

ОБ АЛГОРИТМАХ РАСЧЕТА РАСПАДА РАЗРЫВА ДЛЯ СХЕМЫ С.К.ГОДУНОВА ¹

А.А.ЧАРАХЧЬЯН

(117967 Москва, ГСП-1, ул. Вавилова 40, ВЦ РАН)

Анализируется метод Рунге приближенного решения задачи о распаде разрыва в применении к уравнениям гидродинамики в переменных Лагранжа и демонстрируется отсутствие заметных преимуществ этого метода по сравнению с акустическим приближением задачи. Показано, что точное решение задачи о распаде, в отличие от метода Рунге и акустического приближения, дает на сильных ударных волнах схемную вязкость, близкую к квадратичной вязкости фон Неймана-Рихтмайера. Построен алгоритм решения задачи о распаде разрыва с произвольным уравнением состояния, заданным в виде двумерных таблиц с билинейной интерполяцией внутри табличной ячейки. Предложен способ коррекции разностной схемы, направленный на подавление энтропийного следа. Приводятся примеры расчета одномерных и двумерных задач с широкодиапазонным табличным уравнением состояния алюминия, демонстрирующие эффективность подавления энтропийных следов.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее популярных во всем мире методов численного решения уравнений гидродинамики сжимаемых сред является метод С.К.Годунова [1]. Этот метод развивался усилиями многих специалистов (см., например, [2-12]). Имеются различные варианты метода, как первого, так и второго порядка точности, на структурированных и неструктурированных сетках. Неизменной составной частью всех вариантов метода является решение, возможно, приближенное, задачи о распаде произвольного разрыва.

В своей пионерской работе [1] С.К.Годунов предложил экономичный итерационный метод решения задачи для уравнения состояния совершенного газа. Было найдено решение задачи в акустическом

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00095).

приближении, когда состояния газа по обе стороны разрыва слабо отличаются друг от друга. Это решение выбиралось в качестве начального приближения, что и обеспечило экономичность итерационного процесса, так как, за исключением небольшой окрестности ударных волн, начальное приближение оказывалось очень близким к точному решению.

Следующим шагом явился предложенный в [2] итерационный алгоритм на базе метода Ньютона для так называемого двучленного уравнения состояния, частным случаем которого является уравнение состояния совершенного газа. Этот алгоритм с успехом использовался в Институте прикладной математики РАН и для решения задач с произвольным уравнением состояния. Вместо точной задачи о распаде разрыва решается приближенная задача с двучленным уравнением состояния, своим для каждой ячейки сетки. Константы в этом уравнении состояния выбираются из условия равенства двух термодинамических производных соответствующим производным заданного уравнения состояния, что обеспечивает совпадение акустических приближений точной и приближенной задачи. Автор настоящей статьи, которому об этом приеме в свое время любезно сообщил А.В.Забродин, также с успехом пользовался им в течение ряда лет [13,14]. Трудность возникала только при наличии областей, где среда находится в состоянии фазового перехода между жидкостью и газом (кипящая жидкость). В такой области некоторые термодинамические производные, например, теплоемкость при постоянном давлении, обращаются в бесконечность, что недопустимо для двучленного уравнения состояния.

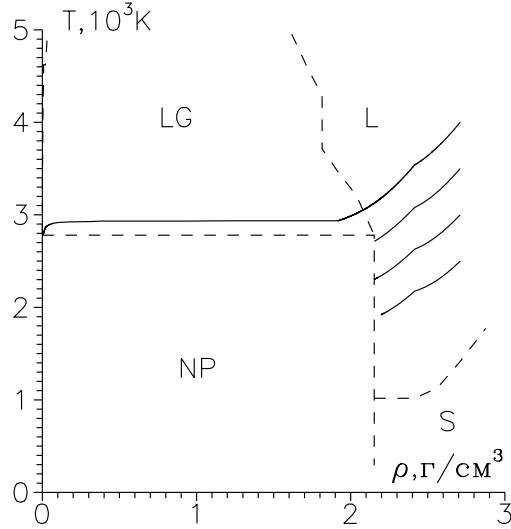
Настоящая работа развивает другой подход [15], связанный с разработкой эффективных итерационных методов для решения точной задачи о распаде разрыва с произвольным уравнением состояния. В отличие от алгоритма [15], ориентированного на аналитические аппроксимации уравнения состояния, предлагаемый в настоящей работе алгоритм предполагает задание уравнения состояния в виде двумерных таблиц с билинейной интерполяцией внутри табличной ячейки. Такой сравнительно простой вид уравнения состояния внутри таблич-

ной ячейки удастся использовать для повышения эффективности алгоритма в случае не слишком подробных таблиц. Этот алгоритм описан в разделе 2.

