 0, & q < q_H, \end{cases}$$

где γ_{ba} – влажно-адиабатический градиент.

Над водной поверхностью температуру ϑ_0 и удельную влажность q_0 зададим с помощью формул

$$\vartheta_0 = f_0(x, y, t), \quad q_0 = 0.622 \frac{E_0(\vartheta_0)}{p}, \quad (25)$$

где E_0 – упругость насыщения водяного пара при температуре ϑ_0 ; p – атмосферное давление; $f_0(x, y, t)$ – температура поверхности воды, которая предполагается известной функцией горизонтальных координат и времени.

Условие баланса тепла на границе раздела атмосфера – почва имеет вид

$$G_s - \rho c_p \left(\nu_{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)_{z=z_{\vartheta}} - \rho L_W \left(\nu_q \frac{\partial q}{\partial z} \right)_{z=z_{\vartheta}} = I_0(1 - A_s) - F_r, \quad (26)$$

где $G_s = \lambda_s \left(\nu_{\vartheta} \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=z_{\vartheta}}$ – теплопередача через поверхность почвы; $\lambda_s = c_s \rho_s k_s$, ρ_s , c_s , k_s – соответственно плотность, удельная теплоемкость, коэффициент температуропроводности и абсолютная температура почвы; ρ – плотность воздуха; I_0 – коротковолновая солнечная радиация; A_s – альбеда подстилающей поверхности; F_r – длинноволновое излучение. При штилевых условиях перепад температуры между уровнями $z = 0$ и $z = z_{\vartheta}$ может достигнуть довольно больших значений. Поэтому при решении (26) используется полуэмпирическая параметризационная формула для вязкого подслоя $\vartheta = \vartheta_0 + 0,0962 \vartheta_* (u_* z_{\vartheta} / \nu)^{0,45}$, где ν – кинематический коэффициент вязкости.

Для описания распределения температуры в почве рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} K_s \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (27)$$

Уравнение (26) является краевым условием для (28) при $z = 0$. Второе краевое уравнение для (27) зададим на некоторой глубине H_r , предполагая на ней затухание суточных колебаний температуры, т. е. $T = T_r$ при $z = -H_r$.

При такой постановке, чтобы получить замкнутую систему, необходимо задавать относительную влажность $f(x, y)$ на поверхности Земли. Обычно эта функция задается по эмпирической формуле Эстока [1, 7]. Однако если имеются сведения о теплофизических характеристиках почвы, то можно рассматривать процессы теплообмена в почве

с учетом термодинамического состояния почвенной среды. Тогда для определения тепловых и влажностных характеристик почвы рассмотрим следующие уравнения:

$$c \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T_s}{\partial z}, \quad \rho_w \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q_s}{\partial z}, \quad (28)$$

где c – теплоемкость почвы; $\tilde{\eta}_i$ – объемное влагосодержание; $\tilde{\eta}_s$ – насыщающая влага, или пористость почвы; c_i – теплоемкость сухого грунта для соответствующего почвенного типа « i »; λ – коэффициент температуропроводности, который определяется с помощью эмпирических формул, полученных из аппроксимации экспериментальных данных [29] $\lambda = f(P_f)$, где $P_f = \log(\tilde{\psi})$, $\tilde{\psi}$ – потенциал влаги в почве. Отметим, что потенциал влаги соответствует верхнему горизонту воды и обозначает работу против капиллярных сил и силы сопротивления, затрачиваемой на выделение воды из почвы:

$$Q_s = k_\eta \rho_w \frac{\partial(\tilde{\psi} + z)}{\partial z} \quad \text{или} \quad Q_s = B_\eta \rho_w \frac{\partial \eta}{\partial z} + k_\eta \rho_w,$$

где

$$D_\eta = k_\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta},$$

Q_s – поток влаги в почве; k_η – гидравлическая проводимость; ρ_w – плотность воды; z – вертикальная координата; D_η – коэффициент диффузии.

Определим переменные K_η , $\tilde{\psi}$ и D_η с помощью формул [29]

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_s \left(\frac{\tilde{\eta}_s}{\tilde{\eta}} \right)^b, \quad K_\eta = K_{\eta_s} \left(\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\eta}_s} \right)^{2b+3},$$

$$D_\eta = - \frac{b K_{\eta_s} \psi_s}{\tilde{\eta}} \left(\frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\eta}_s} \right)^{b+3}. \quad (28')$$

Теперь одним из основных искоемых параметров является относительная влажность или потенциал поверхностной влаги. Связь между потенциалом поверхностной влаги и относительной влажностью при равновесии представим в виде $f = \exp - \frac{g \psi_s}{RT_s}$. Тогда удельная влажность на поверхности Земли q_3 равна $f q_H$, а q_H определяется по формуле Магнуса.

Известно, что температура приземного слоя воздуха и суммарное испарение увлажненной поверхности зависят от инсоляции деятельности поверхности. Следовательно, различия в инсоляции склонов

в зависимости от их экспозиции могут привести в условиях пересеченной местности к значительным метеорологическим контрастам. Поэтому для расчета потока солнечной радиации на поверхность склона используем формулу

$$S_h = S_0 \cos \alpha, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \cos \alpha = \sin h_c \cos \alpha_r + \cos \psi_\alpha (\sin \varphi \cos \psi \cos \Omega - \sin \varphi \cos \psi_a \cos \varphi) \sin \alpha_r + \\ + \sin \psi_\alpha \cos \psi \sin \Omega \sin \alpha_r, \end{aligned}$$

α_0 – солнечная постоянная; α_r – угол падения солнечных лучей на поверхность; ψ_α – азимут проекции нормали к склону на горизонтальную поверхность, отсчитываемый от плоскости меридиана (считается положительным при отсчете с юга по часовой стрелке).

Задача (1)–(29) представляет собой гидродинамическую часть модели и позволяет воспроизвести основные черты атмосферной циркуляции в данном регионе.

Поскольку в данной модели рассматриваются экологические процессы регионального масштаба, для которых характерные горизонтальные масштабы существенно больше вертикальных, гидродинамическая модель представлена в квазистатическом приближении. Однако если эти масштабы сопоставимы, то уравнение движения (3) записывается с учетом вертикальных ускорений. Далее на фоне полученного поля течения, решаются задачи распространения трансформирующей примеси и задачи оптимизации по регулированию мощности источников. Конечно-разностная аппроксимация и метод решения (1)–(2) приводятся в [1, 7, 14].

Моделирование распространения примесей в атмосфере с учетом фотохимических превращений

При решении природоохранных задач важным является учет механизмов вторичного загрязнения атмосферы. Выбрасываемые в атмосферу примеси от различных источников проходят достаточно большой цикл преобразований, в результате которых могут появиться вещества более токсичные, чем первоначально выбрасываемые. В зависимости от конкретной физической задачи и преследуемых в ней целей, можно использовать описание превращений веществ с различной степенью детализации. Определяющей характеристикой при этом

является величина «времени жизни» для каждой субстанции. Вторичные химические превращения примесей протекают как в газофазной, так и в жидкой форме. В данной работе будем рассматривать фотохимический механизм, который базируется на данных по кинетике фотохимических газофазных реакций и анализе продуктов таких превращений.

Для моделирования переноса примесей рассмотрим уравнение турбулентной диффузии, полученное осреднением уравнения молекулярной диффузии (в декартовой системе координат):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \overline{\frac{\partial u' \varphi'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v' \varphi'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial w' \varphi'}{\partial z}} = 0. \quad (30)$$

Поток примеси определяется с помощью аппроксимации градиентного типа:

$$\overline{u'_i \varphi'} = -k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \quad (31)$$

где k_{ij} – тензор коэффициентов турбулентной диффузии, а черта – знак осреднения; $i, j = 1, 2, 3$ – индексы компонентов тензора по координатным осям x, y, z соответственно. Предполагается, что компоненты вектора скорости удовлетворяют уравнению неразрывности.

При определении коэффициентов диффузии наиболее важным является учет одноточечных вторых моментов турбулентных пульсаций. Известно, что предположение стационарности и горизонтальной однородности атмосферных процессов, а также приближение второго порядка в теории замыкания турбулентности могут привести к алгебраической формулировке определяющих уравнений [13]. Такой подход позволяет определить коэффициенты тензора диффузии в зависимости от средних параметров атмосферы, сдвига воздушного потока, стратификации и энергии турбулентности. Поэтому уравнения переноса и диффузии будем решать совместно с уравнениями (1)–(29).

Окончательный вид коэффициентов тензора диффузии в криволинейной системе координат таков [15, 16]:

$$k_{xx} = \delta \left[k'' + (2\delta' k_M - k') \left(a_3 \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 \right],$$

$$k_{yy} = \delta \left[k'' + (2\delta' k_M - k') \left(a_3 \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 \right],$$

$$\begin{aligned}
k_{\sigma\sigma} &= \frac{A_2 D_4 \bar{b}^{-1/2} \bar{S} l^2}{1 + \frac{D_1 R_i}{\bar{b}}} = \frac{A_2 D_4 l \bar{b}^{-1/2}}{1 + \frac{D_1 R_i}{\bar{b}}}, \\
k_{xy} = k_{yx} &= \delta (2\delta' k_M - k') a_3^2 \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma}, \\
k_{\sigma x} &= a_3 k' \frac{\partial u'}{\partial \sigma}, \quad k_{\sigma y} = a_3 k' \frac{\partial v}{\partial \sigma}, \\
k_{x\sigma} &= -\delta (k_M + k_{\sigma\sigma}) a_3 \frac{\partial u}{\partial \sigma}, \\
k_{y\sigma} &= -\delta (k_M + k_{\sigma\sigma}) a_3 \frac{\partial v}{\partial \sigma}, \\
k_{\sigma y} &= a_3 k' \frac{\partial v}{\partial \sigma},
\end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}
k_M &= \frac{k_{\sigma\sigma} A_1 / A_2}{1 + \frac{D_2 R_i}{\bar{b}}} \left[1 + \frac{D_3 R_i}{\bar{b}} - \frac{3C_1}{D_4} \left(1 + \frac{D_3 R_i}{\bar{b}} \right) \right], \\
k' &= \frac{1}{2 + 3 \frac{D_5 R_i}{\bar{b}}} \frac{6A_2}{\bar{b}^{1/2} \bar{S}} \left[\frac{3D_5 R_i}{2\bar{b}} (k_M + k_{\sigma\sigma}) - k_M \right], \\
k'' &= \frac{D_4 \bar{b} \bar{S}^2 l^2}{3} - \frac{2C_2 A_1 R_i \bar{S} k_{\sigma\sigma}}{\bar{b}^{1/2}}, \\
\delta &= \frac{3A_2}{\bar{b}^{1/2} \bar{S}}, \quad \delta' = \frac{3A_1}{\bar{b}^{1/2} \bar{S}}.
\end{aligned}$$

Здесь $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, D_4$ – эмпирические функции. Безразмерная турбулентная энергия (\bar{b}) и число Ричардсона (Ri) имеют вид

$$\bar{b} = \frac{b}{l^2 \bar{S}^2}, \quad Ri = \frac{g a_3}{\vartheta \bar{S}^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma},$$

где $b = \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}$ – турбулентная кинетическая энергия;

$$\bar{S}^2 = a_3^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 \right]$$

– сдвиг ветра.

Таким образом, по известным значениям функций пути смещения, энергии турбулентности и средних метеорологических полей можно найти все необходимые коэффициенты турбулентной диффузии.

Поэтому уравнение турбулентной диффузии будем решать совместно с задачами (1)–(29).

Поскольку в модели учитывается влияние орографии на турбулентную диффузию, то, чтобы не слишком усложнять задачу, будем предполагать, что главные оси тензора диффузии совпадают с осями декартовой координатной системы, и тем самым ограничимся учетом только диагональных элементов. Тогда уравнение турбулентной диффузии для многокомпонентной трансформирующей примеси в обобщенной системе координат можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi'_i}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi'_i}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi'_i}{\partial y} + (w - \tilde{w}_g) \frac{\partial \varphi'_i}{\partial \sigma} + F(\vec{x}, t) + B_i(\varphi_i, \vartheta) \varphi_i + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} k_{xx} \frac{\partial \varphi'_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_{yy} \frac{\partial \varphi'_i}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \chi_1 \frac{\partial \varphi'_i}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial x} a_1 k_{xx} \frac{\partial \varphi'_i}{\partial \sigma} + \\ & + a_1 \frac{\partial}{\partial \sigma} k_{xx} \frac{\partial \varphi'_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} a_2 k_{yy} \frac{\partial \varphi'_i}{\partial \sigma} + a_2 \frac{\partial}{\partial \sigma} k_{yy} \frac{\partial \varphi'_i}{\partial y}, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \tilde{\delta}_x \frac{\sigma - H}{H - \tilde{\delta}(x, y)}; \\ a_2 &= \tilde{\delta}_y \frac{\sigma - H}{H - \tilde{\delta}(x, y)}; \\ a_3 &= \frac{H}{H - \tilde{\delta}(x, y)}; \\ \chi_1 &= a_1^2 k_{xx} + a_2^2 k_{yy} + a_3^2 k_{\sigma\sigma}, \end{aligned}$$

φ'_i – вектор отклонений концентраций примесей от фоновых значений; $F(\vec{x}, t)$ – вектор отклонений концентраций примесей от фоновых значений; $\tilde{w}_g = \text{diag}\{\tilde{w}_g\}$ – описывает гравитационное оседание субстанций; $B_{i,j}$ – матричный оператор, описывающий взаимодействие различных субстанций между собой и локальные изменения.

Уравнение (33) решается в области $D_t = D \times [t_j, t_{j+1}]$, $D = \{-X \leq x \leq X, -Y \leq y \leq Y, \frac{h-\tilde{\delta}}{H-\tilde{\delta}}H \leq \sigma \leq H\}$ при следующих условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm X, \quad y = \pm Y, \\ \varphi_i &= \varphi_{\text{фон}} \quad \text{при} \quad \sigma = H. \end{aligned} \quad (34)$$

На нижней границе области интегрирования краевое условие зададим в следующем параметризованном виде:

$$a_3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma} = a_3 \frac{\tilde{\beta}_i \varphi_{ih} - f_s}{\tilde{\beta}_i + a_3 k_{\sigma\sigma}} \quad \text{при } \sigma = \frac{h - \tilde{\delta}}{H - \tilde{\delta}} H, \quad (35)$$

где $\tilde{\beta}_i = \beta_i u_* - w_g$; X, Y, H – боковые границы области интегрирования по пространственным переменным x, y, σ соответственно; β_i – величины, характеризующие взаимодействие примесей с подстилающей поверхностью. Функция $f_s(x, y, t)$ описывает источники примесей на уровне шероховатости, φ_{ih} – концентрация примеси на верхней границе приземного слоя.

Решение (33)–(35) ищется в интервале $t \in [0, \bar{t}]$ на множестве неотрицательных решений, удовлетворяющих граничным условиям (34) и (35).

Разностный аналог задачи (33)–(35) и схему для решения будем строить на основе обобщенной постановки задачи [7]. Для этого умножим скалярно соотношение (33) на некоторую достаточно гладкую функцию φ^* . Интегрируя по области D_t , с учетом уравнения неразрывности, краевых и начальных условий получим

$$\begin{aligned} I(\varphi, \varphi^*) = & \int_{D_t} \left[(\Lambda_i, \varphi_i^*) - \hat{w}_{gi} \varphi_i^* \frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma} - B \varphi \varphi_i^* - F_i \varphi_i^* + \right. \\ & + k_{xx} \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + a_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma} \right) + k_{yy} \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + a_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma} \right) + \\ & \left. + \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial \sigma} \left(\chi_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma} + a_1 k_{xx} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + a_2 k_{yy} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) \right] dDdt + I_{nd}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_{nd} = & \frac{1}{2} \int_{D_t} \varphi_i \varphi_i^* dD \left[\frac{1}{2} \varphi_i u - k_{xx} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + a_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma} \right) \right] \Big|_{-X}^X \times \\ & \times dyd\sigma dt + \int_{-X}^X \int_{-\sigma_1}^H \int_0^{\bar{t}} \varphi_i^* \left[\frac{1}{2} v \varphi_i - k_{yy} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + a_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma} \right) \right] \Big|_{-Y}^Y dx d\sigma dt + \\ & + \left[\frac{1}{2} \omega \varphi_i - \chi_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma} - a_1 k_{xx} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - a_2 k_{yy} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right] \Big|_{-\sigma_1}^H dx dy dt, \quad (36) \end{aligned}$$

$(\Lambda\varphi_i, \varphi_i^*)$ – антисимметричная форма,

$$(\Lambda\varphi_i, \varphi_i^*) = \frac{1}{2} \left[\varphi_i^* \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial t} + \vec{u} \varphi_i^* \text{grad} \varphi_i - \vec{u} \varphi_i \text{grad} \varphi_i^* \right].$$

Учитывая граничные условия (34) и (35), получим

$$\begin{aligned} I_{nd} = & \frac{1}{2} \int_{D_t} \varphi_i \varphi_i^* dD \Big|_0^{\bar{t}} + \int_{-Y}^Y \int_{-\sigma_1}^H \int_0^{\bar{t}} \varphi_i^* \left[\frac{1}{2} \varphi_i u - a_1 k_{xx} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma} \right] \Big|_{-X}^X dy d\sigma dt + \\ & + \int_{-X}^X \int_{-\sigma_1}^H \int_0^{\bar{t}} \varphi_i^* \left[\frac{1}{2} v \varphi_i - a_2 k_{yy} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma} \right] \Big|_{-Y}^Y dx d\sigma dt + \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y \int_0^{\bar{t}} \varphi_i^* \times \\ & \times \left[\frac{1}{2} \omega \varphi_i - a_1 k_{xx} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - a_2 k_{yy} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - \chi_1 \frac{a_0 (\tilde{\beta} \varphi_{ih} - f) \varphi_i}{\tilde{\beta} + a_0 k_{zz}} \right] dx dy dt, \quad (37) \end{aligned}$$

Из тождества (36) следует, что если пренебречь диффузионными слагаемыми, то при $\varphi_i^* = \varphi_i$ получится закон сохранения для концентрации примесей, что гарантирует выполнение условий устойчивости по времени построенных на его основе конечно-разностных уравнений. Для аппроксимации дискретных аналогов уравнений (33) и (36) по времени используется метод расщепления по физическим процессам.

Введем в D_t сеточную область D_t^h , на которой определим пространство сеточных функций, и аппроксимируем функционал $I(\varphi, \varphi^*)$ некоторым сумматорным функционалом. Если в (36) первые производные в симметричных и антисимметричных слагаемых аппроксимировать единообразно, то получится конкретный вид конечно-разностной аппроксимации, который удовлетворяет условию закона сохранения массы. Из условия стационарности функционала при произвольных и независимых вариациях компонентов векторов функции φ_i^{*h} и φ_i^h получим соответствующие конечно-разностные аппроксимации для основной и сопряженной задачи. На каждом малом интервале Δt получается схема, состоящая из трех этапов: 1) перенос примеси по траекториям; 2) турбулентная диффузия; 3) локальное преобразование примесей из-за трансформации.

Первый этап решается с помощью явной монотонной схемы, обладающей свойством консервативности и имеющей второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и во времени [17, 18].

На втором этапе, если учитываются смешанные производные, для решения применяется следующая схема расщепления [19]:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{j+\alpha/6} - \varphi^{j+\frac{\alpha-1}{6}}}{\Delta t/2} + \frac{1}{2} \left(\Lambda_{\alpha}^h \varphi^{j+\alpha/6} + \Lambda_{\alpha}^h \varphi^{j+\frac{\alpha-1}{6}} \right) &= 0, \quad \alpha = 1, 2, \\ \frac{\varphi^{j+4/6} - \varphi^{j+2/6}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left(\Lambda_3^h \varphi^{j+4/6} + \Lambda_3^h \varphi^{j+2/6} \right) &= 0, \\ \frac{\varphi^{j+\frac{7-\alpha}{6}} - \varphi^{j+\frac{6-\alpha}{6}}}{\Delta t/2} + \frac{1}{2} \left(\Lambda_{\alpha}^h \varphi^{j+\frac{7-\alpha}{6}} + \Lambda_{\alpha}^h \varphi^{j+\frac{6-\alpha}{6}} \right) &= 0, \quad \alpha = 2, 1, \end{aligned} \quad (38)$$

с итерационным уточнением по формуле

$$\left(E + \frac{\Delta t}{2} \Lambda_1^h \right) \left(E + \frac{\Delta t}{2} \Lambda_2^h \right) \left(E + \frac{\Delta t}{2} \Lambda_3^h \right) \frac{\varphi^{k+1} - \varphi^k}{\Delta t} = - (A^h \varphi_i^k - F_i^k)$$

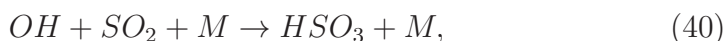
с начальным приближением $\varphi^k = \varphi^{j+1}$ (k – итерационный параметр). Здесь $A\varphi = \sum_{i=1}^3 \Lambda_i \varphi + \Lambda_4 \varphi$, при этом Λ_4 учитывает все слагаемые со смешанными производными в правой части уравнения (33). На третьем этапе задача сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = B(\varphi_i, \vartheta) \varphi_i + F_i, \quad \varphi_i|_{t=t_j} = \varphi_i^j \quad (i = \overline{1, n}), \quad (39)$$

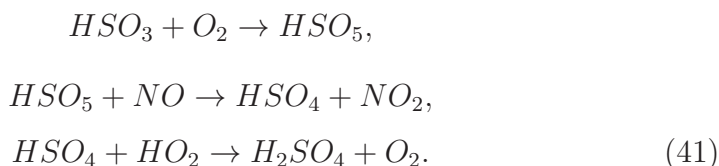
где F_i $i = \overline{1, n}$ – источники примесей, φ_i^j – получено на предыдущем этапе расщепления. В отличие от уравнения (33), система (39) рассматривается в каждой точке трехмерной области независимо от других. Такая локальная независимость, вытекающая из свойств метода расщепления, вполне согласуется с малыми характерными временами протекания химических реакций.

При промышленных выбросах примесей происходит ряд сложных химических и фотохимических реакций, в результате чего образуются новые, более токсичные вещества, которых не было в первоначальных выбросах. Среди неорганических веществ антропогенного происхождения особенно вредны выбросы окислов серы и азота, окиси и двуокиси углерода. Выбросы окислов серы причиняют значительный ущерб растительности. При высокотемпературном горении происходит соединение атомарного кислорода и азота, которые на солнечном свете становятся очень ядовитыми для флоры и фауны. Например, в атмосфере сернистый газ постоянно окисляется до триоксида серы,

которая затем гидратируется с образованием капель серной кислоты. Для газофазных процессов окисление SO_2 протекает по следующей реакции [20–23]:

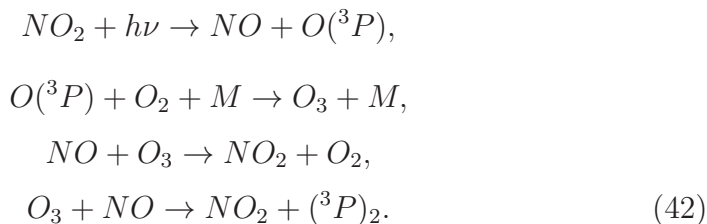


HSO_3 быстро реагирует с O_2 и гидратами – это приводит к образованию конечного продукта – сульфатного аэрозоля (SO_4^{2-}). Возможны и другие механизмы протекания реакций с NO и SO_2 и др.:

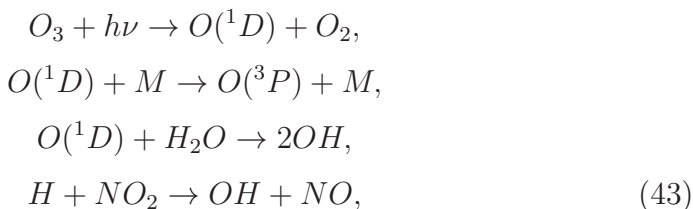


Однако если концентрация воды более 10^{17} молекул/см³, то радикал HSO_5 взаимодействует с водой намного интенсивнее, чем с NO .

Атомарный кислород и свободные радикалы участвуют в целом ряде последовательных реакций, что приводит к окислению окиси азота до двуокиси азота. Другие реакции могут давать озон и приводить к образованию высокотоксичных органических веществ. Наиболее частыми являются следующие реакции:

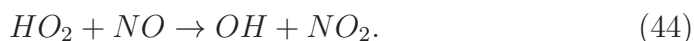


Для образования радикалов OH доминирующими являются следующие стадии:

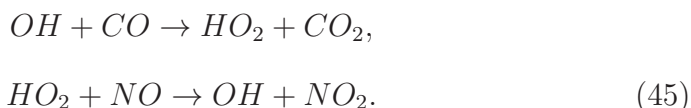


которые приводят к образованию NO_3 и N_2O_5 :

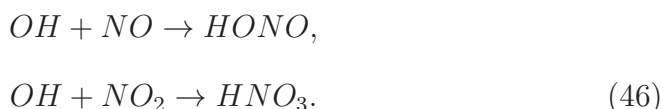




В результате реакций гидроксильных радикалов с CO происходит регенерация радикалов OH и окисление CO :



Дальнейшее превращение веществ связано с реакциями HO_2 , OH с O_3 , а также реакциями, учитывающими гибель OH по реакциям с NO , NO_2 и HO_2 с NO_2 :



Эти реакции приводят к многочисленным реакциям с образованием различных органических кислот, а также к качественному и количественному изменению химического состава атмосферы. Наиболее полный перечень последовательных реакций приведен в [24, 25]. Соответствующие реакции и константы их скоростей систематизированы в ИХКИГ СО АН СССР д. х. н. Н. М. Бажиным и к. х. н. Г. И. Скубневской.

Другой важный механизм связан с фотоокислением метана, так как выбросы метана увеличиваются, поэтому все более актуальными становятся вопросы о механизмах его дальнейшей трансформации до окиси и двуокиси углерода в связи с влиянием последних на климат.

В атмосфере, в дневное время, имеются значительные концентрации O и свободных радикалов OH и HO_2 , которые активно реагируют с метаном (CH_4), давая другие свободные радикалы, такие как CH_3O , CH_3O_2 , CH_3 и др.; они приводят окисление метана до формальдегида (CH_2O), метанола, перекисей, окиси и двуокиси углерода. Однако если имеются в атмосфере выбросы формальдегида, то наиболее возможным для фотоокисления является путь $H_2CO - CO - CO_2$. Достаточно полный перечень последовательности реакций фотоокисления метана и по азото-сернистому циклу приведен в [25].

Численные эксперименты по фотохимической трансформации будем проводить по реакциям, приведены, в работе [25]. Эти реакции в целом характерны для нижней тропосферы. Весь комплекс взаимосвязанных моделей будет использован для оценки антропогенного загрязнения акватории озера Байкал и его окрестности. В таблице

представлена лишь часть реакций, учитываемых в модели и характерных для фоновой атмосферы.

В перечнях веществ, загрязняющих воздушный бассейн озера Байкал, чаще всего встречаются SO_2 , H_2S , CH_3SH , NO , NO_2 , CH_4 , CO , H_2SO_4 .

Среди этих примесей имеются вещества, типичные для любого промышленного региона: окислы азота, сернистый ангидрид, метан, окись углерода. Численный эксперимент по моделированию трансформации заключается в следующем. Задаются источники, расположенные в регионе оз. Байкал, которые выбрасывают H_2CO , SO_2 , NO_2 и пыль. Селективно поглощая солнечный свет в ультрафиолетовом диапазоне, они переходят в электронно-возбужденное состояние, что способствует протеканию быстрых фотохимических превращений. В результате возникает ряд новых химически активных атомов, свободных радикалов и других веществ, которые вместе с исходными выбросами принимают вид $O(^1D)$, $O(^3P)$, O_3 , OH , HO_2 , H , NO_3 , NO , NO_2 , SO_2 , H_2CO , HCO , H_2O_2 , CO , CH_4 , HNO_2 , HNO_3 , SO_3 , SO_2^* , N_2O_5 , $HNOH$, HNO , HSO_3H , CH_3OOH , CH_3NO_2 , CO_2 , Системы дифференциальных уравнений для описания фотохимических процессов нелинейны, количество реакций достигает нескольких сотен, и происходят они в каждой точке трехмерной области. Значительное различие во временах жизни участвующих в реакциях субстанций приводит к большим разбросам точек спектра вариационных матриц. Поэтому очень важно выбрать подходящие алгоритмы, обеспечивающие решение при сравнительно малых затратах на ЭВМ.

Анализ системы фундаментальных решений, однородной, полученной в результате линеаризации (34), показывает, что среди них имеются как быстро, так и слабо убывающие экспоненциальные функции. Поэтому величина шага по времени для интегрирования (34) должна быть согласована с характерным масштабом времени жизни для отдельных компонентов. В задаче можно выделить два участка спектра собственных чисел λ_i вариационной матрицы: 1) $\lambda_i \equiv \text{Re}\lambda_i \leq 0$ и $|\lambda_i| \gg 1$ и 2) $|\lambda_i \Delta t| < 1$. В первом участке справедливо предположение о квазистационарности химических реакций, а на втором участке требуется учет нестационарности. Чтобы согласовать оба эти предположения в рамках одной вычислительной схемы, используются неявные по времени аппроксимации задачи (34), пригодные для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравне-

ний. При этом начальные условия задаются только для «долгоживущих» компонентов. Для численного решения нелинейной системы уравнений, аппроксимирующей по времени (34), используется метод Ньютона в комбинации с методом спуска. Опишем кратко схему вычислительного алгоритма.

Пусть необходимо решить систему n нелинейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\Psi_i(\varphi_i, \vartheta) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (47)$$

где $\Psi_i(\varphi_i, \vartheta)$ – функциональное выражение неявной по времени аппроксимации задачи (39). Будем считать, что задача решена, если найдутся такие значения компонентов вектора φ_i , для которых величина

$$r = \sum_{i=1}^n \Psi_i^2(\varphi_i, \vartheta) \quad (48)$$

принимает минимальное значение. Минимум функции r находится с помощью итераций по методу спуска. А каждый элементарный шаг реализуется по методу Ньютона. Для этой цели запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений спуска:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{d\varphi_j}{ds} = -\Psi_i(\sqrt{r})^{-1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (49)$$

где $A = \{A_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial \varphi_j} \right\}$ – матрица, составленная из частных производных функции ψ_i по компонентам искомого вектора φ_j ; S – переменная спуска.

Рассмотрим (49) как уравнение в вариациях [26]:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \delta \varphi_j = \psi_i \delta \eta \quad i = \overline{1, n}, \quad (50)$$

где $\delta \eta = \delta \varphi(\sqrt{r})^{-1}$. В зависимости от способа задания функции $\delta \eta$ можно построить различные варианты алгоритмы спуска. В частности, при $\delta \eta = 1$ получается известная схема метода Ньютона. Вычисления начинаются при $\delta \eta = 1$, т. е. с решения уравнения (39) по методу Ньютона. Для заданного нулевого приближения φ_i^0 определяется значение

$$r_i^0 = \sum_{j=1}^n \psi_i^2(\varphi_i, \vartheta). \quad (51)$$

Далее вычисляются новые значения φ_i и η_i , а весь цикл повторяется. Счет прекращается при выполнении условий

$$|\psi_i| < \epsilon_1, \quad |\varphi_j^{m+1} - \varphi_j^m| < \epsilon_2 |\varphi_j^{m+1}|, \quad (52)$$

где ϵ_1, ϵ_2 – заданные числа, определяющие точность сходимости итераций.

Модель оптимизации

В задачах экологии иногда объектом изучения является не само поле концентрации, а некоторые функционалы от этого поля. К числу таких функционалов относятся, например, среднегодовая концентрация различных субстанций, полное количество примесей, осевших в конкретном регионе, экономический ущерб, наносимый окружающей среде, и др. В таких задачах весьма эффективным является использование сопряженных функций.

Запишем уравнение (33) в определенном виде:

$$L\varphi_i = F_i, \quad (53)$$

В классе вещественных функций введем в рассмотрение сопряженный оператор с помощью тождества Лагранжа

$$(\varphi^*, L\varphi) = (\varphi, L^*\varphi^*), \quad (54)$$

где L – сопряженный оператор. Тогда сопряженную задачу можно представить в виде [1]

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \varphi_i^*}{\partial t} - \frac{\partial u \varphi_i^*}{\partial x} - \frac{\partial v \varphi_i^*}{\partial y} - \frac{\partial (w - w_g) \varphi_i^*}{\partial \sigma} = B_i(\varphi_i, \vartheta) \varphi_i^* + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} K_{xx} \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_{yy} \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \chi_1 \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial x} a_1 K_{xx} \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial \sigma} + \\ & + a_1 \frac{\partial}{\partial \sigma} K_{xx} \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} a_2 K_{yy} \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial \sigma} + a_2 \frac{\partial}{\partial \sigma} K_{yy} \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial y} + P_k, \end{aligned} \quad (55)$$

или в операторной форме

$$L^*\varphi^* = P_k, \quad (56)$$

где φ^* – сопряженная функция; P_k – заданная неотрицательная функция, характеризующая оцениваемые функционалы, а индекс $/<$ принимает непустое множество значений. Соответствующие граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_i^*}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } |x| = \pm X, \\ \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } |y| = \pm Y, \\ a_3 \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial \sigma} &= \frac{a_{\vartheta} \tilde{\beta} \varphi_{ih}^*}{\tilde{\beta}_i + a_{\vartheta} k_{\sigma\sigma}} \quad \text{при } \sigma = \frac{h - \tilde{\delta}}{H - \tilde{\delta}} H, \\ \varphi_i^* &= 0 \quad \text{при } z = H, \\ \varphi_i^*|_{t=t_1} &= 0.\end{aligned}\tag{57}$$

Напомним, что $a_3 = \frac{H}{H - \tilde{\delta}}$.

Задача (55)–(57) корректна в отрицательном направлении времени, и для обеспечения устойчивости вычислительного алгоритма схема его реализации получается транспонированной по пространству, времени и этапам расщепления относительно схем реализации дискретных аналогов основной задачи (33)–(34).

Умножим уравнение (33) на φ_i^* , а сопряженное – на φ , проинтегрируем по области D и результаты вычтем. Тогда с учетом тождества Лагранжа (54) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi, \varphi_k^*) = \sum_{i=1}^n (F_i, \varphi_k^*) - (P_k, \varphi).\tag{58}$$

Интегрируя (58) по времени от 0 до t_1 и учитывая свойство дельта-функции, а также начальные условия для φ_k^* и φ , имеем [1–3]

$$\int_0^{t_1} dt \int_D P_k \varphi dt = \sum_{i=1}^n F_i \int_0^{t_1} \varphi_k^*(\vec{x}, t) dt.\tag{59}$$

Весовая функция P_k определена во всех узлах сетки D^h , однако она отлична от нуля только в той части сеточной области D^c , которая соответствует области, при этом $D^c \in D^h$ – часть области, в которой требуется оценить общее количество примеси и которую также можно считать зоной, охраняемой от загрязнения. Нетрудно видеть, что

левая часть равенства (59) определяет количество примеси, поступающей в область D^c за интервал времени $(0, t_1)$.

Таким образом, общее количество примесей в какой-либо части области можно получить в результате решения или основной задачи, или сопряженной. Решением сопряженной задачи при заданных мощностях выброса примесей F_i ($i = \overline{1, n}$) можно найти такое размещение источников, при котором загрязнение зоны D^c не будет превышать санитарно-допустимую норму. Из (59) видно, что для оценки функционала не требуется многократно решать основную систему уравнений при конкретных начальных условиях в заданном наборе источников, а достаточно один раз решить сопряженную задачу и затем табулировать значение функционала при различных вариантах задания начальных условий и источников примесей. Такой подход был реализован в модельных расчетах оценки уровня антропогенного воздействия на озеро Байкал различных источников загрязнения.

Следуя [1], рассмотрим функционал

$$Y_k = \int_0^{t_1} dt \int_{G_k} P_k \varphi dG, \quad (60)$$

который характеризует санитарную дозу аэрозоля, выпавшего на поверхность озера Байкал ($z = \tilde{\delta}(x, y)$) в области экологически значимой зоны D^c . Задача состоит в том, чтобы найти такую совокупность планируемых выбросов аэрозолей Q_i , которая обеспечивала бы среднегодовые предельно допустимые дозы аэрозольного загрязнения

$$Y_k \leq c_k, \quad k = \overline{1, m} \quad (61)$$

при минимальных экономических затратах на технологическую реконструкцию предприятий, обеспечивающую, в свою очередь, выпуск установленного объема продукции при заданном уменьшении выбросов. Поэтому в этой задаче наряду с ограничением (61) необходимо учитывать минимизирующий функционал; в качестве такового примем

$$I = \sum_{i=1}^n F_i (\overline{Q}_i - Q_i), \quad (62)$$

где \overline{Q}_i – исходная, а Q_i – планируемая мощность; коэффициент определяет капитальные вложения в технологию, обеспечивающую оптимальность выбросов (в расчете на единицу мощности выбросов).

Тогда функционал представляет полные затраты, необходимые для улучшения технологии всех предприятий при переходе от выбросов \overline{Q}_i к планируемым выбросам Q_i . В результате приходим к задаче о нахождении таких выбросов Q_i , чтобы выполнялись условия

$$I = \sum_{i=1}^n \xi_i(\overline{Q}_i - Q_i) \rightarrow \min, \quad Y_k \leq c_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (63)$$

Задачу (60)–(63) можно свести к задаче линейного программирования. Если решение задачи (33)–(35) представить в виде суперпозиции элементарных решений

$$\varphi = \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i(\vec{r}, t) \quad (64)$$

и подставить (64) в (60), то получим

$$Y_k = \sum_{i=1}^n Q_i a_k, \quad (65)$$

где $a_k = \int_0^{t_1} dt \int_{G_k} P_k(\vec{r}, t) \varphi dG$, ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$).

Объединяя (63) и (65), приходим к задаче

$$\sum_{i=1}^n \xi_i(\overline{Q}_i - Q_i) \rightarrow \min. \quad (66)$$

Удобно перейти от Q к $e_i = \overline{Q}_i - Q_i$. Тогда придем к задаче линейного программирования по отысканию оптимального набора e_i на основе решения задачи

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \xi_i e_i &\rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i &\geq R_k, \quad k = \overline{1, m}, \\ e_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad R_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \overline{Q}_i - C_k. \end{aligned} \quad (67)$$

Оптимизационная модель (60)–(67) приведена в [1–3], и, по существу, она может служить конструктивной основой для решения различных оптимизационных задач в экологии. Так как задачи экологии имеют междисциплинарный характер, то естественно, что целевые функции и соответствующие ограничения могут быть самыми разнообразными.

Теперь на базе (60)–(67) рассмотрим оптимизационную задачу управления мощностью выбросов с учетом экономического ущерба. В качестве критерия оптимальности выберем минимум наносимого ущерба от загрязнения акватории озера Байкал.

Пусть в некоторой ограниченной области $D_t = S_0 \times [\tilde{\delta}(x, y), H]$ (S_0 – область изменения горизонтальных координат, $\tilde{\delta}(x, y)$ – поверхность Земли) находится n источников примеси с координатами x_i ($i = \overline{1, n}$) с мощностями выбросов Q_i ($i = \overline{1, n}$). Рассмотрим следующие функционалы:

$$\alpha_i^c = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_G p_i \varphi_i(x, y, \sigma, t) dG, \quad \alpha_i = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_D \varphi_i(x, y, \sigma, t) dD, \quad (68)$$

характеризующие общую концентрацию в экологически значимой зоне G и во всей области и φ_i – концентрацию примеси, полученную из решения (33)–(34) при заданном источнике с единичной мощностью. Составляющие ущерба, наносимого в экологически значимой зоне, представим в виде

$$\alpha_i^c = \alpha_i^c \cdot f_1(\varphi_i), \quad \text{а во всей области} - \alpha_i = \alpha_i \cdot f_2(\varphi_i), \quad (69)$$

где f_1 и f_2 являются заданными функциями от суммарной концентрации [27]. Следовательно, общий ущерб можно представить в виде

$$Y^c = \sum_{i=1}^n a_i^c e_i \quad - \text{ в экологически значимой зоне } G_k;$$

$$Y_0 = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad - \text{ во всей области } G_k. \quad (70)$$

Тогда задача оптимизации будет заключаться в нахождении вектора, доставляющего минимум функционалу

$$Y^c = \sum_{i=1}^n a_i^c e_i \rightarrow \min \quad (71)$$

при ограничениях

$$0 \leq e_i \leq \bar{Q}_i, \quad KY_0 \leq \sum_{i=1}^n a_i e_i \leq Y_0, \quad (72)$$

K – коэффициент, характеризующий необходимое сокращение наносимого ущерба [28].

Результаты численных экспериментов

Была проведена серия сценарных численных экспериментов для оценки влияния антропогенного загрязнения на озеро Байкал и окружающий его регион. Расчеты проводились при следующих значениях входных параметров.

Размеры сеточной области ($22 \times 32 \times 12$), шаги по горизонтали $\Delta x = \Delta y = 25$ км, по вертикали – $\Delta z_1 = z_0$, $\Delta z_2 = 50$ м, $\Delta z_3 = \Delta z_4 = 100$ м, $\Delta z_k = 200$ м ($k = \bar{5}, \bar{12}$), $X = 425$ км, $Y = 775$ км, $H = 1600$ м. Шаг по времени $\Delta t = 20$ мин для модели гидротермодинамики, $\Delta t = 10$ мин для моделей переноса и трансформации и для сопряженных задач. Начальный момент времени в расчетах соответствовал 6 часам местного времени.

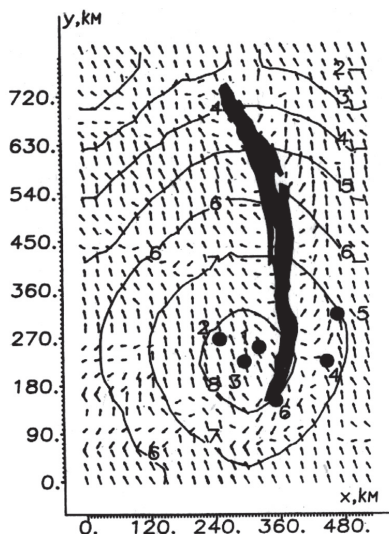


Рис. 1. Поле вектора скорости $\vec{V} = |u^2 + v^2|^{1/2}$ и изолинии концентрации SO_2 в логарифмическом масштабе на высоте 150 м, $t = 15$ ч при северо-восточном фоновом потоке

Сценарии отличались заданием фонового потока. Были заданы следующие направления фонового потока: северо-запад (СЗ), юго-запад (ЮЗ), северо-восток (СВ) и юго-восток (ЮВ). Скорость фонового потока во всех сценариях полагалась равной 5 м/с и задавалась на высоте $z = 1600$ м. На рис. 1 приведено векторное поле скорости потока $\vec{V} = (u, v)$ и поле нормированной концентрации SO_2 в логарифмическом масштабе для моментов времени $t = 15$ час в плоскости (x, y) при $z = 150$ м. Изолиниям с номером 8 соответствуют наибольшие значения, а с номером 1 – наименьшие значения концентраций.

Загрязнение атмосферы оценивалось от шести источников, расположенных на различных расстояниях от озера Байкал. Сложный рельеф местности и неравномерное в течение суток нагревание различных участков подстилающей поверхности приводило совместно с фоновыми движениями к очень сложной картине локальных циркуляций, существенной чертой которых являлось образование инверсии. Именно в этот период происходило интенсивное накопление загрязнений над сушей (если температура воды была выше температуры поверхности суши), а над водной поверхностью – в противоположном случае.

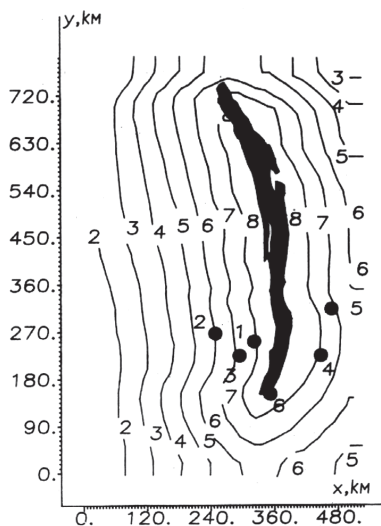


Рис. 2. Изолинии функции чувствительности $\lg(\varphi^*)$ в нижнем 150-метровом слое атмосферы

На рис. 2 представлен двумерный разрез поля функции чувствительности загрязнения акватории озера с использованием сопряжен-

ного уравнения. Функция p_k представляет собой акваторию озера. Функция чувствительности, представленная на рисунке, дает относительную величину вклада загрязнений от источников, расположенных в регионе, в суммарную концентрацию примесей, поступающих в нижний 150-метровый слой воздуха над водной поверхностью. Изолинии даны также в логарифмическом масштабе. Зоны наибольшей опасности ограничены изолинией с номером 8. Относительный вклад источников в загрязнение атмосферы над озером имеет вес от 100 до 10%. Полоса между изолиниями с номерами 7 и 8 соответствует относительному вкладу в загрязнение приводного слоя от 10 до 1%, полоса между изолиниями 6 и 7 соответствует вкладу от 1 до 0,1% и т. д.

На рис. 3 дана синтезированная схема области повышенной опасности с учетом всех сценарных расчетов, т. е. для четырех направлений фонового потока. На этом рисунке изолиния с номером 1 ограничивает область максимальных относительных вкладов (10–100% в относительной шкале значений функции опасности); полоса между линиями 2 и 3 – от 0,1 до 1%. Очевидно, что при высокой пространственно-временной изменчивости метеорологического режима необходимо иметь возможность управления источниками выбросов.

