

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОСЦИЛЯТОРА-ЦИЛИНДРА С ДВИЖУЩИМСЯ ЛЕДОВЫМ ПОКРОВОМ

Индейцев Д.А., Абрамян А.К., Вакуленко С.А.

*Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия  
andabr55@gmail.com*

Проблема самовозбуждающихся элементов конструкций, взаимодействующих с ледяным покровом, широко обсуждаются в современной научной литературе [1]. Непонятным, до сих пор, является возникновение определенного вида сил контактного взаимодействия, приводящих при различных скоростях движущегося ледяного покрова, к либо явлению демпфирования колебаний элемента конструкции, либо к их возрастанию, что аналогично явлению резонанса. Поэтому, в большинстве работ, используя экспериментальные записи поведения контактных сил, делаются попытки, чисто формально, описать нелинейные колебания элемента конструкции в зависимости от вида спектра частот в составе спектральной функции контактного усилия. Тем не менее анализируя результаты известных работ [1,2], можно сделать вывод, что главной причиной либо «раскачивания» элемента, либо его демпфирования, является особое поведение последней в контакте с прерывистой, в результате разрушения, границей ледяного покрова. В настоящей работе предлагается физическая модель данного явления, а также ставится и частично решается предельная задача о взаимодействии деформируемого тела с разрушающейся областью ледяного покрова.

## 1. Постановка задачи.

Исходная постановка задачи касается изучения возможных колебаний достаточно длинного цилиндра, закрепленного на дне бассейна и частично выступающего за уровень воды. Поверхность бассейна покрыта льдом, имеющим возможность двигаться с определенной скоростью  $v_0$  и обжимать цилиндр с последующим разрушением в зоне контакта со льдом. Область контакта по длине цилиндра ограничена и весьма мала, вследствие толщины льда по отношению к общей длине цилиндра. В зависимости от характера обжатия преимущественные формы деформирования в окружном направлении соответствуют формам возможных колебаний цилиндра либо  $n=0$ , либо  $n=1$ , где  $n$  – число полуволн в окружном направлении. В этом случае цилиндр можно моделировать либо балкой Бернулли-Эйлера с упругим основанием  $K = E\delta/R^2$ , либо без него. Ввиду малости зоны контакта по сравнению с длиной цилиндра, контактное усилие можно считать сосредоточенным усилием. Локализованная форма деформации изгиба балки на упругом основании (без учета жидкости) известна, а использование метода Бубнова-Галеркина с учетом присоединенной массы воды под ледовым покрытием позволяет свести основные уравнения движения цилиндра к уравнению колебаний осциллятора

$$M\ddot{q} + Gq = -N(t, x, y) + Q(t),$$

где  $M$  и  $G$  – эффективные параметры обобщенной массы и жесткости,  $q$  – координата смещения в зоне контакта,  $N$  – давление со стороны движущегося ледового покрытия,  $Q(t)$  – внешние известные обобщенные силы. Итак, главная проблема – это раскрытие смысла выражения  $N$ , которое зависит от кинематики осциллятора. Исходя из

экспериментальных данных, поведение элемента конструкции существенно зависит от вида ширины зоны контакта. Будем предполагать возможность существования колебаний до разрушения ледяного покрова, и после начала разрушения с образованием «кусков» льда в зоне контакта. Последние имеют возможность вымываться из зоны контакта. Основной характер поведения осциллятора в обоих случаях приведен на рис 1, 2.

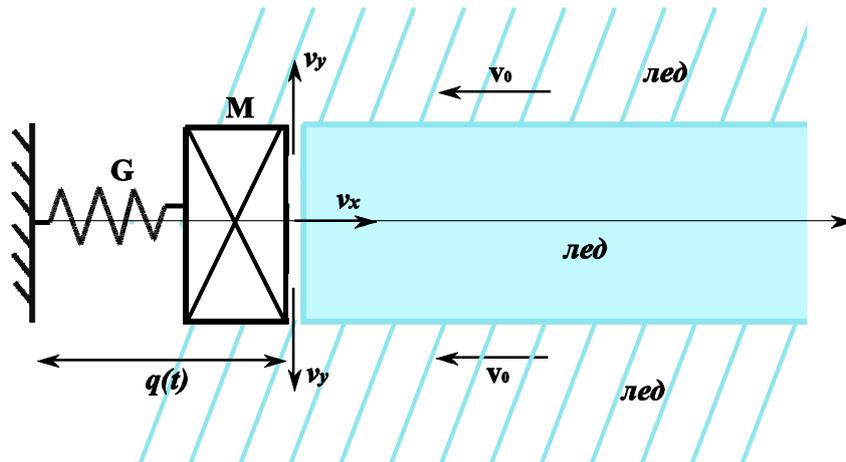


Рисунок 1: Взаимодействие осциллятора с ледяным покровом до разрушения.