Применению алгоритма посвящен раздел 3. Демонстрируется возможность подавления так называемого энтропийного следа, возникающего вблизи границ области и разного рода внутренних границ после прохождения ударной волны. Энтропийный след практически не сказывается на величине давления и скорости и, поэтому, во многих задачах не приводит к искажению результатов расчета в основной части течения. Однако в некоторых задачах энтропийный след может привести к серьезным трудностям при интерпретации результатов расчета.

С одной такой задачей любезно познакомили автора И.К.Красюк и А.Ю.Семенов из Института общей физики РАН. Речь идет о выходе сильной ударной волны, создаваемой переменным по времени лазерным импульсом, на свободную поверхность металлов. Для интерпретации экспериментальных результатов необходимо вычислять выходящее излучение, которое в значительной степени определяется профилем температуры вблизи свободной границы. Возникающий вблизи свободной границы энтропийный след существенно искажает профиль температуры и делает сколько-нибудь точный расчет выходящего излучения невозможным.

С другой проблемой автор столкнулся при моделировании кольцевых кумулятивных струй металлов [16], возникающих при импульсном воздействии на конические мишени. Один из важных вопросов, ответ на который желательно получить из результатов расчета, заключается в фазовом составе струи. На фиг. 1 приведены несколько изэнтроп алюминия в плоскости плотность-температура, полученных по табличному уравнению состояния, любезно предоставленному автору И.В.Ломоносовым и К.В.Хищенко. Здесь же отмечены области, отвечающие разным фазовым состояниям. В каждой изэнтропе давление возрастает с увеличением плотности, а точка с минимальной плотностью отвечает атмосферному давлению. Таким образом, каждая изэнтропа определяет разгрузку частицы вещества с заданной



Фиг. 1: Изэнтропы (сплошные линии) и фазовый состав алюминия; S — твердое тело, L — жидкость, LG — смесь жидкости и газа, NP — нефизическая область.

энтропией в волне разрежения. Значение энтропии возрастает с увеличением температуры при фиксированной плотности. Видно, что, при увеличении энтропии характер изэнтропы может скачком измениться. Если энтропия меньше некоторого критического значения, то вещество остается в жидком состоянии вплоть до атмосферного давления. Если энтропия больше критического значения, то при разгрузке вещество попадает в область кипящей жидкости, что, скорее всего, приводит к разрушению струи [17]. Ясно поэтому, что завышение энтропии в энтропийном следе вблизи границ раздела сред, где и образуется струя, может привести к ошибочному выводу о наличии в реальной струе кипящей жидкости.

Помимо упоминавшихся выше итерационных методов, большой популярностью пользуются безитерационные методы приближенного решения задачи о распаде разрыва, развитые в [4,5]. Эти методы основаны на том или ином огрублении уравнений гидродинамики в характеристической форме. Такая же интерпретация возможна и для консервативного варианта сеточно-характеристического метода [18,19], развитого независимо от метода С.К.Годунова, в котором для вычисления потоков на боковых гранях ячеек сетки используются обычные

разностные схемы для уравнений в характеристической форме.

Основному содержанию настоящей работы предшествует раздел 1 с анализом метода Рое — одного из наиболее популярных безитерационных методов. Обычно этот метод приводится в применении к уравнениям гидродинамики в переменных Эйлера. В настоящей работе метод Рое применяется к уравнениям в переменных Лагранжа и демонстрируется отсутствие заметных преимуществ этого метода по сравнению с упоминавшимся выше акустическим приближением задачи о распаде из [1], которое без всяких изменений обобщается на случай произвольного уравнения состояния и которое можно считать первым безитерационным методом. Демонстрируется также, что оба безитерационных метода значительно уступают по своей эффективности инерционному методу решения задачи о распаде разрыва в случае применения соответствующей разностной схемы к расчету сильных ударных волн.