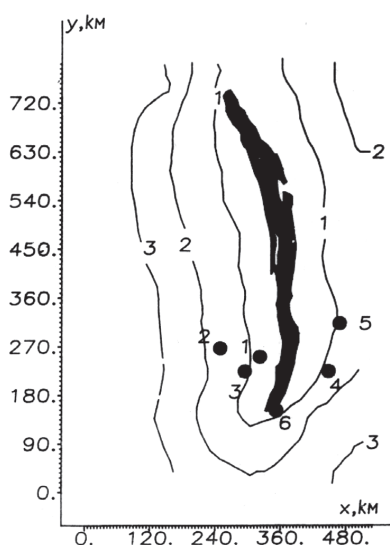


Рис. 3. Синтезированные изолинии «функции чувствительности» с учетом четырех основных направлений ветра

Проводились численные эксперименты по нелинейной модели трансформации примесей. В модели учитывались промышленные выбросы SO_2 , NO_x и пыли. На рис. 4 представлены графики изменения концентраций OH , HO_2 , O_3 , HNO_3 , SO_3 во времени, из которых видна четкая зависимость концентраций OH , O_3 и других активных радикалов от суточного хода Солнца. С другой стороны, свободные радикалы определяют основной ход фотохимических реакций и образование новых химических веществ. Обычно для любого промышленного региона характерно значительное загрязнение атмосферы продуктами вторичных превращений, в результате чего образуются вещества, обладающие свойствами окислителей, например HO_2NO_2 , HNO_3 , $HCOOH$ и др. В целом весь этот механизм приводит к ухудшению экологической обстановки.

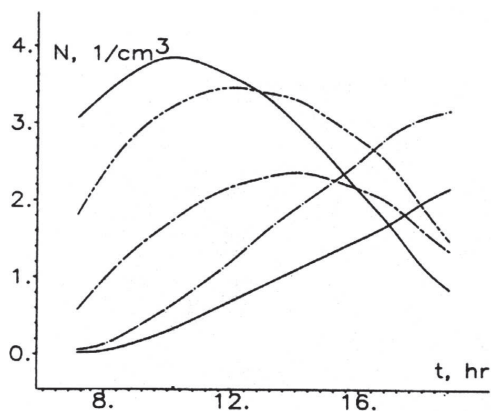


Рис. 4. Изменение концентраций OH , HO_2 , O_3 , HNO_3 , $HCOOH$ во времени

Теперь приведем некоторые результаты решения модельных задач с учетом оптимизации регулирования мощности источников. Основными критериями для регулирования являются наносимый ущерб в области D^h и достижение минимума в охраняемой зоне D^c . Охраняемая зона D^c представляет собой область, включающую по горизонтальной плоскости акваторию озера Байкал, а по вертикали – 150-метровый слой атмосферы.

Пусть в области D^h заданы 6 источников с разными мощностями, расположенные на разных удалениях от охраняемой зоны, значения которых приведены на рис. 5. Начальные мощности модельных источников представлены в нормированных единицах.

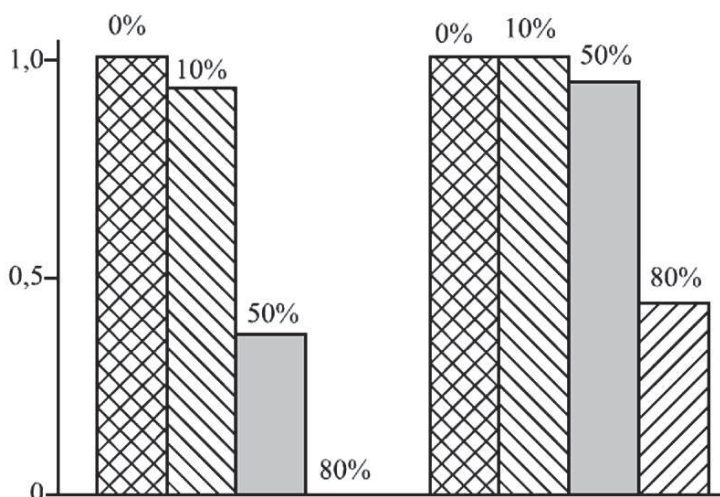


Рис. 5. Регулирование мощности источников

Проводились сценарные расчеты для четырех направлений фонового потока (СЗ, ЮВ, СВ, ЮЗ). Для каждого из направлений фонового потока оценивался наносимый ущерб, а по модели (38)–(41) регулировалась их мощность. Оценивался также средний ущерб с учетом всех направлений фонового потока. На рис. 5 представлены коэффициенты, характеризующие изменчивость мощностей каждого из источников ($g_0 = Q_i/\overline{Q_i}$) при $g_0 = 10\%$, 50% , 80% -процентном снижении наносимого ущерба по всей области. Численные эксперименты показали, что наиболее чувствительными оказались 1-й и 6-й источники. Шестой источник загрязнения требуется убрать совсем ($g_0 = 0$), так как он ближе всех расположен к охраняемой зоне D^c . Хотя первый источник находится дальше от области D^c , чем остальные источники, тем не менее во всех экспериментах требовалось регулировать его мощность. Причина заключается в том, что мощность 1-го источника существенно больше мощности остальных и, кроме того, локальная циркуляция способствует накоплению примесей в районе озера. Наименее вредными оказались 2-й и 3-й источники, их вклад в загрязнение области D^c минимальный, поскольку 2-й источник выше (250 м) и примеси от него интенсивно диффундируются; кроме того, на них влияют особенности атмосферной циркуляции; хотя 3-й источник расположен недалеко от области D^c , тем не менее его вклад мал, поскольку его мощность сравнительно низкая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
2. Марчук Г. И. Окружающая среда и некоторые проблемы оптимизации. Новосибирск: Препринт ВЦ СО АН СССР, 1975.
3. Марчук Г. И. Окружающая среда и проблемы оптимизации размещения предприятий // ДАН СССР. 1976. Т. 227, № 5. С. 1056–1059.
4. Businger J. A., Wyngaard J. C., Izumi Y., Bradley E. F. Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer // J. Atmos. Sci. 1971. Vol. 28, No. 2. Pp. 181–189.
5. Монин А. С., Обухов А. М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Труды Геофиз. института АН СССР. 1954. № 24(151). С. 163–187.
6. Hinks B. B. A procedure for the formulation of bulk transfer coefficients over water // Boundary-Layer Meteorol. 1975. V. 8. Pp. 515–524.
7. Пененко В. В., Алоян А. Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985.
8. Казаков А. Л., Лазарев Г. Л. О параметризации приземного слоя атмосферы и деятельного слоя почвы // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 14, № 3. С. 257–265.
9. Clark T. L. A small-scale dynamic using a terrain-following coordinate transformation // J. Comp. Phys. 1977. V. 24, No. 2. Pp. 184–215.
10. Gal-Chen T., Somerville C. J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations with topography // J. Comp. Phys. 1975. V. 17, No. 3. Pp. 276–310.
11. Колмогоров А. Н. Уравнение турбулентного движения несжимаемой жидкости // Известия АН СССР. Серия: Физика. 1942. Т. 6, № 1-2. С. 56–58.
12. Алоян А. Е., Лазриев Г. Л. О параметризации энергии турбулентности в приземном слое атмосферы // В кн.: Математические модели атмосферных движений. Новосибирск, 1980. С. 85–94.
13. Mellor G. L., Yamada T. A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers // J. Atmos. Sci. 1974. V. 31, No. 10. Pp. 1791–1806.
14. Алоян А. Е. Негидростатические численные модели локальных атмосферных процессов. Новосибирск: Препринт № 451 ВЦ СО АН СССР, 1984.

15. Freeman B. E. Tensor diffusivity trace constituents in a stratified boundary layer // *J. Atmos. Sci.* 1977. V. 34, No. 1. Pp. 124–136.
16. Yordanov D. L., Aloyan A. E. On the use of the diffusivity tensor in calculating pollution in the planetary boundary layer // *Comptes rendus de l'Academie bulgare des sciences.* 1981. V. 34, No. 7. Pp. 981–983.
17. B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme // *J. Comp. Phys.* 1974. V. 14. Pp. 361–370.
18. Алоян А. Е., Йорданов Д. Д., Пененко В. В. Численная модель переноса примесей в пограничном слое атмосферы // *Метеорология и гидрология.* 1981. № 8. С. 32–43.
19. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
20. Atkison R., Liol A. C. Evaluation of kinetic and mechanistic data for modeling of photochemical smog // *J. Phys. Chem. Ref. Data.* 1984. V. 13, No. 2. Pp. 315–444.
21. Perry R. A., Atkison R., Pits J. N., Jr. Rate constants for the reactions $OH + H_2S \rightarrow H_2O + SH_3$, $OH + NH_3 \rightarrow H_2O + NH_2$ over the temperature range 297–427 K // *J. Chem. Phys.* 1976. V. 64, No. 8. Pp. 3237–3240.
22. Niki H., Maker P. O., Savage C. M., Breitenbech L. P. Fourier Transform Infrared Study of the HO Radical Initiated Oxidation of SO₂ // *J. Phys. Chem.* 1980. V. 84, No. 1. Pp. 14–16.
23. Защита атмосферы от промышленных загрязнений. Часть 2. / Пер. с англ. Под ред. С. Калверта и Г. М. Инглунда. М.: Металлургия, 1988.
24. Пененко В. В., Алоян А. Е., Бажин Н. М., Скубневская Г. И. Численная модель гидрометеорологического режима и загрязнение промышленных районов // *Метеорология и гидрология.* 1984. С. 5–15.
25. Алоян А. Е., Бажин Н. М., Пененко В. В., Скубневская Г. И. Численное моделирование фотохимического окисления метана в атмосфере промышленных районов. Новосибирск: Препринт № 772 ВЦ СО АН СССР, 1987.
26. Эннеев Т. М. Некоторые вопросы и методы наискорейшего спуска. М.: Препринт Института прикладной математики, 1970.
27. Балацкий О. Ф. Экономика чистого воздуха. Киев: Наукова думка, 1979.

28. Шпак В. А. Численное решение задачи оптимизации мощности источников с использованием моделей экономического ущерба. Новосибирск: Препринт № 614 ВЦ СО АН СССР, 1985.

29. Phillip J. R. Evaporation and moisture and heat fields in the Soil // J. Meteorol. 1957. V. 14, No. J. Pp. 354–356.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕГИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ⁸

В работе кратко описана структура математических моделей динамики мезомасштабных и региональных атмосферных процессов и переноса многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей с учетом их трансформации. В моделях учитываются процессы фотохимической трансформации и формирование аэрозолей за счет нуклеации, конденсации, испарения и коагуляции. Рассмотрено решение оптимизационной задачи по управлению мощностью источников. Приведены результаты численных экспериментов для различных регионов, демонстрирующие некоторые возможности математических моделей для решения задач экологического прогнозирования.

Введение

В результате хозяйственной деятельности человека в атмосферу выбрасывается большое количество химических веществ, находящихся в газовом и аэрозольном состояниях. В атмосфере эти вещества претерпевают ряд физико-химических изменений за счет механизмов фотохимической трансформации, нуклеации, конденсации/испарения и коагуляции. Все эти механизмы взаимосвязаны между собой, а каждый из них является частью общей комплексной задачи в области охраны окружающей среды. Среди антропогенных выбросов особо опасны окислы серы, азота, металлическая пыль и др. Например, выбросы окислов серы, переходя в аэрозольную фазу, способствуют выпадению кислотных дождей, которые, в свою очередь, причиняют значительный ущерб биосфере. В атмосферных дисперсных системах

⁸Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2004, № 1, с. 88–99. Совместно с А. Е. Алояном.

особое важное место занимают сульфатные аэрозоли. Эти частицы формируются в разных частях атмосферы: в свободной атмосфере, в морском пограничном слое, в арктических областях, в атмосфере загрязненных городов и др.

Среди прочих вопросов особое место занимает проблема загрязнения нижней тропосферы озоном. Тропосферный озон является ключевым индикатором фотохимического загрязнения воздуха. Это – вторичный загрязнитель, образующийся в результате сложных химических реакций между азотосодержащими газами и летучими органическими соединениями (ЛОС) под воздействием солнечной радиации.

Для моделирования процессов образования аэрозолей исключительное значение имеют получающиеся после фотохимической трансформации вещества. Перенасыщение паров этих веществ приводит к образованию первичных кластеров, которые являются начальной стадией для образования аэрозолей. Затем они могут взаимодействовать с ядрами фоновой атмосферы и объединяться с каплями воды определенных размеров с последующей коагуляцией этих частиц.

В большинстве трехмерных моделях динамики аэрозолей предполагается, что существует мгновенное равновесие в системе газ – аэрозоль. Однако, как известно [5, 6], в определенных условиях равновесие устанавливается довольно медленно по отношению к временному масштабу протекания других процессов. Поэтому необходимо построить соответствующие численные модели с использованием неравновесной функции распределения. При этом одним из важных требований к моделям является соблюдение законов сохранения массы или числа частиц. Как правило, атмосферные примеси имеют полидисперсный характер, поэтому для математического моделирования их динамики необходимо учитывать два основных механизма: 1) перенос и диффузия примеси и 2) изменение концентрации примеси с учетом их трансформации, а также изменчивость дисперсного состава за счет кинетических процессов. Так как эти процессы протекают в турбулентной атмосфере, а земная поверхность в большинстве случаев орографически и термически неоднородна, то задачу динамики газовых примесей и аэрозолей необходимо решать совместно с моделями гидротермодинамики атмосферных процессов. Такой подход позволит более точно воспроизвести пространственно-временную изменчивость полей метеоэлементов, турбулентных характеристик течений, концентрации газовых примесей и аэрозолей с учетом изменчивости спектра размеров частиц. Теперь рассмотрим базовые численные модели, ис-

пользуемые для описания изменчивости газовых примесей и аэрозолей в атмосфере в региональном масштабе. Основные базовые модели для решения таких задач изложены в [1–7].

1. Модель гидротермодинамики

Запишем уравнения гидротермодинамики мезомасштабных атмосферных процессов в системе координат x_i , направляя ось $x_1 = x$ на восток, ось $x_2 = y$ на север, а ось $x_3 = z$ – вертикально вверх. Основные уравнения запишем в дивергентной (потокковой) форме. Представим термодинамические поля в виде суммы двух слагаемых

$$\varphi = \overline{\varphi}(z) + \varphi'(x, y, z, t), \quad \varphi = \rho, \vartheta, q, p, \quad (1.1)$$

где ρ – плотность воздуха; ϑ – потенциальная температура; q – удельная влажность; p – давление. Тогда уравнение движения можно представить в индексных обозначениях в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\bar{\rho} u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} u_j u_i)}{\partial x_j} = \\ & = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} - 2\epsilon_{ijk} \bar{\rho} \Omega_j u_k + \delta_{i3} \bar{\rho} g \left(\frac{\vartheta'}{\bar{\vartheta}} + \epsilon q \right) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где ϵ_{ijk} – абсолютно антисимметрический тензор; δ – символ Кронекера; Ω_j – угловая скорость вращения Земли; g – ускорение свободного падения; $\epsilon = \frac{R_v}{R_d} = 0,608$; R_v и R_d – газовые постоянные для сухого воздуха и водяного пара соответственно; τ_{ij} – тензор вязких напряжений Рейнольдса; $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$ – компоненты вектора скорости по направлениям x , y , z соответственно.

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (1.3)$$

Законы сохранения энергии и массы водяного пара задаются в виде

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \vartheta)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} u_j \vartheta)}{\partial x_j} = -\frac{L \vartheta}{c_p T} \Phi + \frac{\partial H_j}{\partial x_j}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} q)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} u_j q)}{\partial x_j} = -\Phi + \frac{\partial Q}{\partial x_j}, \quad (1.5)$$

где L – удельная теплота конденсации; T – абсолютная температура; Φ – масса водяного пара, концентрируемого в единичном объеме за единицу времени; H_i , Q_i – турбулентные потоки тепла и влаги.

Область изменения пространственных переменных

$$D = \{(x, y, z) : x \in [0, X], y \in [0, Y], \delta(x, y) \leq z \leq H\},$$

где X , Y – заданные параметры, определяющие горизонтальные размеры области; $\delta(x, y)$ – функция, описывающая рельеф поверхности Земли; H – верхняя граница воздушной массы. При наличии орографии система уравнений (1.2)–(1.5) запишется в новой системе координат с помощью следующего преобразования:

$$x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}, \quad \sigma = \frac{z - \delta(x, y)}{H - \delta(x, y)}.$$

2. Модель переноса газовых примесей и аэрозолей

Основные уравнения для скорости изменения концентраций газовых примесей и аэрозолей запишем в следующем виде [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_i}{\partial t} + \mathbf{u} \text{grad } C_i = F_{\text{газ}} - P_{\text{нукл}} - P_{\text{конд}} + P_{\text{хим}} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial C_i}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial C_i}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \mathbf{u} \text{grad } \varphi_k - w_g \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = F_{\text{аэр}} + P_{\text{нукл}} + P_{\text{конд}} + P_{\text{коаг}} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь C_i ($i = 1, 2, \dots, N_g$), φ_k ($k = 1, 2, \dots, N_a$) – концентрации газовых примесей и аэрозолей соответственно; N_g – количество газовых компонент; N_a – количество аэрозольных фракций; $F_{\text{газ}}$, $F_{\text{аэр}}$ – источники газовых примесей и аэрозолей; $P_{\text{нукл}}$, $P_{\text{конд}}$, $P_{\text{коаг}}$, $P_{\text{хим}}$ – операторы нуклеации, конденсации, коагуляции и фотохимической трансформации соответственно (их вид приводится ниже); K_x , K_y , K_z – коэффициенты турбулентной диффузии в направлениях x , y , z соответственно.

На боковых границах области D принимаются условия плавного выхода на фоновые значения соответствующих полей метеоэлементов.

Эти условия задаются либо для самих функций состояния, либо для их отклонений от фоновых значений. Предполагается, что на верхней границе воздушной массы $z = H$ возмущения, обусловленные неоднородностями поверхности, затухают. На нижней границе взаимодействия воздушных масс с поверхностью Земли описывается с помощью параметризационной модели приземного слоя атмосферы. Температура на поверхности Земли вычисляется из уравнения баланса тепла на границе раздела атмосфера – почва с учетом тепловлагообмена в почве.

3. Фотохимическая трансформация

В больших городах и индустриальных регионах в атмосферу выбрасывается огромное количество газовых веществ, которые трансформируются, вступая в химические реакции, что приводит к образованию вторичных загрязнителей, не присутствовавших в первоначальных выбросах (например, озон, ПАН и др.) Некоторые радикалы, такие как OH , HO_2 , $O^3(P)$, NO_3 , разрушают выбросы органических газов. Среди биогенных веществ важными являются изопрен и терпены. В данном случае для формирования сульфатных аэрозолей наиболее важными являются газофазные химические реакции, приводящие к образованию паров серной кислоты из выбросов диоксида серы.

Итак, предположим, что в атмосферу выбрасываются следующие газовые примеси: NO , NO_2 , SO_2 , CO , CH_4 , H_2CO , $ISOP$, $ALD2$, OLE , PAR , TOL . Реакции, инициируемые солнечным светом, приводят к возникновению ряда новых химически активных атомов, свободных радикалов и других веществ, в том числе и H^2SO_4 . В фотохимической модели учитываются 204 химические реакции для 44 газовых веществ. Эта модель детально изложена в [3, 9, 10].

Используя кинетические законы для элементарных реакций и применяя баланс масс к каждому веществу, получим следующую систему уравнений для скорости изменения концентрации в каждой ячейке:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = P_i - L_i \varphi_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.1)$$

с начальными условиями $\varphi_i(t_0) = \varphi_{0i}$. Здесь операторы P_i и L_i описывают интенсивность генерации и гибели веществ.

4. Модель конденсации, нуклеации и коагуляции

Образование новых ядер из паров происходит в основном с помощью бинарной гомогенной нуклеации капель серной кислоты и воды. В отличие от [19], где скорость гомогенной нуклеации зависела от двух переменных (массовой концентрации паров и температуры), в данной работе учитывается также вклад водяного пара. Таким образом, скорость нуклеации J зависит от трех основных переменных: массовой концентрации кислоты в паровой фазе (C), относительной влажности воздуха (Rh) и температуры (T). Пусть в атмосфере в пересыщенном паре при температуре T и давлении P_v имеется бинарный кластер, состоящий из n_w молекулы вещества w и n_a молекул для a с мольными фракциями x_{iv} (i, w, a). Будем считать, что частицы имеют сферическую форму и находятся в жидкой фазе. Тогда свободную энергию для образования жидкого зародыша в бинарной смеси можно представить в следующем виде:

$$W = \Delta G = n_w \Delta \mu_w + n_a \Delta \mu_a + A \sigma, \quad (4.1)$$

где G – изменения свободной энергии Гиббса; $\Delta \mu_i = \mu_{il}(T, P_v, x_{il}) - \mu_{iv}(T, P_i, x_{iv})$, μ_{il} и μ_{iv} – химические потенциалы в жидкой и паровой фазах соответственно; A – площадь поверхности; σ – поверхностное натяжение. Важно отметить, что для пересыщенного пара функция ΔG имеет максимум в точке с критическим радиусом r^* . Пар пересыщен по отношению ко всем каплям, у которых $r > r^*$. Здесь используется модель параметризации нуклеации, изложенная в работах [11, 12]. Критический кластер находится из следующего уравнения:

$$\nu_w(x^*) \ln \frac{\rho_a^{\text{free}}}{\rho_{a,s}^{\text{free}}(x^*)} = \nu_a(x^*) \ln \frac{\rho_w^{\text{free}}}{\rho_{w,s}^{\text{free}}(x^*)}, \quad (4.2)$$

где ν_a , ν_w – парциальные молярные объемы кислоты и воды соответственно; ρ_i^{free} – численная концентрация свободных молекул компоненты i в нуклеирующем паре; $\rho_{i,s}^{\text{free}}(x)$ – численная концентрация компоненты i в насыщенном паре над раствором с серной кислотой с мольной фракцией x . Звездочкой отмечен критический кластер. Известно, что серная кислота имеет тенденцию образовывать гидраты в паровой фазе. Эти мелкие кластеры обладают отрицательной энергией.

Мы не будем останавливаться на методах учета механизмов гидратации в процессе нуклеации: они более полно изложены в [11, 12].

Итак, радиус критического кластера, определяемый из уравнения Кельвина, имеет вид

$$r^* = \frac{2\sigma(x^*)\nu_i(x^*)}{kT \ln \frac{\rho_i^{\text{free}}}{\rho_{i,s}^{\text{free}}(x^*)}}, \quad (4.3)$$

работа для формирования критической нуклеации

$$w^* = \frac{4}{3}\pi r^{*2}\sigma(x^*), \quad (4.4)$$

общее выражение для скорости нуклеации

$$J = z\rho(1,2) \exp \left[-\frac{w^* - w(1,2)}{kT} \right], \quad (4.5)$$

где z – кинетический коэффициент Зельдовича; $\rho(1,2)$, $w(1,2)$ – численная концентрация и энергия образования дигидрата серной кислоты соответственно. Произведение двух последних членов представляет собой равновесную концентрацию критического ядра. Итак, из выражения (4.5) вычисляется скорость нуклеации J . Теперь выпишем уравнение для эволюции спектра масс посторонних частиц за счет присоединения молекул пара, а также из-за нуклеации вновь образованных частиц:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} + \mathbf{u} \text{grad } \varphi_g - w_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} + \frac{\partial v_g \varphi_g}{\partial g} = \\ & = J_{\text{нукл}}(\varphi_g, t) + \frac{1}{2} \int_0^g K(g, g_1) \varphi_{g-g_1} \varphi_{g_1} dg_1 - \int_0^\infty K(g, g_1) \varphi_{g_1} dg_1, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где φ_g – концентрация частиц с массой, заключенной в интервале от g до $g + dg$; $J_{\text{нукл}}(\varphi_g, t)$ – интенсивность образования новых частиц с массой g ; $K(g, g_1)$ – частота столкновения частиц массами g и g_1 ; g_1 – текущая переменная (масса), по которой производится интегрирование.

Уравнение (4.6) учитывает процессы конденсационного роста и слияния частиц из-за коагуляции. Численный алгоритм его решения приведен в [3–8].

5. Сопряженная задача

Сопряженные задачи дополняют основные системы уравнений, они играют важную роль в диагностических исследованиях качества моделей и экологического прогнозирования. Непосредственное решение сопряженных задач участвует в вычислении функции чувствительности, которые по определению являются частными производными заданных характеристик модели по параметрам. В задачах экологии иногда объектом изучения является не само поле концентрации, а некоторые функционалы от этого поля. К числу таких функционалов относятся, например, среднегодовая концентрация различных субстанций, полное количество примесей, осевших в конкретном регионе, экономический ущерб, наносимый окружающей среде, и др. В таких задачах весьма эффективным является использование сопряженных функций.

Рассмотрим функционалы от решения φ следующего вида:

$$J = \int_0^T dt \int_D p \varphi dD, \quad (5.1)$$

где $p = p(x, y, z, t)$ – заданная функция из $L_2(D_t, D_t = \{D \times [0, T]\})$. Если, например,

$$p = \begin{cases} p_0, & (x, y, z) \in \omega, \\ 0, & (x, y, z) \in D \setminus \omega, \end{cases} \quad p_0 > 0, \quad \omega \subset D, \quad (5.2)$$

то функционал J представляет собой суммарную концентрацию примеси в выделенной подобласти ω области D , взвешенную с весом p_0 . Область ω соответствует зоне, где производится оценка загрязнения.

В зависимости от задания области ω , мы можем получить различные интегральные характеристики поля загрязнения примесей. Итак, задача сводится к оценке функционалов вида (15), определяемых на множестве функций состояния, удовлетворяющих исходной задаче. Для оценки функционала J целесообразно реализовать подход, основанный на использовании сопряженных уравнений [1, 14, 15]. С его помощью можно оценить степень потенциальной опасности загрязнения атмосферы в области от всех источников, расположенных в области D_t . Сопряженная задача будет иметь вид

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi^* - \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} K_\sigma \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma} = p,$$

$$\varphi^* = 0, \quad \text{при } t = T, \quad (5.3)$$

где p - функция, определяющая функционал (15). Краевые условия для уравнения (5.3) идентичны условиям уравнения (2.1).

Как следует из общей теории, задача (5.3) корректна при решении от $t = T$ к $t = 0$. Поэтому в качестве «начального» условия выберем $\varphi^* = 0$ при $t = T$. Теперь проведем некоторые преобразования. Умножим уравнение (2.1) на φ^* скалярно, а уравнение (5.3) – на φ , из одного результата вычтем другой и проинтегрируем по времени на отрезке $[0, T]$. Интегрированием по частям с учетом граничных условий из полученного соотношения обычным образом с точностью до малых слагаемых приходим к другому представлению для функционала J :

$$J = \int_0^T dt \int_D F \varphi^* \varphi dD. \quad (5.4)$$

Таким образом, общее количество примеси в области ω можно получить, используя решение φ^* сопряженной задачи (5.3). Поясним физический смысл функции φ^* . Она является весовой функцией, определяющей вклад каждого источника загрязнения F и начального состояния функции $\varphi = \varphi_0$ в величину загрязнения атмосферы в выделенной подобласти ω . Итак, она характеризует степень опасности загрязнения атмосферы в области ω от источника, который может находиться в любой точке области D_t , т. е. вклад источника в функционал равен произведению мощности выброса на значение функции φ^* при каждом t в той области, где размещен источник. По значениям функции φ^* можно районировать область D_t , выделяя опасные зоны по отношению к загрязнению атмосферы в области ω .

6. Модель управления мощностью источников

Рассмотрим оптимизационную задачу управления мощностью выбросов загрязняющих примесей по заданным критериям и ограничениям экологического и экономического характера. Для конкретности в качестве критерия оптимальности выберем условие минимизации величины ущерба, наносимого загрязнениями территории региона [7, 15, 16]. Пусть в области D_t находятся n источников примесей с концентрациями φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) с мощностями выбросов Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$). В этой же области имеется зона экологического

контроля, которую обозначим через и условно назовем «экологически значимой зоной». Рассмотрим следующие функционалы:

$$a_i^c = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\omega} p_i \varphi_i(x, y, z, t) d\omega, \quad (6.1)$$

$$a_i = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_D p_i \varphi_i(x, y, z, t) dD, \quad (6.2)$$

характеризующие суммарную концентрацию примесей в зоне ω и во всей области D , где p_i – весовая функция, φ_i – концентрация примесей, полученная из решения задачи (2.1), с источником единичной мощности, расположенным в точке (x_i, y_i, z_i) . Составляющие ущерба, наносимого источником с номером i в экологически значимой зоне и во всей области, запишем в виде

$$\alpha_i^c = a_i^c f_1(\varphi_i), \quad \alpha_i = a_i f_2(\varphi_i), \quad (6.3)$$

где $f_1(\varphi_i)$, $f_2(\varphi_i)$ – заданные функции от суммарной концентрации [15, 17]. Следовательно, общий ущерб в экологически значимой зоне ω можно представить соотношением

$$Y^c = \sum_{i=1}^n \alpha_i^c Q_i (1 - e_i), \quad (6.4)$$

а во всей области D – соотношением

$$Y_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i Q_i (1 - e_i), \quad (6.5)$$

где e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – коэффициенты относительного снижения мощности источников. Задача оптимизации заключается в нахождении вектора $\mathbf{e} = \{e_i\}$, доставляющего минимум функционалу

$$Y^c = \sum_{i=1}^n \alpha_i^c Q_i (1 - e_i) \rightarrow \min_{e_i} \quad (6.6)$$

при ограничениях

$$0 \leq e_i \leq 1, \quad k_1 Y_0 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i Q_i (1 - e_i) \leq k_2 Y_0, \quad (6.7)$$

где k_1, k_2 – коэффициенты, характеризующие необходимое сокращение ущерба. После нахождения коэффициентов e_i допустимые мощности источников \bar{Q}_i вычисляются по формуле $\bar{Q}_i = Q_i(1 - e_i)$.

Отметим, что в ряде случаев реальный ущерб редко имеет линейную зависимость от концентрации вредных веществ, выпавших за длительный период времени. Как правило, эта зависимость имеет более сложный вид [17]. Покажем на конкретном примере, почему может оказаться, что ущерб нелинейно зависит от концентрации. Предположим, что над лесом площадью S одновременно с осадками выпало Q вредных веществ, из-за которых вымирает доля αQ этого леса. Ущербом будем называть затраты на восстановление утраченного леса. Примем эти затраты пропорциональными времени, необходимому на восстановление. Найдем это время в предположении, что лес растет в геометрической прогрессии с фактором $\delta = 1 + \beta$, из условия

$$S = S(1 - \alpha Q)(1 + \beta)^t, \quad t = \frac{\ln \frac{1}{1 - \alpha Q}}{\ln(1 + \beta)}. \quad (6.8)$$

Например, если в результате загрязнения было поражено 20% леса ($\alpha Q = 0,2$), а лес растет со скоростью $\delta = 1,1$, то на восстановление потребуется 2,34 года; если поражено 50% леса, то время восстановления составит уже 7,27 лет. Следует отметить, что характер поражения растительности тоже зависит от концентрации вредных веществ, но эта зависимость более сложная, чем αQ , а именно описывается функцией выпуклой вниз, тогда следует ожидать еще более выпуклого вида зависимости ущерба от концентрации вредных веществ. Статистические данные подтверждают подобный вид функции ущерба [17].

Теперь рассмотрим случай, когда функция ущерба квадратично зависит от суммарной концентрации. Действительно, любую функцию выпуклую вниз можно аппроксимировать квадратичной функцией с положительным коэффициентом при квадратичном члене. Итак, функция ущерба в охраняемой зоне D будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i Q_i)^2. \quad (6.9)$$

Ущерб же в остальной области $G = D \setminus \omega$ равен

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i Q_i)^2. \quad (6.10)$$

Заметим, что из-за весовой функции $p(x, y)$, содержащейся в коэффициентах β_i , коэффициенты β_i^2 при Q_i^2 в функции ущерба области ω в десятки и сотни раз превосходят коэффициенты α_i^2 .

Поэтому аппроксимируем квадратичную функцию ущерба в области ω линейной функцией методом наименьших квадратов. В итоге вместо набора коэффициентов β_i получим набор соответствующих им коэффициентов $\bar{\beta}_i$. Задачу минимизации ущерба теперь можно переписать в виде

$$\sum (\alpha_i Q_i)^2 \rightarrow \min_{Q_i} \quad (6.11)$$

при условиях

$$0 \leq Q_i \leq \bar{Q}_i, \quad (6.12)$$

$$kY_0 \leq \sum_{i=1}^n \beta_i Q_i \leq Y_0. \quad (6.13)$$

Задачи такого вида называют задачами квадратичного программирования, для их решения существует множество методов и программ. Здесь используется программа для решения задач квадратичного программирования, основанная на методе Вульфа [18]. Суть этого метода заключается в том, что для исходной задачи нелинейного программирования вида

$$Q(x) = p^T x + x^T C x \rightarrow \min \quad (6.14)$$

при

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0 \quad (6.15)$$

строится задача линейного программирования, решение которого совпадает с решением задачи (4.4). Для этого вводится новый вектор переменных u размерности k , где k – количество ограничений матрицы A . Далее получаемая задача линейного программирования выглядит следующим образом:

$$I_n x + I_k u \rightarrow \min \quad (6.16)$$

при условии, что

$$2x + A^T u > p, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad (6.17)$$

где I_n и I_k – квадратные единичные матрицы порядка n и k соответственно. Полученная задача линейного программирования решается

обычным симплекс-методом. Следует отметить, что задача оптимизации ущерба имеет ненулевое решение, т. е. достижение оптимизации задачи вида (6.11)–(6.13) не требует полного закрытия предприятия ($Q = 0$), а предполагает регулирование выброса в пределах $Q = (0, \overline{Q}_i)$.

7. Результаты численных экспериментов

7.1. Фотохимическое загрязнение атмосферы. Расчеты проводились для двух регионов: Хьюстона – Гальвестона (США) и Москвы. Для первого региона данные о выбросах газовых веществ от точечных и площадных источников задавались из базы данных COAST (6–11 сентября 1993 г.). В этот период наблюдались высокие концентрации озона в нижних слоях атмосферы. Рассматриваемая область охватывает 320 x 240 км с горизонтальными шагами 4 км, а по вертикали – переменные шаги (верхняя граница области интегрирования расположена на высоте 2,3 км). Количество узловых точек – 82 x 62 x 15. Цель этих экспериментов состояла в том, чтобы наряду с фотохимическим механизмом показать и влияние атмосферной циркуляции на пространственно-временную изменчивость газовых примесей в рассматриваемом регионе. На рис. 1 и 2 приведены поля концентрации NO_2 , озона и изопрена при $t = 12$ ч (рис. 1) и $t = 24$ ч (рис. 2) в единицах ppb.

Результаты численных экспериментов показали существенную суточную и пространственную изменчивость концентраций озона и других газовых примесей, что отчасти является следствием влияния атмосферной циркуляции в мезомасштабном пограничном слое и конкретной динамики их концентраций из-за переноса и фотохимической трансформации веществ. Полученные результаты свидетельствуют также о существенном влиянии изменений в выбросах окислов азота и летучих органических соединений на кинетику образования радикалов OH и HO_2 – важнейших промежуточных частиц. На рис. 3 приведены профили временной изменчивости среднечасовых концентраций озона в сопоставлении результатов расчета с данными наблюдений для интервалов времени несколько дней. Сопоставление показало их хорошее качественное и количественное согласие.

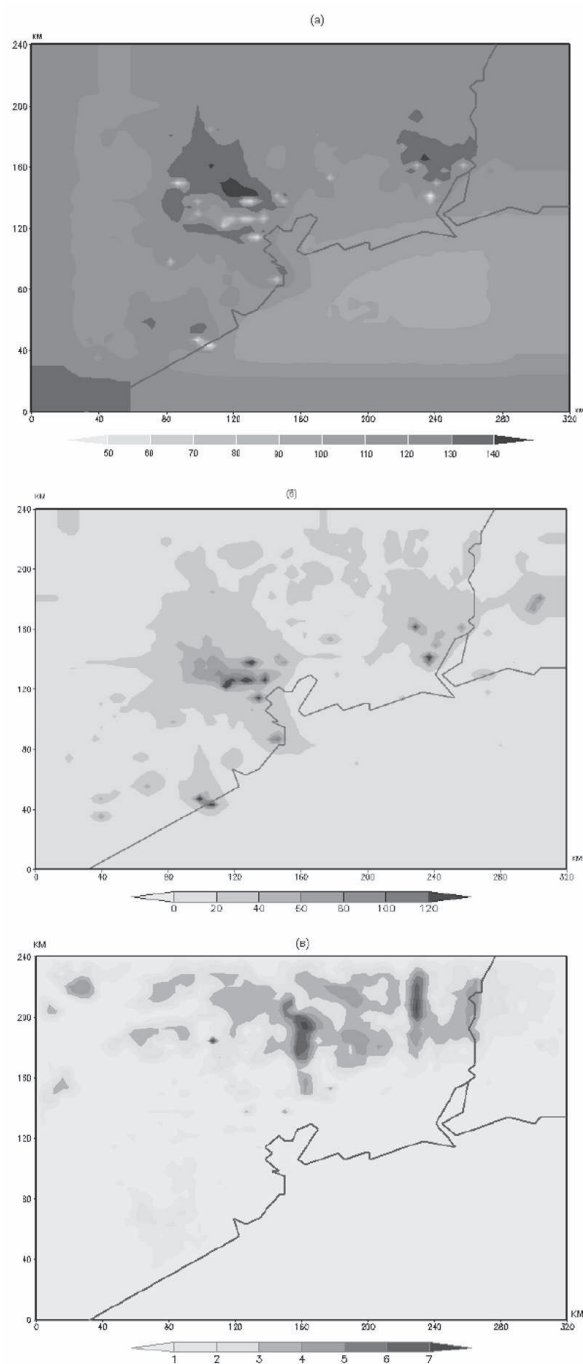


Рис. 1. Концентрация озона (а), NO_2 (б) и изопрена (в) на высоте 10 м и $t = 12$ ч

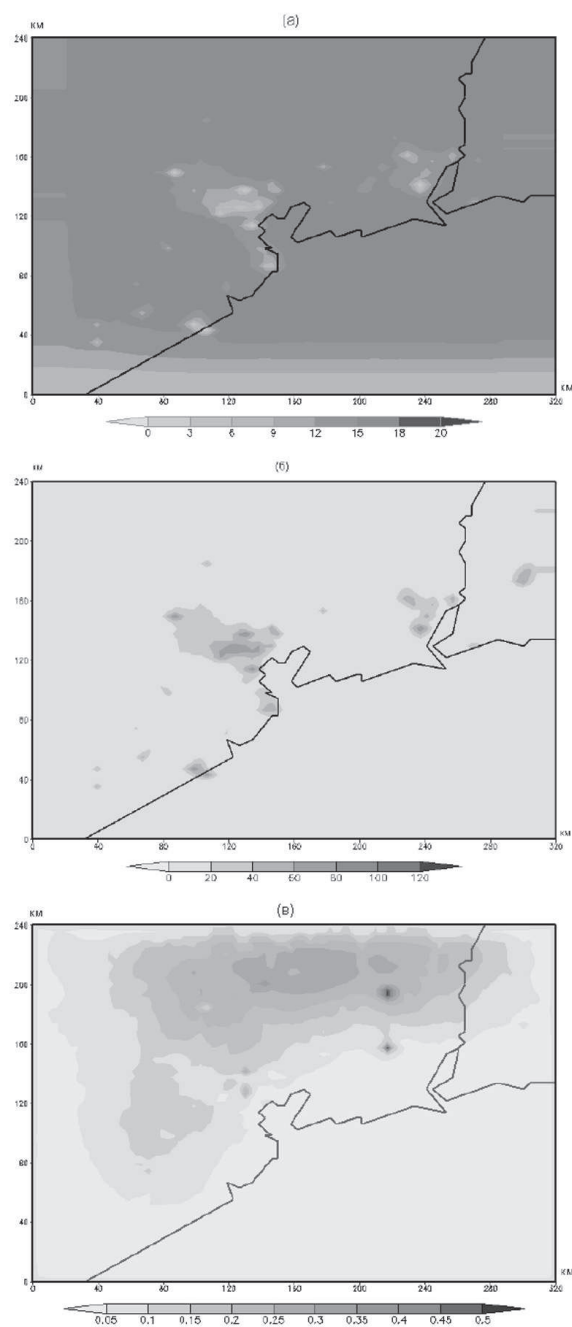


Рис. 2. Концентрация озона (а), NO_2 (б) и изопрена (в) на высоте 10 м и $t = 24$ ч

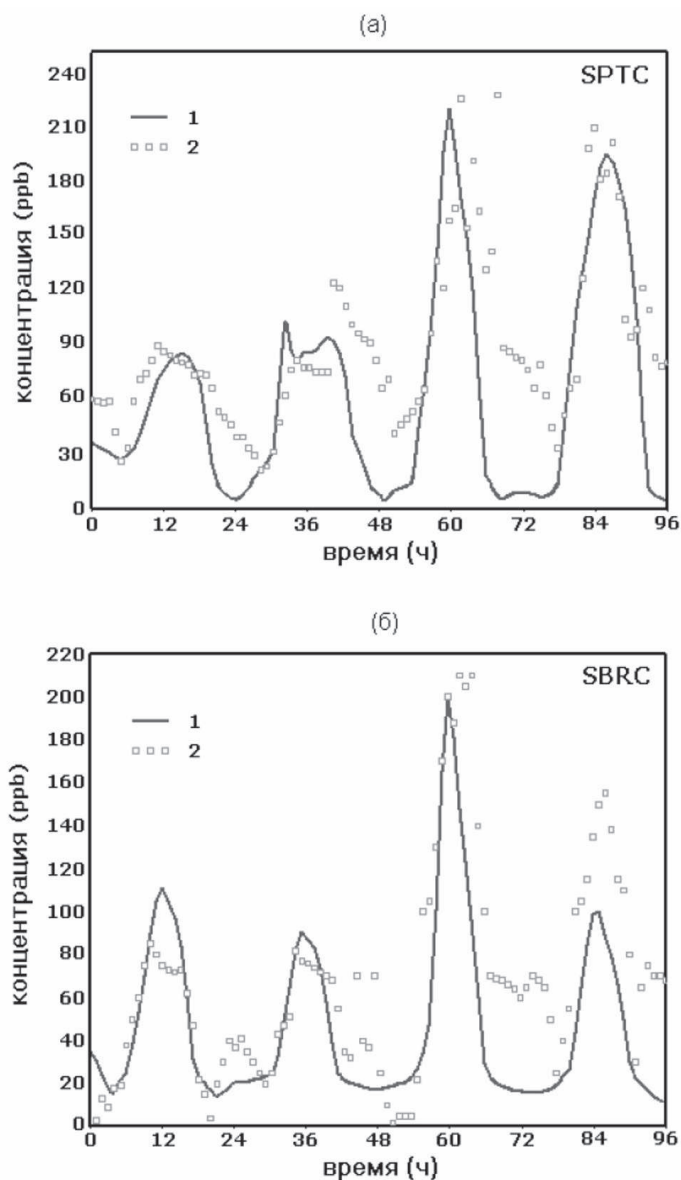


Рис. 3. Сопоставление результатов расчета с данными наблюдений по среднечасовым концентрациям озона: (1 – результаты расчетов, 2 – данные наблюдений)

Следующие численные эксперименты проводились для г. Москвы и окружающего региона с целью исследования характеристик вторичного загрязнения атмосферы, обусловленного фотохимической трансформацией и образованием сульфатных аэрозольных частиц. Задава-

лись мощности выбросов (SO_2 , NO , NO_2) от источников загрязнения, расположенных в нескольких московских ТЭЦ. На рис. 4 приведены векторные поля течения скорости ветра на высоте 250 м для моментов времени 14 и 22 ч. На рис. 5 представлено поле SO_2 на высоте 350 м.