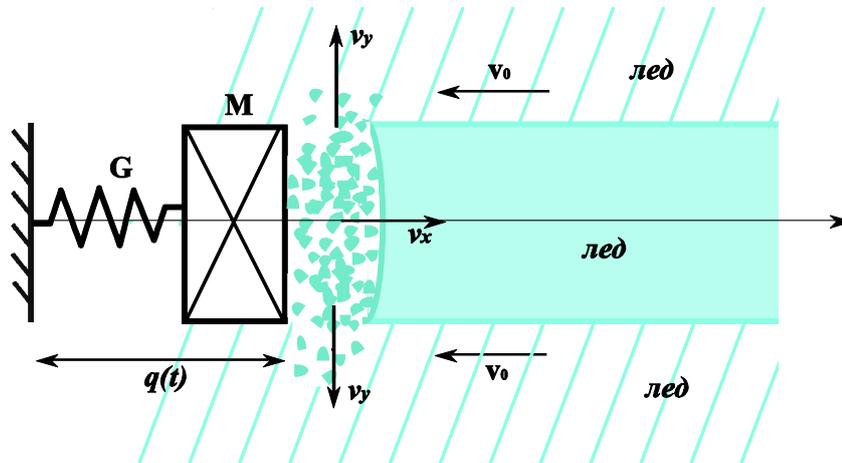


Рисунок 2: Взаимодействие осциллятора с ледяным покровом после разрушения его части.

Контактное усилие  $N$  при  $x=q$  в первом случае (до разрушения) находится из задачи совместного движения осциллятора массой  $M$  и жесткости  $G$  и бесконечной пластины, движущейся со скоростью  $v_0$  и находящейся в жестком контакте с массой  $M$ . В нашем случае пластина может быть заменена стержнем, находящемся в стесненном напряженном состоянии (последнее обусловлено сжатием в поперечном направлении пластины со стороны окружающего ледяного покрова).

Система уравнений, описывающих в этом случае поведение осциллятора и динамику полубесконечного стержня имеет вид

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Ku + R, \quad q(t) \leq x < \infty$$

$$M \ddot{q} = -N|_{x=q} + Q(t).$$

Здесь  $N$  – усилие в поперечном сечении стержня, которое существенно зависит от параметров материала, то есть льда. На первом этапе взаимодействия примем модель упругого деформирования, а именно, будем считать  $N = E\epsilon s = Es \partial u / \partial x$ , где  $s$  – площадь сечения стержня, которая зависит от толщины ледяного покрова,  $K$  – параметр, характеризующий обжатие стержня, а реальности параметр, учитывающий сжатие ледяной пластины в ее поперечном направлении,  $R$  – усилие возникающее в сечении стержня в результате в результате его контакта по боковой поверхности с окружающим ледяным покровом, движущимся вдоль оси  $x$ . Примем

$$R = R_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} - v_0 \right) \dots$$

Особенностью малых колебаний поставленной задачи (до разрушения можно снести краевые условия на недеформируемую границу, то есть положить  $M_{x=0} = 0$ ), является специфика поведения известного линейного уравнения Клейна–Гордона с включением [3]. В указанной литературе показана возможность существования резонансных колебаний включения, ввиду отсутствия оттока энергии на бесконечность. Последние определяется существованием дискретной частоты до начала непрерывного спектра частот, ответственных за волновой процесс в модели полубесконечного стержня. Задача, соответствующая рис.2 будет решена в ходе дальнейших исследований.