1. О МЕТОДЕ РОЕ И АКУСТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ РАЗРЫВА

Описание метода Рое начнем с системы квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial F(f)}{\partial s} = 0, \quad (1.1)$$

$$f = (f_1, \dots, f_n), \quad F = (F_1, \dots, F_n), \quad f_i = f_i(t, s),$$

которая предполагается гиперболической, т.е. матрица Якоби $A = \partial F / \partial f$ имеет n действительных собственных значений λ_i , каждому из которых отвечает свой собственный вектор e^i . Рассматривается задача Коши с начальными данными в виде ступеньки

$$f = \begin{cases} f_1, & s < 0, \\ f_2, & s > 0. \end{cases}$$

Требуется найти вектор $F_0 = F|_{t=0, s=0}$. Вектор F_0 используется для аппроксимации вектора F на границах ячеек сетки при построении

интегроинтерполяционным методом разностной схемы как для уравнений (1.1), так и для их многомерного аналога.

Предлагается находить приближенное решение задачи, заменив уравнение (1.1) уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A \frac{\partial f}{\partial s} = 0, \quad (1.2)$$

с некоторой постоянной матрицей A . Чтобы решить эту задачу (см., например, [10]), надо найти представление вектора $\Delta f = f_2 - f_1$ в базисе векторов e^i

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^i, \quad (1.3)$$

после чего искомый вектор определяется по формуле

$$F_0 = \frac{F_1 + F_2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \alpha_i e^i. \quad (1.4)$$

Эта формула совпадает с формулой, применяемой в сеточно-характеристическом методе [18,19],

$$F_0 = \frac{F_1 + F_2}{2} - \frac{1}{2} \Omega \text{diag} \parallel |\lambda_1|, \dots, |\lambda_n| \parallel \Omega^{-1} \Delta f, \quad (1.5)$$

где Ω - матрица, составленная из векторов e^i . Чтобы в этом убедиться, надо подставить (1.3) в (1.5), поменять местами порядок суммирования и воспользоваться тождеством

$$\sum_{m=1}^n \omega_{km}^{-1} e_m^i = \delta_{ki},$$

где ω_{km}^{-1} - элемент матрицы Ω^{-1} , e_m^i - m -ый элемент вектора e^i .

В частном случае уравнений гидродинамики в переменных Лагранжа имеем:

$$n = 3, \quad f = (v, u, \varepsilon + u^2/2), \quad F = (-u, p, pu),$$

где v - удельный объем, u - скорость, ε - внутренняя энергия, p - давление. Уравнения (1.1) замыкаются уравнением состояния $p = p(v, \varepsilon)$.

Матрица Якоби, ее собственные числа и векторы принимают вид

$$A = \frac{\partial F}{\partial f} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ p_v & -up_\varepsilon & p_\varepsilon \\ up_v & p - u^2p_\varepsilon & up_\varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -a, \quad \lambda_3 = a, \quad a^2 = p_\varepsilon p - p_v,$$

$$e^1 = (p_\varepsilon, 0, -p_v), \quad e^2 = (1, a, -p + ua), \quad e^3 = (1, -a, -p - ua).$$

Величина a , называемая массовой скоростью звука, связана с обычной скоростью звука c простой формулой $a = c/v$.

Для коэффициентов α_i в разложении (1.3) получаются формулы

$$\alpha_1 = \frac{\Delta\varepsilon + p\Delta v}{a^2}, \quad \alpha_2 = \frac{-\delta p + a\Delta u}{a^2}, \quad \alpha_3 = \frac{-\delta p - a\Delta u}{a^2}, \quad \delta p = p_v\Delta v + p_\varepsilon\Delta\varepsilon,$$

где $\Delta(\cdot) = (\cdot)_2 - (\cdot)_1$, а остальные величины определяются матрицей A .