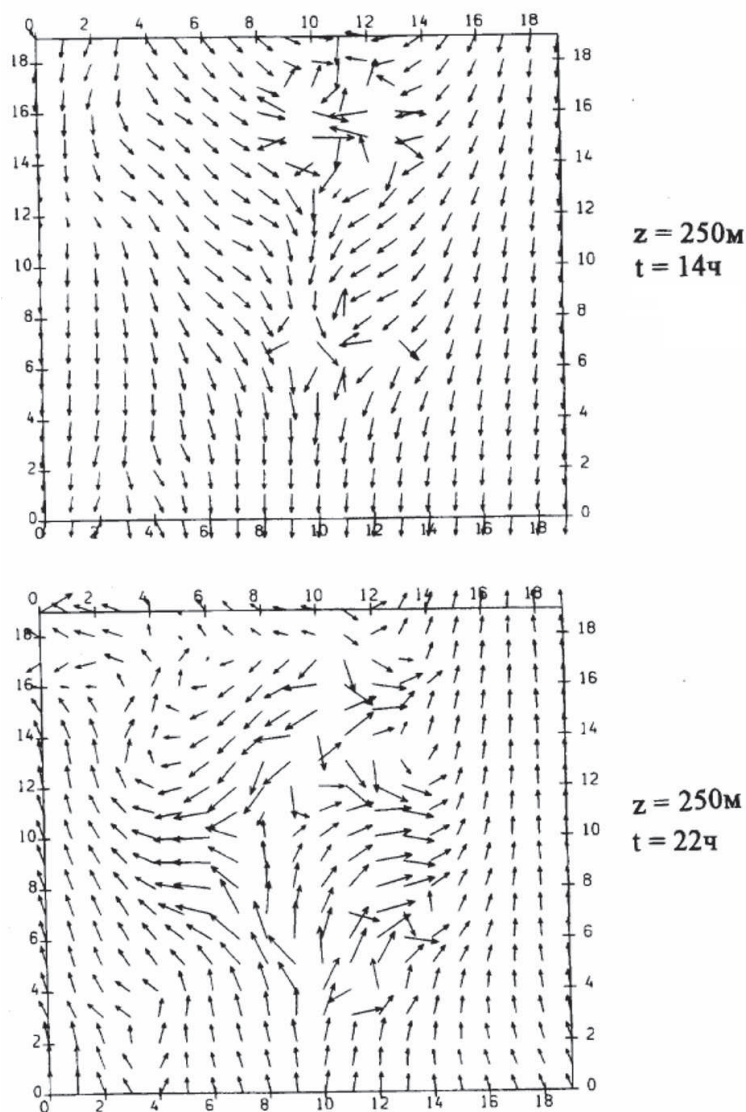


Рис. 4. Поле течения вектора скорости на высоте 250 м для момента времени 14 ч (верхний рисунок) и 22 ч (нижний рисунок)

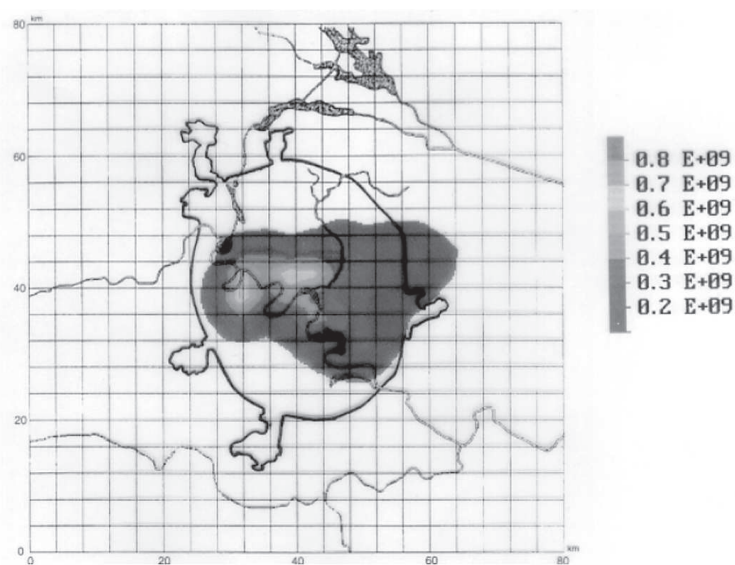


Рис. 5. Поле концентрации серной кислоты для $z = 250$ м, $t = 22$ ч

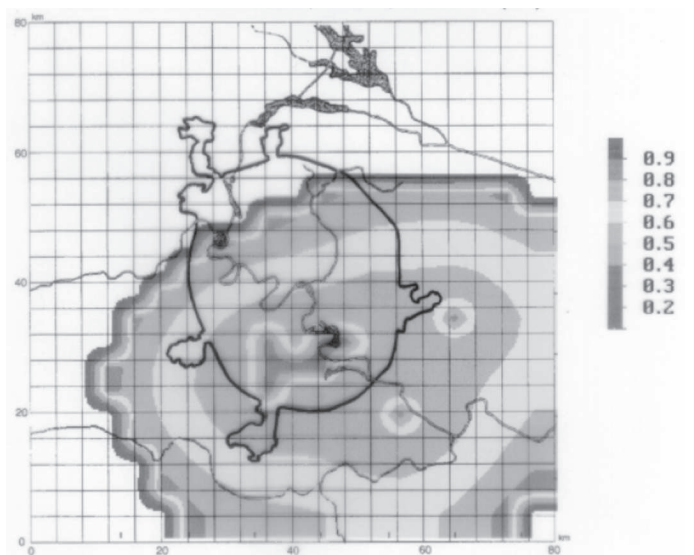


Рис. 6. Критический радиус кластера (нм) для $z = 250$ м, $t = 22$ ч

Проведены две серии численных экспериментов: первая – в рамках трехмерной модели гидротермодинамики атмосферы с учетом фотохимической трансформации и переноса; вторая – образования сульфатных аэрозольных частиц в регионе г. Москвы. Схема реализации включает три основных этапа:

– моделирование атмосферной циркуляции для региона, охватывающего регион г. Москвы при заданных параметрах подстилающей поверхности и фонового движения атмосферы;

– моделирование переноса от точечных источников, расположенных в городе и трансформации многокомпонентных загрязняющих газовых примесей на фоне атмосферной циркуляции;

– моделирование формирования частиц новой фазы, обусловленной бинарной нуклеацией при наличии инородных частиц и кинетическими процессами конденсации и коагуляции.

Численные эксперименты проводились при следующих значениях параметров: шаг по времени – 600 с; шаги по горизонтالي – 4000 м; количество вертикальных уровней (с переменными шагами) – 20; верхняя граница – 2000 м. Масса частиц изменяется в логарифмическом масштабе $2g_i = g_{i+1}$, где i и $i+1$ – последовательные фракции в шкале линейных размеров (диаметров). Последовательные фракции связаны соотношением $\sqrt[3]{2}d_i = d_{i+1}$. Число фракций – 40, $d_{min} = 1$ нм, $d_{max} = 8,1$ мкм.

На рис. 5 представлено поле паров серной кислоты на высоте $z = 250$ м, в момент времени $t = 14$ ч.

На рис. 7 представлен рост частиц с радиусом $r = 0,185$ мкм благодаря конденсации и коагуляции ($z = 250$ м, $t = 48$ ч).

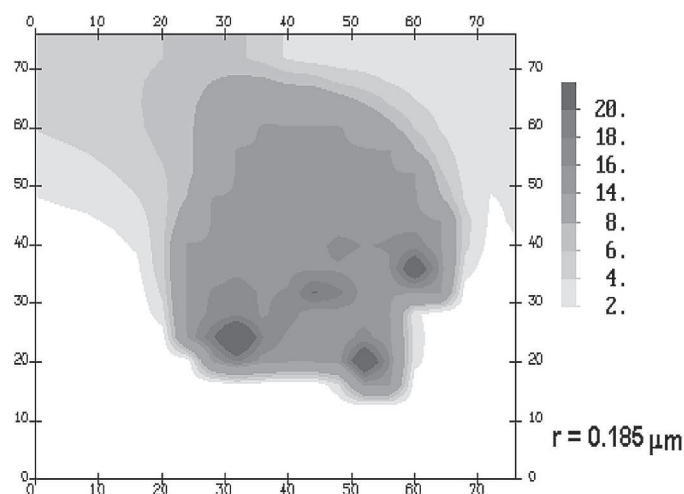


Рис. 7. Концентрация аэрозольных частиц с радиусом $r = 0,185$ мкм для $z = 250$ м, $t = 48$ ч

7.2. *Черноморский бассейн.* С использованием сопряженных функций проведены численные эксперименты по оценке чувствительности антропогенной нагрузки на бассейн Черного моря и вклада каждого из сопредельных государств. Расчеты проводились при следующих входных параметрах: число узлов сеточной области по долготе – 65; по широте – 41; по высоте – 15 (с переменным шагом до высоты – около 20 км); горизонтальный шаг по обоим направлениям – $1,25^\circ$; шаг по интегрированию по времени – 30 мин. На входе модели используются метеорологические данные ECMWF и данные ЕМЕР по эмиссиям SO_2 для стран Европы. Численное моделирование распространения SO_2 в Европейском регионе ведется в области Северного полушария. На рис. 8 представлена гистограмма, показывающая в процентном отношении вклад государств, окружающих Черное море, в общее загрязнение бассейна. На рис. 9 дано поле функции чувствительности бассейна Черного моря к загрязнению.

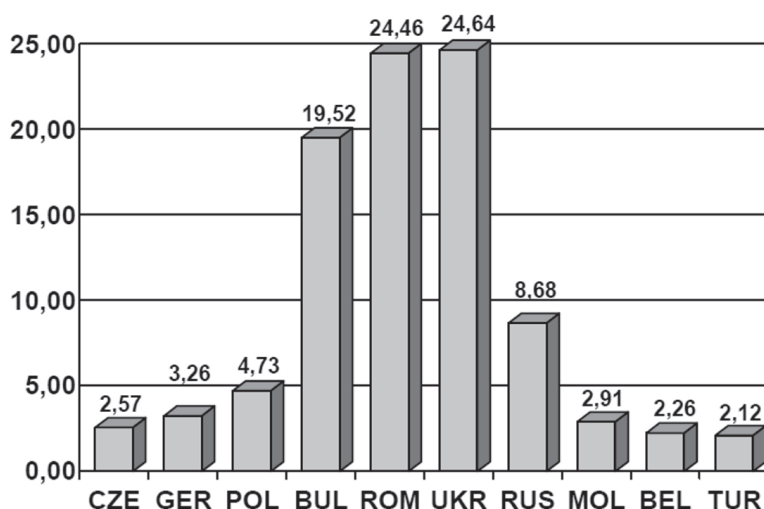


Рис. 8. Процентное соотношение вклада сопредельных государств в общее загрязнение бассейна Черного моря

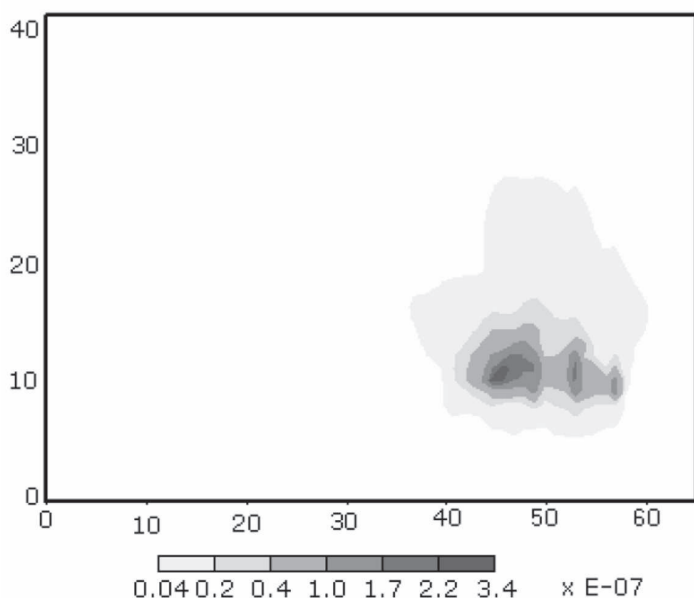


Рис. 9. Двумерные разрезы функции чувствительности бассейна Черного моря к загрязнению в плоскости (x, y) для интервала времени 60 дней

7.3. Оптимизация мощности источников в г. Москве. На первом этапе решалась задача гидротермодинамики для пяти характерных для данной местности направлений фонового потока: восточный (В), северо-запад (СЗ), юго-запад (ЮЗ), северо-восток (СВ) и юго-восток (ЮВ).

На следующем этапе решалась задача переноса и диффузии примеси. В качестве загрязняющих источников были выбраны Московский нефтеперерабатывающий завод, комплекс заводов ЗИЛ и Московская мусоросжигательная станция. Они расположены в узлах сетки $(14, 8, 3)$, $(12, 9, 3)$ и $(9, 16, 3)$ соответственно.

На рис. 10 дано расположение источников примеси и защищаемых от загрязнения областей. На фоне сформировавшихся полей течения при разных направлениях фонового потока вычислялись поля концентрации примесей.

Третьим этапом численных экспериментов было решение задачи оптимизации ущерба, наносимого примесями. При решении задачи были использованы данные Гидрометцентра России о среднегодовой розе ветров в г. Москве и Московской области. Для вычисления сум-

марных объемов загрязнения в различных зонах рассматриваемой области поля концентраций примесей, полученные в результате решения задач переноса и диффузии, складывались с весами, соответствующими розе ветров.

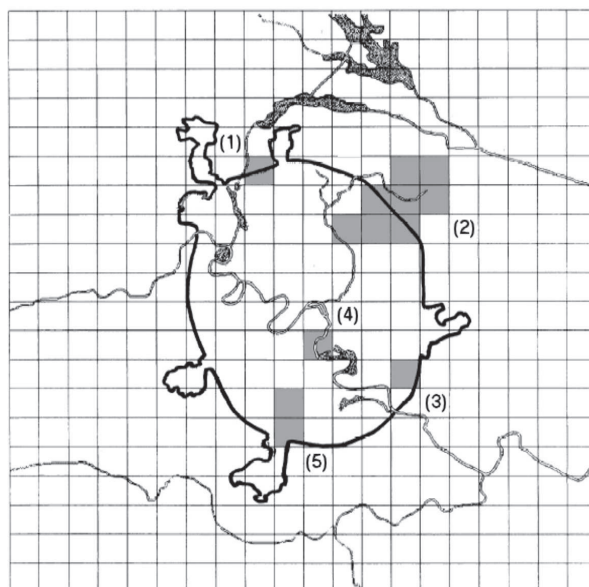


Рис. 10. Расположение источников примеси и защищаемых от загрязнения областей: 1 – Московская мусоросжигательная станция; 2 – Парк Лосиный Остров; 3 – Московский нефтеперерабатывающий комбинат; 4 – ЗИЛ; 5 – Битцевский парк

В численных экспериментах весовая функция $p(x, y)$ была взята равной 0,3 в черте города и 0,1 в остальной области. Вес парковых зон был взят равным единице.

Численное решение задачи квадратичного программирования показало, что при заданном 10-кратном уменьшении ущерба в неохрняемой зоне ($k = 0, 1$) для минимизации ущерба в охраняемых областях необходимо регулирование источников.

Приведены данные для Битцевского парка:

Источник	Q	Q^-	Q/Q^-
Нефтеперерабатывающий завод	223,78	3278	0,07
Мусоросжигательная станция	1167,13	3514	0,33
ЗИЛ	195,27	3086	0,06

Таким образом, наибольшее влияние на Битцевский парк оказывают первый и третий источники, поэтому, как следствие, их мощность следует ограничить до порядка 10%. Второй же источник достаточно отрегулировать до 35%.

Представим аналогично расчеты для парка Лосиный остров:

Источник	Q	Q^-	Q/Q^-
Нефтеперерабатывающий завод	1446,90	3278	0,44
Мусоросжигательная станция	418,75	3514	0,12
ЗИЛ	471,62	3086	0,15

Как видим, на Лосиный остров наибольшее влияние оказывает мусоросжигательная станция, чью мощность следует ограничить практически до 10% нынешней мощности. Нефтеперерабатывающий завод влияет в гораздо меньшей степени, и его мощность ограничивается только до 45%.

Заключение

В статье демонстрируются некоторые возможности математических моделей для решения задач экологического прогнозирования. Выявлены взаимосвязи между гидродинамическими, фотохимическими и кинетическими процессами аэрозолеобразования. Эти взаимосвязи дают представление об изменениях динамического, химического и аэрозольного фона в климатической системе, обусловленных влиянием антропогенных факторов. На базе математических моделей проведены численные расчеты при различных сценариях антропогенной нагрузки. Количественно и качественно проанализированы возможные механизмы вторичного загрязнения атмосферы: продукты трансформации могут оказаться более токсичными, чем первоначальные выбросы.

На базе сопряженных функций исследована функция чувствительности отдельных регионов к загрязнению, а также решена оптимизационная задача по регулированию мощности источников с целью уменьшения наносимого на окружающую среду ущерба.

Результаты численных экспериментов показывают, что только в идеализированных условиях можно фиксировать основные механизмы, ответственные за трансформацию газовых примесей и аэрозолей. На практике каждый регион характеризуется своими особенностями метеорологического режима и состава выбросов. Следовательно, в модели необходимо вводить некоторую избыточность в описании схем

химических реакций и кинетических механизмов аэрозолеобразования и в возможностях перестройки самих моделей в зависимости от конкретных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
2. Алоян А. Е., Бажин Н. М., Пененко В. В., Скубневская Г. И. Численное моделирование фотохимического окисления метана в атмосфере промышленных регионов. Новосибирск: Препринт № 772 ВЦ СО АН СССР, 1987.
3. Aloyan A. E., Arutyunyan V. O., Marchuk G. I. Dynamics of mesoscale boundary atmospheric layer and impurity spreading with the photochemical transformation allowed for // Russ. J. Num. Anal. Math. Modelling. 1995. V. 10. Pp. 93–114.
4. Aloyan A. E., Marchuk G. I., Lushnikov A. A., Zagainov V. A., Makarenko S. V. Mathematical modelling of the atmospheric aerosol transfer with coagulation taken into account // Russ. J. Num. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8, No. 1. Pp. 17–30.
5. Aloyan A. E., Egorov V. D., Marchuk G. I., Piskunov V. N. Aerosol formation mathematical modelling with consideration for condensation kinetics // Russ. J. Num. Anal. Math. Modelling. 1992. V. 7, No. 7. Pp. 457–471.
6. A.E. Aloyan, V.O.Arutyunyan, A.A.Lushnikov and V.A.Zagainov, Transport of coagulating aerosol in the atmosphere. J. Aerosol. Sci., 1997, vol. 28, No.1, 67–85.
7. Алоян, А.Е., Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. Москва: ИВМ РАН, 2002.
8. Aloyan, A.E. (2000) Numerical modeling of the interaction of gas species and aerosols in the atmospheric dispersive systems, Russ. J. Num. Anal. Math. Modelling, 15, No. 3–4, 211–224.
9. Aloyan A. E., Arutyunyan V., Haymet A. D., He J. W., Kuznetsov Y., Lubertino G. Air quality modeling for HGB area // Environment International. 2003. V. 29(2–3). Pp. 377–383.
10. Алоян А. Е., Арутюнян В. О., Кузнецов Ю. А., Хи Д. Моделирование регионального переноса газовых примесей в атмосфере с учетом фотохимической трансформации // Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана (в печати).

11. Kulmala M., Laaksonen A. Pirjola. Parameterization for sulfuric acid/water nucleation rates // J. Geophys. Res. 1998. V. 103. Pp. 8301–8307.

12. Vehkamäki H., Kulmala M., Napari I., Lehtinen K., Timmreck C., Noppel M., Laaksonen A. An improved parameterization for sulfuric acid-water nucleation rates for tropospheric and stratospheric conditions // J. Geophys. Res. 2002. V. 107. No. D22. P. 4622.

13. Голубев А. И., Пискунов В. Н., Повышев В. М. Моделирование кинетических процессов объемной конденсации // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Теоретическая и прикладная физика. 1991. Вып. 2. С. 3–9.

14. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 535 с.

15. Марчук Г. И., Алоян А. Е. Математическое моделирование в задачах экологии. М.: Препринт № 234, ОВМ АН СССР, 1989. 36 с.

16. Марчук Г. И., Алоян А. Е. Глобальный перенос примеси в атмосфере // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31, № 5.

17. Балацкий О. Ф. Экономика чистого воздуха. Киев: Наукова думка, 1979.

18. Кюнц Г. П., Крелли В. Нелинейное программирование. М., 1965.

19. Зельдович Я. Б. К теории образования новой фазы // Кавитация, ЖЭТФ. 1942. Т. 12, вып. 11. С. 525–538.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА СТОЙКИХ ОРГАНИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВ В ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ⁹

Рассматривается численная модель глобального переноса стойких органических веществ (СОВ) в северном полушарии на примере линдана. В модели учитывается ряд физических механизмов, ответственных за эволюцию этих веществ в окружающей среде с учетом их деградации в раз-

⁹Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2005, № 1, с. 57–66. Совместно с А. Е. Алояном, В. О. Арутюняном.

личных средах (атмосфера, вода, почва). Модель позволят исследовать пространственно-временную изменчивость СОВ в Северном полушарии от источников эмиссий, расположенных в Европейских странах, и определить среднемесячное процентное содержание и накопление в различных средах, а также долю их деградации. Численные эксперименты проводились для периода 1992 г. (февраль–декабрь) с использованием метеорологической информации Европейского центра среднесрочных прогнозов.

Введение

Огромное количество антропогенных загрязняющих веществ, выбрасываемые в атмосферу, а также вносимые в почву минеральные удобрения и ядохимикаты, включаются в биогеохимические циклы и заметным образом меняют их. Важным звеном глобальных биогеохимических циклов является процессы трансформации органических веществ. Антропогенные воздействия приводят к нарушению циклов практически всех химических элементов. Выбрасываемые в атмосферу газовые примеси претерпевают ряд физико-химических превращений, что приводит к их деградации в окружающей природной среде. Среди газовых примесей особое место занимают стойкие органические вещества (СОВ), характерной особенностью которых является их способность к переносу в газовой фазе, их деградация в результате различных физико-химических механизмов и гидрофобность (слабая растворимость в воде), что существенно сказывается на адсорбционных процессах в почве, атмосферном аэрозоле и др. Стойкие органические вещества имеют антропогенное происхождение (продукты химической промышленности, сгорания топлива, транспорта, сельского хозяйства и пр.) и могут накапливаться и продержаться в атмосфере достаточно долгое время. Эти вещества обладают способностью переноситься на дальние расстояния благодаря свойствам низкой летучести, высокой устойчивости и биоаккумуляции. Изучению их различных аспектов придается большое внимание [1, 2]. В настоящее время систематизированных данных о поступлении СОВ в окружающую среду довольно мало. Можно указать на линдан (гамма-изомер гексахлорциклогексана, γ -ГХЦГ), данные о котором позволяют с достаточно хорошей точностью утверждать, что это вещество поступает в атмосферу как пар (в газовом состоянии) и подвержен процессам сухого и влажного осаждения, а также деградации. В настоящей статье

приведены результаты численного моделирования переноса СОВ (на примере линдана) в Северном полушарии с учетом взаимодействия с земной и водной поверхностями и источников выбросов, расположенных на территориях европейских стран.

1. Постановка задачи

Модель рассматривается применительно к сферической Земле в системе координат (λ, ψ, z) , где λ – долгота, ψ – дополнение до широты, z – высота от подстилающей поверхности.

Основное уравнение переноса СОВ в Северном полушарии запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \psi} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \\ = F - P_1 \varphi - P_2 \varphi + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \\ + \frac{1}{a^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \sin \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\varphi = \varphi(\lambda, \psi, z, t)$ – концентрация примеси; (u, v, w) – компоненты вектора скорости ветра в направлении λ, ψ, z соответственно; μ, ν – коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальном и вертикальном направлениях соответственно; F – функция размещения и мощности источников выбросов; P_1 описывает величину осаждения примеси из атмосферы; P_2 – деградацию примеси в атмосфере; a – средний радиус Земли.

Уравнение (1) рассматривается в области $D_t = G \times [0, T]$, где $G = S \times [0, H]$; $S = \{(\lambda, \psi) : 0 \leq \lambda \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \pi/2\}$, H – верхняя граница расчетной области.

Сформулируем краевое условие задачи (1) на уровне высоты приземного слоя атмосферы $z = \delta(\lambda, \psi) + h$:

$$\varphi(0, \psi, z, t) = \varphi(2\pi, \psi, z, t), \quad (2)$$

$$\varphi(\lambda, -\psi, z, t) = \varphi(\lambda + \pi, \psi, z, t), \quad (3)$$

$$\varphi(\lambda, \pi + \psi, z, t) = \varphi(\lambda + \pi, \pi - \psi, z, t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = 0 \quad \text{при } \psi = \pi/2. \quad (5)$$

На верхней границе атмосферы при $z = H$ рассмотрим следующее краевое условие:

$$\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = H. \quad (6)$$

Начальное условие выберем в виде

$$\varphi = \bar{\varphi} \quad \text{при } t = 0, \quad (7)$$

где $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\lambda, \psi, z)$ – фоновая концентрация примеси.

Поскольку в глобальных атмосферных моделях пространственное разрешение по вертикали оказывается недостаточным для восстановления полей с нужной точностью в нижних слоях атмосферы, метеорологические характеристики пограничного слоя можно рассчитывать с помощью параметризаций планетарного пограничного слоя атмосферы, изложенных в [3, 4].

Для глобального переноса особый интерес представляют примеси с малыми скоростями гравитационного оседания, которые значительное время находятся во взвешенном состоянии и переносятся вместе с воздушными массами. В этом случае для примесей применимы подходы теории турбулентности, используемые в моделях общей циркуляции для описания турбулентного обмена температуры и влажности. В частности, для определения коэффициента горизонтального турбулентного обмена используется следующая модель:

$$\mu = k_1^2 \Delta S |D_N|, \quad (8)$$

где

$$D_N = (D_T^2 + D_S^2)^{1/2}, \quad (9)$$

$$D_T = \frac{1}{a \sin \psi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{\partial v}{2 \partial \psi}, \quad (10)$$

$$D_S = \frac{1}{a \sin \psi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{\partial u}{2 \partial \psi}, \quad (11)$$

ΔS – площадь элементарной ячейки сеточной области, k_1 – безразмерный параметр.

Потоки газовых примесей и аэрозолей в приземном слое атмосферы. Для задания краевого условия на высоте приземного слоя атмосферы $z = h$, используется уравнение для описания сопротивления примесям поверхностью Земли как совокупность следующих трех членов: аэродинамическое сопротивление r_a , квази-ламинарное

сопротивление пограничного слоя r_b , обусловленное процессами молекулярной диффузии вблизи поверхности Земли и поверхностное сопротивление r_c , связанное с процессами на поверхности осаждения. Выражение для r_c будет дано ниже.

Потоки примесей в приземном слое атмосферы представим в виде

$$\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{r_a + r_b + r_c} (\varphi - \varphi_{\text{surf}})$$

где

$$r_b = \frac{2}{\kappa u_*} \left(\frac{S_c}{Pr} \right)^{2/3}, \quad (12)$$

$S_c = 1,5 \cdot 10^{-5}$ – число Шмидта, $Pr = 0,71$ – число Прандтля.

Для задания граничных условий при $z = h$ используется теория Монины – Обухова [5] и эмпирические функции Бузингера [6], конкретный вид которых приведен в [7].

Аэродинамическое сопротивление вычисляется по формуле

$$r_a = \frac{1}{c_u c_\vartheta |\vec{u}|}, \quad (13)$$

где c_u и c_ϑ определяются из модели приземного слоя.

Коэффициент поверхностного сопротивления (r_c) над сушей определяется из модели, описывающей перенос примесей в почве с одновременным использованием потоков на разделе атмосфера – почва [8]. Формулы для поверхностного сопротивления r_c над сушей и поверхностью воды таковы:

$$r_c = \frac{1}{R_g \left(\frac{2D_E}{\Delta z_1} + pV_E \right)} \quad \text{над сушей}; \quad (14)$$

$$r_c = K_H r_w \quad \text{над морем}. \quad (15)$$

Сопротивление растительного покрова (r_c) вычисляется как

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{(r_{st} + r_{ms})} + \frac{1}{r_{sl}} + \frac{1}{r_{ct}}, \quad (16)$$

где r_{st} – устьичное сопротивление; r_{ms} – мезофильное сопротивление; r_{ct} – кутикулярное сопротивление; r_{sl} – почвенное сопротивление.

Устьичное сопротивление является функцией фотосинтетически активной радиации, температуры воздуха, водного потенциала листа

и дефицита давления пара. Сопротивление захвату газов мезофильными ячейками определяется площадью мезофилия и растворимостью газов ($\approx 0,1-0,5$ см/с). Кутикулярное сопротивление связывается с захватом газа на поверхности листа, зависит от химических характеристик исследуемых газов и определяется площадью листовой поверхности и воском (≤ 200 см/с).

Опишем основные физические принципы трансформации СОВ в разных средах. Используемая здесь методика базируется в основном на работах [8, 9].

Скорость разложения в почве. Периоды полуисчезновения линдана из почвы, определенные в полевых экспериментах при поверхностном внесении, варьируют в пределах 150–350 дней. Однако в полевых условиях в период после внесения основным механизмом выведения линдана из почвы является его испарение в атмосферу. Поэтому константа скорости разложения для этого пестицида может быть определена только в лабораторных экспериментах, где испарение либо подавлено, либо поддается точному учету.

В диапазоне температур от 15 до 35 °С и влажности от 20 до 75% полевой влагоемкости w константа скорости разложения k_b может быть вычислена с помощью следующих уравнений [10]:

$$k_b(\text{сут}^{-1}) = -(176 + 9,6t + 4,7w_l) \cdot 10^{-5}(\text{чернозем}),$$

$$k_b(\text{сут}^{-1}) = -(1185 + 40,8t + 15,9w_l) \cdot 10^{-5}(\text{серозем}),$$

$$k_b(\text{сут}^{-1}) = -(620 + 31,9t + 6,5w_l) \cdot 10^{-5}(\text{темно} - \text{каштановые}),$$

где t – температура в °С; w_l – влажность в % от полевой влагоемкости.

Скорость разложения в воде. Константа скорости щелочного гидролиза:

$$k(\text{мин}^{-1}) = a_{oh}k_b, \quad \log k_b \left(\frac{\text{л}}{\text{моль} \cdot \text{мин}} \right) = (-8850/T + 30,46)/2,3.$$

При $pH = 7$ и $t = 25$ °С период полуразложения в результате гидролиза составляет 6 лет. Периоды полуразложения в воде по реакции с гидроксил-радикалом в пресных водах, морских прибрежных водах и в открытом океане составляют 1,3, 27 и 530 дней соответственно.

Деградация в атмосфере. Поскольку наша цель в основном сосредоточена на изучении долгосрочной изменчивости СОВ в атмосфере, то их химические и биологические механизмы здесь не учитываются.

Трансформации СОВ в атмосфере описываются с помощью эффективного коэффициента деградации k_d в кинетическом уравнении

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -k_d \varphi. \quad (17)$$

Здесь рассматривается простая форма k_d , хотя для детерминистического описания деградации должны быть учтены более сложные взаимоотношения.

2. Обмен между почвой и атмосферой

В почве СОВ существуют в основном в трех состояниях: вода (в растворенном виде) (φ_L), газ (φ_g) и адсорбированное состояние (φ_s). Кристаллическое состояние не учитывается.

Концентрацию СОВ можно представить в виде

$$\varphi_T = \rho_S \varphi_S + \vartheta \varphi_L + (\Phi - \vartheta) \varphi_g, \quad (18)$$

где ρ_S – объемная плотность почвы; ϑ – объемная влажность почвы; Φ – пористость почвы.

Концентрации φ_S , φ_L и φ_g относятся к взаимосвязанным величинам соответственно массы раствора почвы, скелета и пространства свободного пара. Используя закон Генри, φ_g и φ_s можно представить в следующем виде:

$$\varphi_g = K_H \varphi_L, \quad (19)$$

где K_H – безразмерный коэффициент Генри.

Адсорбированная и растворенная фазы взаимосвязаны следующим образом:

$$\varphi_S = k_d \varphi_L, \quad (20)$$

где k_d – наклон изотермы адсорбции.

Используя (18)–(20), получаем

$$\varphi_T = R_L \varphi_L = R_S \varphi_S = R_g \varphi_g, \quad (21)$$

где

$$R_L = \rho_S k_d + \vartheta + (\Phi - \Theta) K_H,$$

$$R_S = \rho_S + \frac{\vartheta}{k_d} + \frac{(\Phi - \Theta) K_H}{k_d},$$

$$R_g = \frac{\rho_s k_d}{K_H} + \frac{\vartheta}{K_H} + (\Phi - \Theta)$$

– коэффициенты различных состояний СОВ.

Коэффициент Генри определяется таким образом:

$$K_H = K_{H0} e^{b_1 \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}, \quad (22)$$

где $K_{H0} = K_H(T_0)$; b_1 – эмпирическая константа.

Адсорбция СОВ в почве зависит от свойств почвы, в частности от содержания органики в ней. Для ее учета вводится в рассмотрение коэффициент распределения углерода (K_{oc}):

$$k_d = f_{oc} K_{oc}, \quad (23)$$

где f_{oc} – доля органики в почве.

Для проведения численных экспериментов необходимы данные о содержании органики в Северном полушарии, которые имеются в глобальной базе данных о 27 типах почв Земного шара с разрешением $1^\circ \times 1^\circ$, а также в карте содержания органики в Европе.

3. Миграция СОВ в почве

Как известно, перенос стойких органических веществ в почве обусловлен молекулярными процессами с временем перемешивания более длительным в почве, чем в атмосфере. Предполагая стационарность и однородность по глубине характеристик почв, газовый поток СОВ можно представить в виде

$$I_g = -\xi_g(a) D_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial z}, \quad (24)$$

где $a = \Phi - \Theta$; D_g – коэффициент двойной диффузии на высоте z ; $\xi_g(a) = a^{1/3}/\Phi^2$.

Подобным образом поток в водной фазе (I_{Ld}) можно записать как

$$I_{Ld} = -\xi_L(\theta) D_L \frac{\partial \varphi_L}{\partial z}. \quad (25)$$

Используя (24)–(25) и эффективный коэффициент диффузии, поток СОВ представим таким образом:

$$I_g + I_{Ld} = - \left(\frac{\xi_g D_g}{R_g} + \frac{\xi_L D_L}{R_L} \right) \frac{\partial \varphi_T}{\partial z} = -D_E \frac{\partial \varphi_T}{\partial z}, \quad (26)$$

где D_E – эффективный коэффициент диффузии для системы газ – вода.

Конвективный поток имеет следующий вид:

$$I_w \varphi_L = V_E \varphi_T, \quad (27)$$

где $V_E = I_w / R_L$ – скорость растворения.

Теперь полный поток (I_T) в почве будет

$$I_T = V_E \varphi_T - D_E \frac{\partial \varphi_T}{\partial z}. \quad (28)$$

Используя (24)–(28), уравнение для миграции СОВ в почве запишем в виде

$$\frac{\partial \varphi_T}{\partial t} = -\frac{\partial I_T}{\partial z} + S_s(z), \quad (29)$$

где $S_s(z)$ описывает источники и стоки на уровне z , учитывающие деградацию в почве.

Поток СОВ на разделе атмосфера – почва представляется

$$I_{T,S} = D_E \frac{\varphi_T - \varphi_L}{0,5 \Delta z_L} + V_E (p \varphi_T + q \varphi_L), \quad (30)$$

где $\Delta z_L = 0,0005$ м; p и q – весовые коэффициенты ($p + q = 1$), позволяющие сохранять нужный уровень концентрации в верхнем слое почвы.

4. Газофазный обмен между атмосферой и морем

Предполагается, что состояние равновесия между концентрациями СОВ в атмосфере (φ_{zoc}) и море (φ_w) сохраняется на их разделе. Согласно закону Генри

$$\varphi_{zoc} = K_H \varphi_w. \quad (31)$$

Потоки в приземном слое атмосферы и интегральном слое воды считаются постоянными:

$$F_w = F_{g,a}. \quad (32)$$

Здесь F_w – поток СОВ в воде; его можно представить в виде

$$F_w = D_L \frac{\varphi_{w,k} - \varphi_w}{\Delta z_{wm}} = \frac{\varphi_{w,k} - \varphi_w}{r_w}, \quad (33)$$

где $\Delta z_{wm} = 0,000\ 04$ м; r_w – сопротивление контрпереноса в молекулярном слое.

Как и в случае для почвы, уравнение для описания изменчивости СОВ имеет такую форму:

$$\frac{\partial \varphi_w}{\partial t} = -\frac{\partial I_T}{\partial z} + S_w(z), \quad (34)$$

где $S_w(z)$ описывает деградацию в воде. При этом предполагается, что $S_w(z) = 0$.

Формулы для поверхностного сопротивления r_c над сушей и поверхностью воды таковы:

$$r_c = \frac{1}{R_g \left(\frac{2D_E}{\Delta z_1} + pV_E \right)} \quad \text{над сушей}; \quad (35)$$

$$r_c = K_H r_w \quad \text{над морем}. \quad (36)$$

5. Влажное осаждение

Удаление линдана из атмосферы осадками характеризуется отношением вымывания W_{sc} . Молекулы газа, войдя в каплю, растворяются так быстро, что этот процесс можно рассматривать мгновенным, учитывая пространственно-временные масштабы изучаемой задачи. Поскольку константа Генри K_H обратно пропорциональна отношению вымывания ($K_H = 1/W_{sc}$), то равновесное разделение на газофазную ($\varphi_{a,g}$) и жидкофазную ($\varphi_{a,w}$) составляющие концентрации линдана имеет вид

$$\varphi_{a,g} = K_H \varphi_{a,w}. \quad (37)$$

Изменчивость концентрации вещества во времени можно представить в виде:

$$\frac{\partial \varphi_{a,g}}{\partial t} = \frac{R_i W_{sc} (\varphi_{a,g} - \varphi_u)}{\Delta z_a}, \quad (38)$$

где R_i – интенсивность дождя; φ_u – концентрация на уровне, расположенном непосредственно выше рассматриваемого слоя, которая принимается константой за один шаг по времени. При этих предположениях уравнение (38) решается аналитически:

$$\varphi_{a,g} = \varphi_u (1 - e^{-\alpha t}) + \varphi_{a,g}^0 e^{-\alpha t}, \quad (39)$$

где $\alpha = RW_{sc}/\Delta z_a$; $\varphi_{a,g}^0$ – концентрация при $t = t_0$. Поэтому поток влажного осаждения имеет вид

$$F_i = R_i \varphi_{a,w}. \quad (40)$$

6. Результаты численных экспериментов

Численные алгоритмы решения задачи изложены в работах [4, 11–13].

С использованием описанной выше модели были проведены численные эксперименты по вычислению характеристик переноса и трансформации выброшенного в атмосферу из европейских источников линдана в Северном полушарии, за период январь – декабрь 1992 г. В численных расчетах были использованы следующие входные параметры [8]: шаги в почве $\Delta z_1 = 0,5$ см, $\Delta z_2 = 0,5$ см, $\Delta z_3 = 1,0$ см, $\Delta z_4 = 2,0$ см, $\Delta z_5 = 11,0$ см; толщина слоя для интегральных потоков в воде $\Delta z_w = 25$ м; эффективные коэффициенты деградации $k_d = 2,5 \cdot 10^{-7}$ с⁻¹ (в атмосфере), $k_s = 3,0 \cdot 10^{-8}$ с⁻¹ (в почве), $k_w = 0$ (в воде); коэффициент Генри $K_{HO} = 0,073$ Па м⁻³ моль⁻¹; $T_0 = 283,15$ К; коэффициент температурной зависимости $b_1 = -7329$ К; коэффициент разделения органического углерода $K_{oc} = 1,3$ м³кг⁻¹; средняя объемная влажность почвы $\theta = 0,3$; пористость $\Phi = 0,5$; коэффициенты молекулярной диффузии $D_g = 5 \cdot 10^{-6}$ м²с⁻¹ (в атмосфере) и $D_L = 5 \cdot 10^{-10}$ м²с⁻¹ (в воде). Параметры вычислительной сетки таковы: 144×73 по долготе и широте с шагом $2,5^\circ \times 1,25^\circ$; вертикальные уровни на высотах 110, 380, 650, 920, 1190, 1460, 1860, 2460, 3200, 4100, 6100, 7100, 8100 и 9160 м, шаг по времени – 30 мин.

Метеорологическая информация взята из базы данных Европейского центра по среднесрочным прогнозам (ECMWF), а данные по выбросам линдана из европейских источников – согласно проекту ESQUAD. Общее количество выбросов в 2690 т/год были распределены по месяцам следующим образом: январь – 0%; февраль – 10%; март – 15%; апрель, май, июнь – 25%; июль – декабрь – 0% (т. е. предполагается, что в последующих месяцах выбросов не было).

На рис. 1 и 2 показаны изолинии концентрации линдана для февраля и июня месяцев на высотах 50, 1860 и 6100 м соответственно. Единица измерений концентрации – $\mu\text{г м}^{-3}$. Результаты численных расчетов показывают, что в период от февраля по июнь линдан может переноситься достаточно далеко и по-горизонтали, и, благодаря турбулентному перемешиванию и конвективным процессам, также по-вертикали до верхней тропосферы. Максимальные концентрации в этот период локализованы в атмосферном пограничном слое европейского региона.

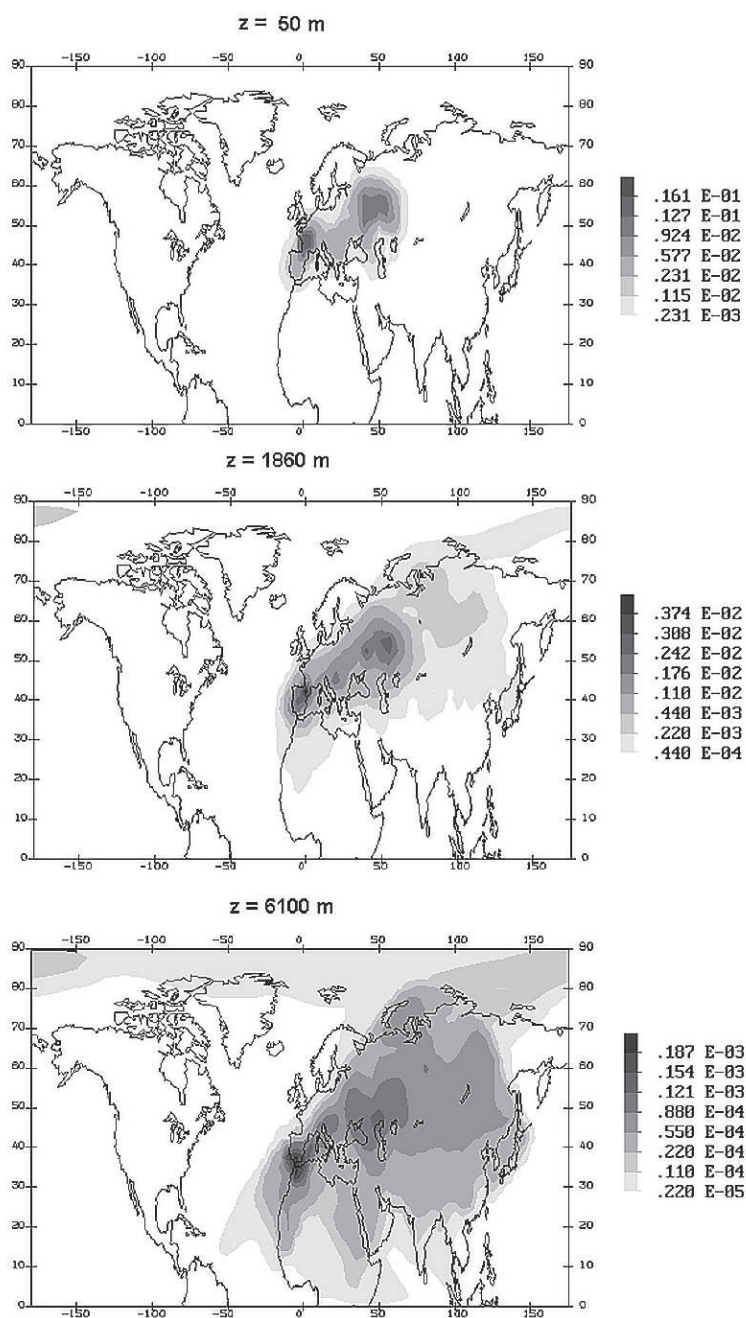


Рис. 1

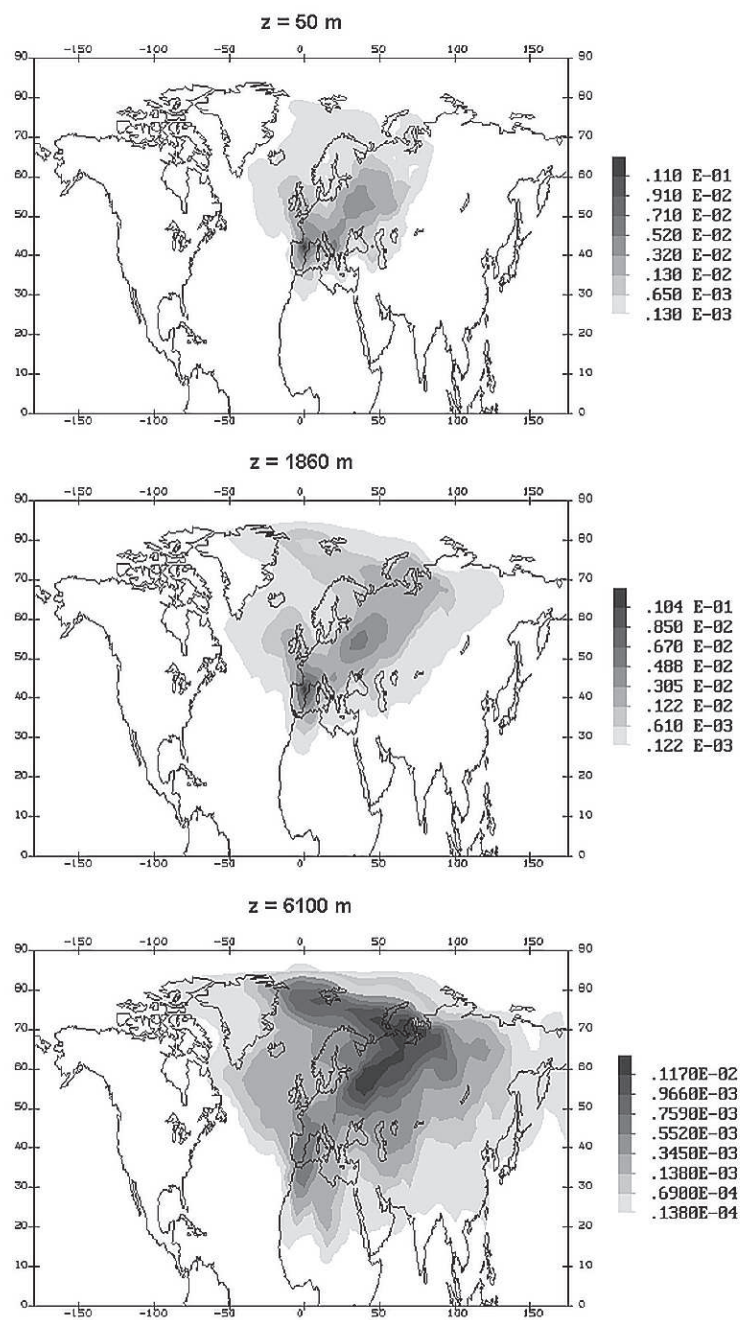


Рис. 2

Когда выбросы линдана отсутствуют (т. е. июль – декабрь), линдан уже успевает распространяться почти по всему Северному полушарию, а его концентрация в тропосфере оказываются даже выше, чем в атмосферном пограничном слое. Это связано с тем, что из-за влажного осаждения линдан частично вымывается из нижней тропосферы, в то время как в средней тропосфере подвержен маленьким изменениям из-за активного турбулентного перемешивания и отсутствия осадков. А в верхних слоях атмосферы главным составляющим переноса является адвекция. Начиная с октября концентрация линдана в нижних слоях атмосферы увеличивается из-за реэмиссии из почвы, хотя и снижается по высоте. По мере того как эти реэмиссии становятся значительными, максимальные концентрации достигаются в ограниченных по размеру областях.

