УДК 519.9

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ФАЗОВЫХ ТОЧЕК В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ТЕРМИНАХ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Ю.И.Бродский

При получении необходимых условий экстремума типа принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления со смешанными ограничениями [1-3], оказывается, что сопряженная переменная, вообще говоря, не является абсолютно непрерывной, а лишь функцией с ограниченным изменением, т.е. может иметь разрывы в так называемых фазовых точках, природа которых достаточно сложна, а язык описания достаточно далеко отстоит от постановки исходной задачи [2,3].

Возникает естественное желание в терминах исходной задачи рассуждать о том, когда возникают эти разрывы, что можно требовать от задачи, чтобы они не возникали.

В данной работе мы попытаемся предложить некий подход к решению этого вопроса, заостряя внимание на его существе и опуская такие детали, как подробные выкладки вывода принципа максимума и даже его формулировку и точную постановку исходной задачи оптимального управления, все это можно найти в работах [1-3].

Напомним, однако, одну из эквивалентных схем вывода принципа максимума.

Задача оптимального управления рассматривается как задача на экстремум в банаховых пространствах

$$\min \varphi(u),$$
$$\Phi(u) \leqslant 0, \quad \theta(u) = 0. \tag{1}$$

где $u \in E_1$, E_1 - банахово пространство; φ - определенный на нем нелинейный функционал, оператор Φ действует из E_1 в банахово пространство E_2, полуупорядоченное выпуклым замкнутым конусом с непустой внутренностью, в смысле которого и понимаются неравенства; оператор θ действует из E_1 в банахово пространство E_3.

Далее задача линеаризуется в экстремальной точке u_0, т.е. рассматривается задача

$$\min \varphi_u(u_0)u,$$
$$\Phi(u_0) + \Phi_u(u_0)u \leqslant 0, \ \theta_u(u_0)u = 0. \tag{2}$$

Доказывается, что если u_0- решение задачи (1), то 0 - решение задачи (2). Далее, применяется теорема отделимости, утверждается, что найдутся функционалы $v^* \in E_2^+$, $v^* \geqslant 0$; $w^* \in E_3^*$, такие что

$$v^*\Phi_u(u_0) = 0,$$
$$\varphi_u(u_0)u + v^*\Phi_u(u_0)u + w^*\theta_u(u_0)u \geqslant 0, \ \forall u \in E_1. \tag{3}$$

Соотношение (3) и преобразуется затем в принцип максимума.

Задача оптимального управления обычно ставится в пространстве $L^\infty[t_0,t_1]$, поэтому функционалы из (3) будут принадлежать пространствам $L^{\infty *}$, что в конечном итоге и делает сопряженную переменную функцией ограниченного изменения, действительно, если $\dot{x} = \varphi(x,u,t)$ – дифференциальное уравнение задачи оптимального управления, или в интегральном виде

$$x(t) = \int_{t_0}^{t}\varphi(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau, \quad \text{а } x^* \text{ – функционал из } L^{\infty *}, \text{ то}$$

$$(x^*,\int_{t_0}^{t}\varphi(x,u,\tau)d\tau) = \int_{t_0}^{t_1}dx^*(t)\int_{t_0}^{t}\varphi(x,u,\tau)d\tau = -\int_{t_0}^{t_1}y(t)\varphi(x,u,t)dt, \text{ где}$$

$y(t) = -\int_{t}^{t_1}dx^*(\tau)$, а $dx^*(\tau)$ – проекция x^* на $C[t_0,t_1]$ – т.е. обычная мера Стилтьеса, и,следовательно, сопряженная переменная $y(t)$ есть функция ограниченного изменения. Заметим, что если бы мы проделали последнюю выкладку в пространствах L^p, $1<p<\infty$

$$(x^*,\int_{t_0}^{t}\varphi(x,u,\tau)d\tau) = \int_{t}^{t}x^*(t)\int_{t_0}^{t}\varphi(x,u,\tau)d\tau = -\int_{t_0}^{t_1}y(t)\varphi(x,u,t)dt, \qquad (4)$$

где $y(t) = -\int_{t}^{t_1}x^*(\tau)d\tau$, а $x^*\in L^q$, $q = \dfrac{p}{p-1}$, то получили бы в качестве сопряженной переменной $y(t)$ заведомо абсолютно непрерывную функцию. Обсудим теперь вопрос, когда такое рассмотрение имеет смысл.