Перейдем к выбору матрицы A . Без ограничения общности можно рассматривать ее элементы как функции трех величин v , ε и u . Достаточно очевидно, что следует положить

$$u = (u_1 + u_2)/2, \tag{1.6}$$

поскольку в этом случае $\Delta u^2/2 = u\Delta u$. Сложнее обстоит дело с термодинамическими переменными. Простой выбор типа $v = (v_1 + v_2)/2$, $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$ приводит к тому, что в формулы для F_0 входит, помимо скорости звука, еще одна термодинамическая производная — p_v или p_ε . Как было найдено в [20], если p_v и p_ε выбрать так, чтобы

$$\Delta p = p_v\Delta v + p_\varepsilon\Delta\varepsilon, \tag{1.7}$$

то вектор F_0 перестает зависеть от других термодинамических производных кроме скорости звука. Как утверждается в [20], для некоторых течений, связанных с сильными ударными волнами в металлах, переход на формулы для F_0 с использованием (1.7) позволил устранить сильные колебания численного решения.

В настоящей работе мы будем следовать работе [21], в которой предлагается для построения матрицы A использовать условия

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i e^i = \Delta F,$$

которые для произвольной матрицы A выполняются с точностью до $O(\Delta f^2)$. Эти условия однозначно определяют матрицу A . Хотя в работе [21] рассматривался только совершенный газ, эти условия, по крайней мере в случае уравнений в переменных Лагранжа, легко применимы и к случаю произвольного уравнения состояния (см. также [22]) и включают в себя условия (1.6) и (1.7). Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат.

$$F_0 = (-U, P, PU), \quad U = \frac{u_1 + u_2}{2} - \frac{\Delta p}{2a}, \quad P = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{a\Delta u}{2}. \quad (1.8)$$

Скорость звука a вычисляется в точке v, ε , которые определяются из уравнений

$$\frac{p_1 + p_2}{2} = p(v, \varepsilon), \quad \Delta p = p_v(v, \varepsilon)\Delta v + p_\varepsilon(v, \varepsilon)\Delta \varepsilon.$$

Простой вид формул (1.8) наводит на мысль, что их можно получить и минуя довольно громоздкую технику, описанную выше. Это действительно так. Приведем формулы акустического приближения задачи о распаде разрыва, полученные в [1].

$$U = \frac{u_1 a_1 + u_2 a_2 - \Delta p}{a_1 + a_2}, \quad P = \frac{p_1 a_2 + p_2 a_1 - a_1 a_2 \Delta u}{a_1 + a_2}. \quad (1.9)$$

Хотя в [1] рассматривалось уравнение состояния совершенного газа, легко показать справедливость формул (1.9) и для произвольного уравнения состояния (см. раздел 2 настоящей работы). Как нетрудно заметить, если в (1.9) положить $a_1 = a_2 = a$, то получаются формулы (1.8). Не видно никаких преимуществ формул (1.8) по сравнению с (1.9). Наоборот, отсутствие необходимости определять некое среднее состояние газа и вычислять для него скорость звука является несомненным достоинством формул (1.9). Например, формулы (1.9) можно

использовать в случае границы раздела сред с разными уравнениями состояния, когда понятие среднего состояния теряет смысл.

Сделаем замечание относительно уравнений гидродинамики в переменных Эйлера. Не представляет никакого труда, следуя, например, книге [2], построить на базе формул (1.9) безитерационный метод приближенного решения задачи о распаде разрыва и в этом случае. Автору представляется далеко не очевидным, что метод Рунге для уравнений в переменных Эйлера имеет какие-либо преимущества по сравнению с таким простым подходом.

Есть много задач, где безитерационные методы ни в чем не уступают итерационным методам [2,15], оставаясь, очевидно, более экономичными. Существуют, однако, задачи, для которых итерационные методы оказываются более эффективными. Примером таких задач являются течения с сильными ударными волнами. Разностные схемы, построенные с использованием формул (1.8) или (1.9), являются, очевидно, схемами с линейной математической вязкостью. Как известно, если интенсивность ударной волны стремится к бесконечности, то ее ширина в рамках уравнений Навье-Стокса с линейной вязкостью стремится к нулю, в то время, как для квадратичной вязкости ширина ударной волны не зависит от ее интенсивности. Руководствуясь этим соображением, фон Нейман и Рихтмайер [23] предложили для расчета сильных ударных волн вводить в разностную схему искусственную квадратичную вязкость. Покажем, что разностные схемы с использованием точного решения задачи о распаде разрыва имеют на сильных ударных волнах схемную вязкость, близкую к квадратичной вязкости фон Неймана-Рихтмайера.