На рис. 3 показаны результаты расчетов среднемесячных концентраций линдана на высоте $z = 50$ м (рис. 3а), суммарного газового потока (рис. 3б) и влажного осаждения на сушу и водную поверхность области ЕМЕР (рис. 3в). Среднемесячные концентрации линдана существенно различаются на суше и море: в первом случае максимум достигается в июне ($0,004 \text{ мкг м}^{-3}$), а во втором – в марте ($0,001 \text{ мкг м}^{-3}$). Начиная с июля концентрации линдана становятся незначительными. Как и следовало ожидать, влажные осаждения увеличиваются между февралем и июнем, что обусловлено увеличивающимися уровнями концентрации линдана. В последующие месяцы, когда эмиссии от наземных источников отсутствуют, но осадки есть, влажное осаждение сильно снижается и достигает своего минимального значения. Это объясняется тем, что в этот период количество линдана в атмосфере мало. Ситуация иная с сухим осаждением, которое в основном подвержено влиянию механизмов турбулентности в пограничном слое. В июле газовый поток меняет знак (т. е. концентрация линдана в почве больше, чем в атмосфере). Благодаря реэмиссии, поток постепенно увеличивается, имея все еще отрицательные значения. При отсутствии выбросов, когда реэмиссия максимальна в июле-августе, ее вклад в концентрациях линдана в атмосфере незначителен. Это можно объяснить тем, что содержание линдана в атмосфере выше, чем значения реэмиссии от почвы. В дальнейшем, когда содержание линдана в атмосфере снижается, роль реэмиссии соответственно возрастает. Результаты численных экспериментов показали, что линдан в средней атмосфере трансформируется меньше, чем в пограничном слое; в нижнем 2-километровом слое его содержа-

ние снижается благодаря влажной конвекции и отсутствию выбросов при все еще низких уровнях реэмиссий.

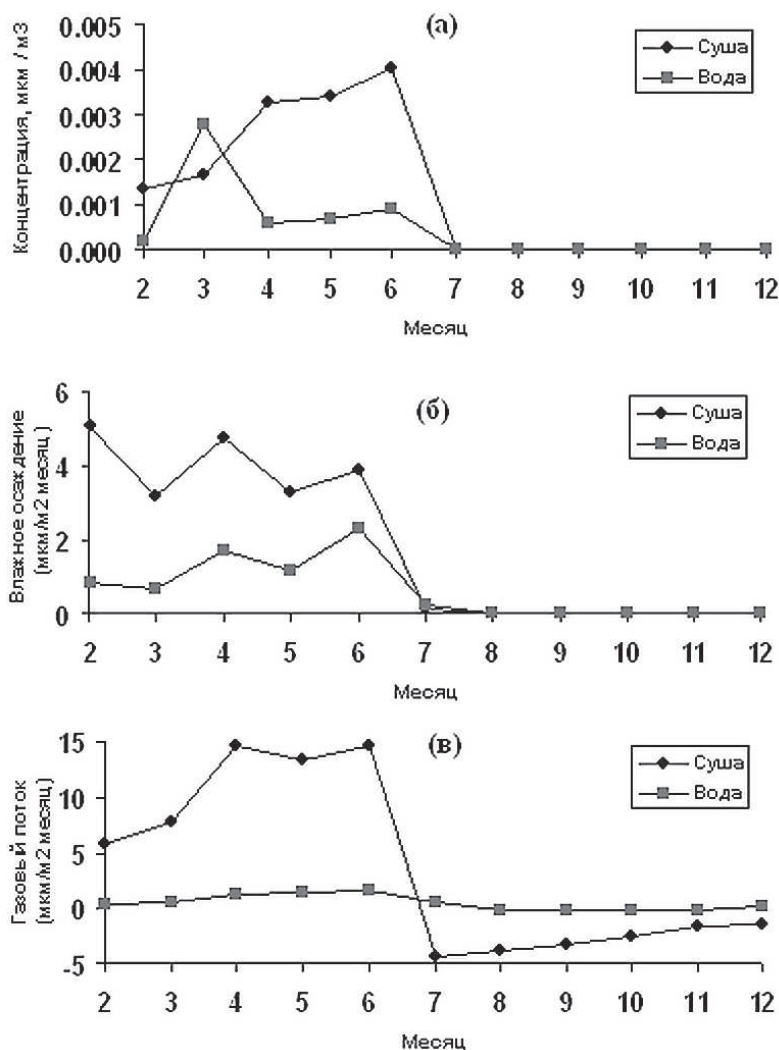


Рис. 3

На рис. 4 приведены интегральные характеристики распределения линдана в ОПС, а также дано их процентное содержание в разных средах (атмосфера, почва, море, деградация в почве и атмосфере) для каждого месяца 1992 г. Согласно численным расчетам, время жизни линдана в атмосфере составило ~ 382 дней, а совместно и в атмосфере, и в почве – 197 дней.

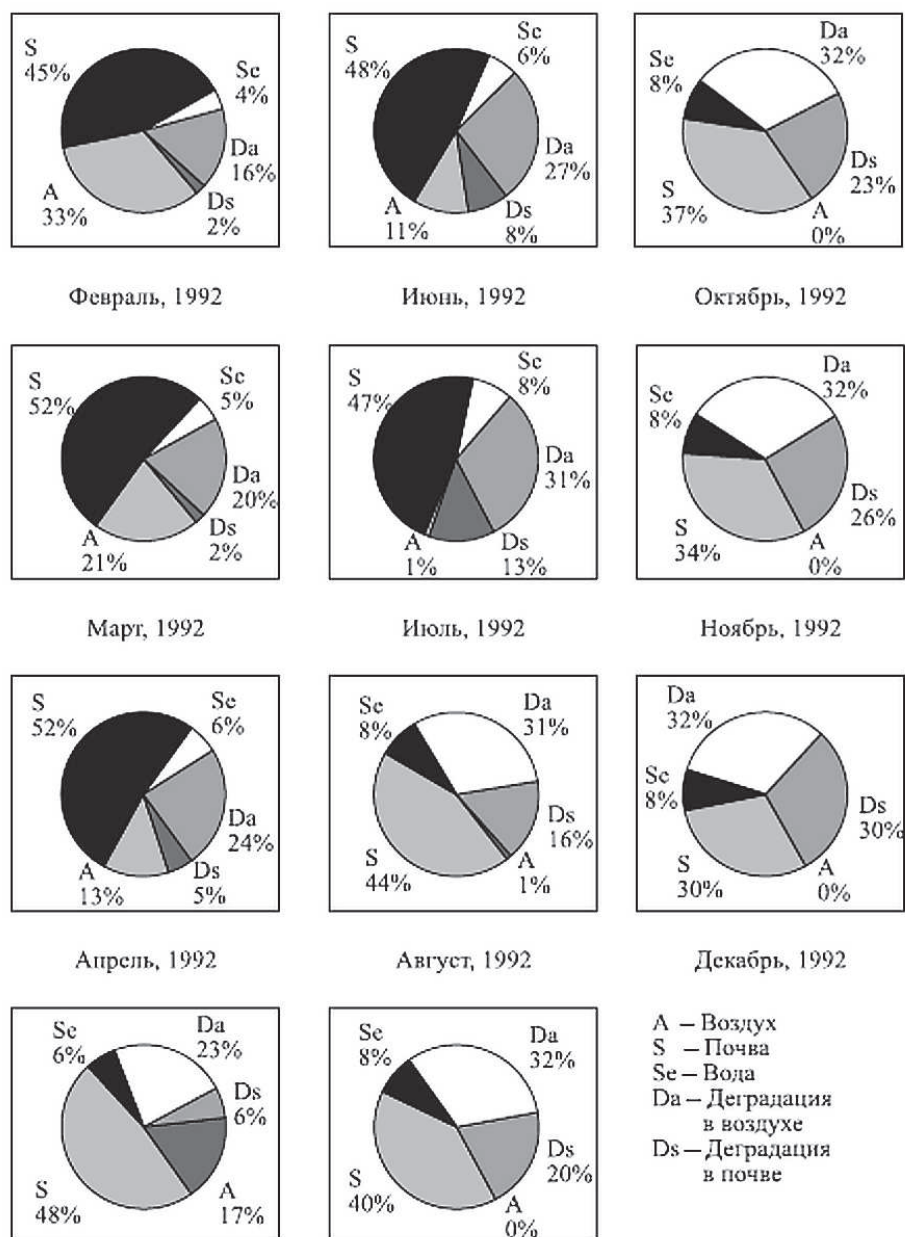


Рис. 4

7. Заключение

Поскольку время жизни СОВ в окружающей среде достаточно большое, важно правильно оценить их накопление и деградацию в различных средах: в атмосфере, почве и воде. Глобальный перенос и деградация СОВ в окружающей среде существенно зависят от характера атмосферной циркуляции, теплофизических характеристик почвы, а также и ряда физико-химических процессов, протекающих в почве. Распределение СОВ в окружающей среде имеет ярко выраженный сезонный ход, и механизмы накопления на разных континентах отличаются, что обусловлено сухим и влажным осадчением (осадками), а также содержанием органических веществ в почве, ответственных за их деградацию. Разработанная численная модель может быть эффективно использовано и для описании эволюции других загрязнителей из семейства СОВ в окружающей среде с учетом их специфики и физико-химических параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. UN-ECE. State of knowledge report of UN ECE Task force on Persistent Organic Pollutants for the Convention on Long-Range Transboundary Air Pollution, 1994.
2. UNEP Survey on Sources of POPs. Report prepared for an IFCS Expert Meeting on Persistent Organic Pollutants. Manila, the Philippines, 1996, June 17–19.
3. Йорданов Д. Л., Пененко В. В., Алоян А. Е. О вертикальной скорости ППС над орографически и термально неоднородной поверхностью // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15, № 11. С. 1204–1208.
4. Марчук Г. И., Алоян А. Е. Глобальный перенос примеси в атмосфере // Известия АН СССР. Серия: Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31, № 5. С. 597–606.
5. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 640 с.
6. Businger J. A., Wyngaard J. C., Izum Y., Bradley E. F. Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer // J. Atmos. Sci. 1971. V. 28, No. 2. Pp. 181–189.
7. Пененко В. В., Алоян А. Е., Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
8. Jacobs C. M., Van Pul W. A. J. Long-range atmospheric transport of persistent organic pollutants, I: Description of surface-atmosphere

exchange modules and implementation in EUROS. RIVM Rep. 722401013, 1996.

9. Jury W. A., Spencer W. F., Farmer W. J. Behavior Assessment Model for Trace Organics in Soil: Model Description // J. Env. Qual. 1983. V. 12. Pp. 558–564.

10. Цукерман В. Г. Моделирование поведение изомеров ГХЦГ и симазина в различных типах почв Казахской ССР // В кн. Миграция загрязняющих веществ в почвах и сопредельных средах. Тр. 4 Всесоюзного совещания, Обнинск, 1983; Л., Гидрометеиздат, 1985. С. 31–35.

11. Aloyan A. E., Arutyunyan V. O. Numerical Modeling of Lindane Transport in the Northern Hemisphere. MSC-E Report, 1998.

12. Aloyan A. E. Numerical modeling of the interaction of gas species and aerosols in the atmospheric dispersive systems // Russ. J. Num. Anal. Math. Modell. 2000. V. 15, No. 3–4. Pp. 211–224.

13. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 535 с.

14. Алоян А. Е. Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. М.: ИВМ РАН, 2002.

СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТРАНСГРАНИЧНЫЙ ПЕРЕНОС ПРИМЕСЕЙ¹⁰

Построена трехмерная математическая модель трансграничного переноса примесей в атмосфере с использованием основных и сопряженных уравнений. Учитывается трансформация диоксида серы в атмосфере с использованием обобщенных методов параметризации. Численные эксперименты проводились на основе метеорологической информации ЕСМWF (Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды) и данных ЕМЕР (Европейская совместная программа мониторинга и оценки переноса воздушных загрязнений на большие расстояния) по эмиссиям диоксида серы за 1992 г. С помощью сопряженных функций получены функции чувствительности территорий отдельных

¹⁰Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2005, № 2, с. 54–64. Совместно с А. Е. Алояном, В. О. Арутюняном.

стран Европы, а также бассейна Черного моря, к загрязнению веществами, переносимыми из других областей.

Введение

При решении глобальных задач физики атмосферы и окружающей среды требуется детальное описание структуры метеорологических полей и процессов распространения примесей в атмосфере. Особенно остро стоит эта проблема в последние годы в связи с активным воздействием человека на окружающую среду. При оценке возможных последствий этой деятельности существенную роль играют математические модели. С их помощью можно оценить возмущения основных параметров, характеризующих изменения состояния климатической системы под влиянием естественных и антропогенных факторов. Проблема моделирования оказывается существенной еще и потому, что эксперименты в экологии и в социально-экономических областях могут привести к необратимым последствиям. Математическое моделирование позволяет рассмотреть различные сценарии по влиянию деятельности человека на окружающую среду и оценить их последствия. Полученная в результате информация позволяет следить за поведением исследуемой системы в динамике. Важнейшей задачей также является поиск оптимальных решений при планировании хозяйственной деятельности с учетом допустимых нагрузок на окружающую среду и социально-экономических критериев с конечной целью – определить границы устойчивости и пределы допустимых ее изменений.

Для оценки областей влияния удаленных источников загрязнений на экологическое состояние отдельных регионов Земли используются уравнения переноса примесей в атмосфере с учетом турбулентного обмена и взаимодействия примесей с подстилающей поверхностью. Мы будем осуществлять моделирование глобального распространения примесей в атмосфере, с помощью которого можно получить оценку общего количества загрязнения подстилающей поверхности.

Расчеты по модели переноса примесей обычно проводятся на длительные сроки. С целью повышения достоверности результатов расчетов информация о поле скорости ветра и других метеозлементов используется на основе фактического материала наблюдений. Образование кислотных осадков является одной из ключевых проблем в охране окружающей среды в современных индустриальных странах.

Обусловлены эти осадки сульфатными частицами, состоящими в основном из капелек серной кислоты, которая образуется в атмосфере из двуокиси серы двумя путями (через SO_3 и H_2SO_3). В последние годы накопилось много свидетельств о вредном воздействии двуокиси серы (и серных соединений в целом) на растительность и здоровье людей. Необходимость борьбы за уменьшение выбросов окислов серы предполагает выработку надежных оценок. Поэтому разработка математических моделей трансграничного переноса примесей и проведение соответствующих численных расчетов представляются очень важными для выработки надежных стратегий контроля уровня их концентраций. После эмиссии в атмосферу двуокись серы распространяется по ветру (адвекция) и рассеивается в горизонтальной плоскости (горизонтальная диффузия) и по вертикали (вертикальная диффузия). Сульфатные частицы могут захватываться осадками и осаждаться на Земную поверхность («влажное» осаждение) или же выпадать вследствие захвата подстилающей поверхностью («сухое» осаждение), при этом крупные частицы с характерными размерами более микрона выпадают из-за гравитационного осаждения.

В течение последних десятилетий было разработано много моделей дальнего трансграничного переноса загрязнителей и их оседания. В рамках программ Организации по экономическому сотрудничеству и развитию в Европе (OECD) использовались ориентированные на приемник двумерные лагранжевые модели, разработка которых затем продолжалась в исследованиях западного центра программы ЕМЕП (ЕМЕР/МСС-В) [1]. Последующие модели этого типа были применены для оценки годовых концентраций и выпадений окисляющихся веществ, содержащих оксиды серы и азота [2, 3], а также концентраций озона в пограничном слое атмосферы [4].

Описание модели

В настоящей работе на базе [5, 6] используется иной подход к решению задачи трансграничного переноса примесей, основанный на использовании сопряженных уравнений [7, 8]. Исходные уравнения трансграничного переноса примесей двуокиси серы в сферической системе координат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \psi} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi} + (w - w_g) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} - \frac{1}{a^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \sin \psi \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi} + \end{aligned}$$

$$+ (k_1 + k_2 + k_3) \varphi_1 = F_1, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \psi} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \psi} + (w - w_g) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} - \frac{1}{a^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \sin \psi \frac{\partial \varphi_2}{\partial \psi} + \\ & + k_3 \varphi_1 + (k_4 + k_5 + k_6) \varphi_2 = F_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где λ – долгота; ψ – дополнение до широты; z – высота от подстилающей поверхности; $\varphi_1 = [SO_2]$, $\varphi_2 = [H_2SO_4]$, w_g – скорость гравитационного оседания; u, v, w – компоненты скорости ветра в направлении λ, ψ, z соответственно; μ, ν – коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальном и вертикальном направлениях; $F_1(\lambda, \psi, z)$, $F_2(\lambda, \psi, z)$ – функции размещения и мощности источников; a – средний радиус Земли. Мощности источников и их распределения задаются как функция от пространственных координат. Трансформации SO_2 и H_2SO_4 опишем с помощью обобщенных коэффициентов трансформации и выведения ($k_i, i = 1, \dots, 6$), соответствующих константам скорости этих процессов для SO_2 и H_2SO_4 ($ч^{-1}$):

Процесс	SO_2	H_2SO_4
Поглощение подстилающей поверхностью	$k_1=0,015$	$k_4=0,005$
Вымывание осадками	$k_2=0,01$	$k_5=0,012$
Окисление	$k_3=0,027$	
Нейтрализация		$k_6=0,02$

Задача (1)–(2) рассматривается в области $D_t = G \times [0, T]$, $G = S \times [b, H]$, $S = \{\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2, \Psi_1 \leq \psi \leq \Psi_2\}$, где $b = b(\lambda, \psi)$ – функция; описывающая рельеф подстилающей поверхности, H – верхняя граница расчетной области.

Сформулируем краевое условие задачи на уровне высоты приземного слоя атмосферы $z = b + h$.

Область определения решения заменим на $G = S \times [b + h, H]$, имея в виду, что приземный слой, как было указано выше, может быть исключен из рассмотрения, используя соответствующую параметризацию для задания граничного условия. Как известно из теории подобия Монина – Обухова, в приземном слое атмосферы турбулентный поток пассивной примеси (наряду с потоками тепла и количества движения) допустимо считать постоянными по высоте. Тогда при $z \leq b + h$ будут выполняться соотношения [9]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\varphi_*}{z} \eta(\zeta), \quad \varphi = \varphi_1, \varphi_2, \quad (3)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi_* \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\eta(\zeta)}{\zeta} d\zeta \equiv \varphi_* = f_\varphi(\zeta, \zeta_0), \quad (4)$$

$$\nu(\zeta) = \frac{u_* \kappa z}{\eta(\zeta)}, \quad u_* = \frac{\kappa |u|}{f_u(\zeta, \zeta_0)} = c_u |u|, \quad (5)$$

где φ_* – масштаб для изменения концентрации примеси; η , f_u и f_φ – универсальные функции; ζ – безразмерная длина, характеризующая устойчивость атмосферы ($\zeta = z/L$); индекс ноль означает, что соответствующие величины берутся при $z = b + z_0$, z_0 – параметр шероховатости; L – масштаб турбулентного слоя; κ – постоянная Кармана; u^* – масштаб скорости ветра, $c_u = \kappa/f_u(\zeta, \zeta_0)$. Из (3)–(4) получаем

$$\varphi_* = \frac{\varphi - \varphi_0}{f_\varphi(\zeta, \zeta_0)}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\eta(\zeta)}{z} \frac{\varphi - \varphi_0}{f_\varphi(\zeta, \zeta_0)}, \quad (7)$$

Умножая уравнение (7) на ν , придем к соотношению

$$\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha(\varphi - \varphi_0),$$

где $\alpha = c_u c_\varphi |u|$, $c_\varphi = \kappa/f_\varphi(\zeta, \zeta_0)$. Рассмотрим это соотношение при $z = b + h$:

$$\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha(\varphi - \varphi_0) \quad \text{при } z = b + h. \quad (8)$$

Параметр $\alpha = \alpha(\zeta)$ характеризует взаимодействие атмосферы с подстилающей поверхностью и является функцией от безразмерного параметра ζ , вид которого приведен в [9, 10]. Таким образом, единственной неизвестной величиной в граничном условии (8) остается функция φ_0 . Концентрацию примеси на уровне шероховатости (φ_0) определим из уравнения баланса примеси на подстилающей поверхности

$$-\left(\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_0 + (\beta_i - w_g) \varphi_0 = \sum_{k=1}^K Q_{0k} \delta(x - x_k) \delta(y - y_k), \quad (9)$$

где K – число всех наземных источников с координатами (x_k, y_k) ; Q_{0k} – мощность каждого источника, т. е. количество примеси, поступающей в единицу времени на единичную площадь подстилающей поверхности; β_i ($i = 1, 2$) – коэффициенты, характеризующие взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью ($\beta_1 = 0,01$ м/с соответствует суше, а $\beta_2 = 1$ м/с – водной поверхности).

Для удобства уравнение (9) записано в декартовых координатах x, y , поскольку они обычным образом связаны с координатами λ, ψ . С учетом граничного условия уравнение (9) примет вид

$$\varphi_0 = \frac{\sum_{k=1}^K Q_{0k} \delta(x - x_k) \delta(y - y_k) + c_u c_\varphi |u_{b+h}| \varphi_{b+h}}{\beta_i - w_g + c_u c_\varphi |u_{b+h}|}, \quad (10)$$

где

$$|u_{b+h}| = |u|_{z=b+h}, \quad \varphi_{b+h} = \varphi|_{z=b+h}.$$

На верхней границе атмосферы при $z = H$ рассмотрим следующее краевое условие задачи (1)–(2):

$$\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = H. \quad (11)$$

Начальное условие выберем в виде

$$\varphi = \bar{\varphi} \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (12)$$

где $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\lambda, \psi, z)$ – «фоновая» концентрация примеси. В дальнейшем ради простоты будем считать, что $\bar{\varphi} = 0$.

На боковых границах области задаются следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} \varphi_i|_\Gamma &= \varphi_i^b, \quad \text{если} \quad u_n < 0, \\ \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right|_\Gamma &= 0, \quad \text{если} \quad u_n \geq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где Γ – боковая поверхность; n – внешняя нормаль к Γ ; u_n – нормальная компонента вектора скорости. Значение функции φ_i^b являются заданными.

Здесь $\varphi_i = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, h – высота приземного слоя атмосферы, α характеризует взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью, горизонтальной чертой обозначены фоновые значения; в численных

расчетах трансграничного переноса в Европейском регионе приняты $\Lambda_1 = -30^\circ$, $\Lambda_2 = 50^\circ$, $\Psi_1 = 30^\circ$, $\Psi_2 = 80^\circ$.

На основе сделанных предположений будем считать, что решение задачи переноса примеси в форме (1)–(2), (11)–(13) — функция $\bar{\varphi}$ — непрерывна в $G \times [0, T]$ и является дифференцируемой функцией по t . Кроме того, пусть для каждого t функция φ принадлежит множеству функций $D(A)$ из вещественного гильбертова пространства $L_2(G)$, непрерывных и дифференцируемых в G и таких, что они подчиняются условию $A\varphi \in L_2(\Omega)$.

При этом каждая функция из $D(A)$ удовлетворяет однородным граничным условиям (11)–(13). Относительно вектора скорости \mathbf{u} сделаем предположение, что компоненты этого вектора непрерывны и дифференцируемы, причем ради простоты предположим, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Такое предположение естественно, поскольку наиболее значимой является субстанция, распространяющаяся в слое 1–3 км. В общем случае вместо этого условия следует принять $\operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0$. Относительно других функций и параметров задачи сделаем предположение, что они достаточно гладкие, так что существует единственное решение задачи (1), (2), (7), (11)–(13).

Поскольку в глобальных атмосферных моделях пространственное разрешение по вертикали оказывается недостаточным для восстановления полей с нужной точностью в нижних слоях атмосферы, метеорологические характеристики пограничного слоя можно рассчитывать с помощью параметризаций планетарного пограничного слоя атмосферы. С помощью модели планетарного пограничного слоя для каждого узла расчетной сетки в горизонтальной плоскости по известным значениям полей скорости и температуры на первом расчетном уровне определяются следующие внешние параметры:

$$Ro = \frac{|u_{g0}|}{lz_0}, \quad S_T = \frac{\beta \delta \hat{\Theta}}{l |\mathbf{u}_{g0}|},$$

$$\eta_x = \frac{\kappa^2}{l} \frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{\beta \kappa^2}{l^2} \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial y}, \quad \eta_y = \frac{\kappa^2}{l} \frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{\beta \kappa^2}{l^2} \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial x}, \quad (14)$$

где R — число Россби; S — параметр стратификации; u_g, v_g — компоненты геострофического ветра \mathbf{u}_g ; $|\mathbf{u}_{g0}|$ — модуль вектора скорости геострофического ветра у подстилающей поверхности; l — параметр Кориолиса; η_x, η_y — параметры бароклинности; $\hat{\Theta}$ — потенциальная температура; $\beta = g/\hat{\Theta}$ — параметр плавучести; g — ускорение силы тяжести;

$\delta\hat{\Theta}$ – разность между значениями потенциальной температуры на границе планетарного пограничного слоя и подстилающей поверхности. По значениям Ro , S_T , η_x , η_y находим величины: $C_g = u_*/|\mathbf{u}_g|$ – коэффициент «геострофического сопротивления»; α – угол между напряжением турбулентного трения у подстилающей поверхности и $|\mathbf{u}_{g0}|$; $\mu = h_0/L_0$ – безразмерный «внутренний» параметр стратификации. Здесь приняты следующие обозначения: $h_0 = \kappa u_*/l$ – «внутренний» масштаб высоты пограничного слоя; $L_0 = -c_p \rho u_*^3 / \kappa \beta q_0$ – «масштаб длины Монина – Обухова»; c_p – теплоемкость воздуха; ρ – плотность воздуха; q_0 – поток тепла у Земли. По значениям C_g , α , μ находится величина q , а затем по C_g и u_g рассчитываются величина u_* и коэффициенты турбулентного обмена на высотах $z \geq h$ по формуле

$$\nu(\mu) = \frac{\kappa^2 u_*^2}{l^2} \begin{cases} h/(1 + 10\mu h), & \text{для } \mu \geq 0, \\ h, & \text{для } -2,33 \leq \mu \leq 0, \\ (-0,07/\mu)^{-1/3} h^{4/3}, & \text{для } \mu \leq -2,33, \end{cases} \quad (15)$$

где h – высота приземного слоя. Компоненты вектора скорости можно выписать с помощью следующих выражений:

$$u = |\mathbf{u}_{g0}| \cos \alpha + \frac{u_*}{\kappa} a_1, \quad v = -|\mathbf{u}_{g0}| \sin \alpha + \frac{u_*}{\kappa} a_2, \quad (16)$$

где a_1 и a_2 – безразмерные «дефекты скорости», которые рассчитываются по формулам

$$a_1 = \kappa \frac{u - u_g}{u_*} = -\exp(-a_3)(\cos a_3 - \sin a_3)/a_4$$

$$a_2 = \kappa \frac{v - v_g}{u_*} = \exp(-a_3)(\cos a_3 + \sin a_3)/a_4. \quad (17)$$

Здесь $a_3 = (z - h)/a_4$, $a_4 = (2\nu)^{1/2}$.

Для глобального переноса особый интерес представляют примеси с малыми скоростями гравитационного оседания, которые значительное время находятся во взвешенном состоянии и переносятся вместе с воздушными массами. В этом случае для примесей применимы положения теории турбулентности, используемые в моделях общей циркуляции для описания турбулентного обмена температуры и влажности. В частности, для определения коэффициента горизонтального турбулентного обмена используется следующая модель [11]:

$$\mu = k_1^2 \Delta S |D_N|,$$

где

$$D_N = (D_T^2 + D_S^2)^{1/2}, \quad (18)$$

$$D_T = \frac{1}{a \sin \psi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{\partial v}{2 \partial \psi}, \quad (19)$$

$$D_S = \frac{1}{a \sin \psi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{\partial u}{2 \partial \psi}, \quad (20)$$

ΔS – площадь элементарной ячейки сеточной области, k_1 – безразмерный параметр.

Вычислительные алгоритмы, используемые для решения этой задачи, основаны на методе расщепления. При этом на каждом интервале Δt приходим к численной схеме, описывающей дифференциальный оператор переноса примеси по траекториям, и к схеме, аппроксимирующей турбулентную диффузию. На первом этапе используется явная монотонная схема, обладающая свойством консервативности и имеющая второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и по времени. На втором этапе используется схема с неявной аппроксимацией. Более детально численные алгоритмы решения задачи (1)–(13) изложены в [12].

Для построения модели трансграничного переноса с помощью сопряженных функций введем в рассмотрение функционал от решения φ_i основной задачи (1)–(13) (здесь мы приводим только выкладки для φ_1 ; аналогичные рассуждения справедливы и для φ_2 ; индекс при этом опустим):

$$J = \int_0^T dt \int_{\omega} p \varphi dG, \quad (21)$$

где $p = p(\lambda, \psi, z, t)$ – заданная функция. Если, например,

$$p = \begin{cases} p_o, & \text{если } r \in \omega, \\ 0, & \text{если } r \notin \omega, \end{cases} \quad (22)$$

то J представляет собой суммарную концентрацию примеси в выделенной подобласти G , взвешенную с весом p_o . Область ω соответствует зоне, где производится оценка загрязнения. В зависимости от этого можно получить различные интегральные характеристики поля загрязнения примесей. Таким образом, задача сводится к оценке функционала вида (21), требующей знания поля функции φ , включая

фактическую информацию об источниках выбросов примеси, действующих в области G , и о начальном состоянии загрязнения атмосферы в этой области в момент $t = 0$.

Для оценки функционала J целесообразно использовать подход, основанный на решении сопряженной задачи, позволяющий оценить степень потенциальной опасности загрязнения атмосферы в области ω от всех источников, расположенных в G при заданных сценариях метеорологического режима атмосферы. Сопряженная задача, соответствующая основной задаче (1)–(13), будет иметь вид

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{u}{a \sin \psi} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \psi} - (w - w_g) \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial \lambda} + \frac{1}{a^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \sin \psi \frac{\partial \varphi^*}{\partial \psi} + \\ & + (k_1 + k_2 + k_3) \varphi^* = p, \end{aligned} \quad (23)$$

где p – функция, определяемая функционалом (21), а начальные и граничные условия принимают следующий вид:

$$\varphi^* = 0 \quad \text{при} \quad t = T, \quad (24)$$

$$\nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = \alpha \varphi^* \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (25)$$

$$\nu \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = H, \quad (26)$$

$$\varphi^*|_{\Gamma} = 0, \quad \text{если} \quad u_n < 0,$$

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \quad \text{если} \quad u_n \geq 0. \quad (27)$$

Так как задача (23)–(27) корректна при решении обратно по времени, от $t = T$ к $t = 0$, то в качестве «начального» условия здесь выбрано (24). Для обеспечения устойчивости вычислительного алгоритма схема его реализации получается транспонированной по пространству, времени и этапам расщепления относительно схем реализации дискретных аналогов основной задачи (1)–(13).

Путем несложных преобразований функционал J можно представить в виде

$$J = \int_0^T dt \int_G F \varphi^* dG + \int_0^T dt \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} d\lambda \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \alpha \varphi_o \varphi^*|_{z=b} d\psi. \quad (28)$$

Учитывая, что при больших T функция φ^* становится малой, вторым членом в (28), как правило, можно пренебречь. В результате J приближенно будет записан в виде

$$J = \int_0^T dt \int_G F \varphi^* dG. \quad (29)$$

Теперь для того чтобы оценить трансграничный перенос от области G в данную страну (обозначим ее территорию через ω_0), представим функционал J в виде суммы функционалов:

$$J = J_0 + \sum_{i=1}^n J_i, \quad (30)$$

где

$$J_0 = \int_0^T dt \int_{\omega_0} F \varphi^* dr, \quad (31)$$

$$J_i = \int_0^T dt \int_{\omega_i} F \varphi^* dr, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (32)$$

Естественно требовать, чтобы функция F была отнормирована всюду таким образом, чтобы функционалы J_i описали общее загрязнение региона ω_i в выбранных единицах в промежутке времени $0 \leq t \leq T$.

Поясним физический смысл функции φ^* . Она является весовой функцией, определяющей вклад каждого источника загрязнения F и начального состояния функции $\varphi = \varphi_0$ в величину загрязнения атмосферы в выделенной подобласти ω . Таким образом, она характеризует степень опасности загрязнения атмосферы в области ω от источника, который может находиться в любой точке области D_t , т. е. вклад источника в функционале равен произведению мощности выброса на значение функции φ^* при каждом t в той области, где размещен источник. По значениям функции φ^* можно районировать область D_t , выделяя опасные зоны по отношению к загрязнению атмосферы в области ω . Конструктивно это районирование определяется с помощью функции φ^* , нормированной ради простоты на свое максимальное значение.

Рассмотрим функционалы загрязнения для отдельных регионов в виде

$$J_i = \int_0^T dt \int_G p_i \varphi dG = \int_0^T dt \int_G f \varphi_i^* dG,$$

где p_i – весовые функции, вообще говоря, различные для разных регионов. Функцию p_i ($i = \overline{1, 5}$) определим следующим образом:

$$p_i(\lambda, \psi, z, t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta \hat{z} \text{mes}(\omega_i)}, & \text{если } (\lambda, \psi, z) \in \omega_i, \\ 0, & \text{если } (i = \overline{1, 5}), \end{cases}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ соответствуют различным регионам, а $\text{mes}(\omega_i)$ – площадь ω_i ($i = \overline{1, 5}$).

Функционалы J целесообразно оценивать, используя решение сопряженной задачи (23)–(27).

Результаты численных расчетов

Численные расчеты с использованием вышеизложенной модели проводились при следующих входных параметрах: число узлов сеточной области по долготе – 65, по широте – 41, по высоте – 15; горизонтальный шаг по обоим направлениям – $1,25^\circ$, вертикальные уровни на высотах 50, 350, 650, 950, 1250, 1550, 3090, 4525, 6615, 9040, 11 345, 13 545, 15 705, 18 205, 20 705 м; шаг интегрирования по времени – 30 мин.

Размер ячейки сетки на широте 60° составляет 90×135 км. Каждая ячейка является одновременно эмиттером и приемником примеси. На входе модели используются метеорологические данные (полученные Европейским центром среднесрочных прогнозов погоды – ECMWF) и данные ЕМЕР по эмиссиям SO_2 для стран Европы (с определением принадлежности ячеек сетки или их частей конкретным странам или регионам). Данные об источниках SO_2 (килотонн $S/\text{год}$) в Европе взяты из [13].

Численное моделирование распространения и трансформации SO_2 в Европейском регионе ведется в области Северного полушария, ограниченной в пределах $-30^\circ \leq \lambda \leq 50^\circ$, $30^\circ \leq \psi \leq 80^\circ$. Для получения репрезентативных данных о дальнем переносе при большом усреднении требуется оперативный расчет на базе метеоинформации: в модели используется осредненные данные по 12-часовым метеосрокам,

что соответствует принятым размерам стандартной ячейки. На рисунках функция влияния φ^* изображена изолиниями с номерами с 1-го по 9-й. Приведем теперь некоторые результаты численных расчетов по определению функций чувствительности для отдельных европейских стран и интервала времени 60 дней, проведенных с помощью описанной выше модели трансграничного переноса.

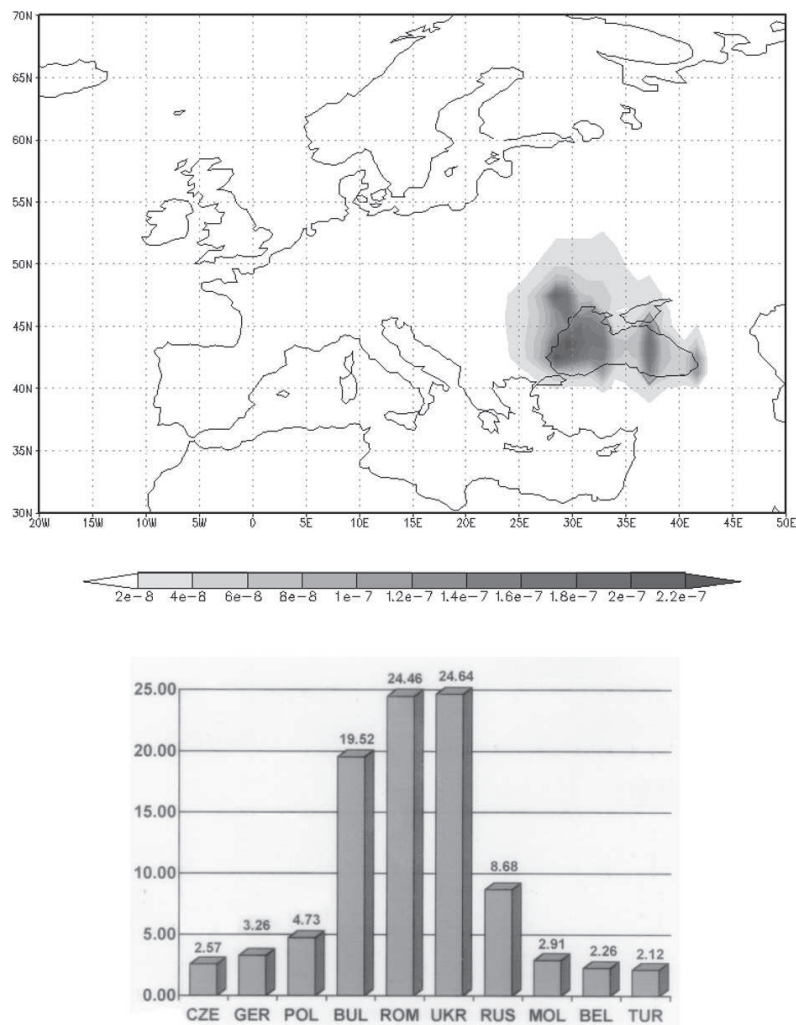


Рис. 1. Функция чувствительности и соответствующий интеграл, описывающий общее количество SO_2 в области Черного моря

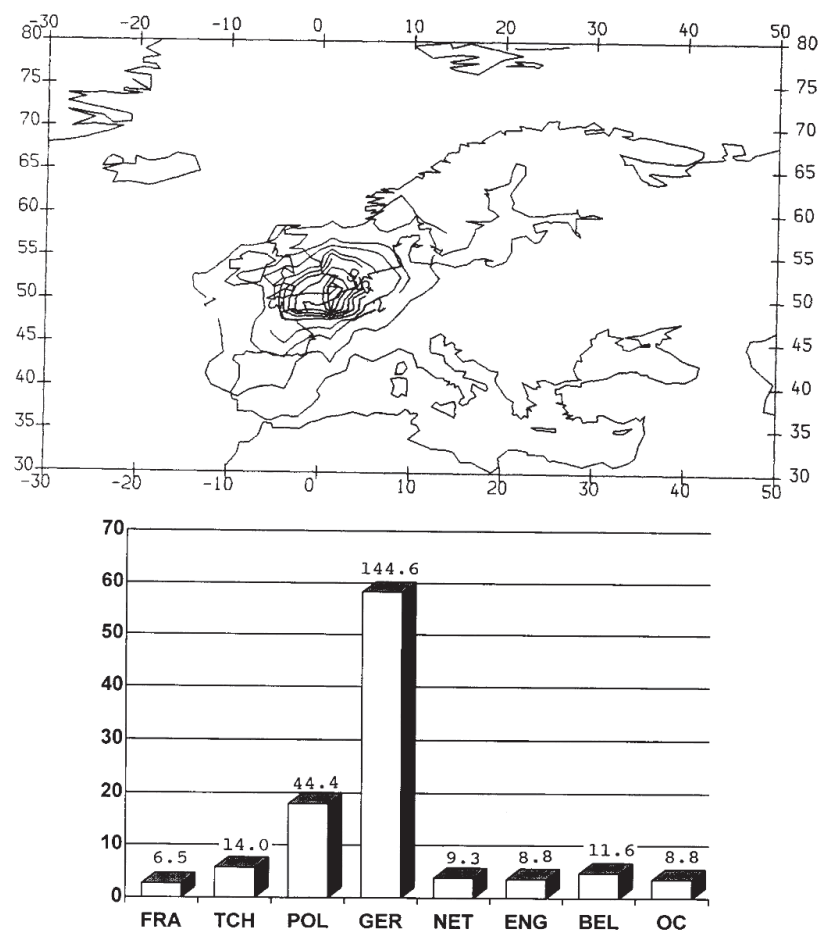


Рис. 2. Функция чувствительности и соответствующий интеграл, описывающий общее количество SO_2 в области, охватывающей территорию Германии

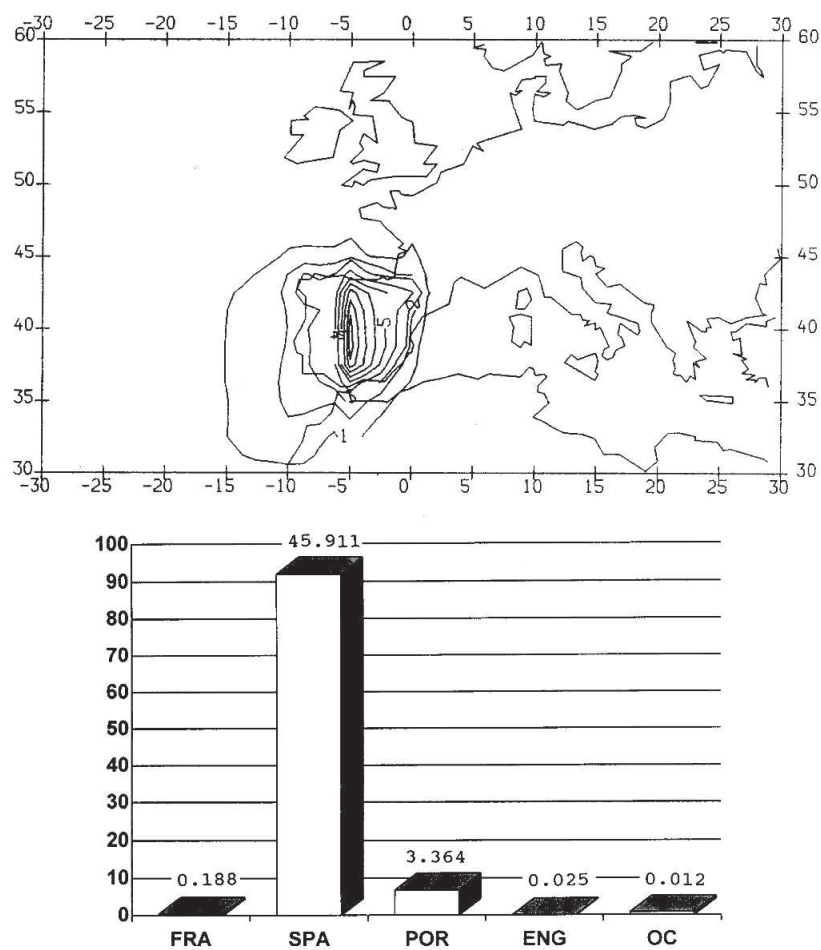


Рис. 3. Функция чувствительности и соответствующий интеграл, описывающий общее количество SO_2 в области, охватывающей территорию Испании

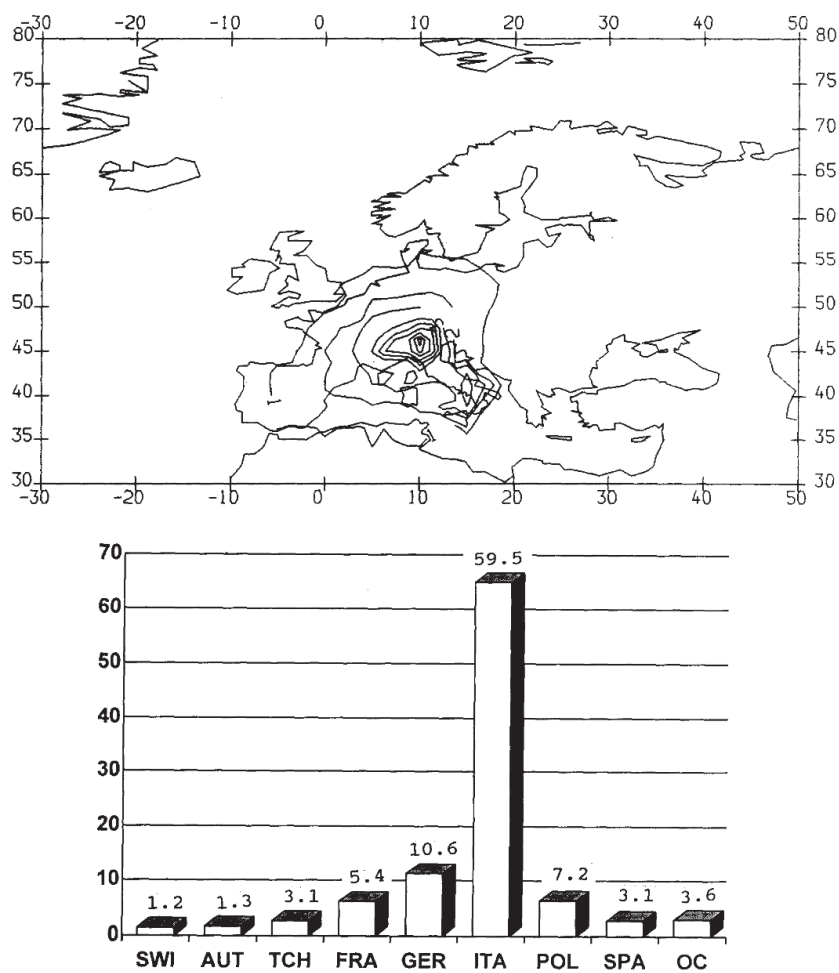


Рис. 4. Функция чувствительности и соответствующий интеграл, описывающий общее количество SO_2 в области, охватывающей территорию Италии

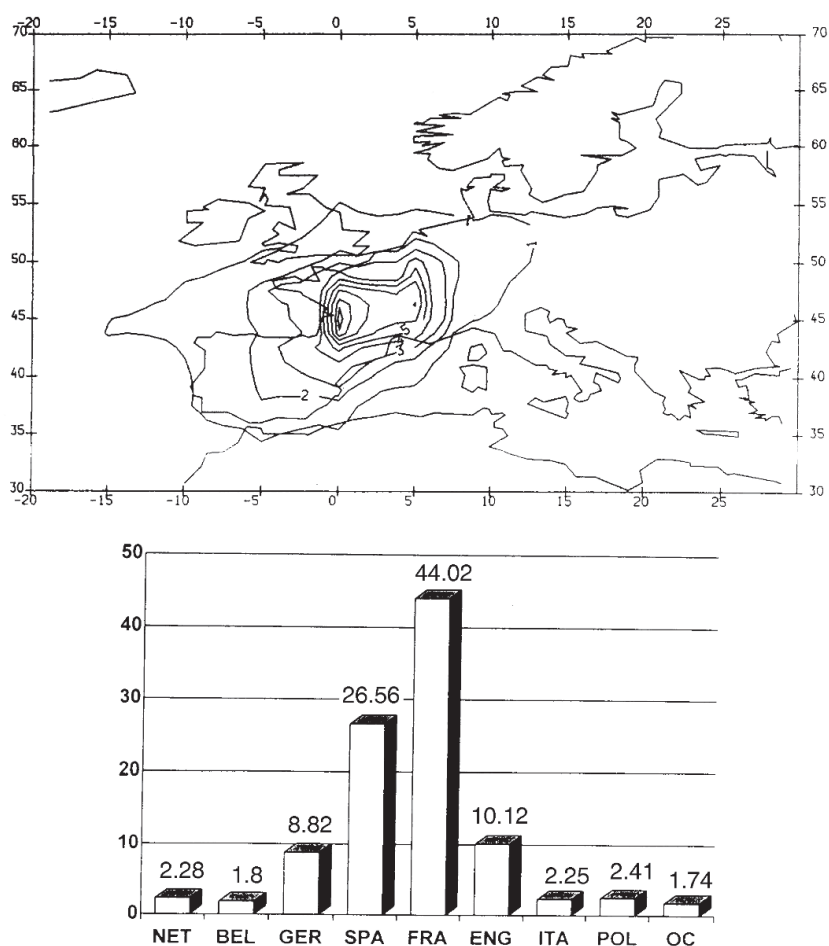


Рис. 5. Функция чувствительности и соответствующий интеграл, описывающий общее количество SO_2 в области, охватывающей территорию Франции

На рис. 1–5 показаны функции чувствительности φ_i^* и соответствующие интегралы, описывающие общее количество SO_2 в области ω_i для акватория Черного моря (рис. 1), а также следующих Европейских стран: Германия (рис. 2), Испания (рис. 3), Италия (рис. 4), Франция (рис. 5). Полученные функции характеризуют относительный вклад каждого источника загрязнения F и начального состояния φ_o в суммарную величину загрязнения атмосферы в выделенной подобласти ω . Таким образом, с их помощью можно оценить степень опасности загрязнения атмосферы в отдельной области от источников, находящихся в любой точке общего региона. При этом учитыва-

ются как загрязнение от собственных источников, так и приходящих с других областей из-за трансграничного переноса. На основе анализа функции φ^* можно сделать заключение, что максимальные значения φ^* , как правило, достигаются в выделенном регионе, размеры которого огромны. Это естественно, поскольку вклад ближних источников всегда больше, а степень опасности загрязнения уменьшается по мере удаления их от рассматриваемых регионов. Поскольку в расчетах функционалов участвует произведение функции чувствительности на мощность источника, то может случиться, что источники с низкой степенью опасности дадут больший вклад в суммарный функционал загрязнения региона. Это связано с тем, что может иметь место большой выброс от предприятия. Размеры и конфигурация областей зависят от текущего состояния атмосферы.