## 2. Постановка задачи и упрощённое уравнение нелинейных колебаний осциллятора.

Для решения поставленной задачи о поведении осциллятора до разрушения ледяного покрова необходимо решить следующую систему уравнений:

$$Mq_{tt} + Gq = Q(t) + \rho c^2 u_x$$

$$u_{xx} - c^{-2} u_{tt} - \beta u_t - ku = -\beta s_t$$

начальные условия имеют вид

$$u(x,0) = 0,$$

$$u_t(x,0) = 0$$

Краевые условия приведены выше.

В этих уравнениях  $\beta$  и  $c$  приведённые положительные коэффициенты, получающиеся в результате преобразования уравнения для стержня, вырезанного из ледяного покрова.

Расчёт показывает, что параметры  $\beta$  и  $c^{-2}$  являются малыми величинами, однако величина  $\beta s_t$  может быть большой. Для нахождения асимптотического решения ищем его итерациями в виде:

$$u = u_0 + u_1 + \dots$$

Ищем главный член в виде:  $u_0 = q \exp(-\alpha(x - q)) + \tilde{u}(x, t)$ ,

где  $\tilde{u}$  новая неизвестная функция и  $\alpha = O(L^{-0.5})$ . Тогда, опуская малые члены при  $L \rightarrow +\infty$ , и при принятых значениях величин  $\beta$  и  $c^{-2}$  можно получить:

$$\tilde{u}_0 \approx -k^{-0.5} f(t)(1 - \exp(-kx)) \exp(-\alpha(x - q)),$$

$$f(t) = -\beta s_t + c^{-2} q_{tt} + \beta q_t + k^{-0.5} q$$

Величины  $u_1 \approx U_1 + U_2$  где :

$$U_1 = k^{-4} (c^{-2} f_{tt} + \beta f_t)(1 - \exp(-k \exp((x - q))))$$

$$U_2 = (2k^3)^{-1} c^{-2} (x - q) \exp(-k(x - q))(f_{tt} + 2kf_t q_t + fk^2 q_t^2 - k\omega^2 qf) + \beta(f_t + kf q_t)$$

$$f \approx -\beta v_0 + (k^2 - \omega^2 c^{-2})q + \beta q_t$$

В конечном итоге получено следующее уравнение для перемещения осциллятора:

$$\begin{aligned}
q_{tt} + \omega^2 q &= \xi(q, q_t) \\
\xi &= M^{-1} a \sin \Omega t + \xi_0 \\
\xi_0 &= \rho c^2 M^{-1} u_x(q) \\
\omega &= (G / M)^{-1}
\end{aligned}$$

### 3. Асимптотическое решение уравнения колебаний осциллятора.

Полученное в конце предыдущего параграфа уравнение описывает нелинейные колебания осциллятора с малым демпфированием. Принимая во внимание тот факт, что масса взаимодействующего осциллятора (платформы) велика вводим малый параметр  $\varepsilon$ , медленное время  $\tau = \varepsilon t$  и переписываем уравнение колебаний в виде:

$$\begin{aligned}
q_{tt} + \omega^2 q &= \varepsilon R \\
R(q, q_t) &= \varepsilon^{-1} \xi(q, q_t)
\end{aligned}$$

Решение ищется в виде:

$$q = K + A(\tau) \sin(\omega t + \phi(\tau)) + \varepsilon q_1(t, \tau)$$

В этом выражении величины  $A$  и  $\phi$  неизвестные медленно меняющиеся во времени амплитуда и фаза, а величина  $K$  некоторая константа (среднее). Подставляя выражение для решения в основное уравнение получим:

$$\begin{aligned}
q_{tt} + \omega^2 q &= 2\varepsilon\omega(A_\tau \cos(\omega t + \phi(\tau)) - A\phi_\tau \sin(\omega t + \phi(\tau))) + 0(\varepsilon^2), \\
q_{1t} + \omega^2 q_1 &= S(t, \tau, \varepsilon), \\
S(t, \tau, \varepsilon) &= 2\omega(-A_\tau \cos(\omega t + \phi(\tau)) + A\phi_\tau \sin(\omega t + \phi(\tau))) + R_0(A, \phi) \\
R_0(t, \tau) &= \varepsilon^{-1} M^{-1} (-g_0(A, \phi) + Q(t) + \xi_0(A, \phi)), \\
g_0 &= g(A\omega \cos(\omega t + \phi(\tau)), A \sin(\omega t + \phi(\tau))), \\
\xi_0 &= \xi(A \sin(\omega t + \phi(\tau)), A\omega \cos(\omega t + \phi(\tau))).
\end{aligned}$$