Впервые этот факт был продемонстрирован в [24] для некоторой разностной схемы на так называемой разнесенной сетке, когда термодинамические переменные и скорость определяются в разных узлах сетки. В конструкции схемы использовался частный случай задачи о распаде разрыва, для которого решение задачи находится явно. В настоящей работе аналогичное исследование выполняется в общем случае задачи о распаде разрыва. Заметим, что это исследование относится

не только к схеме первого порядка точности, но и к квазимонотонным схемам второго и более высокого порядка, которые на фронте ударной волны ”переключаются” на схему первого порядка.

Исследуем асимптотическое поведение решения задачи о распаде разрыва, когда термодинамические переменные по обе стороны разрыва заданы, а разрыв скорости $\Delta u = u_2 - u_1 \rightarrow -\infty$. Напомним, что решение задачи о распаде разрыва состоит из двух волн — каждая из которых может быть либо ударной волной, либо центрированной волной разрежения — и контактной поверхности между ними. Можно показать, что в рассматриваемом случае, начиная с некоторого значения $|\Delta u|$, обе волны будут ударными, и давление на контактной поверхности P будет удовлетворять уравнению (см. раздел 2)

$$\sqrt{(P - p_1)(v_1 - v_l(P))} + \sqrt{(P - p_2)(v_2 - v_r(P))} = -\Delta u, \quad (1.10)$$

где функции $v_l(P)$ и $v_r(P)$ определяются ударными адиабатами для левой и правой ударных волн. При $\Delta u \rightarrow -\infty$, $P \rightarrow \infty$ и, как известно, функции $v_l(P)$ и $v_r(P)$ стремятся к конечным значениям, которые обозначим через v_l^∞ и v_r^∞ соответственно. В результате, асимптотический анализ (1.10) дает

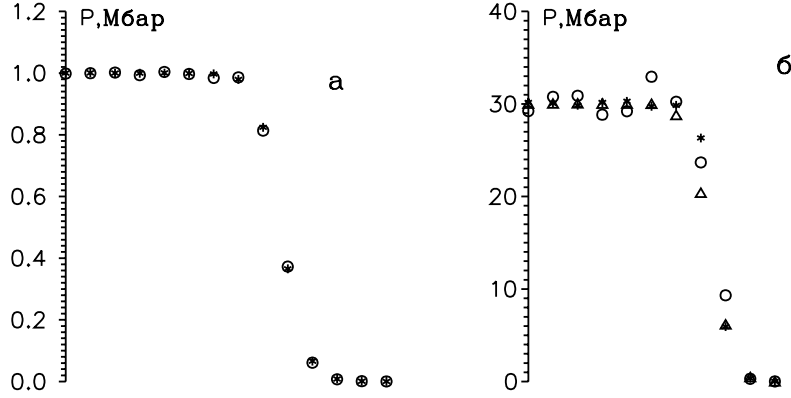
$$P = \frac{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{(\Delta u)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} + O(|\Delta u|^{-1}), \quad (1.11)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{v_1 - v_l^\infty}, \quad \alpha_2 = \sqrt{v_2 - v_r^\infty}.$$

Второе слагаемое в (1.11) и есть квадратичная вязкость фон Неймана-Рихтмайера.

Аналогичный результат получается и для другой асимптотики, когда $p_1, u_1 \rightarrow \infty$ таким образом, что разрыв отвечает ударной волне, идущей вправо. В этом случае, очевидно, $P = p_1$, и мы опять приходим к формуле (1.11) с $\alpha_1 = 0$.

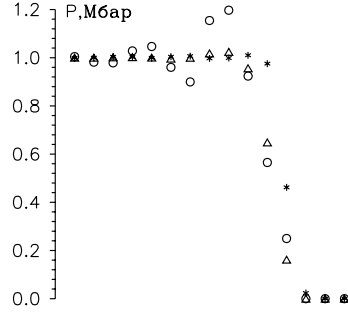
Близость схемной вязкости на сильных ударных волнах к квадратичной вязкости позволяет вести расчет ударных волн любой интенсивности с шагом по времени τ , близким к шагу τ_K из условия Куранта. В случае схем с линейной вязкостью, начиная с некоторой ин-



Фиг. 2: Ударные волны в алюминии, а — давление за фронтом 1 Мбар, б — 30 Мбар; "*" — схема с итерационным алгоритмом, $\tau = 0.8\tau_K$; "○" — схема с (1.9), $\tau = 0.8\tau_K$; "△" — схема с (1.9), $\tau = 0.2\tau_K$.