Итак, пространственно-временная структура решений сопряженной задачи дает информацию о том, какие зоны могут оказать то или иное влияние в загрязнение конкретного выбранного региона. Если в качестве исследуемых выбрать регионы отдельных государств, то на основе расчета сопряженных функций и функционалов можно оценить трансграничный перенос загрязнения данной области всеми другими регионами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eliassen A., Sabones J. Modelling of long range transport of sulphur over Europe: A two year model run and some model experiments // *Atm. Env.* V. 22. Pp. 1457–1473.
2. Hov O., Eliassen A., Simpson D. Calculation of the distribution of NOx compounds in Europe // In: *Tropospheric Ozone* / ed. by I. S. A. Isaksen. Reidel, Dordrecht, 1988. Pp. 29–261.
3. Iversen T. Modelled and measured transboundary acidifying pollution in Europe – verification and trends // *Atm. Env.* 1993. V. 27A, No. 6. Pp. 889–920.
4. Simpson D. Photochemical model calculations over Europe for two extended summer periods: 1985 and 1989. Model results and comparisons with observations // *Atm. Env.* V. 27A, No. 6. Pp. 921–943.
5. Марчук Г. И., Алоян А. Е. Математическое моделирование в задачах экологии. М.: Препринт № 234, ОВМ АН СССР. 1989. 36 с.
6. Марчук Г. И., Алоян А. Е. Глобальный перенос примеси в атмосфере // *Известия АН. Серия: Физика атмосферы и океана.* 1995. Т. 31, № 5. С. 597–606.

7. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
8. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
9. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965.
10. Алоян А. Е., Йорданов Д. Л., Пененко В. В. Численная модель переноса примесей в пограничном слое атмосферы // Метеорология и гидрология. 1981. № 8. С. 32–43.
11. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations: The basic experiment // Mon. Wea. Rev. 1963. V. 91, No. 2. Pp. 99–164.
12. Алоян А. Е. Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. ИВМ РАН, 2002. 200 с.
13. Budget matrices and maps of SO_2 , NO_x , NH_x depositions and O_3 concentrations for 1992 // App. Ann. Rep. MSC-E (Sept. 1992 – Aug. 1993).

ФОРМИРОВАНИЕ СУЛЬФАТНЫХ АЭРОЗОЛЕЙ В ТРОПОСФЕРЕ И НИЖНЕЙ СТРАТОСФЕРЕ¹¹

Разработана математическая модель глобального переноса многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей в тропосфере и нижней стратосфере. В модели учитываются основные физические и химические механизмы (фотохимическая трансформация, гомогенная бинарная нуклеация, конденсация/испарение и коагуляция), ответственные за формирования и эволюции газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. В качестве источников эмиссии на поверхности континентов и океанов в модели учитываются как антропогенные, так и биогенные источники. Особое внимание уделяется механизму образования мельчайших частиц нуклеационной моды из газов-предшественников. По разработанной модели для летнего и зимнего периодов года проводились численные эксперименты для воспроизве-

¹¹Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2011, № 4, с. 55–68. Совместно с А. Е. Алояном, А. Н. Ермаковым, В. О. Арутюняном.

дения пространственно-временной изменчивости газовых примесей и аэрозолей в атмосфере Северного и Южного полушарий.

Введение

Сульфатный аэрозольный слой является высокодисперсной системой, включающей мельчайшие капли водного раствора серной кислоты и располагающиеся обычно между высотами 15 и 30 км. Этот слой впервые был обнаружен Юнге в 1961 г. и с тех пор привлекает внимание климатологов и специалистов в области физики и химии атмосферы. Такой интерес вызван тем, что аэрозоль может оказать заметное влияние на климат Земли [1, 5, 6]. Эти частицы размером от 0,1 до 1 мкм поглощают и рассеивают коротковолновое солнечное излучение, что ведет к отрицательному радиационному воздействию на климатическую систему от $-0,3$ до $-0,9$ Вт/м². Такой разброс указывает на необходимость проведения дополнительных измерений и более точных расчетов общего содержания и распределения в атмосфере сульфатных аэрозолей с учетом антропогенных и биогенных источников.

Помимо этого, антропогенное вмешательство может способствовать катализу гетерогенных химических процессов в стратосфере, протекание которых, в свою очередь, может повлиять на процессы обмена озона на Земле. Поэтому необходимо более тщательно исследовать процессы формирования частиц сульфатных аэрозолей в тропосфере и нижней стратосфере, возникающих в процессе гомогенной бинарной нуклеации, например, паров воды и серной кислоты. Частицы нуклеационной моды, имеющие первоначально нанометровый размер, могут расти затем как за счет конденсации низколетучих паров, так и за счет внутримодовой коагуляции.

Для того чтобы понять природу и кинетические закономерности поведения сульфатных частиц, взвешенных в атмосфере, следует принять во внимание вклады различных первичных источников этих веществ, учесть процессы переноса, диффузии и выведения частиц из атмосферы, а также изменения их микрофизических и химических свойств. Эти свойства частиц аэрозоля обусловлены процессами нуклеации, конденсации/испарения, коагуляции и фотохимической трансформации. Их динамика, по существу, и приводит к изменению дисперсного состава аэрозолей в тропосфере и стратосфере. Химический состав частиц при этом существенно изменяется в зависимости

от размера, что имеет принципиальное значение для физики аэрозолей и химии атмосферы. Поскольку в дисперсной системе равновесие устанавливается довольно медленно по отношению к временному масштабу протекания других процессов, в расчетах динамики формирования аэрозоля в атмосфере необходимо использовать неравновесную функцию распределения частиц по размерам. При этом одним из важных требований к численным моделям является соблюдение законов сохранения массы или количества частиц.

Для решения поставленной задачи нами использована математическая модель, включающая уравнения глобального переноса газовых примесей и аэрозолей в атмосфере, нелинейные дифференциальные уравнения фотохимической трансформации веществ, процессы гомогенной бинарной нуклеации (образования новых частиц из газов-предшественников), квазилинейные кинетические уравнения конденсации/испарения и нелинейные интегро-дифференциальные уравнения коагуляции.

Постановка задачи

Рассмотрим численную модель глобального переноса многокомпонентных малых газовых примесей и аэрозолей и процесса образования сульфатных аэрозолей в атмосфере. Модель рассматривается применительно к Земле, имеющей сферическую форму, в системе координат (λ, ψ, z) , где λ – долгота, ψ – дополнение до широты, z – высота.

Основные уравнения для скорости изменения концентраций газовых примесей и аэрозолей запишем в следующем виде [7, 8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \psi} \frac{\partial C_i}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial C_i}{\partial \psi} + w \frac{\partial C_i}{\partial z} = \\ = F_{\text{gas}} - P_{\text{nucl}} - P_{\text{cond}} + P_{\text{phot}} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial C_i}{\partial z} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu \frac{\partial C_i}{\partial \lambda} + \frac{1}{a^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \sin \psi \frac{\partial C_i}{\partial \psi}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \psi} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \psi} + (w - w_g) \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = \\ = F_{\text{aer}} + P_{\text{nucl}} + P_{\text{cond}} + P_{\text{coag}} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} - \frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} - \frac{1}{a^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \sin \psi \frac{\partial \varphi_k}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь C_i ($i = 1, \dots, N_g$), φ_k ($k = 1, \dots, N_a$) – концентрации газовых примесей и аэрозолей; N_g и N_a – число газовых компонент и аэрозольных фракций соответственно; u, v, w – компоненты скорости ветра в направлении λ, ψ, z соответственно; w_g – скорость гравитационного оседания; a – средний радиус Земли; μ, ν коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальном и вертикальном направлениях; F_{gas} и F_{aer} – источники газовых примесей и аэрозолей; P_{nucl} , P_{cond} , P_{coag} и P_{phot} – операторы нуклеации, конденсации, коагуляции и фотохимической трансформации соответственно.

Уравнения (1) и (2) рассматриваются в области $D_t = G \times [0, T]$, $G = S \times [0, H]$, $S = \{(\lambda, \psi) : 0 \leq \lambda \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \pi\}$, где H – верхняя граница расчетной области. На боковых границах задаются условия периодичности всех функций по долготе:

$$\phi(0, \psi, z, t) = \phi(2\pi, \psi, z, t). \quad (3)$$

На полюсах предполагается ограниченность функций по ψ :

$$C(i, \lambda, \psi, 0) = C^0(i, \lambda, \psi, 0), \quad \varphi(i, \lambda, \psi, 0) = \varphi^0(i, \lambda, \psi, 0). \quad (4)$$

Краевые условия на первом расчетном уровне (на верхней границе приземного слоя атмосферы) $z = h$ рассматриваются ниже.

Потоки газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. Для задания краевого условия на высоте $z = h$, используется уравнение сопротивления вхождению примеси поверхностью Земли в виде совокупности следующих трех членов: аэродинамического сопротивления r_a , квазиламинарного сопротивления пограничного слоя r_b , обусловленного процессами молекулярной диффузии вблизи поверхности Земли, и поверхностного сопротивления r_c , связанного с процессами на поверхности осаждения.

Потоки примесей в приземном слое атмосферы представим в виде:

$$\nu \frac{\partial C_i}{\partial z} = \frac{1}{r_a + r_b + r_c} (C_i - C_{i,\text{surf}}) \quad \text{для газа}, \quad (5)$$

$$\nu \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = \frac{\varphi_k - \varphi_{k,\text{surf}}}{r_a + r_b + r_c} + w_g \varphi_k \quad \text{для аэрозоля}, \quad (6)$$

где $r_b = \frac{2}{\kappa u_*} \left(\frac{S_c}{Pr} \right)$, $S_c = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$, Pr – число Прандтля.

Для задания граничных условий при $z = h$ используется теория Мони́на – Обухова [16]. Предполагается, что примесь (как и потоки

тепла и количества движения) можно принять постоянной по высоте. Тогда для $z \leq h$ имеет место

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\varphi_*}{z} \eta_\varphi(\zeta), \quad \varphi = \{C_i, \varphi_k\}, \quad (7)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi_* \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\eta_\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \varphi f_\varphi(\zeta, \zeta_0), \quad (8)$$

$$\nu_\varphi(\zeta) = \frac{u_* \kappa z}{\eta_\varphi(\zeta)}, \quad u_* = \frac{\kappa |u|}{f_h(\zeta_h, \zeta_0)} = c_u |u|_h, \quad c_h = \frac{\kappa}{f_h(\zeta_h, \zeta_0)}, \quad (9)$$

где φ_* – масштаб для изменения концентрации примеси; η_φ и f_φ – универсальные функции; $\zeta = z/L$ – безразмерная длина, характеризующая устойчивость атмосферы; индексы $_0$ и $_h$ относятся к уровням $z = z_0$ и $z = h$ соответственно; L – масштаб длины; z_0 – параметр шероховатости; κ – постоянная Кармана; ν_θ – коэффициент вертикального турбулентного обмена; u_* – динамическая скорость. Здесь η_θ и a_θ – соответствующие универсальные функции. При $z = h$ уравнения (7)–(9) дают

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\eta_\varphi(\zeta, \zeta_0)}{f_\varphi(\zeta_h, \zeta_0)}, \quad (10)$$

$$h \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\eta(\zeta_h)}{f_\varphi(\zeta_h, \zeta_0)}. \quad (11)$$

Умножая (11) на $(\nu_\varphi)_h$, получим

$$\nu_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = c_u c_\vartheta (\varphi_h - \varphi_0) |u| \quad \text{при } z = h, \quad (12)$$

что вместе с (11) можно рассматривать как граничное условие для $z \geq h$. Аэродинамическое сопротивление вычисляется по формуле

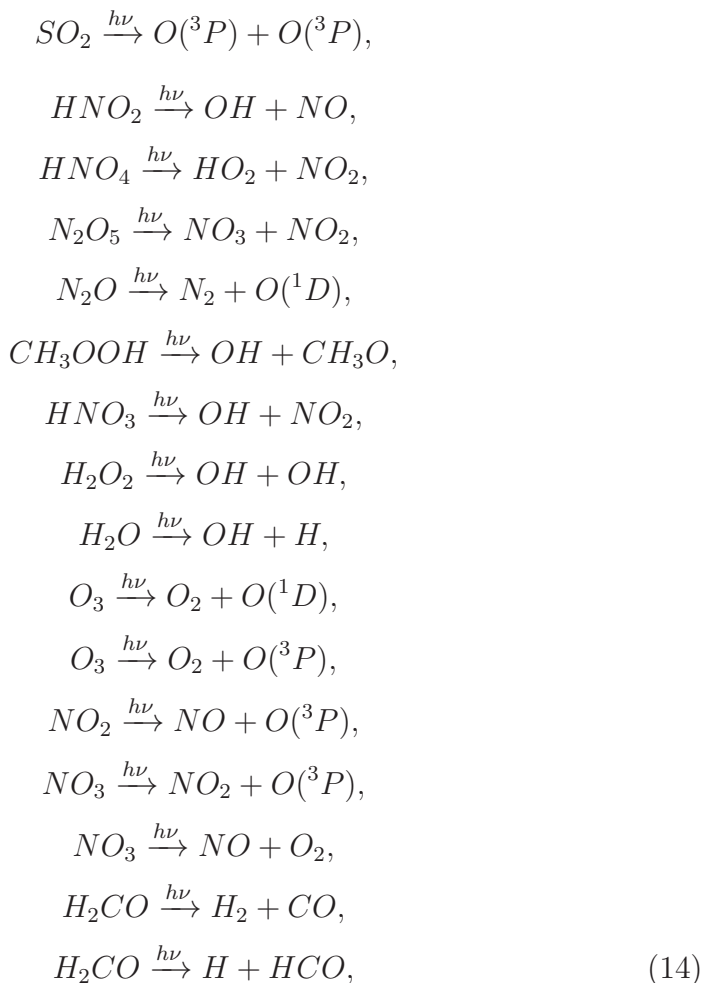
$$r_a = \frac{1}{c_u c_\vartheta |u|}. \quad (13)$$

Коэффициент поверхностного сопротивления r_c над сушей определяется из модели, описывающей перенос примесей в почве и деятельном слое океана с одновременным использованием потоков на разделе атмосфера – почва и атмосфера – океан. Для определения коэффициентов горизонтального турбулентного обмена используется метод, предложенный в [8].

Модель фотохимической трансформации

В фотохимическую модель преобразования компонент газовой фазы включено 51 вещество: $O(^1D)$, $O(^3P)$, O_3 , OH , HO_2 , H_2O_2 , NO , NO_2 , NO_3 , N_2O , N_2O_5 , HNO_3 , HNO_4 , CO , CH_2O , CH_4 , CH_3O_2 , CH_3OOH , CH_3 , HCO , H , HNO_2 , CH_3O , H_2O , COS , H_2S , CS , CH_3SO , $CH_3SCH_2O_2$, CH_3SCH_2 , CH_3SOCH_3 , $CH_3S(OH)$, CH_3O_2H , CH_3SO_2 , SH , $CH_3S(OH)CH_3$, $CH_3SO(OH)CH_3$, $CH_3SOO(OH)CH_3$, CH_3SO_3 , CH_3SO_2H , CH_3S , S , SO , SO_2 , SO_3 , HSO , HSO_2 , HSO_3 , $(CH_3)_2S$, CH_3SO_3H , CS_2 , H_2SO_4 .

Учтены также 16 реакций фотолиза в газовой фазе:



Для определения констант фотодиссоциации этих реакций используется двухпоточный метод дельта-Эддингтона [17].

Гомогенная нуклеация в системе $H_2O - H_2SO_4$

Пусть в атмосфере в пересыщенном паре при температуре T и давлении P_v имеется бинарный кластер, состоящий из n_w молекул вещества w и n_a молекул вещества a с мольными фракциями x_{iv} ($i = w, a$). Будем считать, что частицы имеют сферическую форму и находятся в жидкой фазе. Тогда свободную энергию для образования жидкого зародыша в бинарной смеси можно представить в следующем виде [9, 10]:

$$W = \Delta G = n_w \Delta \mu_w + n_a \Delta \mu_a + A \sigma, \quad (15)$$

где ΔG – изменения свободной энергии Гиббса, A – площадь поверхности, σ – поверхностное натяжение, $\Delta \mu_i = \mu_{il}(T, P_v, x_{il}) - \mu_{iv}(T, P_v, x_{iv})$, где μ_{il} и μ_{iv} – химические потенциалы в жидкой и паровой фазах соответственно. При этом важно, что для пересыщенного пара функция ΔG имеет максимум в точке с критическим радиусом r^* . Пар пересыщен по отношению ко всем каплям, у которых $r > r^*$. В настоящей работе использована параметризация бинарной нуклеации, приведенная в работах [10, 11].

Радиус критического кластера (r^*) и свободная энергия образования критического кластера (w^*) определяется таким образом:

$$r^* = \frac{2\sigma(x^*)\nu_i(x^*)}{kT \ln \left(\frac{\rho_i^{free}}{\rho_{s,i}^{free}(x^*)} \right)}, \quad (16)$$

$$w^* = \frac{4}{3}\pi r^{*2} \sigma(x^*). \quad (17)$$

И, наконец, общее выражение для скорости нуклеации имеет следующий вид:

$$J = Z\rho(1,2)\exp \left[-\frac{w^* - w(1,2)}{kT} \right], \quad (18)$$

где $\rho(1,2)$ и $w(1,2)$ – численная концентрация и изменение энергии Гиббса при образовании частиц дигидрата серной кислоты ($H_2SO_4 \cdot (H_2O)_2$) соответственно, Z – кинетический коэффициент. Здесь дигидрат (кластер) рассматривается в качестве первичной частицы в газовой фазе (т. е. точки отсчета для расчета распределений частиц сульфатного аэрозоля по размерам).

Модель конденсации и коагуляции

Рассмотрим процессы формирования частиц аэрозоля, состоящих из смеси различных веществ (композитные частицы). При моделировании кинетики коагуляции композитных частиц приходится решать более сложную систему, чем уравнение Смолуховского. Композитные частицы формируются в атмосфере, например, в процессах образования кислотных осадков, а также при осаждении различных газовых примесей на аэрозольных частицах. В этом случае приходится рассматривать кинетические уравнения для двухкомпонентных систем. Для пространственно-однородного случая кинетическое уравнение коагуляции можно представить в следующем виде [3, 4, 12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(g, \alpha, t)}{\partial t} = & \frac{1}{2} \int_0^g \int_0^\alpha K(g-s, \alpha-\beta, s, \beta) C(g-s, \alpha-\beta) C(s, \beta) ds d\beta - \\ & - C(g, \alpha, t) \int_0^\infty \int_0^\infty K(g, \alpha, s, \beta) C(s, \beta) ds d\beta, \end{aligned} \quad (19)$$

где g – суммарная масса частицы, α – масса выделенной примеси, K – коэффициент коагуляции, $C(g, \alpha, t)$ – суммарная концентрация частиц.

Наличие переменной α в уравнении (19) значительно затрудняет решение задачи. Если полагать, что ядра коагуляции не зависят от наличия примеси в отдельных частицах, т. е. $K = K(g, s)$, то в этом случае решение задачи существенно упрощается [12]. Следует отметить, что ядра коагуляции кроме геометрических размеров частиц зависят также от плотностей сталкивающихся частиц, особенно в начальной стадии процесса, когда идет интенсивное взаимодействие между частицами примеси и пассивной фракцией. Для учета этого эффекта можно рассматривать средний вклад примеси в плотности, задаваемый величиной $\overline{\alpha(g, t)}$ [12]:

$$K(g, \alpha, s, \beta) \cong K \left[g, \overline{\alpha(g, t)}; s; \overline{\beta(s, t)} \right] \equiv k(g, s, t). \quad (20)$$

Для решения задачи (15) в качестве основных характеристик спектра частиц используются следующие интегральные величины:

$$n(g, t) = \int_0^g C(g, \alpha, t) d\alpha; \quad m(g, t) = \int_0^g \alpha C(g, \alpha, t) d\alpha. \quad (21)$$

Выделим в явном виде вклады примесей и композитных частиц в суммарную концентрацию:

$$C(g, \alpha, t) = c(g, t)\delta(g - \alpha) + c_c(g, \alpha, t), \quad (22)$$

где $c(g, \alpha, t)$ – концентрация частиц примеси, содержащих суммарную массу g и массу примеси α ; $c_c(g, \alpha, t)$ – концентрация композитных частиц; α – масса вещества (примеси) в частице. Подставляя (22) в (19) и используя интегральные величины (20), получим следующую систему связанных уравнений [12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(g, t)}{\partial t} = & \frac{1}{2} \int_0^g K(g-s, s)n(g-s)n(s) ds - \\ & - n(g) \int_0^\infty K(g, s)n(s) ds, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m(g, t)}{\partial t} = & \frac{1}{2} \int_0^g K(g-s, s)n(g-s)n(s)m(s) ds - \\ & - m(g) \int_0^\infty K(g, s)n(s) ds, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c(g, t)}{\partial t} = & \frac{1}{2} \int_0^g K(g-s, s)n(g-s)n(s)m(s) ds - \\ & - c(g) \int_0^\infty K(g, s)n(s) ds. \end{aligned} \quad (25)$$

Численный алгоритм решения уравнения коагуляции

Счетную $n(g)$ и массовую $m(g)$ концентрации частиц представим в следующем виде:

$$n(g) = n_c(g) + c(g); \quad m(g) = m_c(g) + gc(g). \quad (26)$$

Для численного решения уравнений (19)–(21) зададим сетку

$$\omega_c = \{\tilde{g}_1 = 0, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_L\}, \quad \omega = \{g_1 = 0, g_2, \dots, g_J\} \quad (27)$$

для композитной фракции и примеси соответственно.

Обозначим через ν_j число частиц примеси в интервале (g_j, g_{j+1}) , через N_{ci} – число композитных частиц в интервале $(\tilde{g}_i, \tilde{g}_{i+1})$, через I_{ci} – массу частиц примеси, содержащуюся в композитных частицах с массой в интервале $(\tilde{g}_i, \tilde{g}_{i+1})$:

$$\nu_j = \int_{g_j}^{g_{j+1}} cdg; \quad N_{ci} = \int_{\tilde{g}_i}^{\tilde{g}_{i+1}} n_c dg; \quad I_{ci} = \int_{\tilde{g}_i}^{\tilde{g}_{i+1}} m_c dg. \quad (28)$$

Эти величины являются основными сеточными функциями. При выводе уравнений для них предположим, что функции $c(g)$, $n_c(g)$, $m_c(g)$ кусочно-постоянны в интервалах сеток ω , ω_c :

$$c(g) = \frac{\nu_j}{g_{j+1} - g_j}, \quad n_c(g) = \frac{N_{ci}}{g_{i+1} - g_i},$$

$$m_c(g) = \frac{I_{ci}}{g_{i+1} - g_i}, \quad g_j < g < g_{j+1}. \quad (29)$$

Ядра коагуляции также предполагаются кусочно-постоянными функциями от двух переменных. При принятых предположениях о виде функций $c(g)$, $n_c(g)$ массовые концентрации частиц для интегральных сеток ω , ω_c будут иметь следующий вид:

$$\mu_{j+1} = \int_{g_j}^{g_{j+1}} gcdg = \nu \frac{g_j + g_{j+1}}{2}, \quad (30)$$

$$N_{c,j+1} = \int_{\tilde{g}_j}^{\tilde{g}_{j+1}} gn_c dg = N_{ci} \frac{\tilde{g}_j + \tilde{g}_{j+1}}{2}. \quad (31)$$

Теперь умножим уравнения (23)–(25) на g и проинтегрируем по интервалу (g_{i-1}, g_{i+1}) . Систему уравнений для величин ν_j , N_{ci} , I_{ci} можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\nu_j}{dt} = \frac{1}{2}F(\nu_1, \dots, \nu_j) - \nu_j \sum_{p=1}^{J-1} k_{jp}\nu_p - \nu_j \sum_{p=1}^{L-1} k_{jp}N_{cp},$$

$$1 \leq j \leq J-1, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_{ci}}{dt} = & \frac{1}{2}F(N_{c1}, \dots, N_{ci}) - N_{ci} \sum_{p=1}^{J-1} k_{ip}\nu_p - \\ & - N_{ci} \sum_{p=1}^{L-1} k_{ip}N_{cp} + \tilde{F}(N_{c1}, \dots, N_{ci}, \nu_1, \dots, \nu_{pi}), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_{ci}}{dt} = & \bar{F}(N_{c1}, \dots, N_{ci}, I_{c1}, \dots, I_{ci}, \nu_1, \dots, \nu_{pi}) - \\ & - I_{ci} \sum_{p=1}^{J-1} k_{ip}\nu_{ip} - I_{ci} \sum_{p=1}^{L-1} k_{ip}N_{cp}, \quad 1 \leq j \leq J-1. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь F , \bar{F} , \tilde{F} – некоторые квадратичные функции, коэффициенты которых зависят от ядер коагуляции. После дискретизации система уравнений (32)–(34) решается итерационным методом. После окончания автономного расчета процесса коагуляции величины s и n могут быть использованы в качестве стартовых значений для процесса конденсации. Исходя из среднего содержания примеси в каждой частице, можно определить значение масс остова (остовом мы считаем основное вещество, масса которого в композитной частице равна $g - \alpha$):

$$g_{p0} = g - \bar{\alpha}; \quad \overline{\alpha(g, t)} = \frac{m_c(g, t)}{n_c(g, t)}. \quad (35)$$

При описании кинетики конденсации можно считать, что масса остова в частицах не меняется. Поэтому будем считать, что в процессе конденсации между величинами c_c , n_c , m_c выполняется следующая связь (здесь g_{p0} – масса остова в частице на момент начала шага по конденсации):

$$c_c(g, \alpha, t) = n_c(g, t)\delta(g - g_{p0} - \alpha); \quad m_c(g, t) = (g - g_{p0})n_c(g, t). \quad (36)$$

Кинетические уравнения конденсации для функций распределения c , n_c следующие:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial g}(v_g c) = J(g, t)\delta[g - g_*(t)]; \quad \frac{\partial n_c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial g}(v_g n_c) = 0, \quad (37)$$

где v_g – скорость роста частиц с суммарной массой g ; J – скорость нуклеации; g_* – масса капли критического размера. Численный алгоритм решения задачи (37) приведен в [3, 13, 15]. В уравнении (33) скорость бинарной нуклеации задается по алгоритму, изложенному выше, а его практическое применение приведено в [2]. Частично эти результаты изложены в [14].

Результаты численных экспериментов

С использованием описанной выше модели были проведены численные эксперименты по воспроизведению процесса формирования сульфатных частиц в тропосфере и нижней стратосфере, обусловленного заданными значениями антропогенных (SO_2 , NO_x , CH_4) и биогенных (H_2S (сероводород), COS (карбонил сульфид), CS_2 (дисульфид водорода), DMS (диметилсульфид)) эмиссий с поверхности Земного шара. При этом значения эмиссий диметилсульфида задавались на поверхности Тихого, Атлантического и Индийского океанов для зимнего и летнего периодов. Для этих же периодов времени задавались наземные источники эмиссии сероводорода, карбонил сульфида и дисульфида водорода.

Расчеты проводились при следующих значениях входных параметров: число узлов сеточной области по долготе – $144 \times 73^\circ$ с шагом $2,5^\circ \times 2,5^\circ$; число уровней по вертикали – 20; координатные поверхности в метрах: 100, 750, 1500, 2200, 3000, 4200, 5600, 7200, 9200, 10 400, 11 800, 14 000, 18 000, 22 000, 26 000, 30 000, 34 000, 38 000, 42 000, 46 000. Шаг по времени – 30 мин, а в моделях конденсации и коагуляции – 5 мин. Метеорологическая информация заимствовалась из базы данных Европейского центра по среднесрочным прогнозам (ECMWF) для расчетов в продолжении января и июля 2002 г.

В цепочках химических реакций участвуют 52 газовых вещества, включающих азотно-сернистый и углеродный циклы, а также вещества биогенного происхождения. Общее количество реакций – 146, число реакций фотодиссоциации – 16. Использованы 25 дискретных интервалов по размерам аэрозольных частиц от 3 нм до 1,2 мкм.

На рис. 1 представлена счетная концентрация сформировавшихся через 30 дней (для июля) сульфатных частиц в плоскости (λ , ψ) на высоте $z = 7200$ м для частиц с радиусами 3 нм (10^5 м^{-3}) (а) и 105 нм (10^4 м^{-3}) (б), а на рис. 2 представлены аналогичные данные для высоты $z = 18\,000$ м; единицы измерений 10^5 м^{-3} (а) и 10^3 м^{-3} (б) соответственно.

На рис. 3 представлена счетная концентрация сульфатных частиц, сформировавшихся через 30 дней (для января) в плоскости (λ , ψ) на высоте $z = 7200$ м для частиц с радиусами 3 нм (10^5 м^{-3}) (а) и 105 нм (10^4 м^{-3}) (б), а на рис. 4 представлены аналогичные данные для высоты $z = 18\,000$ м; единицы измерений 10^5 м^{-3} (а) и 10^3 м^{-3} (б) соответственно. Нетрудно видеть, что поля пространственного распределения концентраций сульфатных частиц для зимнего и летнего

периодов заметно отличаются. Это обусловлено характером атмосферной циркуляции в зимний и летний периоды, а также различием в полях температуры, относительной влажности и концентрации серной кислоты. Вынос газовых примесей из нижней тропосферы в стратосферу обусловлен в основном конвективными движениями и процессами турбулентной диффузии.