Уравнение для определения величины имеет ограниченное решение на временах  $t = O(\varepsilon^{-1})$  тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow +\infty} T^{-1} \int_0^T S(t, \tau, \varepsilon) \cos(\omega t + \phi) dt &= 0, \\
\lim_{T \rightarrow +\infty} T^{-1} \int_0^T S(t, \tau, \varepsilon) \sin(\omega t + \phi) dt &= 0
\end{aligned}$$

В итоге можно получить следующую систему для определения амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned}
\omega A_\tau &= \lim_{T \rightarrow +\infty} T^{-1} \int_0^T R_0(t, \tau, \varepsilon) \sin(\omega t + \phi) dt, \\
\omega A \phi_\tau &= \lim_{T \rightarrow +\infty} T^{-1} \int_0^T R_0 S(t, \tau, \varepsilon) \sin(\omega t + \phi) dt
\end{aligned}$$

Если предположить, что в начале колебаний амплитуда  $A \ll 1$ , то можно заметить, что в первом из уравнений системы содержатся только линейные члены по отношению к  $A$ . Сначала мы осредним по времени уравнение для нахождения  $q$  – это даст соотношение для нахождения величины  $K$ :

Как показывают расчёты, принимая во внимание, что скорости движения льда ограничены и не велики, – сантиметры в секунду, для приближённой оценки величины  $K$  можно использовать следующую асимптотическую формулу:

$$K \approx -\rho c^{-2} \beta \omega^{-2} (KM)^{-1} v$$

В тоже время, для нахождения амплитуды  $A$  можно получить следующее уравнение:

$$\omega A_r = DA - \mu A^3$$

Здесь  $D$  и  $\mu > 0$  коэффициенты зависящие от параметров системы сложным образом. В случае, когда  $D < 0$  в системе преобладает демпфирование, а в противоположном случае, амплитуда колебаний осциллятора (платформы) растёт – получается наблюдаемый на практике «эффект отрицательного трения». Используя полученные в предыдущих параграфах соотношения, можно найти:

$$D = \rho c^2 (-0.5 \beta \omega^3 c^{-2} k^{-3} + k^{-2} c^{-2} \beta \omega^2 K - 0.5 k^{-2} \omega (\beta v + k^2 K))$$

$$\mu = \rho c^{-2} \omega^3 \beta (4Mk^3)^{-1}$$

Расчёты показали, что величина  $D$  может менять знак при росте величины скорости ледяного покрова  $v$ . Это происходит, начиная с некоторого значения скорости льда. Амплитуда колебаний осциллятора соответственно тоже начинает расти, что наблюдалось в экспериментах и на практике.

### **Заключение.**

Предложенная модель взаимодействия ледяного покрова с осциллятором описывает качественно эффект нарастания амплитуды его колебаний. Однако, необходимо уточнить модель, для описания процесса последующего срыва колебаний и падения амплитуды при дальнейшем увеличении скорости льда, начиная с некоторого критического значения скорости. Для этого необходимо в будущих моделях учесть процесс ломки льда (в том числе его смятия и образования неровной кромки), обтекания упругой структуры образовавшейся смесью воды и льда, а также континуальность упругой структуры, реологическую модель льда. Учёт указанных особенностей позволит описать процесс возбуждения мод колебаний, их взаимодействие, которое должно привести к определённому распределению энергии между модами и возникновение процесса автоколебаний более точно, и соответственно, определить опасные режимы работы структуры, взаимодействующей с движущимся льдом.

### **Список литературы**

1. Hendrkse H., Metrikine A.V., Ice induced vibrations of flexible offshore structures, Proc. 21th Int. Conference on Port and Ocean Engn. under Arctic Conditions, Montreal, POAC11-031, 2011, 10p.
2. Kama, T., Andreson, H., et al., Ice induced vibrations of offshore structures-looking beyond iso 19906. Proc. 22th Intern. Conf/ on Port and Ocean Engn. under Arctic Conditions, Espoo, Finland, 2013.
3. Д.А. Индейцев, Н.Г. Кузнецов, О.В. Мотыгин, Ю.А. Мочалова, Локализация линейных волн,

СПб,из-во СПбГУ, 2007,344с.