тенсивности ударной волны, ее расчет с $\tau \approx \tau_K$ становится невозможным из-за сильных численных колебаний. Шаг по времени приходится значительно уменьшать, что связано не только с увеличением объема вычислений, но и с уменьшением точности расчета в гладкой части течения, особенно в случае схем первого порядка точности.

На фиг. 2 приведены результаты расчета ударных волн в алюминии для давления за фронтом волны 1 Мбар и 30 Мбар. Перед волной давление равно атмосферному. Давление и скорость на границах ячеек вычислялись либо по итерационному алгоритму из раздела 2 настоящей статьи, либо по формулам (1.9). Шаг τ_K для обеих схем отличается незначительно, поскольку определяется ячейками сетки за фронтом ударной волны, где итерационный алгоритм дает для максимальной скорости распространения возмущений величину, близкую к скорости звука. В случае ударной волны с давлением за фронтом 1 Мбар, обе схемы с шагом $\tau = 0.8\tau_K$ дают одинаковый вполне удовлетворительный результат. При повышении давления за фронтом до 30 Мбар ситуация меняется. Схема с итерационным алгоритмом по-прежнему дает почти монотонное численное решение, в то время, как схема на базе формул (1.9) дает сильные численные колебания, для устранения которых приходится уменьшать шаг по времени в 4 раза. Такая же цифра необходимого уменьшения шага по времени пример-



Фиг. 3: Ударная волна в совершенном газе, давление за фронтом 1 Мбар. Обозначения те же, что и на фиг. 2.

но для такой же задачи приводится в работе [20], где использовались формулы (1.8).

Интенсивность ударной волны, начиная с которой схемы с линейной вязкостью требуют уменьшения шага по времени, зависит от уравнения состояния. В качестве примера на фиг. 3 приведены результаты расчета ударной волны в совершенном газе для давления за фронтом 1 Мбар. Видно, что поведение разностных схем в этом случае вполне аналогично их поведению для ударной волны в алюминии с давлением за фронтом 30 Мбар.

2. АЛГОРИТМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ В ТАБЛИЧНОЙ ФОРМЕ

Вначале сформулируем задачу о распаде разрыва для произвольного уравнения состояния, которое предполагается заданным в виде

$$\varepsilon = \varepsilon(T, \rho), \quad p = p(T, \rho), \quad (2.1)$$

где $\rho = v^{-1}$ — плотность, T — температура. Такой вид уравнения состояния, как правило, является исходным при построении широкодиапазонных уравнений состояния (см., например, [25]). Оба уравнения предполагаются однозначно разрешимыми относительно T , а второе еще и относительно ρ . Таким образом, (2.1) можно привести к виду $p = p(v, \varepsilon)$, который использовался в разделе 1, или к виду $\varepsilon = \varepsilon(p, v)$, который будет использоваться в некоторых формулах этого раздела.

Рассматривается одномерная задача о распаде разрыва. Состояния среды слева и справа от разрыва определяются скоростью u и термодинамическими переменными. Индексом "1", как и ранее, отмечаются величины слева от разрыва, индексом "2" — справа.

Будем предполагать, что решение задачи в нормальном виде, т.е. в виде двух волн и контактной поверхности между ними, существует. Каждая волна может быть либо ударной волной, либо центрированной волной разрежения. Давление и скорость на контактной поверхности обозначим через P и U . Соотношения на волнах можно записать в виде

$$U - u_1 + \Phi(P, p_1, v_1) = 0, \quad U - u_2 - \Phi(P, p_2, v_2) = 0, \quad (2.2)$$

$$\Phi(p, p_*, v_*) = \begin{cases} \Phi_S(p, p_*, v_*), & p > p_*, \\ \Phi_R(p, p_*, v_*), & p < p_*, \end{cases}$$