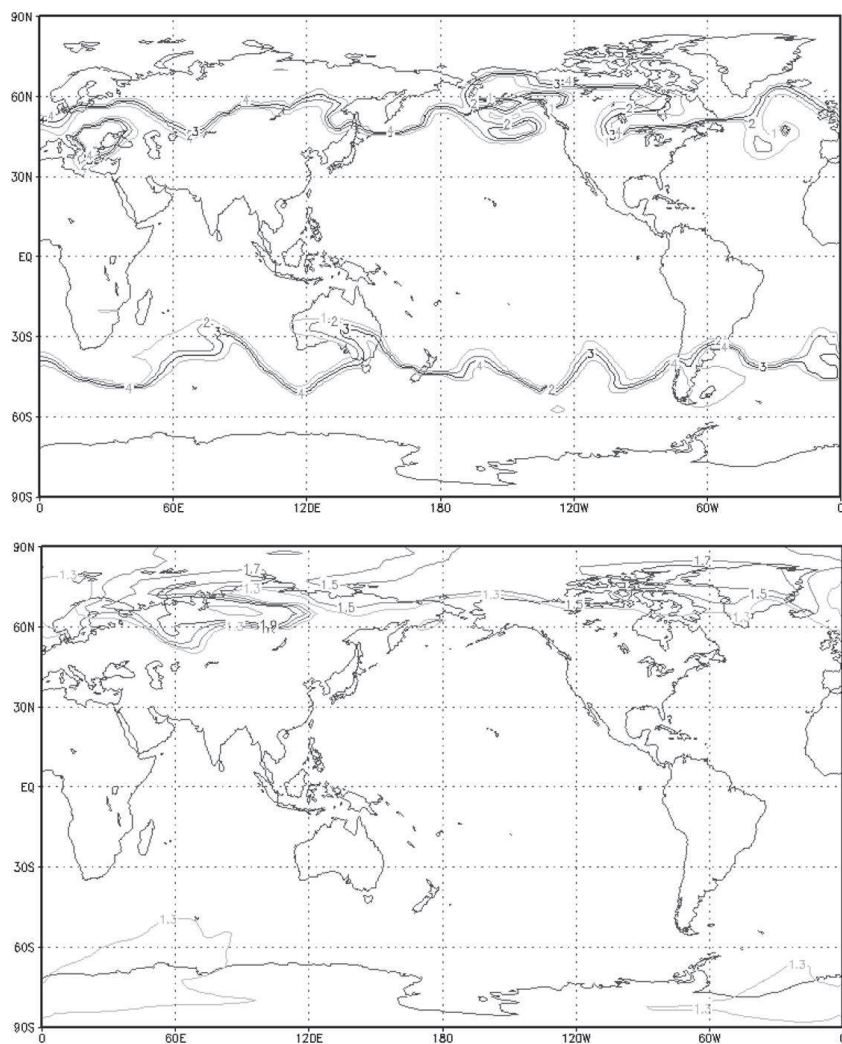


Рис. 1

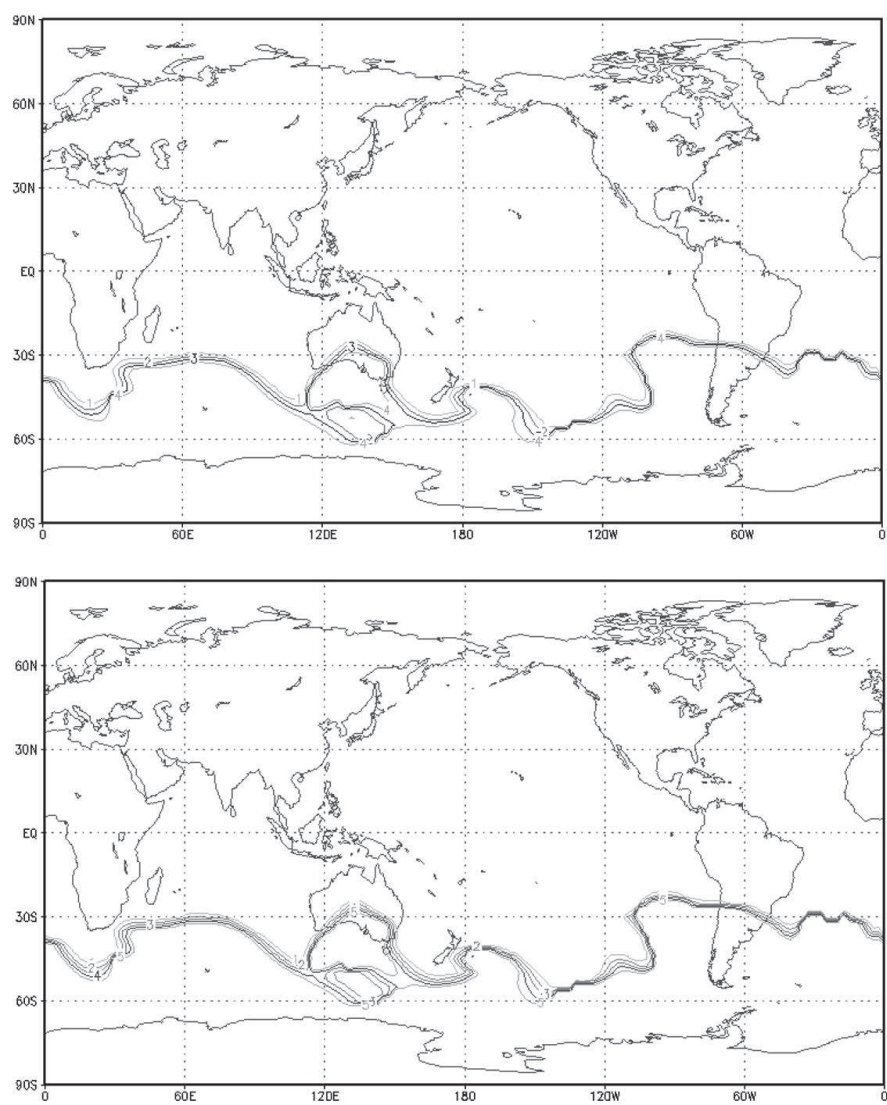


Рис. 2

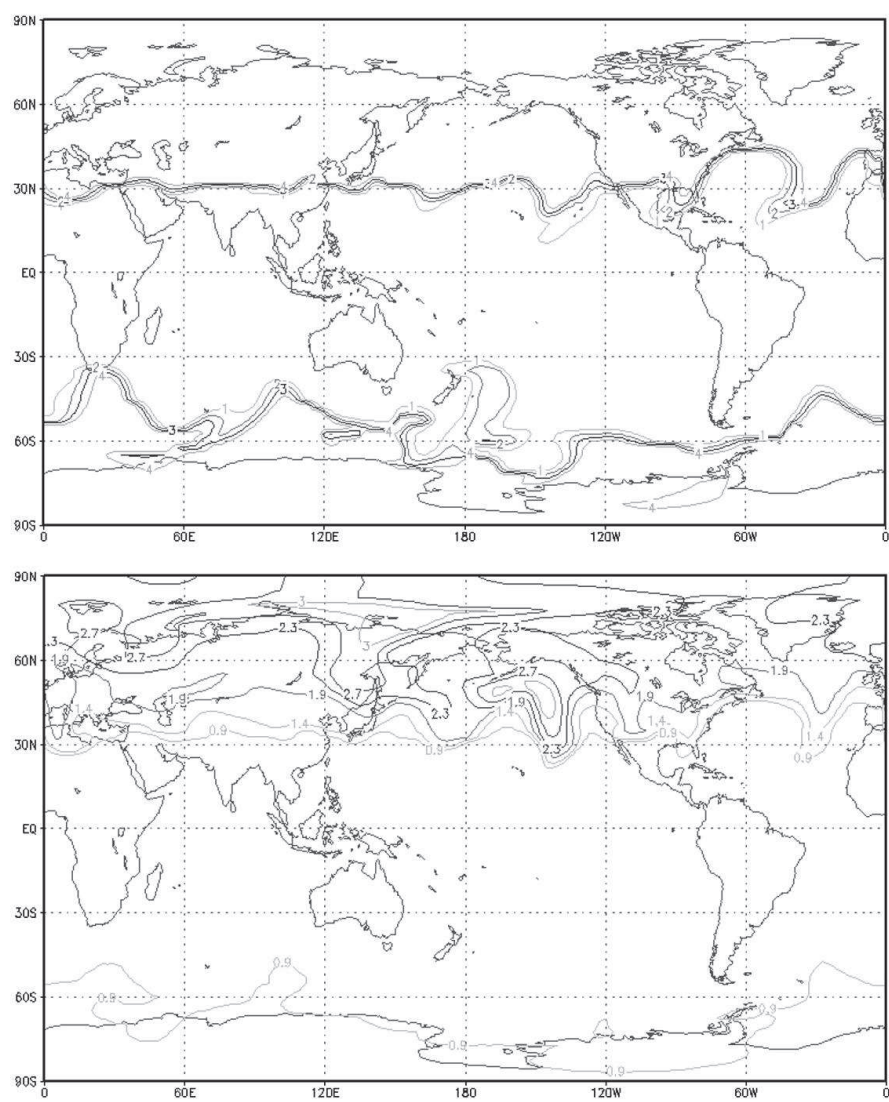


Рис. 3

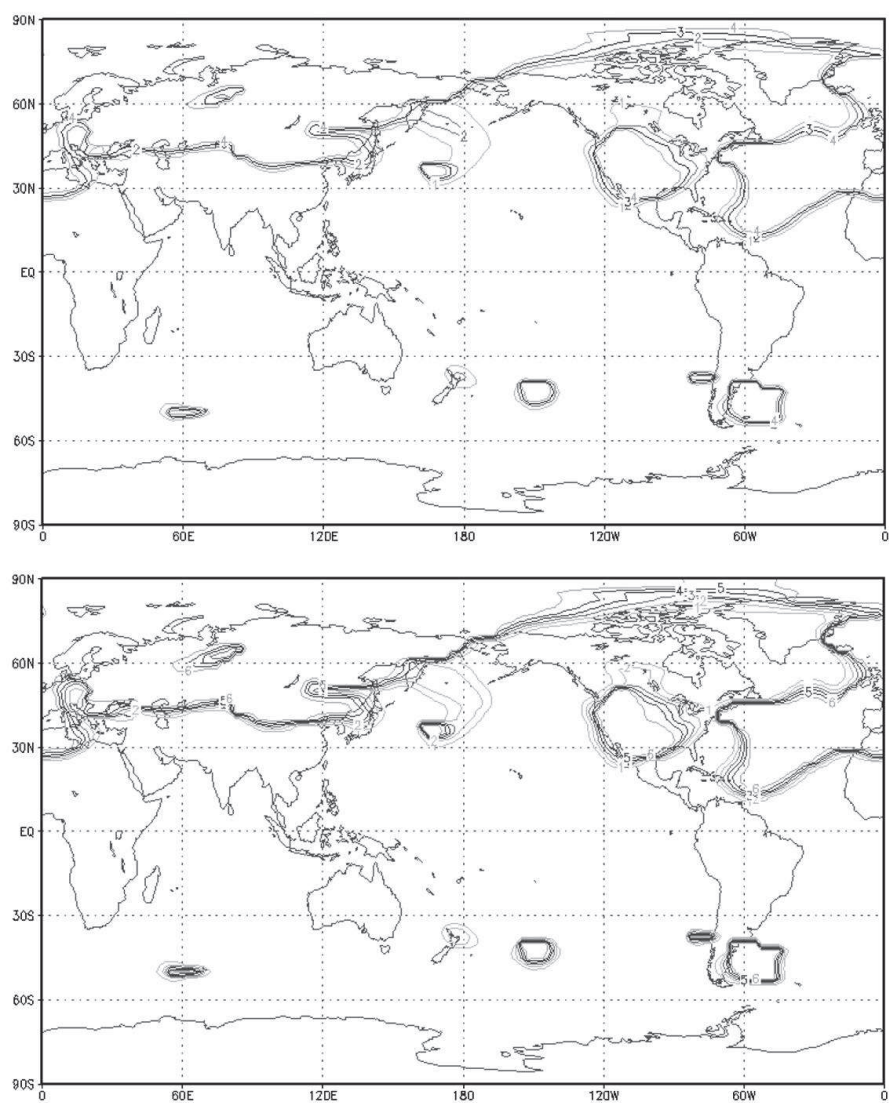


Рис. 4

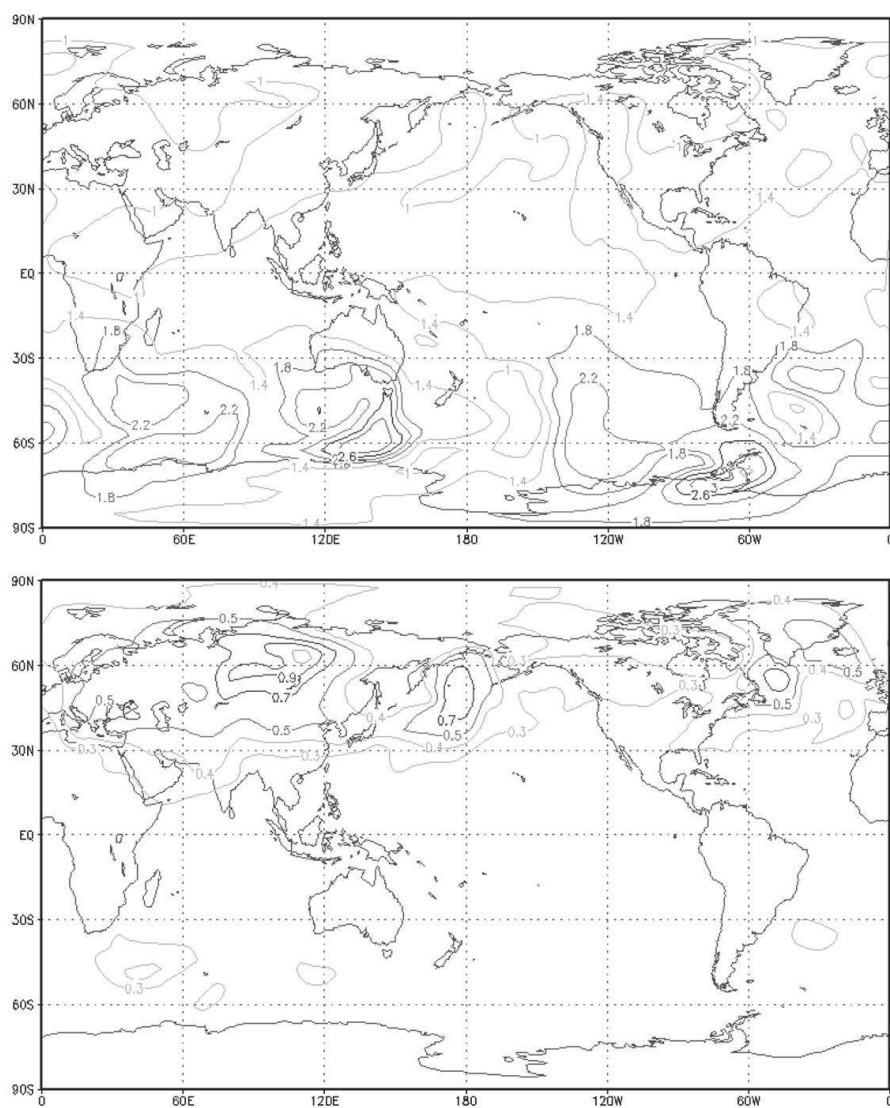


Рис. 5

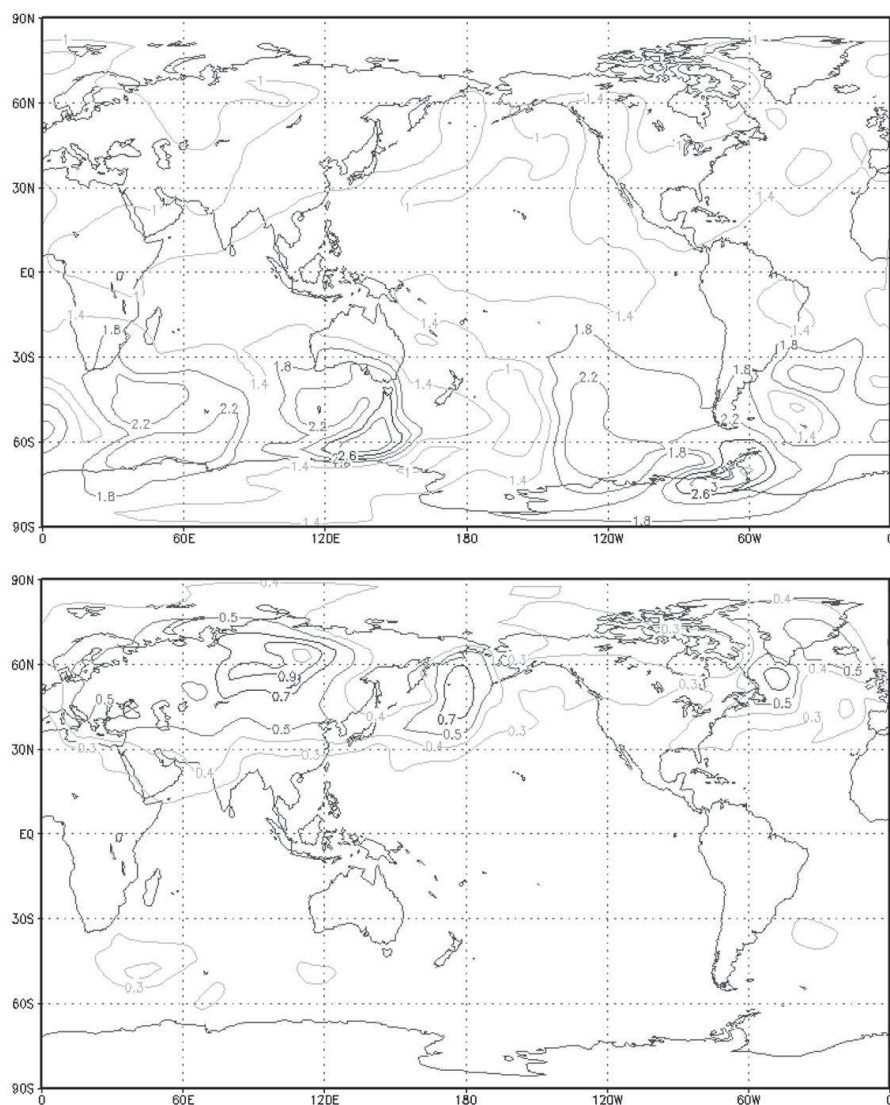


Рис. 6

На рис. 5 представлены поля концентраций диметилсульфида (10^{12} м^{-3}) (а) и паров серной кислоты (10^7 м^{-3}) (б) на высоте 7200 м для июля, а на рис. 6 приведены аналогичные поля для января. Напомним, что мельчайшие сульфатные аэрозольные частицы могут сформироваться из газов-предшественников лишь в том случае, если концентрация H_2SO_4 больше, чем пороговая концентрация. При этом в каждой точке трехмерной области значение пороговой концентрации

зависит от температуры, относительной влажности и концентрации H_2SO_4 . Поэтому пороговые концентрации для зимнего и летнего периодов сильно отличаются, и, следовательно, отличаются и значения скорости нуклеации на указанных высотах.

Заключение

Разработана физико-математическая модель переноса газовых составляющих и аэрозолей в атмосфере с учетом фотохимической трансформации, нуклеации конденсации/испарения и коагуляции. Модель позволяет воспроизвести изменчивость газовых составляющих и аэрозолей в атмосфере в глобальном масштабе, а также формирования частиц новой фазы из газов-предшественников. Результаты расчетов показывают, что после 30 дней модельного времени уже формируются частицы субмикронного размера. Для улучшения качества используемой модели необходимо ее дополнить блоком, описывающим химические процессы, протекающие в жидкой фазе, с учетом массообмена на разделе газ – частица. Это позволит более точно воспроизвести рост аэрозольных частиц в атмосфере. Для получения, с геофизической точки зрения более значимых результатов необходимо проводить численные эксперименты на длительные интервалы времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lamb, Hubert H. Climatic History and the Future. Princeton Univ., 1977.
2. Aloyan A. E. Mathematical modeling of the interaction of gas species and aerosols in atmospheric dispersive systems. Russ // J. Num. Anal. Math. Model. 2000. V. 15(1-4). Pp. 211–224.
3. Алоян А. Е., Пискунов В. Н. Моделирование региональной динамики газовых примесей и аэрозолей // Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. 2005. Т. 41, № 3. С. 328–340.
4. Алоян А. Е. Моделирование динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. М.: Наука, 2008.
5. Pollack, James B. et al. Volcanic Explosions and Climatic Change: A Theoretical Assessment // J. Geophysical Research. 1976. V. 81. Pp. 1071–1083.
6. Pollack, James B. et al. Estimates of the Climatic Impact of Aerosols Produced by Space Shuttles, SST's, and Other High Flying Aircraft // J. Applied Meteorology. 1976. V. 15. Pp. 247–258.

7. Aloyan A. E. Numerical modeling of the interaction of gas species and aerosols in atmospheric dispersive systems // *Russ. J. Num. Anal. Math. Modell.* 2000. V. 15(3-4). Pp. 211–224.

8. Aloyan A.E. Mathematical modeling of convective cloudiness with phase transitions // *Russ. J. Num. Analys. Math. Modelling.* 2010. No. 6. Pp. 1–12.

9. Wilemski G. Composition of the critical nucleus in multicomponent vapor nucleation // *J. Chem. Phys.* 1984. V. 80. Pp. 1370–1372.

10. Vehkamäki H., Kulmala M., Napari I., Lehtinen K. E. J., Timmreck C., Noppel M., Laaksonen A. An improved parameterization for sulfuric acid/water nucleation rates for tropospheric and stratospheric conditions // *J. Geophys. Res.* 2002. V. 107, No. D22. P. 4622.

11. Kulmala M., Laaksonen A., Pirjola L., The potential for atmospheric mixing processes to enhance the binary nucleation rate // *J. Geophys. Res.* 1998. V. 103. Pp. 8301–8307.

12. Piskunov V. N., Golubev A. I., Goncharov E. A., Ismailova N. A. Kinetic modeling of composite particles coagulation // *J. Aerosol Sci.* 1997. V. 28. P. 1215–1231.

13. Aloyan A. E., Egorov V. D., Marchuk G. I., Piskunov V. N. Aerosol formation mathematical modelling with consideration for condensation kinetics // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1993. V. 7, No. 6. Pp. 457–472.

14. Aloyan A. E., Arutyunyan V. O. Mathematical modeling of the regional-scale variability of gaseous species and aerosols in the atmosphere // In: *Advances in Air Pollution Modelling for Environmental Security* / Ed. by I. Farago, K. Georgiev, A. Havasi. Borovetz, 2004.

15. Голубев А. И., Пискунов В. Н., Повышев В. М. Моделирование процессов объемной конденсации // *Вопросы атомной науки и техники. Серия: Теоретическая и практическая физика.* 1991. Вып. 2. С. 3–9.

16. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965.

17. Joseph J. H., Wiskombe W. J. The delta-Eddington approximation for radiative flux transfer // *J. Atm. Sci.* 1976. V. 33, No. 12. Pp. 2452–2459.

ДИНАМИКА И КИНЕТИКА ГАЗОВЫХ ПРИМЕСЕЙ И АЭРОЗОЛЕЙ В АТМОСФЕРЕ И ИХ ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ БИОСФЕРЫ¹²

Эволюция геосферы и биосферы характеризуется усиливающимся воздействием их компонентов, что определяется, прежде всего, возрастающим антропогенным воздействием на окружающую среду. Подобное воздействие проявляется в первую очередь в форме осуществляемого человеком преобразованием природы и усиливающихся антропогенных нагрузок на окружающую среду, которые сказываются практически на всех компонентах геосферы и биосферы в региональном и глобальном масштабах, а потому требуют системного подхода к изучению рассматриваемых процессов. Во многих регионах планеты повышенный уровень загрязнения атмосферы, почв, водоемов и др. привел к большим антропогенным нагрузкам на окружающую среду, с которым иногда биосфера справиться не в состоянии. Это, в свою очередь, влияет на естественные циклы природных процессов и окружающую среду. Прежде всего, это относится к загрязнению биосферы токсичными веществами, находящимися в газовом и аэрозольном состояниях. Выявление законов воздействия компонентов геосферы и биосферы требует междисциплинарных исследований беспрецедентной сложности. За последние двадцатилетия это наиболее ярко проявилось в осуществлении программы Международного геофизического года (МГГ), программы по химии глобальной тропосферы, выполняемой в рамках ЮНЕСКО и др. Среди этих программ особое внимание уделяется обмену малыми газовыми компонентами между биосферой и атмосферой, загрязнению подземных вод и др.

Одной из актуальных проблем является оценка экологической безопасности, связанная с изменением химического состава атмосферы и его последствиями (ростом концентрации парниковых газов, глобальным потеплением, закислением окружающей среды и др.), загрязнением пресных вод, океанов и прибрежных акваторий, сокращением лесных массивов и опустыниванием, опасными выбросами загрязняющих веществ.

Атмосфера представляет собой сложную динамическую систему, в которой протекают различные физико-химические процессы, интенсивность которых зависит от конкретных характеристик рассматри-

¹²Междисциплинарный журнал «Биосфера», 2010, № 1. Совместно с А. Е. Алоян-ном.

ваемого региона. Если реакции в газовой фазе протекают с той или иной интенсивностью во всем объеме атмосферы, то гетерогенные – только на поверхности жидких и твердых частиц, которые содержатся в тропосфере и стратосфере. При промышленных выбросах газовых примесей происходит ряд сложных химических и фотохимических реакций, в результате чего появляются новые токсичные вещества, которых не было в первоначальных выбросах. Среди неорганических веществ антропогенного происхождения особенно вредны выбросы окислов азота и серы, окиси и двуокиси углерода и др. Выбросы окислов серы причиняют значительный ущерб растительности. При высокотемпературном горении происходит соединение атомарного кислорода и азота, которые в солнечном свете становятся очень ядовитыми для флоры и фауны.

В настоящее время хорошо известно, что изменения воздействия концентрации CO_2 в тропосфере и стратосфере оказывают влияние на климат. Выбросы NO_x в стратосфере влияют на концентрацию озона, а в тропосфере приводят к повреждению растительности и увеличению токсичности при высоких концентрациях, фотоокислению углеводородов и пр. Концентрация диоксида серы (SO_2) приводит к образованию частиц аэрозоля в тропосфере и стратосфере. Наличие соединений серы в атмосфере способствует формированию кислотных дождей. Для моделирования цикла серы необходим учет особенностей фазовых состояний серы. Основными формами, в которых сера встречается в атмосфере, служат SO_2 , H_2S и SO_4^{2-} , HSO_4^- и др. Их трансформация связана с комплексом атмосферных реакций с учетом газовых компонентов и воды. На механизм окисления SO_2 существенное воздействие оказывают кислородсодержащие компоненты типа OH , переводящие его сначала в $HOSO^2$, а затем в H_2SO_4 . При этом H_2O_2 и озон являются весьма важными окислителями для SO_2 в облачных каплях. Скорость этих процессов зависит от присутствия сажи и различных ионов металлов (например, железа и марганца). Скорость окисления SO_2 в растворе возрастает с pH , поэтому наличие аммиака и других основных веществ также может изменять эту скорость. Следует отметить, что природные аэрозоли играют значительную роль в гетерогенной химии нижней стратосферы. Они приводят к формированию стратосферных сульфатных аэрозолей (ССА), частиц тройных сверхохлажденных растворов и частиц полярных стратосферных облаков в виде замороженного раствора (ПСО-1) и кристалла (ПСО-2).

На средних широтах при $205 < T < 220$ К ССА существуют в виде бинарных сверхохлажденных растворов H_2SO_4/H_2O .

Несмотря на то, что о существовании аэрозолей – мельчайших взвешенных в воздухе частиц – известно уже более ста лет, широко изучаться они начали лишь в последние двадцатилетие, когда стала очевидна их роль в глобальных атмосферных процессах. Хотя естественные аэрозоли по массе составляют около 90 процентов от их общего количества, все четче выявляется роль антропогенного аэрозольного фактора, так как оставшиеся 10 процентов часто обладают аномальными физико-химическими свойствами и могут служить приемниками и трансформаторами многих химических атмосферных процессов. Антропогенные аэрозоли являются, с одной стороны, поставщиками вредных веществ в атмосферу и, как следствие, причинами формирования смога, глобальных геофизических явлений, кислотных дождей и т. д., а с другой – весьма эффективным механизмом вывода антропогенных загрязнений из атмосферы. К числу антропогенного аэрозоля принадлежат: 1) непосредственные промышленные выбросы частиц (например, частицы сажи, дыма, дорожной пыли, частицы, выбрасываемые при лесных пожарах и др.); 2) продукты газофазных реакций. Большое внимание привлекают газофазные реакции образования аэрозоля за счет следующих процессов: а) гомогенная гомолекулярная нуклеация (образование новых устойчивых жидких или твердых мельчайших частиц из газовой фазы при наличии лишь одного газового компонента); б) гомогенная двойная и тройная нуклеация в системах $[H_2SO_4 - H_2O]$ и $[H_2SO_4 - H_2O - NH_3]$ соответственно.

В атмосферных дисперсных системах особо важное место занимают сульфатные аэрозоли, которые могут оказать косвенное и прямое влияние на климатическую систему. Эти частицы формируются в разных частях атмосферы: в свободной тропосфере, в морском пограничном слое, в арктических областях и т. д. Численные эксперименты показывают, что образование новые сульфатных частиц может происходить как в стратосфере, так и в городском загрязненном воздухе.

Задача изучения воздействия аэрозолей на климат состоит в учете его влияния на перенос коротковолновой и длинноволновой радиации, которые могут порождать региональные и глобальные вариации состава аэрозоля в атмосфере. Помимо прямых радиационных эффектов аэрозоля следует принимать во внимание косвенные эффекты, связанные, например, с трансформацией микрофизических характеристик облаков.

Естественно, что индустриализация будет развиваться и в будущем, поэтому очень важно не допустить возможности возникновения таких ситуаций, которые привели бы к нарушению экологической устойчивости. Для предотвращения этих последствий в первую очередь требуется снизить количество загрязняющих веществ в данном регионе. Решение этой задачи связано с минимизацией антропогенной нагрузки до пределов, безопасных для природной среды, с учетом оптимальных темпов социально-экономического развития конкретного региона. Основные принципы построения таких моделей изложены в книгах (Марчук, 1982; Марчук и соавт., 1992).

Предположение о том, что соблюдение гигиенических нормативов для человека может гарантировать безопасность окружающей природной среды, ее биоценозов и экосистем, являются необоснованными. В действительности чувствительность природных объектов к химическим веществам часто бывает большей, чем чувствительность живых организмов, и в частности человека. Процессы, происходящие в природных условиях, часто незаметны, и перемены, которые происходят в них, хотя в начале не вызывают каких-либо беспокойств, в дальнейшем могут привести к совершенно неожиданным, непредсказуемым последствиям (Кротов, 2002). В работе (Николаевский, 1998) приведены предельно допустимые концентрации (ПДК) для человека и растений. В этой работе, в частности, показано, что соотношение ПДК аммиака для человека в 4 раза больше, чем для растений, а по метанолу – в 5 раз (по оксиду азота и серы в 20 и 25 раз соответственно). Эти соотношения убедительно свидетельствуют о том, что растительность более чувствительна к воздействию химических соединений.

К настоящему времени накоплен значительный материал, свидетельствующий о существенных различиях в чувствительности к вредным веществам, находящимся в газовом и аэрозольном состояниях, на организм человека и природных объектов. Практически не разработаны документы нормативного обеспечения экологической безопасности как для природных систем, включающих отдельные экосистемы, так и для биосферы в целом. Известно и влияние субмикронного аэрозоля на здоровье населения, приводящее к заболеванию дыхательных путей, бронхиальной астмы, хронических болезней легких, кожным заболеваниям и др. Поэтому очень важно исследовать пространственно-временную изменчивость аэрозольных частиц с учетом их микрофизических и химических свойств.

Известно, что при термическом разложении биомассы образуются высокодисперсные аэрозоли (включая и частицы нанометрового размера). Размер этих частиц гораздо меньше, чем мельчайшие вирусы и бактерии, и они способны проникать в организмы, создавая опасность для живого организма. Эти мельчайшие частицы легко преодолевают барьеры, которые служат препятствием для проникновения микроорганизмов на уровень подклеточного строения, и могут воздействовать на подструктуры соответствующего уровня. В результате этого в организме усиливаются окислительные процессы, и здоровье человека ухудшается. Образование и удаление аэрозольных частиц описываются многими процессами (нуклеация, конденсация/испарение, коагуляция, химическая трансформация в газовой и жидкой фазах, гидротермодинамические процессы, а также межфазные обмены, сухое и мокрое осаждение). Химический состав частиц существенно изменяется в зависимости от размера, что имеет принципиальное значение для физики аэрозолей и химии атмосферы.



Рис. 1. Структура комплексной модели

Для описания этих процессов необходимо разработать комплексную математическую модель, позволяющую решать широкий круг задач в области охраны окружающей среды. Такая модель должна включать в себе следующие основные блоки: динамика атмосферных процессов, перенос и диффузия многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей в атмосфере с учетом фотохимической трансформации, кинетические процессы нуклеации, конденсации/испарения, коагуляции, а также химические процессы, протекающие в газовой и жидкой фазах с учетом процессов массообмена на интерфейсе газ – частица. Все эти механизмы взаимосвязаны между собой, и каждый из них является частью общей комплексной задачи физики атмосферы и охра-

ны окружающей среды. Одна из особенностей дисперсной системы в атмосфере состоит в том, что размер меняется от молекулярных комплексов, состоящих из нескольких молекул, до миллиметровых капель, а численная концентрация – от единиц до 10^{12} частиц/м³. Схематически базовая модель представлена на рис. 1. Рассмотрим основные физические механизмы, ответственные за изменчивость газового и аэрозольного состава атмосферы с учетом их трансформации.

Модель гидродинамики

Так как рассматриваемые процессы протекают в турбулентной атмосфере, а земная поверхность в большинстве случаев орографически и термически неоднородна, то задачу динамики газовых примесей и аэрозолей необходимо решить с использованием гидротермодинамических моделей. Это позволит более точно воспроизвести пространственно-временную изменчивость полей метеозлементов, турбулентных характеристик течений и параметров аэрозольных частиц.

В зависимости от рассматриваемых процессов газовой и аэрозольной динамики используются гидродинамические модели в различных приближениях. Для моделирования атмосферной циркуляции исходной является система уравнений гидротермодинамики мезомасштабных атмосферных процессов в негидростатическом приближении, записанных в дивергентной форме в декартовой системе координат, учитывающей орографию (Aloyan et al., 1995; Алоян, 2008). Коэффициенты горизонтального турбулентного обмена для момента количеством движения, тепла и влаги определяются через тензор вязких напряжений Рейнольдса, а коэффициенты вертикального турбулентного обмена – из $(k - \epsilon)$ -модели. Структура приземного слоя атмосферы описывается на основе теории Монины – Обухова (Монин и др., 1965) и эмпирических функций Бусингера (Businger et al., 1971). Температура на поверхности земли вычисляется из уравнений баланса тепла и распределения тепла и влаги в почве.

Модель переноса газовых примесей и аэрозолей в атмосфере

Общее уравнение изменчивости концентрации многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей представим в следующем виде (Aloyan, 2000; Марчук и др., 2004; Алоян и др., 2005; Алоян, 2008):

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial C_i}{\partial x_j} = F_{\text{газ}} - P_{\text{нукл}} - P_{\text{конд}} + P_{\text{хим}} + \frac{\partial}{\partial x_j} K_{jj} \frac{\partial C_i}{\partial x_j}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + (u_j - \delta_{j3} w_g) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} = F_{\text{аэр}} + P_{\text{нукл}} + \\ + P_{\text{конд}} + P_{\text{коаг}} + \frac{\partial}{\partial x_j} K_{jj} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (2)$$

где C_i ($i = 1, 2, \dots, N_g$), φ_k ($k = 1, 2, \dots, N_a$) – концентрации газовых примесей и аэрозолей соответственно; N_g – количество газовых компонент; N_a – количество аэрозольных фракций; $F_{\text{газ}}$, $F_{\text{аэр}}$ – источники газовых примесей и аэрозолей; $P_{\text{нукл}}$, $P_{\text{конд}}$, $P_{\text{коаг}}$, $P_{\text{хим}}$ – операторы нуклеации, конденсации, коагуляции и фотохимической трансформации, соответственно (их вид приводится ниже); K_x , K_y , K_z – коэффициенты турбулентной диффузии в направлениях x , y , z соответственно.

Учет орографии в уравнениях (1)–(2) осуществляется с помощью перехода к новой системе координат $\sigma = \frac{z - \delta(x, y)}{H - \delta(x, y)} H$, в которой искривленная поверхность Земли становится координатной плоскостью. Здесь $\delta(x, y)$ – рельеф местности, H – верхняя граница области интегрирования.

Уравнения (1)–(2) решаются в области $D_t = D \times [0, \bar{t}]$, $D = \{(x, y, \sigma) : x \in [-X, X], y \in [-Y, Y], \sigma \in [0, H]\}$. Начальные условия при $t = 0$ предполагаются заданными. На боковых границах предполагается плавный переход метеорологических полей, газовых примесей и аэрозолей к их соответствующим фоновым значениям. На верхней границе ($z = H$) предполагается, что возмущения затухают и соответствующие поля плавно переходят на фоновые значения. Для задания граничного условия при $z = h$ (где h – высота приземного слоя) поверхностное сопротивление примеси представляется в виде суммы трех слагаемых: аэродинамического сопротивления r_a , квазиламинарного сопротивления приземного слоя r_b , возникающего благодаря молекулярной диффузии вблизи Земли, и поверхностного сопротивления r_c , учитывающего процессы на поверхности осаждения. Таким образом, поток примеси в приземном слое имеет следующий вид:

$$\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{r_a + r_b + r_c} (\varphi - \varphi_{\text{surf}}),$$

где

$$r_b = \frac{2}{\kappa u_*} \left(\frac{S_c}{Pr} \right)^{2/3}, \quad (3)$$

$S_c = 1,5 \cdot 10^{-5}$ – число Шмидта, $Pr = 0,71$ – число Прандтля, u_* – динамическая скорость.

Модель фотохимии

Предполагается, что в атмосферу выбрасываются следующие газовые примеси NO , NO_2 , CO , CH_4 , H_2CO , $ISOP$, $ALD2$, OLE , PAR , TOL . Химические реакции, инициируемые солнечным светом, приводят к возникновению ряда новых химических активных атомов, свободных радикалов и других веществ, которые вместе с веществами первоначальных выбросов составляют следующую систему: $O(^1D)$, $O(^3P)$, O_3 , OH , HO_2 , H , NO_3 , NO , NO_2 , SO_2 , H_2CO , HCO , H_2O_2 , CO , CH_4 , HNO_2 , HNO_3 , SO_3 , SO_2^* , N_2O_5 , CH_3 , CH_3O_2 , CH_3O , CH_3OH , CO_2 , $CH_3O_2NO_2$, $HCOOH$, $HOCH_2O$, $HOCH_2O_2$, CH_3OOH , HO_2NO_2 , CH_3ONO_2 , $ISOP$, XO_2 , $ALD2$, C_2O_3 , PAN , TOL , TO_2 , PAR , OLE , ROR , XO_2N , ETH . Всего в фотохимической модели учитывается 204 химические реакции между 44 газовыми компонентами, представляющие типичные циклы азота, серы и углерода. Здесь частично использованы обозначения механизма CBM-IV (Gery et al., 1989). Подробное изложение химической модели приведено в (Пененко и др., 1985; Aloyan et al., 1995).

Модель кинетики аэрозолей

Бинарная гомогенная нуклеация в системе $H_2O - H_2SO_4$. Образование новых ядер из паров происходит в основном с помощью бинарной гомогенной нуклеации капель серной кислоты и воды. Скорость нуклеации J зависит от трех переменных: массовой концентрации паров серной кислоты в паровой фазе (c), относительной влажности воздуха (Rh) и температуры (T). Частицы нуклеационной моды первоначально имеют субмикронный размер и могут расти как за счет конденсации низколетучих паров, так и за счет внутримодовой коагуляции. Пусть в атмосфере в пересыщенном паре при температуре T и давлении P_v имеется бинарный кластер, состоящий из n_w молекул вещества w и n_a молекул вещества a с мольными фракциями x_{iv} ($i = w, a$). Будем считать, что частицы имеют сферическую форму и находятся в жидкой фазе. Тогда свободную энергию для образования жидкого зародыша в бинарной смеси можно представить в следующем виде:

$$W = \Delta G = n_w \Delta \mu_w + n_a \Delta \mu_a + A\sigma, \quad (4)$$

где G – изменения свободной энергии Гиббса; $\Delta \mu_i = \mu_{il}(T, P_v, x_{il}) - \mu_{iv}(T, P_i, x_{iv})$, μ_{il} и μ_{iv} – химические потенциалы в жидкой и паровой

фазах соответственно; A – площадь поверхности; σ – поверхностное натяжение. Важно отметить, что для пересыщенного пара функция ΔG имеет максимум в точке с критическим радиусом r^* . Пар пересыщен по отношению ко всем каплям, у которых $r > r^*$. Здесь используется модель параметризации нуклеации, изложенная в работе (Wehkamaki et al., 2002). Радиус критического кластера (r^*) и образование критического кластера (w^*) определяются следующим образом:

$$r^* = \frac{2\sigma(x^*)\nu_i(x^*)}{kT \ln \frac{\rho_i^{\text{free}}}{\rho_{i,s}^{\text{free}}(x^*)}}, \quad w^* = \frac{4}{3}\pi r^{*2}\sigma(x^*). \quad (5)$$

И, наконец, общее выражение для скорости нуклеации имеет следующий вид:

$$J = z\rho(1,2) \exp \left[-\frac{w^* - w(1,2)}{kT} \right], \quad (6)$$

где z – кинетический коэффициент; $\rho(1,2)$, $w(1,2)$ – численная концентрация и энергия образования дигидрата серной кислоты соответственно. Здесь дигидрат используется как первоначальный размер (т. е. точка отсчета для распределений).

Кинетические уравнения конденсации и коагуляции. Уравнение неразрывности для описания эволюции спектра размеров посторонних частиц за счет инородных молекул и вновь образовавшихся (за счет нуклеации) можно представить в следующем виде (здесь ради простоты опущены слагаемые адвективного переноса и турбулентные слагаемые, так как они приведены в (1)–(2)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_g}{\partial t} + \frac{\partial v_g \varphi_g}{\partial g} = J_{\text{нукл}}(\varphi_g, t) + \frac{1}{2} \int_0^g K(g, g_1) \varphi_{g-g_1} \varphi_{g_1} dg_1 - \\ - \int_0^\infty K(g, g_1) \varphi_{g_1} dg_1, \end{aligned} \quad (7)$$

где φ_g – концентрация частиц с массой, заключенной в интервале от g до $g + dg$; $J_{\text{нукл}}(\varphi_g, t)$ – скорость нуклеации; $K(g, g_1)$ – частота столкновения частиц массами g и g_1 ; g_1 – текущая переменная (масса), по которой производится интегрирование. Второе слагаемое в левой части описывает скорость роста частиц из-за конденсации. Это уравнение описывает конденсационный рост частиц и их изменение из-за коагуляционного слияния. Уравнение (7) соответствует

P_{coag} и P_{cond} операторам в уравнениях (1)–(2). Режим роста и испарения частиц зависит от соотношения между размером и длиной пробега молекул пара в среде l_1 . Приведем интерполяционную формулу для v_g , применимому для произвольного режима обмена между паром и поверхностью частицы (Сутугин и др., 1985):

$$V_{\text{ж}} = \frac{\alpha \pi d^2 n \nu_t g^{2/3}}{4(1 + 3dg^{1/3}/8l_1)} \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\lambda \theta}{kT} \left(\frac{g_*^{1/3}}{g^{1/3}} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (8)$$

где d – диаметр частицы; α – коэффициент аккомодации. Отметим, что ядро коагуляции учитывает столкновения частиц в диффузионном, свободномолекулярном и переходном режимах.

Численная модель химических процессов

Вид уравнений для описания химических реакций в жидкой фазе схож с уравнениями, описывающими динамику газофазных реакций. В обоих случаях динамика процессов описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) первого порядка. Однако решение ОДУ для жидкофазных реакций сложнее по двум причинам. Во-первых, время жизни жидкофазных веществ обычно короче, чем газофазных веществ. Поэтому ОДУ для жидкофазных процессов более жесткие и требуют больше вычислительных ресурсов. Во-вторых, во время химических реакций растворенные молекулы быстро пополняются молекулами из газовой фазы. Таким образом, процессы образования аэрозолей, облаков и дождевых капель можно рассматривать для каждого интервала размеров частиц. ОДУ для жидкофазных процессов должны решаться внутри каждого интервала, а ОДУ для конденсационного роста частиц должны быть разрешены между газовой фазой и всеми интервалами. При этом газофазная химия эффективно решается внутри одного интервала размеров. Положение усложняется еще и тем, что большинство рассмотренных веществ диссоциируют в растворе. Поэтому процессы растворения, их равновесие и жидкофазные реакции происходят почти одновременно.

Уравнения химических реакций, протекающих в газовой и жидкой фазах, вместе составляют одну большую систему жестких ОДУ, решение которой требует большие машинные ресурсы. Химическое равновесие описывается обратимым уравнением и решается итерационными методами. Рассмотрим совместную модель химических процессов, протекающих в газовой и жидкой фазах (Ермаков и др., 2003).

Эта модель является частью многомерной системы моделирования многофазной среды. Газофазный и жидкофазный перенос для пространственно однородного случая описывается с помощью следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d[C_g^i]}{dt} &= w_{gen,g}^i - w_{loss,g}^i - \left([C_g^i]k_i - [C_{aq}^i]k_i \frac{k_i}{K_H^i k_b T} \right) L, \\ \frac{d[C_{aq}^i]}{dt} &= w_{gen,aq}^i - w_{loss,aq}^i + \left([C_g^i]k_i - [C_{aq}^i]k_i \frac{k_i}{K_H^i k_b T} \right) \frac{1}{N_A},\end{aligned}\quad (9)$$

где C_g^i и C_{aq}^i – концентрации i -го компонента соответственно в газе и жидкой фазе; $w_{gen,g}^i$ и $w_{loss,g}^i$ – скорости образования и расходования i -го компонента в газофазных реакциях; $w_{gen,aq}^i$ и $w_{loss,aq}^i$ – скорости образования и расходования i -го компонента в жидкофазных реакциях; k_b – постоянная Больцмана; N_A – число Авогадро.

Фазовый переход молекул между газовой и жидкой фазами описывается моделью сопротивления (Schwartz, 1984): коэффициенты k_i для описания динамики обратимых массообменных процессов газ – частица или газ – жидкость вычисляется по формуле

$$k_i = \frac{r^2}{\left[3D_g + \frac{4r}{3c_i \alpha_i} \right]}, \quad (10)$$

где D_g – коэффициент диффузии в газе для различных веществ, r – радиус частицы, α – безразмерный коэффициент аккомодации, c_i – средняя тепловая скорость молекул.

Уравнение (9) описывает баланс потоков. Перенос данного вещества в каплю является положительным, третий член этого уравнения – суммарный поток переноса из газовой фазы, равный произведению коэффициенты газофазного переноса на парциальное давление данного реагента. Четвертый член уравнения описывает поток в обратном направлении, т. е. из капли в газовую фазу. Третий и четвертый члены основаны на равновесном законе Генри в терминах изменения концентрации за единицу времени. Уравнения (10) описывает кинетику переноса массы на разделе поверхности газ – частица как изменение во времени парциального давления газофазного вещества. В модели учитываются 51 вещество в жидкой фазе, а также 31 вещество в газовой фазе.

Таким образом, задача (9)–(10) представляет собой систему из 82 нелинейных нестационарных уравнений, которые необходимо решать в каждой точке трехмерной разностной сетки. Рассматриваемая задача очень трудоемкая из-за многомерности и многокомпонентности. Для ее решения требуется на два порядка больше машинных затрат, чем для решения задачи динамики атмосферы. Кроме того, имеется ряд нерешенных проблем, связанных с формированием частиц новой фазы из газов-предшественников. В настоящее время в большинстве трехмерных моделей динамики аэрозолей предполагается, что существует мгновенное равновесие в системе газ – аэрозоль. Однако известно, что при определенных условиях равновесие устанавливается довольно медленно по отношению к временному масштабу протекания других процессов. Поэтому необходимо построить соответствующие численные модели с использованием неравновесной функции распределения. В частности, при решении совместной задачи конденсации и коагуляции требуемое число операций пропорционально квадрату числа узлов сетки в пространстве масс.

Численный метод решения

Для построения вычислительного алгоритма решения дискретных аналогов уравнений (1)–(2) воспользуемся методом расщепления по физическим процессам (Марчук, 1988; Марчук, 1982, 1988, 1989). На каждом малом интервале получается схема, состоящая из шести этапов: 1) перенос многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей по траекториям; 2) турбулентная диффузия; 3) фотохимическая трансформация; 4) кинетические процессы конденсации; 5) процессы коагуляции; 6) совместная модель химических процессов, протекающих в газовой и жидкой фазах с учетом процессов массообмена на разделе газ – частица.

На первом этапе решается задача переноса газовых примесей и аэрозолей по траекториям с использованием конечно-разностной аппроксимации второго порядка точности по пространственным переменным и времени, обладающей свойствами монотонности и консервативности. На втором этапе уравнение турбулентной диффузии решается по методу покомпонентного расщепления. На третьем этапе задача расщепляется на четыре части: фотохимия, нуклеация, конденсация и коагуляция. Уравнения фотохимической трансформации решаются методами ОДУ. На четвертом этапе решается система кинетических

уравнений конденсации. Для численного решения уравнения конденсации применяются методом частиц (Голубев и др., 1991; Aloyan et al., 1993). На пятом этапе решаются интегро-дифференциальные уравнения коагуляции. После дискретизации полученная система решается методом Рунге – Кутты четвертого порядка. На шестом этапе решается совместная задача химической трансформации, протекающая в газовой и жидкой фазах методом ОДУ (Gear, 1971).

Очевидно, что следующим этапом является реабилитация окружающей среды от негативного воздействия, наносимого различными загрязнителями. Для решения этих задач рассматриваются задачи управления по оптимизации по регулированию мощности источников. В работах (Марчук и др., 1989, 2004; Aloyan, 2004) рассматриваются следующие модели: 1) когда ущерб, наносимый окружающей среде, линейно зависит от концентрации загрязняющих веществ; 2) когда ущерб нелинейно зависит от концентрации. Здесь целевая функция с соответствующими двухсторонними ограничениями позволяет минимизировать ущерб в выделенной области. Эти модели в данной статье не будут рассмотрены.

Численные эксперименты

По разработанным моделям проводились численные эксперименты по воспроизведению пространственно-временной изменчивости газовых примесей и аэрозолей в региональном и глобальном масштабах с учетом кинетических процессов трансформации.

1. Процессы регионального масштаба. Численные эксперименты проводились для Байкальского региона. Расчеты проводились при следующих значениях входных параметров: область моделирования по горизонтали размером 600 x 600 км, с шагом 10 км, высота области – 2050 м от поверхности Земли, количество вертикальных узлов – 20 ($\Delta z = 50$ м, если $z \leq 100$ м; $\Delta z = 75$ м, если $100 \leq z \leq 250$ м; $\Delta z = 100$ м, если $250 \leq z \leq 1450$ м; $\Delta z = 150$ м, если $1450 \leq z \leq 2050$ м; $\Delta t = 600$ с). Начальное время моделирования соответствовало 6 ч местного времени. В экспериментах задавалось следующее направление фонового потока: $U_b = 4$ м/с, $V_b = 0$ на верхней границе атмосферы при $z = 2050$ м.

На приводимых ниже рисунках представлена схематическая карта Байкальского региона, где кружочками отмечены источники выбросов от крупных объектов промышленности: 1 – Шелехов (ТЭЦ-5); 2 – Иркутск (НИТЭЦ, РК Новоленино); 3 – Ангарск (ТЭЦ-1,

ТЭЦ-9, ТЭЦ-10); 4 – Байкальск; 5 – Усолье (ТЭЦ-11). По заданным значениям выбросов SO_2 , NO_x и CO от источников проводились численные эксперименты по воспроизведению пространственно-временной изменчивости газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. По модели гидротермодинамики получены характеристики атмосферной циркуляции в рассматриваемом регионе и вычислялись поле течения и турбулентные характеристики. На фоне полученной атмосферной циркуляции решалась задача переноса газовых примесей с учетом фотохимической трансформации, в результате чего образуются пары серной кислоты, а также другие вторичные загрязнители. Далее рассматривались процессы образования нуклеационной моды по механизму бинарной гомогенной нуклеации в системе $H_2O - H_2SO_4$. И, наконец, была смоделирована динамика аэрозольных частиц с учетом кинетических процессов конденсации/испарения и коагуляции, а также химические процессы на поверхности аэрозольных частиц с использованием совместной модели химической модели, протекающие в газовой и жидкой фазах. При этом расчеты проводились как с учетом конденсации/испарения на естественных аэрозольных спектрах частиц (например, Юнге), так и при конденсации на частицах, возникших в процессе бинарной гомогенной нуклеации. В эксперименте задавалось 30 интервалов для спектра размеров аэрозольных частиц в диапазоне от 0,05 до 1,5 мкм.

Результаты численных экспериментов показывают, что выбрасываемое из мощных ТЭЦ большое количество SO^2 путем фотохимической трансформации приводит к образованию H_2SO_4 в Байкальском регионе. При этом взаимодействие паров серной кислоты с водяным паром при низких температурах способствует протеканию процессов бинарной нуклеации в системе $H_2O - H_2SO_4$ и образованию в регионе частиц нуклеационной моды. Взаимодействие газовых молекул с аэрозольными частицами приводит к изменчивости спектра размеров аэрозольных частиц.

На рис. 2 представлено поле концентрации H_2SO_4 для момента времени 22 ч, а на рис. 3 – поле скорости нуклеации (в единицах $см^{-3} с^{-1}$), а рис. 4 дает картину пороговой концентрации H_2SO_4 . Отметим, что формирование частиц новой фазы может происходить лишь тогда, когда концентрация паров серной кислоты превышает пороговое значение. Как видно из рис. 3, для рассматриваемого момента времени концентрация паров серной кислоты в Байкальском регионе превышает пороговое значение, что способствует образованию мель-

чайших аэрозольных частиц. Очевидно, что с увеличением температуры увеличится и пороговая концентрация H_2SO_4 , а с увеличением относительной влажности она уменьшится. На рис. 5 приведена счетная концентрация аэрозольных частиц с радиусами 0,025 мкм (рис. 5а), 0,1 мкм (рис. 5b) и 0,915 мкм (рис. 5с) (для момента времени $t = 22$ ч и на высоте $z = 250$ м) через 24 ч после начала моделирования. Из результатов расчетов следует, что поле концентрации аэрозольных частиц претерпевает заметное пространственно-временное изменение.

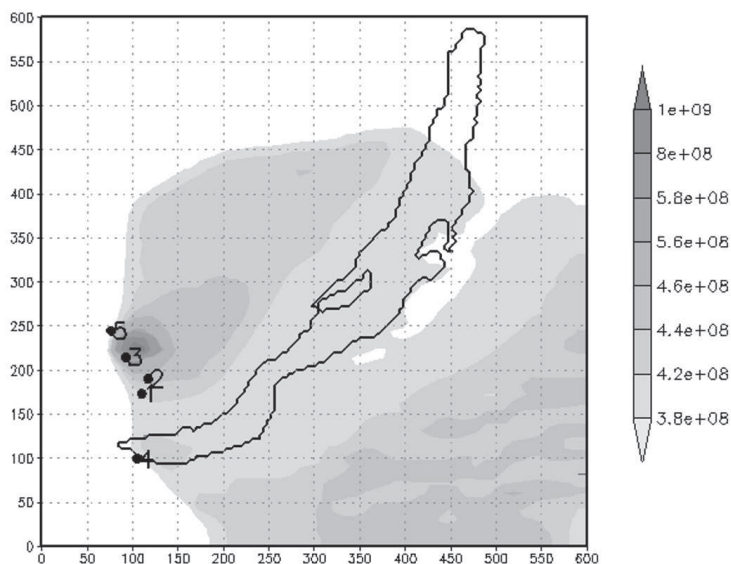


Рис. 2. Поле концентрации H_2SO_4 на высоте 250 м для момента времени 22 ч

На рис. 6 представлена гистограмма измеренной и рассчитанной счетной концентрации частиц нуклеационной моды. Модель удовлетворительно воспроизводит формирования мельчайших частиц нанометрового размера из газов предшественников. Хорошее согласие имеется между рассчитанными и измеренными концентрациями озона и других газовых примесей. Подробные результаты сопоставления приведены в (Алоян и др., 2004). Результаты численных экспериментов хорошо согласуются с экспериментальными значениями свободных протонов в аммиачно-сульфатных частицах.