Итак, почему бы не рассматривать задачи оптимального управления в пространствах L^p? Здесь имеются по крайней мере два ограничивающих обстоятельства

1. Это была бы уже совсем другая задача , ограничиваясь конечным интервалом времени $[t_0,t_1]$, мы можем считать, что

$L^{\infty} \subset L^p \subset L^1$, а расширяя область допустимых значений, мы можем получать и новые решения.

2. Отсутствие внутренней точки у конуса неотрицательных функций в L^p делает затруднительным применение приведенной выше схемы вывода принципа максимума, так как перестают работать известные теоремы отделимости, кроме того, неочевидной становится и необходимость линеаризованной в точке u_0 задаче (2) иметь своим решением 0 для достижения минимума в этой точке исходной задачей (1).

Что касается теорем отделимости, впрочем, ситуация вполне поправима, в работе [4] доказано, что если 0 является решением задачи (2), поставленной в L^p, функционал φ и оператор Φ дифференцируемы в смысле Гато, а оператор θ - в смысле Фреше. Кроме того, найдутся элемент $\bar{u} \in E_1$ и число $\gamma > 0$, такие что $\theta_u(u_0)\bar{u} = 0$, а элемент $\bar{v} = \Phi_u(u_0)\bar{u}$ обладает следующим свойством: $(v^*, \bar{v}) \leqslant -\gamma \| v^* \|$, $\forall v^* \geqslant 0$, $v^* \in E_2^*$ (аналог условия Слейтера), то найдутся нетривиальные функционалы из L^q такие, что будут выполнены соотношения (3). Этот факт дает нам право рассматривать линеаризованную задачу (2) также и в L^p.

При этом следует заметить, что, расширяя таким образом множество допустимых значений задачи (2), мы можем понизить значение ее функционала по сравнению с 0, что и случается реально в тех случаях, когда сопряженная переменная претерпевает разрывы. (Следует также отметить и то, что, расширив область допустимых значений задачи (2), мы сделали утверждение о том, что 0 является ее решением более сильным, и поэтому оно перестало быть необходимым условием экстремума исходной задачи, поставленной в L^{∞}).

В самом деле, если 0 - решение задачи (2), поставленной в L^p, найдутся элементы сопряженных пространств L^q, такие что будет выполнено (3), тогда, проводя выкладки, подобные (4) (более подробно они приводятся в [2-3]), мы получим абсолютно непрерывную сопряженную переменную, но поскольку в реальной жизни нам известны примеры ее разрывности, мы можем смело утверждать, что в этих случаях линеаризованная задача (2), рассматриваемая в L^p, должна допускать понижение функционала в отрицательную область на каком-либо допустимом элементе.

И наоборот, если известно, что для какой-то задачи оптимального управления выполнен принцип максимума, в котором сопряженная переменная абсолютно непрерывна в силу ограниченности функций, входящих в принцип максимума, можно сказать, что нашлись функционалы из L^{∞}, такие что (3) выполняется для всех $u \in L^1$ и тем более из L^p.

Таким образом, мы видим, что если u_0 - стационарная точка исходной задачи (1), то вопрос о том, является ли 0 решением линиаризованной задачи (2), поставленной в L^p, или нет, эквивалентен вопросу об отсутствии или наличии разрывов у сопряженной переменной в принципе максимума.

Это собственно и является основным результатом данной работы.

Сделаем заключительное замечание о "физическом смысле" фазовых точек в свете полученного результата. Это точки, в окрестностях которых за счет разрешения управлениям быть неограниченными (управления из L^p, фазовые же переменные ограничены в силу дифференциального уравнения), можно достичь понижения функционала линеаризованной задачи (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский Б.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов, М.: Наука, 1976.
2. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления, М.: Наука, 1971.
3. Бродский Ю.И. Необходимые условия слабого экстремума для задач оптимального управления на бесконечном интервале времени. // Матем. сборник, 1978, 105(147):3, С.371-388.
4. Бродский Ю.И. Исследование выпуклой задачи на экстремум в банаховых рефлексивных пространствах. Декомпозиция и оптимизация в сложных системах, М.: ВЦ АН СССР, 1988,С.60-65.