где первое уравнение (2.2) отвечает левой волне, второе уравнение — правой волне, функция Φ_S определяется ударной волной, Φ_R — центрированной волной разрежения. Формулы (2.2) вполне аналогичны соответствующим формулам из книги [2] для двучленного уравнения состояния. В приводимых ниже формулах (см., например, [26]) уравнение состояния предполагается заданным в виде $\varepsilon = \varepsilon(p, v)$. Для ударной волны имеем

$$\Phi_S(p, p_*, v_*) = \sqrt{(p - p_*)(v_* - v(p))}, \quad (2.3)$$

где функция $v(p)$ определяется уравнением ударной адиабаты

$$\varepsilon(p, v) - \varepsilon_* - 0.5(p + p_*)(v_* - v) = 0, \quad \varepsilon_* = \varepsilon(p_*, v_*). \quad (2.4)$$

Для волны разрежения

$$\Phi_R(p, p_*, v_*) = \int_{p_*}^p \frac{dp'}{a(p', v(p'))}, \quad (2.5)$$

где a — введенная в разделе 1 массовая скорость звука, функция $v(p)$ определяется уравнением изэнтропы

$$d\varepsilon + p dv = 0. \quad (2.6)$$

Получим приведенные в разделе 1 формулы акустического приближения (1.9). При $p \rightarrow p_*$ имеет место асимптотика

$$\Phi(p, p_*, v_*) = \frac{p - p_*}{a_*} + o(p - p_*), \quad a_* = a(p_*, v_*). \quad (2.7)$$

При $p < p_*$ это следует непосредственно из (2.5). При $p > p_*$ разложим в (2.4) функцию $\varepsilon(p, v)$ в ряд Тейлора и исключим $v_* - v$ из (2.3). В результате получим (2.7), где

$$a_*^2 = \frac{\varepsilon_v(p_*, v_*) + p_*}{\varepsilon_p(p_*, v_*)},$$

что совпадает с определением a в разделе 1 при переходе к соответствующим независимым переменным. Отбрасывая второе слагаемое в (2.7) и подставляя в (2.2), приходим к двум линейным уравнениям относительно P и U , решение которых дается формулами (1.9).

Перейдем к случаю уравнения состояния (2.1) в табличной форме. Имеются две одномерные, монотонно возрастающие таблицы $\{T_i\}$, $i = 1, \dots, n$ и $\{\rho_j\}$, $j = 1, \dots, m$ и две двумерные таблицы $\{p_{ij} = p(T_i, \rho_j)\}$ и $\{\varepsilon_{ij} = \varepsilon(T_i, \rho_j)\}$. По своему физическому смыслу таблица $\{p_{ij}\}$ монотонно возрастает по обоим индексам, а таблица $\{\varepsilon_{ij}\}$ монотонно возрастает по первому индексу. Область $T_i \leq T \leq T_{i+1}$, $\rho_j \leq \rho \leq \rho_{j+1}$ назовем табличной ячейкой с индексами i, j . Внутри каждой ячейки уравнения (2.1) имеют вид билинейных функций от $t = T - T_i$ и $r = \rho - \rho_j$

$$p(t, r) = p_0 + p_t t + p_r r + p_{tr} tr, \quad \varepsilon(t, r) = \varepsilon_0 + \varepsilon_t t + \varepsilon_r r + \varepsilon_{tr} tr, \quad (2.8)$$

константы в которых определяются формулами

$$p_0 = p_{ij}, \quad p_t = \frac{p_{i+1,j} - p_{ij}}{\Delta T_i}, \quad p_r = \frac{p_{i,j+1} - p_{ij}}{\Delta \rho_j},$$

$$p_{tr} = \frac{p_{i,j} + p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j} - p_{i,j+1}}{\Delta T_i \Delta \rho_j}, \quad \Delta T_i = T_{i+1} - T_i, \quad \Delta \rho_j = \rho_{j+1} - \rho_j,$$

и аналогично для констант ε_0 , ε_t , ε_r и ε_{tr} .

Упомянутые выше свойства монотонности таблиц позволяют легко обращать уравнения состояния, определяя, например, ε и T по p и ρ .