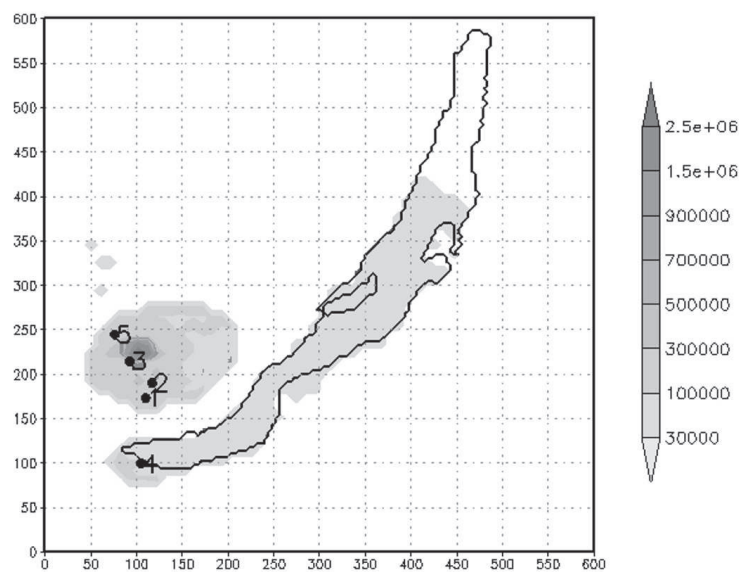


Рис. 3. Поле скорости нуклеации J на высоте 250 м для момента времени 22 ч

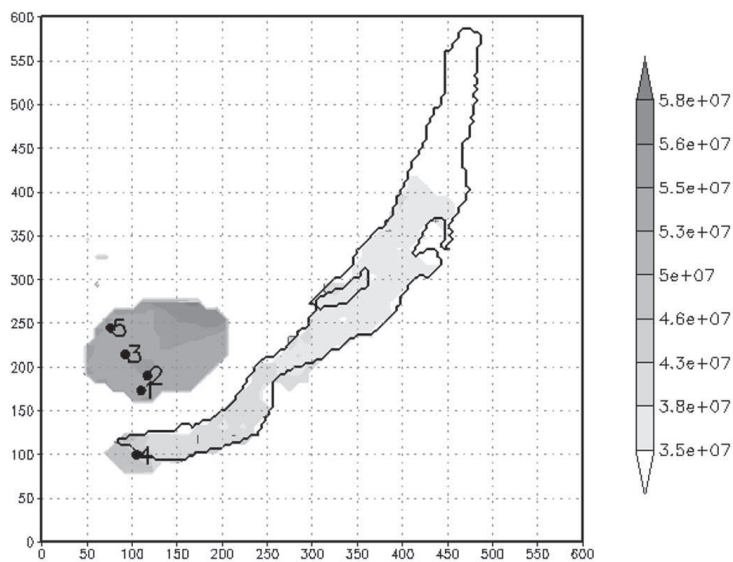


Рис. 4. Пороговая концентрация H_2SO_4 на высоте 250 м для момента времени 22 ч

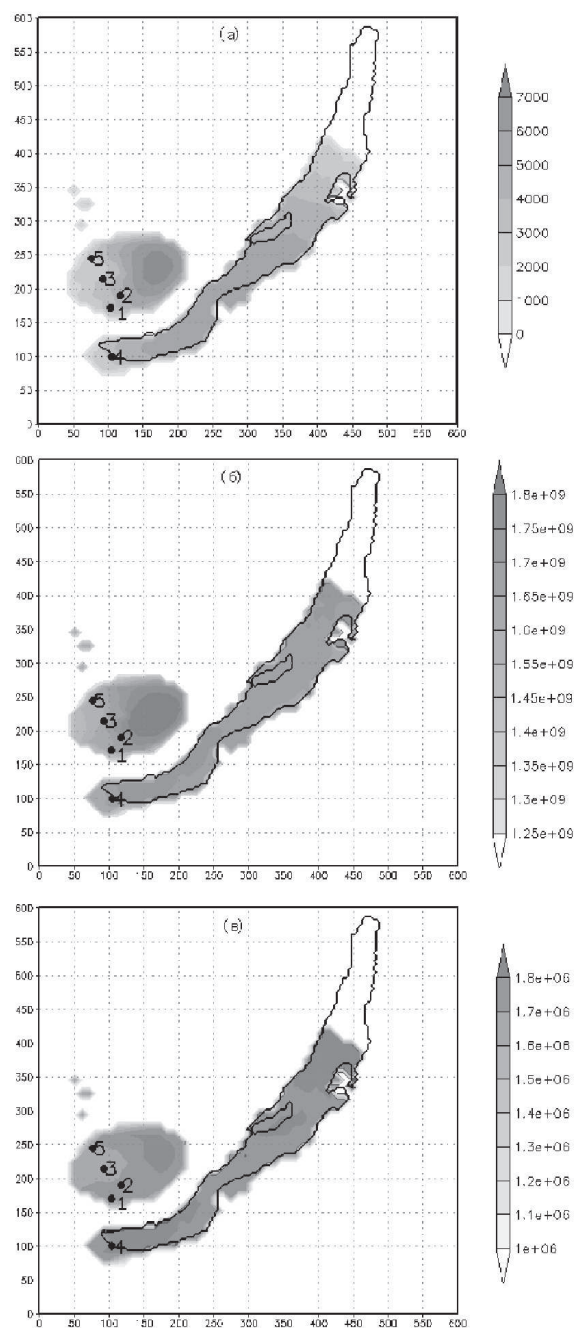


Рис. 5. Счетные концентрации аэрозольных частиц с радиусами 0,025 мкм (а), 0,1 мкм (б) и 0,915 мкм (с) (через 24 ч после начала счета и на высоте 250 м)

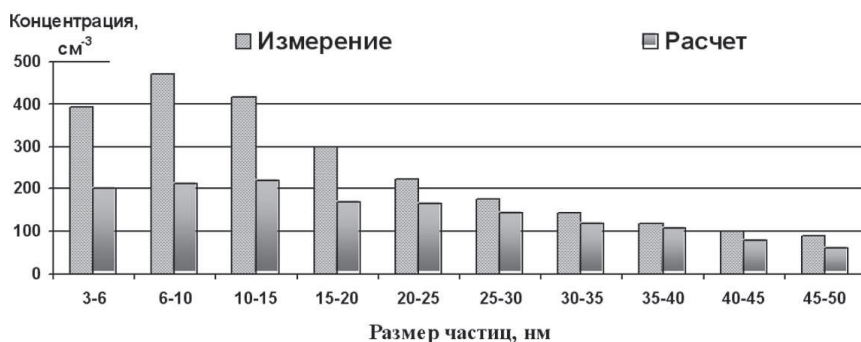


Рис. 6. Сравнение между результатами расчетов и измерений в местности Листвянка, 26.08.2003, $t = 12$ ч

Процессы в глобальном масштабе. По изложенным выше моделям проводились численные эксперименты по воспроизведению пространственно-временной изменчивости многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей в атмосфере Северного полушария, за период январь – декабрь 1992 г. Расчеты проводились при следующих значениях входных параметров: число узлов сеточной области по долготе – 144; число узлов по широте – 73; число уровней по вертикали – 15; координатные поверхности в метрах – 50, 110, 380, 650, 920, 1190, 1460, 1860, 2460, 3200, 4100, 5100, 6100, 7100, 8100, 9160. Шаг по времени – 30 мин, а для моделей конденсации и коагуляции – 5 мин. Численные эксперименты проводились на основе метеорологической информации Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды. Распределение размера аэрозольных частиц разрешается для 25 дискретных интервалов начиная с 10^{-2} мкм с удвоением между интервалами. Рассматриваются процессы окисления сернистых газов, серией фотохимических реакций, в пар серной кислоты. Расчеты проводились для определения характеристик распространения двуокиси серы и образующихся паров серной кислоты, а также конденсации этих паров на естественных атмосферных частицах и их коагуляцию. При этом определяются концентрации серы, паров серной кислоты и функция распределения кислотосодержащих частиц по размерам в каждой точке трехмерной сеточной области, охватывающей территорию Северного полушария. Учитывались различные сезоны года (январь, апрель, июль и август) для 10 и 30 дней. Вычислялись поля концентраций двуокиси серы и паров серной кислоты, а также функция распределения частиц по размерам в каждой точке описанной выше пространственной сеточной области.

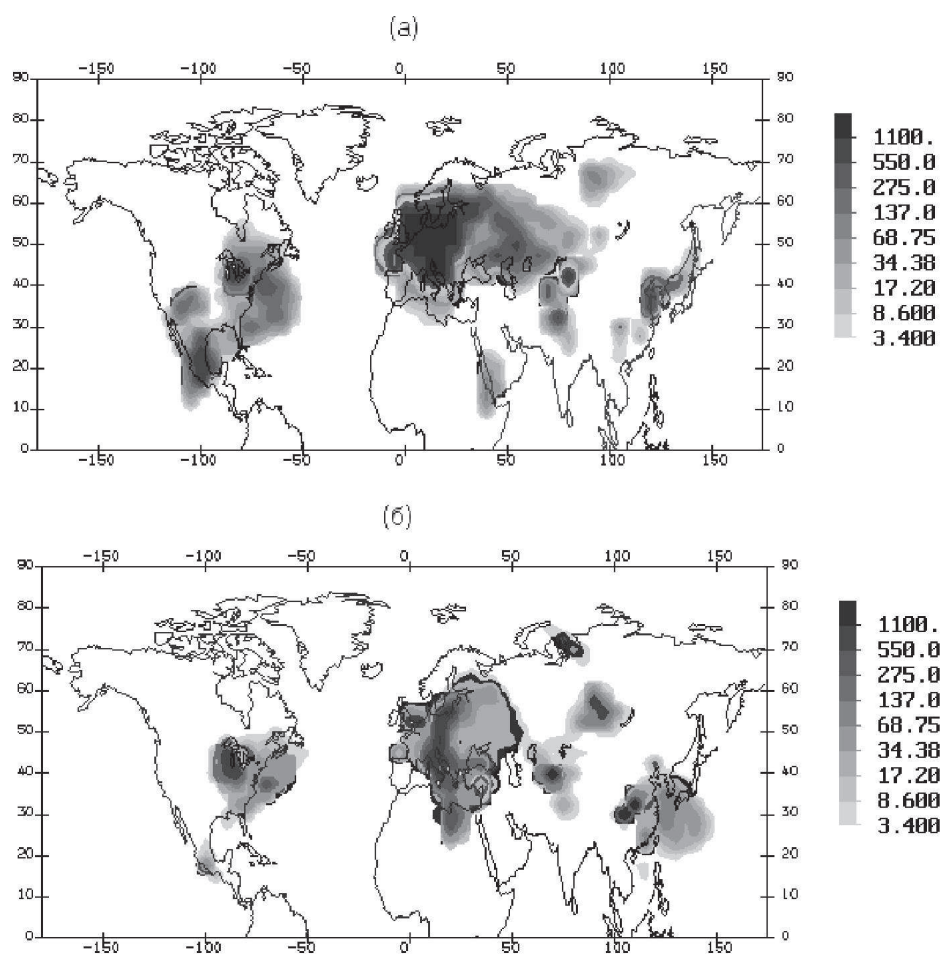


Рис. 7. Распределение частиц с радиусом 0,11 мкм на высоте 1460 м от поверхности: а – январь; б – апрель

На рис. 7 изображены изолинии фракции атмосферного аэрозоля, имеющего радиус частиц, равный 0,11 мкм, на высоте 1460 м от поверхности через 10 суток модельного счета, для января и апреля соответственно. На рис. 8 представлены аналогичные рисунки для июля и октября 1992 г. Рис. 9 иллюстрирует развитие ситуации при моделировании на время до 30 суток поля концентрации в январе для фракций 0,11 и 0,34 мкм соответственно.

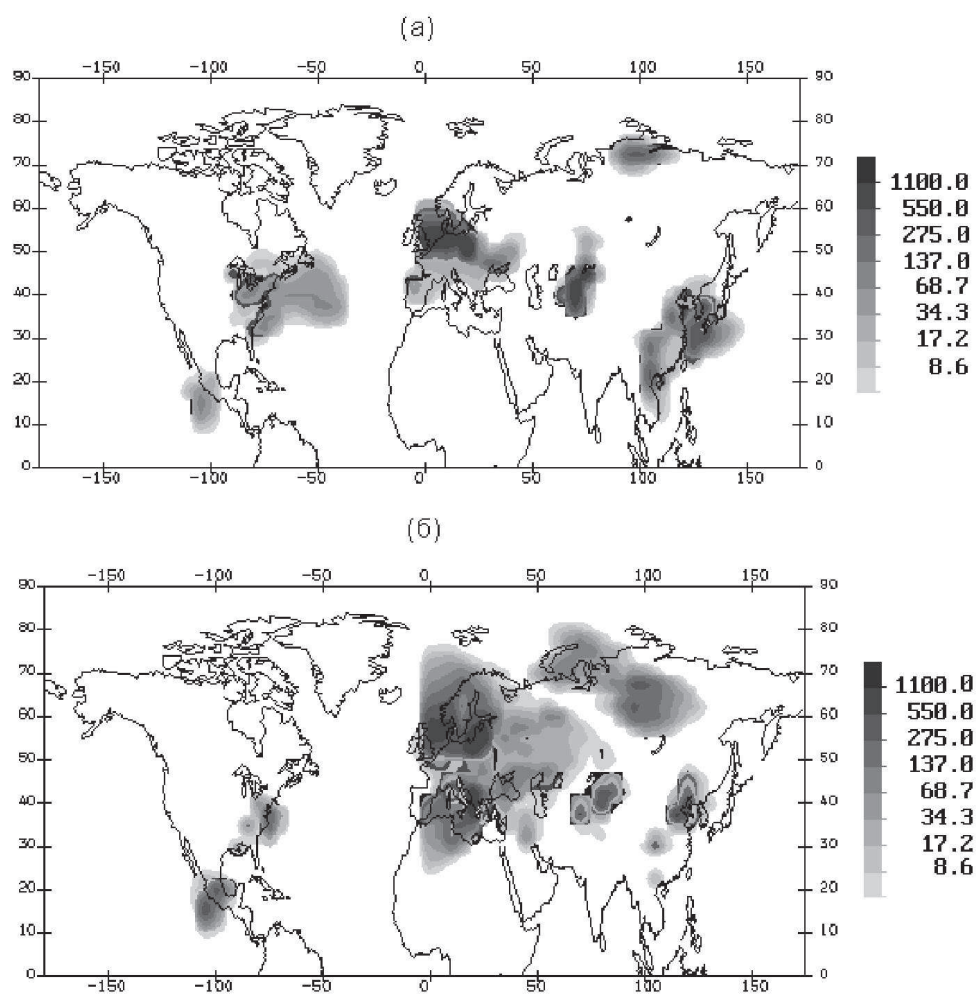


Рис. 8. Распределение частиц с радиусом 0.11 мкм на высоте 1460 м от поверхности: а – июль; б – октябрь

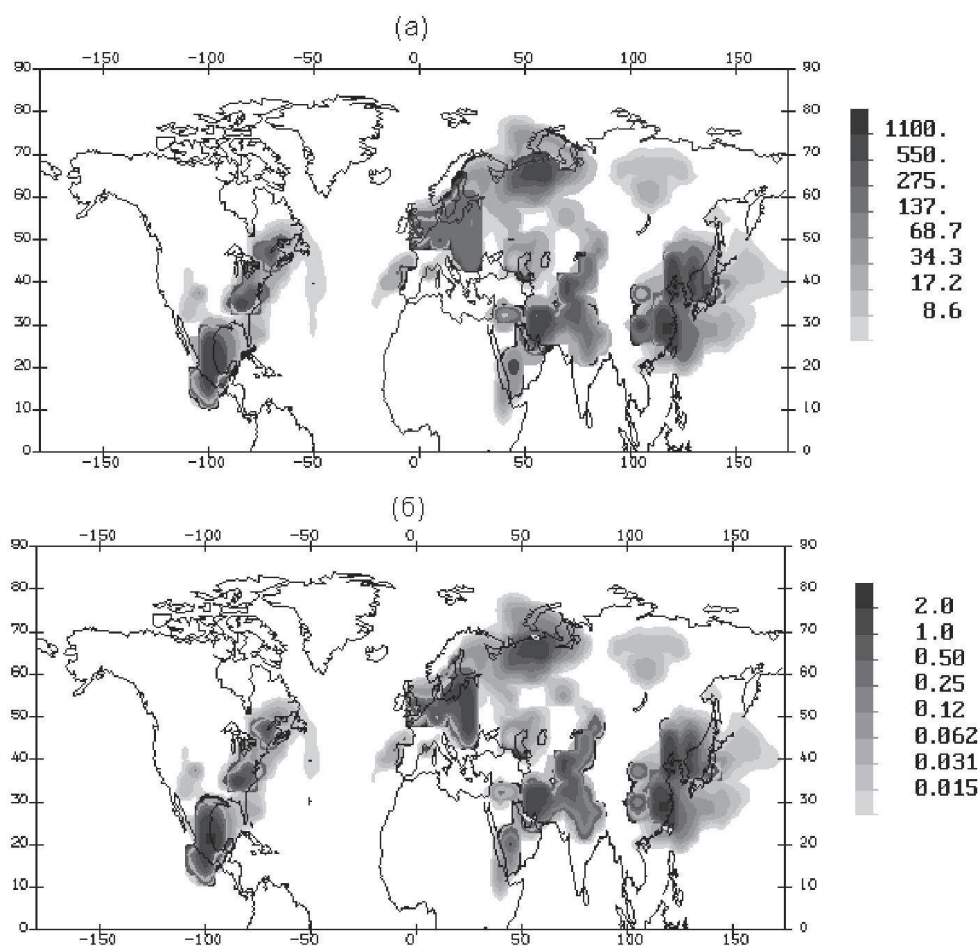


Рис. 9. Поле концентрации аэрозольных частиц (время модельного счета – 30 суток в январе) для фракций (а) 0,11 и (б) 0,34 мкм соответственно

На рис. 10–12 приведены результаты численных экспериментов по расчету некоторых характеристик, необходимых для формирования частиц нуклеационной моды в Северном полушарии: концентрация серной кислоты (рис. 10); скорость нуклеации (рис. 11); пороговая концентрация серной кислоты (рис. 12). Смена типа циркуляций, и развитие кинетических процессов трансформации максимумы повышенного присутствия кислотных аэрозольных частиц в разных континентах видоизменили свои очертания. Выпадение осадков в этой области в промежутке времени, к которому относятся результаты рас-

чета, приведет к вымыванию кислотосодержащих частиц и повышенной кислотности дождевой воды интервала времени, охватывающий 30-дневный интервал. Следует отметить, что учет кинетических процессов трансформации при моделировании распространения газовых примесей и аэрозолей в атмосфере позволяет выделить локальные области повышенного присутствия сульфатных аэрозольных частиц и формирования конденсационных следов в атмосфере.

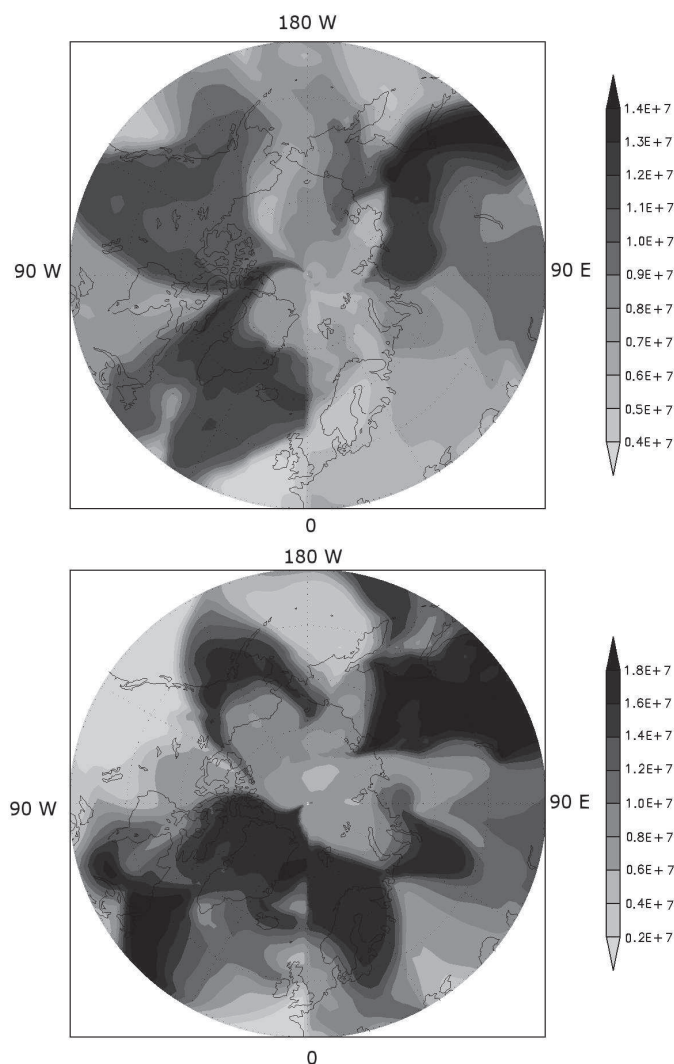


Рис. 10. Поле концентрации серной кислоты в январе (верхний рисунок) и июле (нижний рисунок)

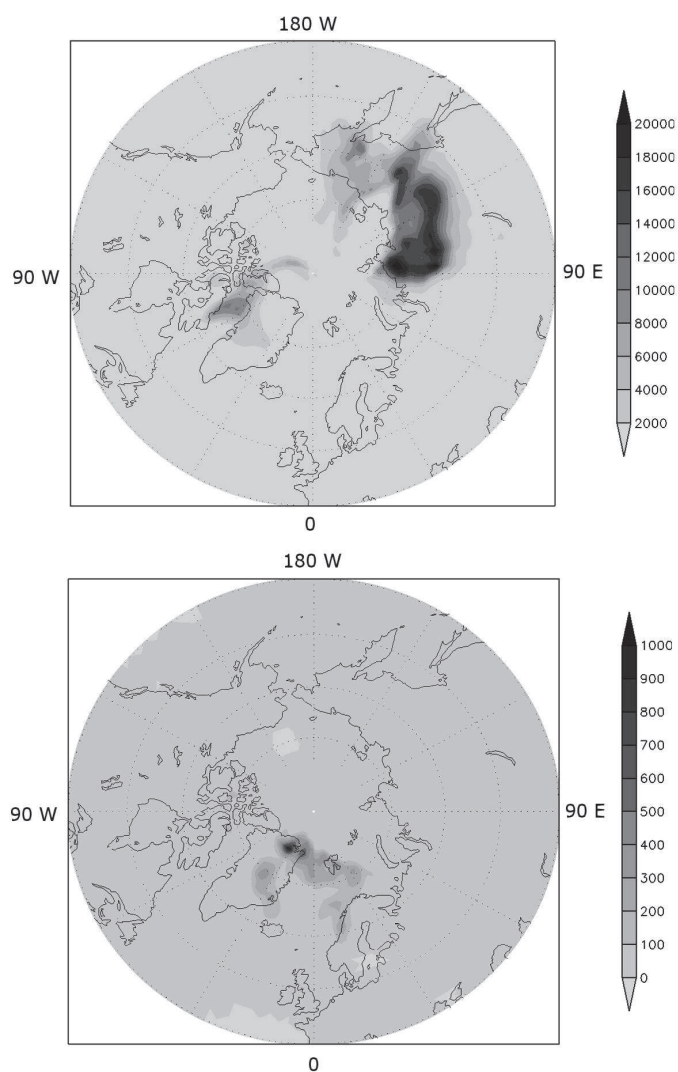


Рис. 11. Поле скорости нуклеации в январе (верхний рисунок) и июле (нижний рисунок)

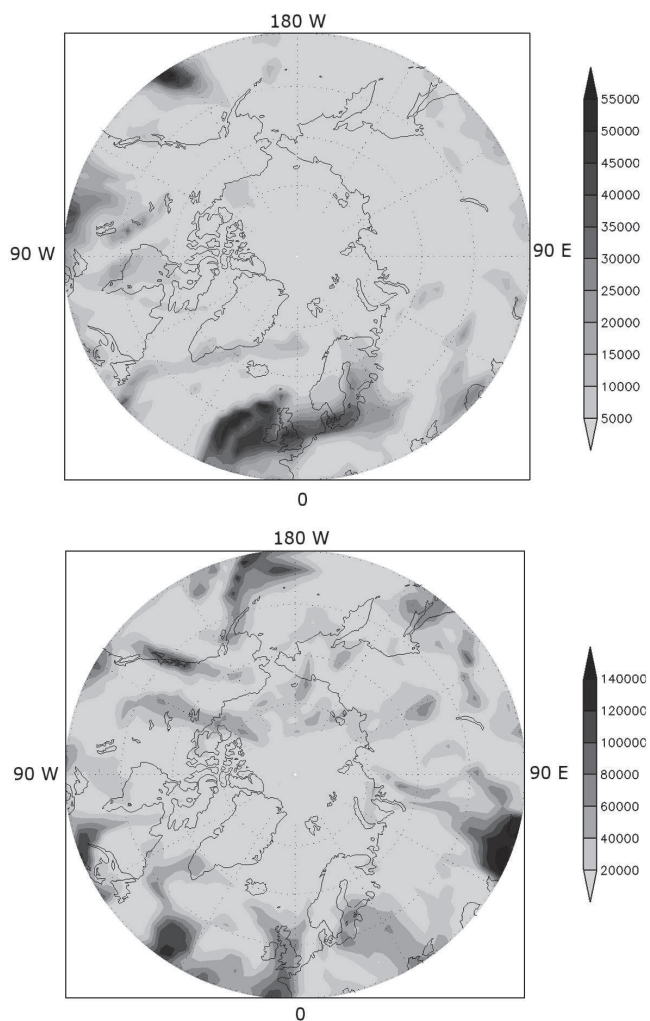


Рис. 12. Пороговая концентрация серной кислоты в январе (верхний рисунок) и июле (нижний рисунок)

Заключение

Результаты воздействия аэрозоля на различные процессы в природной среде (например, на воздействие на различные экосистемы, перенос излучения или здоровья человека) зависят, как правило, от совокупности химических и физических процессов, причем почти всегда существенную роль играет зависимость состава от размеров частиц аэрозоля. Поэтому для адекватного описания формирования таких аэрозольных частиц можно воспроизвести в рамках комплексных математических моделей учитывающие динамические, физико-химические и кинетические процессы формирования аэрозолей и трансформацию газовых примесей в атмосфере. Модели, изложенные выше, способны в рамках единой модели учитывать сложные взаимосвязи между динамическими, физико-химическими процессами, а также с процессами формирования аэрозолей в атмосфере. В частности, с их помощью можно воспроизвести эволюцию газовых примесей и аэрозолей в атмосфере, начиная с молекулярного уровня до образования частиц несколько микрон с учетом их ионного состава. С помощью разработанных моделей можно эффективно воспроизвести пространственно-временную изменчивость газовых примесей и аэрозолей в атмосфере в региональном и глобальном масштабах и оценить антропогенную нагрузку на окружающую природную среду.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алоян А. Е., Арутюнян В. О., Кузнецов Ю. А., Хи Дж. Моделирование регионального переноса газовых примесей в атмосфере с учетом фотохимической трансформации // Известия АН. Серия: Физика атмосферы и океана. 2004. Т. 40, № 4. С. 501–513.
2. Алоян А. Е., Пискунов В. Н., Моделирование региональной динамики газовых примесей и аэрозолей // Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. 2005. Т. 41, № 3. С. 328–340.
3. Алоян А. Е. Моделирование динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. М.: Наука, 2008. 415 с.
4. Голубев А. И., Пискунов В. Н., Повышев В. М. Моделирование процессов объемной конденсации // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Теоретическая и практическая физика. 1991. Вып. 2. С. 3–9.
5. Ермаков А. Н., Ларин И. К., Угарова А. А., Пурмаль А. П. О катализе ионами железа окисления SO^2 в атмосфере // Кинетика и катализ. 2003. Т. 44, № 4. С. 524–537.

6. Кротов Ю. А. К установлению гигиенических критериев качества воздуха и его влияние на другие природные среды // В кн.: Проблемы физики пограничного слоя атмосферы и загрязнение воздуха. СПб.: Гидрометеиздат, 2002. С. 303–309.

7. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.

8. Марчук Г. И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.

9. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.

10. Марчук Г. И., Кондратьев К. Я. Приоритеты глобальной экологии. М.: Наука, 1992. 263 с.

11. Марчук Г. И., Алоян А. Е. Математическое моделирование в задачах экологии. М.: Препринт № 234 ОВМ АН СССР, 1989. 36 с.

12. Марчук Г. И., Алоян А. Е. Математическое моделирование региональных задач окружающей среды // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2004. № 1. С. 88–100.

13. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965. 640 с.

14. Николаевский В. С., Николаевская Т. В. Методика определения предельно допустимых концентраций вредных газов для растительности. М.: Государственный комитет СССР по лесу, 1998. 15 с.

15. Пененко В. В., Алоян А. Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. М.: Наука, 1985. 224 с.

16. Сутугин А. Г., Токарь Я. А. Образование конденсационных аэрозолей в пространственно-неоднородной системе // Коллоидный журнал. 1985. Т. 47, № 2. С. 341–347.

17. Aloyan A. E. Numerical modeling of the interaction of gas species and aerosols in the atmospheric dispersive systems // Russ. J. Num. Analysis Math. Modelling. 2000. V. 15, No. 3-4. Pp. 211–224.

18. Aloyan A. E., Arutyunyan V. O., Marchuk G. I. Dynamics of mesoscale boundary atmospheric layer and impurity spreading with the photochemical transformation // Russ. J. Num. Anal. Math. Model. 1995. V. 10, No. 2. Pp. 93–114.

19. Aloyan A. E. Numerical Modelling of Minor Gas Constituents and aerosols in the atmosphere // Ecological Modelling. 2004. V. 179. Pp. 163–175.

20. Businger J. A., Wyngaard I. C., Izum Y., Bradley E. F. Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer // J. Atm. Sci. 1971. V. 28, No. 2. Pp. 181–189.

21. Gear C. W. Numerical Initial Value Problems in ODE. New-Jersey, 1971.

22. Gery M. W., Whitten G. Z., Killus J. P., Dodge M. C. A photochemical mechanism for urban and regional scale computer modeling // J. Geophys. Res. 1989. V. 94. Pp. 12925–12956.

23. Vehkamäki H., Kulmala M., Napari I., Lehtinen K. E. J., Timmreck C., Noppel M., Laaksonen A. An improved parameterization for sulfuric acid/water nucleation rates for tropospheric and stratospheric conditions // J. Geophys. Res. 2002. v. 107, No. D22. 4622 p.

КОММЕНТАРИИ

К РАБОТАМ ПО ДИНАМИКЕ АТМОСФЕРЫ

В. П. Дымников

Если говорить о работах Г. И. Марчука, посвященных исследованию динамики атмосферы в целом, то следует сказать, что главной целью и результатом этих работ является создание эффективных методов решения систем уравнений, описывающих атмосферную динамику в различных приближениях. При этом важно отметить, что большинство разработанных Марчуком методов (частично с соавторами) были реализованы в моделях прогноза погоды и внедрены в оперативную практику Гидрометеорологической службы или в моделях общей циркуляции атмосферы и климата. В этом смысле представленные в данном разделе работы Г. И. Марчука интересны не только с научной точки зрения (некоторые из них инициировали целые направления в науке), но и с точки зрения истории развития методов прогноза погоды и климата в мировой метеорологической практике и особенно в метеорологической практике России.

Хотя формально первая работа из этого цикла, написанная с Н. И. Булеевым, называется «О динамике крупномасштабных атмосферных процессов» и посвящена исследованию функции влияния метеопараметров на формирование тенденций геопотенциала, температуры и поля вертикальных движений, но фактически в ней сформулирован эффективный метод решения трехмерных квазигеострофических уравнений, успешно реализованный С. М. Белоусовым на отечественных компьютерах в 60-х г. прошлого столетия и ставший основной прогностической схемой краткосрочного прогноза погоды для Гидрометслужбы СССР на долгие годы.

Велика также и научная значимость данной работы, которую можно с уверенностью назвать классической. В этой работе фактически сформулировано уравнение для псевдопотенциального квазигеострофического вихря (правда, такая терминология в работе не использовалась), и на базе этого уравнения построен алгоритм вычисления тенденции геопотенциала с помощью аналитической конструкции функции Грина для обращения трёхмерного эллиптического оператора. Результаты этой работы могут быть эффективно использованы и в настоящее время, например, при изучении роли неадиабатических притоков тепла в процессе формирования крупномасштабных вихрей (реализации бароклиной неустойчивости в средних широтах в неадиабатической атмосфере).

В середине прошлого столетия уже пришло осознание факта, что главной проблемой прогноза погоды является неустойчивость траектории климатической системы к малым возмущениям начальных данных и внешних воздействий. Это утверждение означает, что решение системы уравнений, описывающих динамику атмосферы, должно быть неустойчиво по Ляпунову (и, следовательно, неустойчиво по отношению к возмущениям правой части). Отсюда следует, что для повышения качества прогноза мы должны переходить к полным (не квазигеострофическим) уравнениям с включением неадиабатических притоков тепла даже для моделей краткосрочного прогноза погоды. В начале 60-х гг. Г. И. Марчуком была сформулирована крупномасштабная программа исследований в этом направлении. Началом реализации этой программы можно считать работу Марчука «Теоретическая модель прогноза погоды», опубликованную в Докладах АН в 1964 г. В этой работе сформулирована неадиабатическая модель краткосрочного прогноза погоды по полным (примитивным) уравнениям в p -системе координат с описанием процессов переноса и трансформации полей влажности в атмосфере, переноса излучения, радиационных и фазовых притоков тепла. В качестве метода решения сформулированной системы уравнений автором предложен метод расщепления по физическим процессам и геометрическим переменным.

Важнейшим аспектом сформулированной Г. И. Марчуком программы является математическое исследование системы уравнений краткосрочного прогноза погоды, включающей в себя проблемы исследования разрешимости дифференциальной задачи, исследование аппроксимации и устойчивости конечномерного аналога модели, доказательство сходимости решения конечномерной задачи к решению

задачи дифференциальной в соответствующих функциональных пространствах. О трудности этой задачи говорит тот факт, что в определенном смысле законченные результаты по перечисленным выше проблемам для постановки, сформулированной Г. И. Марчуком в данной работе, были получены лишь в последние годы [1, 2]. Началом этого пионерского направления, которое мы сейчас называем математической геофизической гидродинамикой, мы вправе считать работу Г. И. Марчука и Г. В. Демидова. «Теорема существования решения задачи краткосрочного прогноза погоды», в которой было доказано существование в малом решения задачи краткосрочного прогноза погоды в адиабатическом приближении, т. е. при отсутствии вертикальной и горизонтальной диффузии и притоков тепла.

Далее, в работе «Численный алгоритм решения уравнений прогноза погоды» Г. И. Марчук исследует условие аппроксимации и устойчивости схем расщепления для решения задачи краткосрочного прогноза погоды и предлагает эффективные итерационные методы решения системы уравнений на этапе адаптации.

Завершающими работами этого цикла можно считать работы Г. И. Марчука, Г. Р. Контарева, Г. С. Ривина «Краткосрочный прогноз погоды по полным уравнениям на ограниченной территории» и Г. И. Марчука, В. И. Воробьева, В. П. Дымникова, Г. Р. Контарева «Неадиабатическая модель прогноза погоды по полным уравнениям» [3].

В настоящей книге помещена только первая работа, в которой подробно рассмотрена адиабатическая модель краткосрочного прогноза погоды (постановка задач и метод решения) и приведены результаты предварительных численных экспериментов.

Следует особо отметить, что завершающая версия неадиабатической модели краткосрочного прогноза погоды по полным уравнениям на ограниченной территории была внедрена в оперативную практику Западно-Сибирского УГМС в 1973 г.

Метод расщепления, последовательно развитый Г. И. Марчуком для решения задач краткосрочного прогноза погоды, в дальнейшем был с успехом применен при конструировании глобальных моделей общей циркуляции атмосферы (Г. И. Марчук, В. П. Дымников, В. Н. Лыкосов, В. Я. Галин, И. М. Бобылёва, В. Л. Перов «Глобальная модель общей циркуляции атмосферы»). Основная идея, которая была реализована при создании этой модели, заключалась в приведении исходной системы уравнений к специальной симметризованной

форме, что позволило построить разностные схемы решения такой системы, для которой закон сохранения полной энергии выполнялся абсолютно точно. При некоторых необременительных упрощениях этот закон был квадратичным, что автоматически обеспечивало вычислительную устойчивость алгоритма. С этой точки зрения реализованный алгоритм был уникальным (он остается уникальным и до настоящего времени). Построенная модель общей циркуляции атмосферы была оригинальной не только с точки зрения вычислительного алгоритма, но и с точки зрения физического описания процессов подсеточного масштаба.

Вообще на проблеме построения «оригинальных» моделей циркуляции атмосферы и моделей климата, которые строятся на базе моделей общей циркуляции атмосферы, стоит остановиться особо. Современные эксперименты с климатическими моделями показали, что статистические усреднения результатов моделирования климата по ансамблю моделей оказываются намного ближе к реальности, чем результаты, полученные с использованием даже лучших моделей. Это означает, что в определённом смысле «независимые» модели позволяют исключить систематические погрешности, которые естественно присутствуют в моделях, за счёт их взаимной некоррелированности. Направление моделирования общей циркуляции атмосферы и климата, сформулированные Г. И. Марчуком в начале семидесятых годов, продолжает активно развиваться и по настоящее время [4].

Уровень развития вычислительной техники, очевидно, является решающим фактором при определении суперзадач, которые возможно решить в данное конкретное время. Если следовать этому утверждению, то перед наукой всегда стоит проблема создания эффективных вычислительных алгоритмов для решения суперзадач.

В работе «К теории биортогональных разложений полей метеорологических элементов» Г. И. Марчук предложил использовать в качестве базисных функций для описания крупномасштабных метеополей собственные функции динамического оператора задачи, одновременно предлагая динамико-стохастическую модель прогноза. При этом, конечно, предполагается, что большая часть изменчивости крупномасштабных полей описывается лишь небольшим количеством собственных функций. Реализация этого подхода была осуществлена Г. И. Марчуком, В. В. Пененко, А. В. Протасовым в работе «Малопараметрическая модель динамики атмосферы спектрально-разностного типа», в которой для построения модели используются приближённые

собственные функции линеализованного оператора гидродинамической задачи, рассчитанные с помощью метода Галёркина в подпространстве, натянутом на систему естественных ортогональных функций.

Отметим, что естественным продолжением этих работ стала работа В. П. Дымникова [5], в которой было показано, что естественные ортогональные функции, описывающие низкочастотные (а следовательно, и крупномасштабные) колебания атмосферных процессов, должны быть близки к сингулярным векторам линеаризованного оператора.

Заключительные две работы, помещенные в данном разделе, посвящены разработке методов расчета переноса излучения в атмосфере и решению обратных задач спутниковой метеорологии. Важность этого направления для метеорологии очевидна и не требует комментариев.

В первой работе Г. И. Марчука «Уравнение для ценности информации с метеорологических спутников и постановка обратных задач» вводятся фундаментальные понятия ценности информации по отношению к заданным функционалам (в частности, показателям приборов на метеорологических спутниках) и строятся соответствующие уравнения для этих величин на базе сопряжённых уравнений для исходной задачи. Эта работа сыграла важную роль не только при решении задач спутниковой метеорологии, но и в чрезвычайно актуальном направлении современной геофизической гидродинамики – четырёхмерном усвоении данных.

В последней представленной в данном разделе работе, написанной Г. И. Марчуком совместно с Г. А. Михайловым, «О решении задач атмосферной оптики методом Монте-Карло» подробно исследуется применение метода Монте-Карло к задачам атмосферной оптики. Эта методология нашла широкое применение для решения самых разных физических задач, особенно с наступлением эры параллельных вычислительных систем.

Литература

1. Кобельков Г. М. Существование решения в целом для уравнений динамики океана // Доклады РАН. 2006. Т. 407, № 4. С. 457–459.
2. Друза А. В., Кобельков Г. М. О сходимости разностных схем для уравнений крупномасштабной динамики океана // Доклады РАН. 2011.

3. Марчук Г. И., Воробьев В. И., Дымников В. П., Контарев Г. Р. Краткосрочный прогноз погоды на основе решения уравнений гидродинамики методом расщепления // Тр. II Токийского симпозиума по численным методам прогноза погоды (Токио, 1968). Л., 1971. С. 81–93.

4. Дымников В. П., Лыкосов В. Н., Володин Е. М. и др. Моделирование климата и его изменений // В кн.: Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Т. 2. Математическое моделирование / под ред. В. П. Дымникова. М.: Наука, 2005. С. 36–173.

5. Дымников В. П. О связи естественных ортогональных составляющих полей метеоэлементов с собственными функциями динамического оператора // Изв. АН РАН, ФАО. 1988. Т. 24, № 7. С. 675–683.

К РАБОТАМ ПО ДИНАМИКЕ ОКЕАНА

В. Б. Залесный, А. С. Саркисян

Работы Г. И. Марчука в области математического моделирования циркуляции океана. В середине 70-х гг. 20 столетия – времени интенсивного развития численных методов и моделей прогноза погоды – Г. И. Марчук ставит задачу математического моделирования гидродинамики океана. В отличие от выполняемых в то время исследований в СССР и за рубежом, основное внимание он уделяет математическим и вычислительным методам решения задачи. Свои работы он основывает на фундаментальных результатах, полученных к этому времени им и его научной школой, в области ядерной физики, вычислительной математики и динамики атмосферы. С физической точки зрения, характерной особенностью его исследований в области океанологии является то, что основные усилия он сосредотачивает на постановке и решении задач бароклинной циркуляции океана – важного компонента формирования и изменчивости климата земли (Марчук, 1973; Marchuk, Sarkisyan, Kochergin, 1973; Марчук, Саркисян, 1986).

Выделим четыре основных направления, несомненный приоритет в которых принадлежит Г. И. Марчуку, а также которые интенсивно развиваются до настоящего времени его учениками и последователями. Три из них связаны с теоретическими исследованиями. Это – исследование корректности математических задач динамики океана;

создание экономичных схем их численного решения на основе методов расщепления; формулировка и решение прямых и обратных задач динамики океана с помощью метода сопряженных уравнений. Четвертое направление характеризует сочетание фундаментальных теоретических исследований и натурного эксперимента – крупнейшей в истории развития отечественной науки о климате научно-наблюдательной программы «Разрезы».

В теоретических исследованиях следует выделить несколько новых методологических приемов, введенных в рассмотрение Г. И. Марчуком.

Приведение уравнений динамики океана к эволюционной форме. В современных исследованиях океан рассматривается как несжимаемая бароклинная жидкость, расположенная в мелком сферическом вращающемся слое. Горизонтальные размеры океана примерно в 1000 раз больше вертикальных, сверху он ограничен свободной поверхностью примыкающей к атмосфере, снизу – рельефом дна, в горизонтальном сечении – это неодносвязная область со сложной границей. Модели крупномасштабной циркуляции океана основаны на «примитивных уравнениях» – системах дифференциальных уравнений с учетом приближений несжимаемости, Буссинеска и гидростатики. С математической точки зрения, это неклассические начально-краевые задачи. Одним из важных приемов преобразования исходных уравнений, впервые использованных Г. И. Марчуком в задачах динамики океана, является сведение системы к эволюционному виду – исключению из нее «диагностических» уравнений (Марчук, 1969). Это более удобный вид уравнений, упрощающий исследование математических свойств уравнений и построение схем расщепления для их численного решения.

Метод расщепления и выделение баротропного движения. Использование экономичных схем расщепления для численного решения эволюционных задач требует представления оператора задачи в виде суммы операторов более простой структуры (Г. И. Марчук, т. I). Причем для обеспечения устойчивости вычислений требуется сделать так, чтобы каждый расщепленный оператор был неотрицательным. Для сложных задач динамики океана представление оператора в виде суммы неотрицательных является нетривиальной задачей (Marchuk et al., 2005). Нахождение подходящего представления важно как с вычислительной, так и с физической точки зрения. Выделение энергетически сбалансированных этапов расщепления приводит к адекватному

описанию моделируемых физических процессов и энергетических переходов в дискретных моделях (Marchuk et al., 2005).

Как правило, для приведения уравнений динамики океана к эволюционному виду следует представить горизонтальные компоненты вектора скорости в виде осредненных по вертикали и отклонений от них. Прием выделения баротропной циркуляции часто используется в задачах динамики океана разными авторами. Однако мотивом при этом является вычислительный аспект: баротропная циркуляция резко выделяется в спектре океанических движений. Из работ Г. И. Марчука и его учеников следует, что вместе с повышением эффективности вычислительных алгоритмов использование данного приема дает возможность свести задачу к эволюционному виду и исследовать корректность постановки некоторых задач динамики океана (Марчук, Бубнов, 1979).

Метод сопряженных уравнений и энергоактивные зоны океана (ЭАЗО). В начале 70-х гг. Г. И. Марчук ввел в рассмотрение новый в задачах геофизической гидродинамики метод исследования, основанный на теории сопряженных уравнений. Прототипом методологии послужила работа, выполненная в области теории расчета ядерных реакторов «К теории сопряженных функций» (Марчук, Орлов, 1961). Первая работа в данном направлении, связанная с задачами динамики атмосферы и океана, опубликована в Препринте Вычислительного центра СО АН СССР в 1973 г. (Марчук, 1973). Первоначально теория сопряженных уравнений динамики атмосферы и океана использовалась Г. И. Марчуком для постановки и решения задач апостериорного анализа. Например, таких как задача о формировании температурных аномалий в атмосфере и океане, задача о чувствительности изменчивости климата для различных регионов земли (Г. И. Марчук, т. II). Следует отметить, что решение сопряженной задачи о чувствительности климата явилось теоретической основой проведения самой крупной в XX в. научно-наблюдательной программы исследования климатической изменчивости земли – программы «Разрезы» (Марчук, Дымников, Курбаткин, Саркисян, 1984). В дальнейшем метод сопряженных уравнений получил мощное развитие при решении обратных задач динамики атмосферы и океана и задач четырехмерной вариационной ассимиляции данных наблюдений. Особенностью современных исследований в данном направлении Г. И. Марчука и его учеников является сочетание многокомпонентного метода расщепления и мето-

да сопряженных уравнений (Г. И. Марчук, т. II; Агошков и др., 2010; Zalesny et al., 2010; Agoshkov, Zalesny, 2012).

Научная и научно-организационная деятельность. Программа «Разрезы». В научной и научно-организационной деятельности Г. И. Марчука особое место занимает формирование и научное руководство программой «Разрезы». Понимая важную роль Мирового океана в формировании короткопериодных колебаний климата, он пришел к выводу о необходимости организации широкомасштабных экспедиционных работ в океанах, направленных на изучение процессов взаимодействия атмосферы и океана. Изучение процессов совместной динамики атмосферы и океана было сосредоточено в зонах их наиболее интенсивного взаимодействия, для определения которых был использован аппарат сопряженных уравнений.

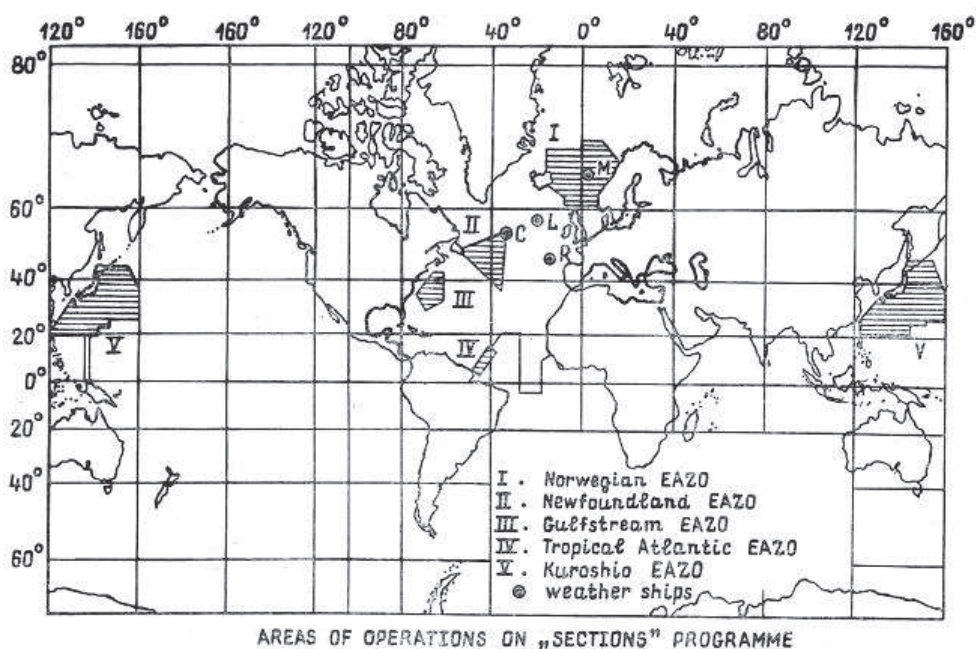


Рис. 1. Энергоактивные зоны океана, в которых проводились исследования по программе «Разрезы»

Физическая постановка задачи состояла в следующем. Предположим, что нас интересует значение функционала, описывающего среднюю температуру выделенной подобласти Земли, например, среднюю приземную температуру Европейской части России. Ставится зада-

ча нахождения локализованных в пространстве подобластей океана, в которых процессы его теплообмена с атмосферой вносят максимальный вклад в значение изучаемого функционала. Эти подобласти получили название энергоактивных зон океана (ЭАЗО), и именно в них были сосредоточена наблюдательная часть программы «Разрезы». С точки зрения объема судовых работ в акваториях Мирового океана, программа «Разрезы» имела беспрецедентный размах в истории развития отечественной и мировой науки. На рисунке 1 представлены те ЭАЗО, в которых были выполнены экспедиционные работы, а на рисунке 2, приведена общая структура программы «Разрезы».

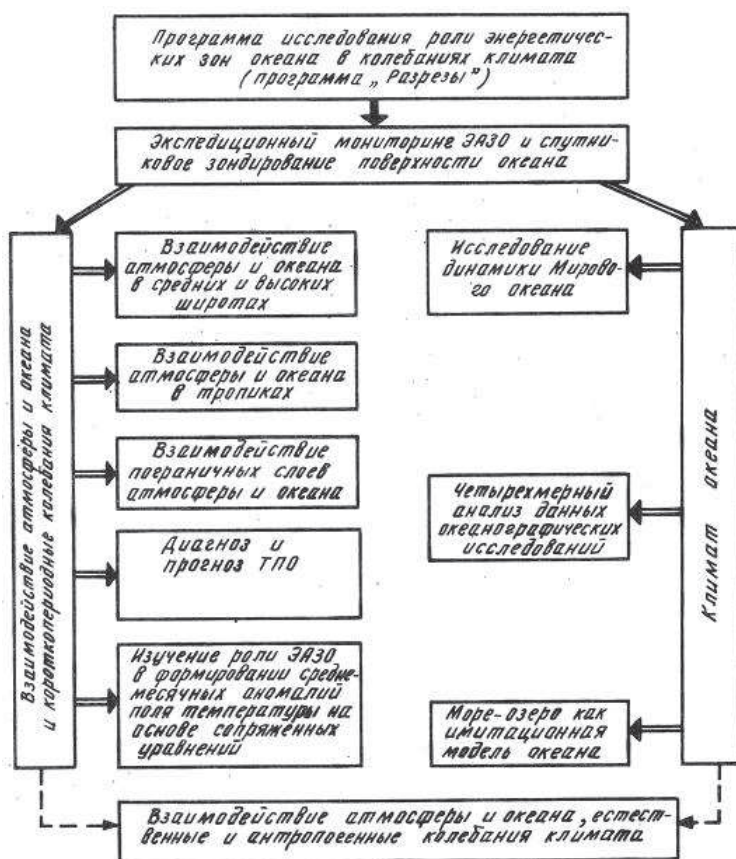


Рис. 2. Общая структура программы «Разрезы»

Анализ полученных в ходе экспедиционных работ данных наблюдений проводился с помощью численных моделей гидродинамики океана. Для обработки данных использовались динамико-стохастические

и вариационные методы, включая методы теории сопряженных уравнений, введенные в рассмотрение Г. И. Марчуком. Анализ данных измерений привел к более глубокому пониманию процессов взаимодействия атмосферы и океана в энергоактивных зонах и, как следствие, к улучшению математических моделей климата Земли.

Научно-исследовательские работы по программе «Разрезы» сопровождались обсуждениями на многочисленных всесоюзных и международных конференциях, их результаты опубликованы в десятках книг и сотнях научных статей. В годы проведения программы ВИНТИ открыл выпуск специальной издательской серии «Атмосфера, океан, космос – программа "Разрезы"». В серии было издано больше 10 томов научных трудов. Программа «Разрезы» стимулировала развитие работ не только по изучению Мирового океана, но и по изучению морей и озер в рамках темы «Море – озеро как имитационная модель океана» (рис. 2). Несмотря на то, что в программе «Разрезы» не выполнялись измерения в морях и озерах, успех работ и энтузиазм были так велики, что многие специалисты, занимающиеся моделированием гидродинамики Чёрного моря, Ладожского и Онежского озера, включились в работу под флагом этой программы. В результате интересы программы простирались от моделирования струйных океанских течений Гольфстрим и Куроисио, экваториальной динамики и Эль-Ниньо до объяснения причин формирования холодного промежуточного слоя в Черном море и циклонических циркуляций в крупных озерах.

В настоящее время эти исследования возродились в совместной программе научно-технического сотрудничества между Российской академией наук и Национальной академией наук Украины «Черное море как имитационная модель океана», проводимой под руководством Г. И. Марчука и Б. Е. Патона (Marchuk, Paton, 2012).

Крупнейшая в истории геофизической гидродинамики программа «Разрезы», научным руководителем которой был Г. И. Марчук, кардинально изменила наши представления об изменчивости термогидродинамических процессов в ЭАЗО и, следовательно, во всем Мировом океане.

В заключение приведем краткую информацию о некоторых, на наш взгляд, наиболее интересных работах Г. И. Марчука и его учеников в области математического моделирования циркуляции океана. Это позволит читателю лучше ориентироваться в материалах изложенных в данном томе.

О численном решении задачи Пуанкаре для океанической циркуляции // ДАН. 1969. Т. 185, № 5. С. 1041-1044. В работе рассмотрена линейная начально-краевая задача динамики бароклинного океана. Уравнения описывают колебания малой амплитуды в бассейне с постоянной глубиной. В результате разделения переменных формулируются две задачи: спектральная задача по вертикальной координате и начально-краевая задача, описывающая горизонтальную структуру решения для каждой вертикальной моды. Рассматриваемая далее вторая задача представляет собой систему линейных уравнений мелкой воды для горизонтальных компонент скорости и давления, зависящих от номера вертикальной моды. Для ее решения предложен неявный конечно-разностный алгоритм. На каждом шаге по времени задача сводится к уравнению для давления. В качестве граничных условий ставится условие обтекания, которое в терминах давления является условием Пуанкаре (или косой производной). Итерационный алгоритм решения задачи основан на методе расщепления по отдельным координатам. Матричный оператор, аппроксимирующий уравнение для давления, расщепляется на две матрицы, которые используются при построении переобусловливателя в итерационном методе минимальных невязок. Доказывается сходимость итерационного решения к точному решению системы алгебраических уравнений. Работа послужила теоретическим основанием формулировки и поиска эффективных алгоритмов решения подобного рода начально-краевых задач, возникающих при моделировании процессов динамики морей и океанов.

Марчук Г. И., Каган Б. А., Тамсалу Р. Э. Численный метод расчета приливных движений в окраинных морях // Изд. АН СССР. Серия : ФАО. 1969. Т. 5, № 7. С. 694–703, 1969. Предложен новый метод расчета приливных колебаний уровня моря и осредненных по вертикали компонент скорости приливного течения. Рассматривается численный метод решения линейных уравнений типа «мелкой воды», описывающих приливные колебания в морском бассейне. Проводится исследование устойчивости алгоритма и пример расчета главной лунной полусуточной волны прилива М₂ в Северном море. Новизна метода определяется двумя аспектами: постановкой задачи и оригинальностью численного алгоритма ее решения. Уравнения движения, в отличие от обычно используемых в океанографии уравнений мелкой воды, включают слагаемые, описывающие горизонтальный турбулентный обмен (или горизонтальную вязкость). Численный алгоритм решения задачи основан на комбинации методов переменных направ-

лений и расщепления по геометрическим координатам. Особенностью алгоритма является то, что давление исключается, а решение задачи по времени сводится к интегрированию двух уравнений относительно компонент вектора скорости.

К проблеме формирования термоклина в океане. 1970 г. Поставлена математическая задача, качественно описывающая поведение слоя скачка температуры (термоклин) в океане. Процесс формирования термоклина описывается уравнением (переноса) диффузии тепла в замкнутом трехмерном бассейне постоянной глубины с различными значениями коэффициента турбулентной вязкости по горизонтали и вертикали. Используя разделение переменных, выделяется спектральная задача по горизонтальным координатам. Решение исходной задачи представляется в виде разложения по собственным функциям горизонтального оператора Лапласа, и задача сводится к пространственно одномерному уравнению диффузии по вертикальной координате. Для каждой гармоники по горизонтали получается свое уравнение диффузии – уравнения отличаются друг от друга значением коэффициента горизонтальной диффузии. Коэффициент горизонтальной диффузии связывается с горизонтальным масштабом процесса и определяет время выхода решения пространственно одномерной задачи (по вертикали) на стационарный режим. Рассмотренная простая модель дает возможность качественно описать формирование термоклина в океане и связать характерное время его формирования с масштабом горизонтальной неоднородности источников тепла на поверхности океана.

G. I. Marchuk, R. G. Gordeev, V. Ya. Rivkind, B. A. Kagan. A numerical method for the solution of tidal dynamics equations and the results of its application // J. Comp. Phys. 1973. V. 13. Pp. 15-34. Рассматривается алгоритм решения уравнений приливов, основанный на методе переменных направлений. Аппроксимация уравнений динамики приливов производится методом конечных разностей. Доказывается устойчивость численной схемы и сходимость ее решения к точному решению дифференциальной задачи в предположении о достаточной гладкости решения. Алгоритм применяется для решения ряда практических задач и показывает хорошее соответствие данным наблюдений. Задача динамики приливов формулируется для осредненных по вертикали компонент скорости приливного течения и уровня моря. Это – система линейных уравнений мелкой воды с нелинейностью по коэффициенту трения о дно и слагаемыми, описывающими горизонталь-

ную турбулентную вязкость в уравнениях движения. Уравнения аппроксимируются по пространству методом конечных разностей, в качестве алгоритма решения по времени используется метод переменных направлений. На каждом шаге по времени давление исключается, и задача сводится к решению уравнений для двух компонент вектора скорости. Алгоритм состоит в решении методом прогонки трехточечных уравнений по отдельным координатам.

Марчук Г. И., Залесный В. Б., Кузин В. И. О методах конечных разностей и конечных элементов в задаче глобальной ветровой циркуляции // ФАО. 1975. Т. 11, № 12. С. 1294–1300. Рассматривается задача о ветровой циркуляции в Мировом океане. Задача формулируется для осредненных по вертикали стационарных уравнений движения и неразрывности. Аппроксимация уравнений проводится с помощью двух методов: конечных разностей и конечных элементов. Общим свойством обеих схем является недиссипативная аппроксимация кососимметрической части дифференциального оператора задачи. При пространственной аппроксимации задачи использованы два подхода. При применении метода конечных разностей аппроксимация строится следующим образом. Вначале аппроксимируется исходная система дифференциальных уравнений, вводится разностная функция тока, а затем с помощью алгебраических преобразований задача сводится к одному матричному уравнению для функции тока. При использовании метода конечных элементов вначале дифференциальная задача записывается в терминах функции тока, затем вводится ее обобщенная формулировка и применяется метод Галеркина для аппроксимации по пространству. В качестве базисных функций на равномерной триангуляции используются кусочно-линейные функции. Численные эксперименты показывают качественное согласие результатов. Наибольшие отличия между двумя решениями наблюдаются локально, у границ материков. Отметим, что на основе данной работы, аппроксимируя исходную систему уравнений в терминах методом конечных разностей, можно построить схему эквивалентную схеме конечных элементов (Марчук, Дымников, Залесный, 1987).

Марчук Г. И., Бубнов М. А. О приближенном решении задач динамики приливов на основе метода конечных элементов // Препринт ВЦ СО АН СССР, 1976. В работе рассматривается трехмерная линейная задача гармонической теории приливов с учетом вертикального турбулентного обмена. Доказывается теорема о единственности обобщенного решения дифференциальной задачи, а с помощью ме-

тогда Галеркина строится проекционно-разностная для решения соответствующей краевой задачи. Исследован вопрос о скорости сходимости галеркинских приближений к обобщенному решению исходной задачи. Рассмотренный подход дает регулярный способ построения вариационно-разностных схем для решения класса задач линейной теории приливов и океанических циркуляций.

Марчук Г. И., Бубнов М. А. Вариационно-разностный метод решения задач теории приливов и циркуляций в бароклинном океане // ФАО. 1981. Т. 17, № 6. С. 614–624. Изложены результаты исследования и обоснования вариационно-разностных схем решения стационарных линейных задач теории бароклинных приливов и циркуляций. Задачи формулируются для гармонических составляющих компонент решения: уровня моря, скорости и плотности морской воды. Основная особенность работы состоит в изучении математических свойств решений поставленных дифференциальных задач, их аппроксимации методом конечных элементов и обоснованием алгоритмов их численного решения. Это – неклассические задачи математической физики, и они требуют специального исследования данных вопросов. Формулируются обобщенные постановки двух основных задач, отличающихся граничными условиями на дне – скольжения и прилипания. Для условия скольжения задача переформулируется в терминах «уровень моря – плотность». Строится вариационно-разностная схема для системы эллиптических уравнений второго порядка с естественными граничными условиями для уровня моря и коэффициентов разложения плотности в ряд по собственным функциям «вертикального» оператора. Для условия прилипания метод Галеркина (с кусочно-линейными и кусочно-постоянными финитными базисными функциями специального вида) применяется непосредственно к исходной системе уравнений, записанной в терминах «скорость – уровень – плотность». Изучаются вопросы разрешимости дифференциальных задач, их вариационно-разностных аппроксимаций, сходимости разностных решений к решению дифференциальных задач, выбора итерационных алгоритмов их решения.

Марчук Г. И., Бубнов М. А., Залесный В. Б., Кордзадзе А. А. Математическое моделирование морских течений, приливных волн и разработка численных алгоритмов // «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики». Новосибирск: Наука, 1983. С. 155–165. Рассматриваются две задачи динамики морских течений и теории приливов в бароклинном океане. Для опи-

сания морских течений в океане формулируется задача в терминах полной нелинейной системы уравнений в приближениях гидростатики, неразрывности и линейного уравнения состояния морской воды. Формулируется метод численного решения задачи. Метод основан на двуциклическом расщеплении оператора исходной задачи, по времени используется схема Кранка-Николсона. Постановка задачи теории приливов в бароклинном океане приводится в терминах гармонических составляющих. Построение пространственной аппроксимации уравнений теории приливов проводится методом Галеркина. Для решения полученной системы дискретных уравнений формулируется итерационный процесс, а также определяются достаточные условия его сходимости.

Marchuk, Schroter, Zalesny. Mathematical modeling of the World Ocean general circulation: numerical technique and multiple equilibria of model solution // J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2003. Рассматривается задача о формировании множественных равновесных режимов глобальной циркуляции океана при одинаковом заданном на поверхности атмосферном воздействии. Различие решений определяется различным запасом тепла и соли в начальный момент времени. Уравнения модели формулируются в сигма-системе координат. Модель предназначена для проведения численных экспериментов на длительные периоды времени. Численный алгоритм модели основан на неявных схемах расщепления и показывает высокую эффективность расчетов. Пространственное разрешение модели $5 \times 4 \times 12$, шаг по времени – 32 часа. Модель используется для расчета и анализа установившихся режимов термохалинной циркуляции под воздействием заданных на поверхности Мирового океана сезонного хода ветра, температуры и солёности. В начальный момент времени поле скорости задается равным нулю, температура и солёность постоянны во всей области, заданные константы.

Представляются результаты четырех численных расчетов при разных начальных значениях температуры и солёности. Численные эксперименты проводятся до установления квазиравновесного режима на срок 4000 лет. В результате расчетов в каждом из четырех экспериментов, при одинаковом внешнем воздействии на поверхности океана, достигается индивидуальный режим квазиравновесной термохалинной циркуляции. Ключевым механизмом формирования особенностей квазиравновесного режима является процесс нелинейной глубокой конвекции. Расчеты показывают, что глобальные средние значения

температуры и солёности являются важными характеристиками, от которых зависит квазиравновесное состояние океана. Ранее в литературе формирование множественных режимов глобальной циркуляции океана при одинаковом атмосферном воздействии связывалось с постановкой на поверхности океана различных типов краевых условий для температуры и солёности.

Marchuk et al. Splitting Numerical Technique with Application to the High Resolution Simulation of the Indian Ocean Circulation // Pure and Applied Geophysics, 2005. Представляется численная модель общей циркуляции океана, разработанная в Институте вычислительной математики. Модель основана на полных нелинейных уравнениях динамики океана, записанных в приближениях Буссинеска, гидростатики и «твёрдой крышки». Уравнения модели выписываются в сферической криволинейной сигма-системе координат. Основная особенность модели заключается в том, что численная техника ее решения основана на методе расщепления по физическим процессам и пространственным координатам. Уравнения гидродинамики океана записываются в специальной симметризованной форме. Форма записи уравнений выбирается такой, чтобы было удобно представить оператор дифференциальной задачи в виде суммы более простых операторов, каждый из которых является неотрицательным в норме, определяемой законом сохранения полной энергии. Это дает возможность расщепить оператор полной задачи на ряд более простых и построить пространственные аппроксимации соответствующих групп слагаемых так, чтобы «энергетическому» соотношению (закону сохранения), выполняющемуся для исходной дифференциальной задачи, удовлетворяли все расщепленные дискретные задачи. Обращается внимание на выбор специальной, симметризованной формы записи уравнений динамики океана в сигма-системе координат. Приводится форма уравнений, позволяющая уменьшить ошибку аппроксимации горизонтальных градиентов давления на заданном профиле вертикальной стратификации по плотности. Приводятся постановка и результаты численного эксперимента по моделированию муссонной циркуляции в северной части Индийского океана в вихревом режиме. Пространственное разрешение модели составляют: шаги сетки по широте, долготе и число сигма – уровней по вертикали. Модель адекватно воспроизводит муссонную циркуляцию Индийского океана. Высокое разрешение дает возможность воспроизвести не только общую структуру муссонных

течений, но и описать локальные особенности ее пространственно-временной изменчивости.

Литература

1. Марчук Г. И., Орлов В. В. К теории сопряженных функций // Нейтронная физика. М.: Госатомиздат, 1961. С. 30–45.
2. Марчук Г. И. О численном решении задачи Пуанкаре для океанических циркуляций // ДАН. 1969. Т. 185, № 5. С. 1041–1044.
3. Марчук Г. И. Основные и сопряженные уравнения динамики атмосферы и океана. Новосибирск: Препринт ВЦ СО АН СССР, 1973. 48 с.
4. Marchuk G. I., Sarkisyan A. S., Kochergin V. P. Calculations of Flows in a Baroclinic Ocean: Numerical Methods and Results // Geophysical Fluid Dynamics. 1973. V. 5. Pp. 89–100.
5. Марчук Г. И. Физика атмосферы и океана и проблема прогноза погоды // Метеорология и гидрология. 1976. № 10. С. 3–14.
6. Программа исследования взаимодействия атмосферы и океана в целях изучения короткопериодных изменений климата (программа «Разрезы») / под ред. Г. И. Марчука. М., 1983.
7. Марчук Г. И., Дымников В. П., Курбаткин Г. П., Саркисян А. С. Программа «Разрезы» и мониторинг Мирового океана // Метеорология и гидрология. 1984. № 8. С. 9–17.
8. Марчук Г. И., Саркисян А. С. Программа «РАЗРЕЗЫ» и моделирование циркуляции вод Мирового океана // В сб. Численное моделирование климата Мирового океана / под ред. Г. И. Марчука. М., 1986. 208 с.
9. Проект научной программы по исследованию роли энергоактивных зон океана (ЭАЗО) в колебаниях климата / под ред. Г. И. Марчука. М.: Гидрометеиздат, 1989. 100 с.
10. Marchuk G. I., Rusakov A. S., Zalesny V. B., Diansky N. A. Splitting Numerical Technique with Application to the High Resolution Simulation of the Indian Ocean Circulation // Pure Appl. Geophysics. 2005. V. 162. Pp. 1407–1429.
11. Агошков В. И., Ипатова В. М., Залесный В. Б., Пармузин Е. И., Шутяев В. П. Задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений для моделей общей циркуляции океана и методы их решения // Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46, № 6. С. 734–770.

12. Zalesny V. B., Marchuk G. I., Agoshkov V. I., Gusev F. V., Diansky N. A., Volodin E. M., Tamsalu R. Numerical modeling of the large-scale ocean circulation on the base of multicomponent splitting method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. 2010. V. 25, № 6. Pp. 581–609.

13. Agoshkov V. I., Zalesny V. B. Variational data assimilation technique in mathematical modeling of ocean dynamics // Pure and Applied Geophysics. 2012. V. 169, No. 3. Pp. 555–578.

14. Marchuk G. I., Paton B. E. The Black Sea as a simulation ocean model // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. 2012. V. 27, № 1. Pp. 1–4.

К РАБОТАМ ПО ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

В. П. Дымников

Работы Г. И. Марчука по проблеме взаимодействия атмосферы и океана оказали сильное стимулирующее влияние на развитие этого направления гидрометеорологической науки. В 1979 г. Г. И. Марчук выступил с докладом на Всемирной климатической конференции [1], в котором огласил идею энергоактивных зон Мирового океана, описание взаимодействия атмосферы и океана в которых представляется наиболее важным с точки зрения описания аномалий температурного режима и циркуляции атмосферы на больших временных масштабах. Мировое научное сообщество позитивно восприняло эту идею (правда, определяя такие зоны как ключевые). В частности, на идее ключевой зоны была сформулирована международная программа ТОГА – тропический океан и глобальная атмосфера.

Эти работы Г. И. Марчука условно можно разбить на две группы.

К первой группе относятся работы, выполненные в рамках «классического» направления – создания глобальных совместных моделей общей циркуляции атмосферы и океана (основы современных климатических моделей). Это направление предполагает прямое численное моделирование как самого климата, так и его изменений под влиянием различных внешних воздействий (в том числе и антропогенных). Задача относится к классу суперзадач – в любое время уровень конструируемой модели будет по существу определяться уровнем доступ-

ной вычислительной техники, и, следовательно, для ее решения всегда требуется создание эффективных вычислительных методов, адаптированных к вычислительным системам.

В этом смысле можно с уверенностью утверждать, что реализация разработанной под руководством Г. И. Марчука первой в стране совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана была в то время большим не только научным, но и технологическим достижением (см. работы 1 и 2 этого раздела). В дальнейшем это направление получило развитие в работах учеников Г. И. Марчука [2].

Вторая группа опубликованных в данном разделе работ посвящена методам диагноза и прогноза совместной циркуляции атмосферы и океана, основанным на использовании специальным образом сформулированных сопряженных уравнений для нелинейной системы уравнений атмосферы и океана (идея, которая ранее была реализована Г. И. Марчуком для линейных операторов при исследовании задач нейтронной физики и спутниковой метеорологии).

Метод построения сопряженных уравнений для нелинейных уравнений, предложенный Г. И. Марчуком, основан на идее квазилинеаризации, что приводит к неединственности сопряженного оператора [3]. Для уравнений геофизической гидродинамики Г. И. Марчук интуитивно провел квазилинеаризацию, с физической точки зрения, правильно, что можно показать, если перейти к лагранжевым координатам. Отметим, что класс задач, который можно исследовать с помощью таким образом сформулированных сопряженных уравнений, удовлетворяющих тождеству Лагранжа в нелинейном случае, в настоящее время мало исследован. В качестве примера в него можно включить диагностические исследования (см. работу Г. И. Марчука и Ю. Н. Скибы «Численный расчёт сопряженной задачи для модели термического взаимодействия атмосферы и океана») или направление, связанное с построением разностных аппроксимаций для систем уравнений, обладающих некоторым множеством инвариантов [4].

В первой работе «Основные и сопряженные уравнения динамики атмосферы и океана» построены системы сопряженных уравнений для атмосферы и океана и сформулированы функционалы, которые наиболее интересны, с точки зрения автора, для решения задачи долгосрочного прогноза погоды.

Во второй работе «Методы долгосрочного прогноза погоды на основе решения основных и сопряженных задач» Г. И. Марчук исследует возможность применения сформулированной в первой работе мето-

дики для решения некоторых задач долгосрочного прогноза погоды. Явное выражение для осредненных по времени и пространству решений задачи прогноза погоды дает наглядную возможность исследовать вклад аномалий источников нагревания в формирование «аномалий» функционалов при различных временных и пространственных усреднениях. Эта задача частично была решена Г. И. Марчуком совместно с Ю. Н. Скибой в работе «Численный расчет сопряженной задачи для модели термического взаимодействия атмосферы и океана». В этой работе из всей системы уравнений гидротермодинамики атмосферы и океана выбраны два уравнения – уравнения переноса тепла в атмосфере и океане – и для них построена система сопряженных уравнений. Следует особо отметить, что здесь последовательно применена техника построения сопряженных уравнений именно для нелинейной задачи (техника квазилинеаризации – фиксации всех компонентов скорости), а не для задачи линеаризованной. Работа имела большой резонанс в печати и часто она трактовалась с точки зрения построения сопряженных уравнений для линейной задачи, что неверно. В данном конкретном случае система сопряженных уравнений для нелинейной системы распадается на две системы, одна из которых решается независимо. Выбирая соответствующие функционалы, авторы идентифицировали области Мирового океана, взаимодействие с атмосферой в которых вносит наиболее существенных вклад в формирование возмущений функционалов. Эти зоны впоследствии были названы Г. И. Марчуком энергоактивными зонами Мирового океана (ЭАЗО). Изучению взаимодействия атмосферы и океана в этих зонах была посвящена специальная научная программа «Разрезы», которую возглавлял Г. И. Марчук.

Отметим, что в такой постановке роль аномалий динамики в формировании вариаций функционалов не рассматривается. Чтобы учесть этот факт, приходится использовать полные уравнения для вариаций и строить сопряженные уравнения для них. Эта техника изложена в работе Г. И. Марчука и В. В. Пененко «Исследование чувствительности дискретных моделей динамики атмосферы и океана».

Для исследования чувствительности системы к малым возмущениям на малых временах техника «работает» хорошо (это было подтверждено в работах по четырехмерному усвоению данных), однако это не так на больших временах в силу неустойчивости по Ляпунову решений исходной линеаризованной системы, а следовательно, и сопряженной к ней. Это препятствие частично устраняется, если усреднить

решение сопряжённой задачи по ансамблю всех возможных реализаций. Тогда мы приходим к результатам, эквивалентным в определённом смысле формулировке диссипационно–флуктуационных соотношений [5].

Литература

1. Марчук Г. И. Моделирование изменений климата и проблемы долгосрочного прогноза погоды // Мат. Всемирной конференции экспертов по климату. Женева, 1971. С. 101–110.

2. Дымников В. П., Лыкосов В. Н., Володин Е. М., Галин В. Я., Глазунов А. В., Грицун А. С., Дианский Н. А., Толстых М. А., Чавро А. И. Моделирование климата и его изменений // В кн.: Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Т. 2. Математическое моделирование / под ред. В. П. Дымникова. М.: Наука, 2005. С. 36–173.

3. Владимиров В. С., Марчук Г. И. Об определении сопряжённого оператора для нелинейных задач // Докл. РАН. 2000. Т. 372, № 2. С. 165–168.

4. Дымников В. П. Сопряжённые уравнения, интегральные законы сохранения и консервативные разностные схемы для уравнений динамики двумерной идеальной несжимаемой жидкости // Доклады РАН. 2002. Т. 386, № 3. С. 320–322.

5. Дымников В. П., Грицун А. С. Современные проблемы математической теории климата // Известия РАН. Серия: Физика атмосферы и океана. 2005. Т. 41, № 3. С. 294–314.

К РАБОТАМ ПО ПРОБЛЕМАМ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

А. Е. Алоян

Одной из центральных проблем современной физики атмосферы и охраны окружающей среды является математическое моделирование изменчивости газового и аэрозольного состава атмосферы, а также оценка влияния атмосферных примесей на окружающую среду. Различные аспекты задач охраны окружающей среды исследовались в рамках многих международных программ (UNEP – программы ООН по окружающей среде, ЕМЕР – программы сотрудничества по мониторингу и оценке переноса на большие расстояния загрязняющих

веществ над европейской территорией; EUROTRAC – экспериментальной программы по переносу и трансформации экологически важных газовых составляющих в тропосфере над Европейским регионом; IGBP – международной программы по исследованию геосферы и биосферы и др.). В 1977 г. была создана «Совместная программа наблюдения и оценки распространения загрязняющих веществ на большие расстояния» Европейской экономической комиссией ООН при активном участии Всемирной метеорологической организации (ВМО) и поддержке международной программы ЕМЕР. В рамках этих программ решался широкий круг задач, в том числе загрязнение окружающей среды газовыми компонентами антропогенного и природного происхождения в больших городах и в отдельных регионах или странах; загрязнение водных акваторий и почв; трансграничный перенос загрязнений и формирование кислотных осадков; химические превращения в атмосфере и удаление из стратосферы малых газовых и аэрозольных компонентов; оценка вклада различных парниковых газов в формировании эффекта и связанных с этим изменений климата; оценка влияния вулканов на изменчивость газового и аэрозольного состава атмосферы; формирование аэрозолей из газопредшественников; формирование стратосферных полярных и сульфатных облаков; исследование изменчивости стратосферного озона в полярных регионах и др.

В соответствии с задачами, рассматриваемыми в вышеуказанных международных программах, в нашей стране такие исследования проводились под руководством Г. И. Марчука сначала в Вычислительном центре СО АН СССР, затем в Институте вычислительной математики РАН. В этих исследованиях основное внимание уделялось решению двух важных проблем. Первая проблема связана с построением конструктивных алгоритмов математического моделирования глобального и трансграничного переноса загрязняющих веществ в атмосфере с использованием основных и сопряженных уравнений. Это позволяет эффективно оценить функции чувствительности отдельных стран или континентов к загрязнению. Для расширения возможностей моделирования к базовым элементам, описывающим физические процессы, добавляются дополнительные конструкции в виде функционалов, описывающих обобщенные характеристики процессов, данных и моделей. С помощью этих функционалов порождаются различные сопряженные задачи, методы обратного моделирования, теории чувствительности, оптимизации и т. д. Для проведения такого типа исследований широ-

ко использовались методы и алгоритмы решения сопряженных задач. Новизна заключается в том, что для оценки антропогенной нагрузки на отдельных регионах и континентах используются оригинальные алгоритмы с использованием сопряженных функций, предложенные акад. Г. И. Марчуком. Общее количество примеси в конкретной области можно получить, используя решение сопряженной задачи. По существу, решение сопряженной задачи является весовой функцией, определяющей вклад каждого источника загрязнения в величину загрязнения атмосферы в выделенной подобласти. Поэтому она характеризует степень опасности (экологического риска) загрязнения атмосферы в подобласти от источника, который может находиться в любой точке всей области, т. е. вклад источника в функционале равен произведению мощности выброса на значение сопряженной функции. Пространственно-временная структура решения сопряженных задач дает информацию о том, какие зоны могут оказать то или иное влияние на загрязнение конкретного выбранного региона. Математические модели и базовые алгоритмы для решения этих задач детально изложены в книгах Г. И. Марчука [1–3].

Практическое применение этих алгоритмов для решения конкретных задач в области охраны окружающей среды в региональном и глобальном масштабах изложено в работах [4–8].

Для задач окружающей среды важной проблемой является перенос и трансформация стойких органических веществ естественного и антропогенного происхождения. Важность изучения пространственно-временной изменчивости этих веществ обусловлена их долгоживучестью и способностью аккумулироваться в почве и водной среде, что может привести к негативным экологическим последствиям. Для решения этой задачи впервые построена численная модель глобального переноса стойких органических веществ в Северном полушарии [9]. В модели учитывается ряд физических механизмов, ответственных за эволюцию этих веществ в окружающей среде с учетом их деградации в различных средах (атмосфера, вода, почва). В этих работах рассматриваются следующие, с практической точки зрения, важные задачи:

- формирование городского острова тепла и загрязнение больших городов;
- трансграничный и глобальный перенос примесей в атмосфере с использованием основных и сопряженных уравнений. С помощью

этих моделей вычислены функции чувствительности отдельных стран и континентов к загрязнению;

– решение оптимизационных задач по регулированию мощности источников с целью минимизации наносимого ущерба на окружающую среду. Решение этих задач сводится к решению задач линейного или квадратичного программирования. Численные эксперименты проводились для Байкальского и Московского регионов.

Вторая проблема связана с построением базовой модели динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере в региональном и глобальном масштабах. Основные принципы её построения изложены в книге [10]. Модели и алгоритмы, описанные в этой книге, получили дальнейшее развитие в Институте вычислительной математики РАН. Они служили основой для построения базовой модели газовой и аэрозольной динамики с детальным учетом кинетических процессов трансформации. В течение нескольких десятилетий Г. И. Марчуком и учениками разработаны новые математические модели для описания процессов трансформации газовых примесей и аэрозолей в атмосфере и построения единой модели, учитывающей все основные взаимосвязанные кинетические процессы газовой и аэрозольной динамики. Эти процессы обусловлены как атмосферной циркуляцией, так и трансформацией газовых и аэрозольных примесей. Основные механизмы – это динамика атмосферных процессов, химические и фотохимические реакции, протекающие в газовой и жидкой фазах, а также кинетические процессы нуклеации, конденсации/испарения и коагуляции, ответственные за формирование и эволюцию аэрозолей. Эти исследования первоначально имели исследовательский характер, но в дальнейшем были успешно использованы и для решения конкретных прикладных задач охраны окружающей среды в городском, региональном и глобальном масштабах.

Совместные модели гидротермодинамики мезомасштабных атмосферных процессов и переноса многокомпонентных газовых примесей с учетом фотохимической трансформации изложены в работе [11]. Дальнейшим развитием исследований являлось построение модели аэрозольной динамики с учетом кинетических процессов конденсации и коагуляции [11–13].

Впервые была построена совместная модель гидротермодинамики и переноса многокомпонентных аэрозолей в атмосфере с учетом кинетических процессов коагуляции. Используются интегро-дифференциальное уравнение Смолуховского с учетом всех режимов столк-

новения частиц и неравновесная функция распределения частиц по размерам. Данный подход является более точным для описания эволюции спектра размеров частиц по сравнению с обобщенным подходом, используемым во многих зарубежных моделях аэрозольной динамики. Однако известно, что при определенных условиях равновесие устанавливается довольно медленно по отношению к временному масштабу протекания других процессов. Для решения задачи нуклеации и конденсации используется метод «частиц», который обладает высокой точностью. При этом зависимость скорости роста учитывается для произвольного режима обмена между паром и поверхностью частицы. Результаты практического применения разработанной модели для расчета дальнего переноса и сопровождающих его конденсационных процессов приведены в работе [14]. В указанных выше работах для образования частиц из газов-предшественников первоначально была использована модель гомогенной нуклеации. Дальнейшие исследования показали, что значение скорости нуклеации, рассчитанное по модели гомогенной нуклеации в атмосферных условиях, занижено, поскольку не учитывается роль водяного пара в процессе формирования частиц новой фазы из газов-предшественников. В результате усовершенствования модель гомогенной нуклеации была заменена моделью гомогенной бинарной нуклеации в системе, состоящей из паров серной кислоты и воды. Сопоставление результатов расчетов, проведенных по совместной модели газовой и аэрозольной динамики, с данными наблюдений показали их хорошее согласие, включая и нуклеационную моду. Дальнейшие усовершенствования модели газовой и аэрозольной динамики касались учета гетерогенных процессов на поверхности частиц с учетом массообмена на разделе газ – частица. В результате проведенных исследований впервые была разработана базовая модель с учетом основных физических и химических механизмов. Базовая модель состоит из следующих основных блоков: перенос и диффузия многомерных и многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей в атмосфере; фотохимическая трансформация; гомогенная бинарная/тернарная нуклеация для воспроизведения формирования частиц новой фазы из газов-предшественников; система квазилинейных кинетических уравнений конденсации/испарения; система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений коагуляции; гетерогенные процессы на поверхности частиц с учетом массообмена на разделе газ – частица с использованием газофазных и жидкофазных химических реакций. Эти взаимосвязанные процессы рас-

сматриваются в рамках общей модели, что позволяет следить за эволюцией газовых компонентов и аэрозолей, начиная с молекулярного уровня до образования частиц размером в несколько микрон. Описание комплексной модели газовой и аэрозольной динамики приведено в работах [15, 16].

Численные алгоритмы, разработанные под руководством Г. И. Марчука, в дальнейшем были использованы учениками для построения математической модели влажной конвекции и формирования облачности с явным описанием микрофизических процессов для водного и двухфазного облака (вода – лед). В обобщенном виде эти модели изложены в работе [17], изданной под редакцией Г. И. Марчука. Эти алгоритмы были успешно применены также и при построении совместной модели динамики атмосферы при больших температурных перепадах (лесные пожары) и динамики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере [18, 19].

Значительный интерес в области физики атмосферы представляет проблема образования сульфатных аэрозолей в стратосфере и верхней тропосфере и формирования аэрозольного слоя Юнге. Это объясняется тем, что сульфатные частицы размерами от 0,1 до 1 мкм играют заметную роль в поглощении и рассеивании коротковолнового солнечного излучения, ослабляя прямое глобальное радиационное воздействие на климатическую систему. Кроме того, в стратосфере эти частицы могут катализировать гетерогенные химические процессы, тем самым влияя на озоновый слой Земли. Одним из первых на эту проблему обратил внимание Turco [20]. В рамках одномерной модели авторы детально излагают физическую постановку задачи и основные физические механизмы, ответственные за формирование сульфатного аэрозольного слоя в стратосфере. Такие модели успешно воспроизводят некоторые из наблюдаемых свойств стратосферного аэрозоля и могут быть полезными для предсказания отдельных физических процессов. Однако в этих моделях процессы конденсации и коагуляции представлены в упрощенном виде, что не позволяет учитывать взаимодействие частиц во всех режимах столкновения как для мельчайших частиц, так и для частиц сравнительно больших размеров. Тем не менее эти работы послужили толчком для разработки новых математических моделей. В ИВМ РАН впервые была разработана комплексная математическая модель глобального переноса сульфатных аэрозольных частиц в тропосфере и нижней стратосфере с использованием разработанной базовой модели газовой и аэро-

зольной динамики, описанной в работе [21]. Особое внимание при этом уделяется механизмам образования мельчайших частиц нуклеационной моды из газов-предшественников. При проведении численных экспериментов учитывались антропогенные и биогенные источники с поверхности континентов и океанов. Они позволили воспроизвести пространственно-временную изменчивость газовых примесей и аэрозолей в атмосфере Северного и Южного полушарий для летнего и зимнего периодов года.

Литература

1. Марчук Г. И., Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
2. Марчук Г. И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992.
3. Marchuk G. I. Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. Kluwer, 1995.
4. Марчук Г. И., Пененко В. В., Алоян А. Е., Лазриев Г. Л. Численное моделирование микроклимата города // Метеорология и гидрология. 1979. № 8. С. 5–15.
5. Марчук Г. И., Пененко В. В., Алоян А. Е., Протасов А. В. Структура математических моделей в гидродинамических задачах окружающей среды // В кн: Актуальные проблемы прикладной математики и математического моделирования. Новосибирск: Наука, 1982. С. 125–137.
6. Марчук Г. И., Алоян А. Е. Математическое моделирование в задачах экологии. Препринт ОВМ АН, 1989. №234.
7. Марчук Г. И., Алоян А. Е. Глобальный перенос примеси в атмосфере // Известия АНю Серия: Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31, № 5. С. 597–606.
8. Марчук Г. И., Алоян А. Е., Арутюнян В. О. Сопряженные уравнения и трансграничный перенос примесей // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2005. № 2. С. 54–64.
9. Марчук Г. И., Алоян А. Е., Арутюнян В. О. Численное моделирование глобального переноса стойких органических веществ в окружающей среде // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2005. № 1. С. 57–66.
10. Марчук Г. И., Кондратьев К. Я. Приоритеты глобальной экологии. М.: Наука, 1992.

11. Aloyan A. E., Arutyunyan V. O., Marchuk G. I. Dynamics of mesoscale boundary atmospheric layer and impurity spreading with the photochemical transformation allowed for // *Russ. J. Numer. Analysis Math. Modelling*. 1995. V. 10, № 2. Pp. 93–114.

12. Aloyan A. E., Lushnikov A. A., Makarenko S. V., Marchuk G. I., Zagaynov V. A. Mathematical modeling of the atmospheric aerosol transfer with coagulation taken into account // *Russ. J. Numer. Analysis Math. Modelling*. 1993. V. 8, № 1. Pp. 17–30.

13. Aloyan A. E., Egorov V. D., Marchuk G. I., Piskunov V. N. Aerosol formation mathematical modelling with consideration for condensation kinetics // *Russ. J. Numer. Analysis Math. Modelling*. 1992. V. 7, № 6. Pp. 457–471

14. Марчук Г. И., Алоян А. Е., Пискунов В. Н., Егоров В. Д. Распространение примесей в атмосфере с учетом конденсации // *Известия АН. Серия: Физика атмосферы и океана*. 1996. Т. 32, № 5. С. 745–752.

15. Марчук Г. И., Алоян А. Е. Динамика и кинетика газовых примесей и аэрозолей в атмосфере и их значение для биосферы // *Журнал Биосфера*. 2010.

16. Марчук Г. И., Алоян А. Е. Математическое моделирование региональных задач окружающей среды // *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. 2004. № 1.

17. Алоян А. Е. Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. М.: Наука, 2008. 415 с.

18. Алоян А. Е. Моделирование динамики аэрозолей при лесных пожарах // *Известия АН. Серия: Физика атмосферы и океана*. 2009. Т. 45, № 1. С. 1–14.

19. Алоян А. Е., Арутюнян В. О., Моделирование динамики аэрозолей и формирования облачности при лесных пожарах // *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. 2008. № 3.

20. Turco R. P., Whitten R. C., Toon O. B. Stratospheric aerosols: Observations and theory // *Rev. Geophys.* 1982. V. 20. Pp. 233–279.

21. Марчук Г. И., Алоян А. Е., Ермаков А. Н., Арутюнян В. О. Формирование сульфатных аэрозолей в тропосфере и нижней стратосфере // *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. 2011. № 4. С. 55–68.

Издатель – Российская академия наук

Публикуется в авторской редакции

Издается по решению Научно-издательского совета
Российской академии наук (НИСО РАН)
и распространяется бесплатно

Оригинал–макет подготовлен в ООО «Амирит»

Подписано в печать 23.04.2018 г.

Формат 70×100 1/16. Гарнитура Times New Roman. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 51,85. Тираж 100 экз. Заказ № 47/29117.

Отпечатано в типографии ООО «Амирит»,
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 88.

Тел.: 8-800-700-86-33 | (845-2) 24-86-33

E-mail: zakaz@amirit.ru

Сайт: amirit.ru