Из (2.2) можно исключить U и получить уравнение относительно P

$$\Psi(P) + \Delta u = 0, \quad \Psi(P) = \Phi(P, p_1, v_1) + \Phi(P, p_2, v_2). \quad (2.9)$$

Задается параметр $\delta > 0$, определяющий допустимую относительную невязку. Приближенное решение уравнения (2.9) считается найденным, если

$$|\Psi(P) + \Delta u| \leq \delta \max(|\Phi(P, p_1, v_1)|, |\Phi(P, p_2, v_2)|, |\Delta u|).$$

В качестве первого шага, на выполнение этого неравенства проверяется акустическое приближение (1.9).

Функция $\Psi(P)$, так же, как и в случае двучленного уравнения состояния, является монотонно возрастающей функцией своего аргумента. Для решения (2.9) реализован метод Ньютона, вполне аналогичный [2], с таким же выбором начального приближения. Отличие от [2] связано с видом функции $\Phi(p, p_*, v_*)$ и производной $\partial\Phi/\partial p$, алгоритм вычисления которых будет изложен ниже. Если метод Ньютона не сходился, что происходило очень редко, то применялся метод хорд с начальными значениями P_1 и P_2 такими, что $\Psi(P_1) + \Delta u < 0$, $\Psi(P_2) + \Delta u > 0$.

Еще одно отличие от книги [2] связано с диагностикой отсутствия решения уравнения (2.9) в случае очень сильных волн разрежения. В нашем случае уравнение (2.9) не имеет решения, если изэнтропа, проведенная из точки p_1, v_1 или точки p_2, v_2 выходит на границу нефизической области (см. фиг. 1) или на границу таблицы при давлении p_b , таком, что $\Psi(p_b) + \Delta u > 0$. В этом случае полагается $P = p_b$.

В заключение этого раздела приведем алгоритм расчета функции $\Phi(p, p_*, v_*)$ и производной $\partial\Phi/\partial p$ в случае волны разрежения ($p < p_*$) и ударной волны ($p > p_*$).

Волна разрежения. После подстановки в (2.6) формул (2.8) и

равенства $v = 1/(\rho_j + r)$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dt}{dr} + \xi(r)t = \eta(r), \quad (2.10)$$

$$\xi(r) = \left(\varepsilon_{tr} - \frac{p_t + p_{tr}r}{(\rho_j + r)^2} \right) \frac{1}{\varepsilon_t + \varepsilon_{tr}r}, \quad \eta(r) = \left(\frac{p_0 + p_r r}{(\rho_j + r)^2} - \varepsilon_r \right) \frac{1}{\varepsilon_t + \varepsilon_{tr}r}.$$

Уравнение (2.10) является линейным по t и, в отличие от общего случая изэнтропы с произвольным уравнением состояния, интегрируется в квадратурах (см., например, [27]). Решение (2.10), такое, что $t(r_0) = t_0$, имеет вид

$$t(r) = \frac{1}{\mu(r)} \left[\int_{r_0}^r \eta(r') \mu(r') dr' + t_0 \mu(r_0) \right], \quad (2.11)$$

$$\mu(r) = \exp\left(\int \xi(r') dr'\right) = \exp\left(\frac{\alpha}{\rho_j + r}\right) \frac{(\varepsilon_t + r\varepsilon_{tr})^{\beta+1}}{(\rho_j + r)^\beta},$$

$$\alpha = \frac{p_t - p_{tr}\rho_j}{\varepsilon_t - \varepsilon_{tr}\rho_j}, \quad \beta = \frac{p_{tr}\varepsilon_t - p_t\varepsilon_{tr}}{(\varepsilon_t - \varepsilon_{tr}\rho_j)^2}.$$

Для вычисления интеграла в (2.11) использовался метод Симпсона с некоторой априорной оценкой погрешности из [28], позволяющей оценить максимально допустимый по модулю шаг Δr_{max} по заданной относительной погрешности решения (2.10).

Интеграл в (2.5) вычисляется по формуле трапеций. Формула для массовой скорости звука в случае уравнения состояния (2.8) принимает вид

$$a(t, r) = \rho \sqrt{p_r + t p_{tr} + \frac{p_t + r p_{tr}}{\varepsilon_t + r \varepsilon_{tr}} \left(\frac{p(t, r)}{\rho^2} - \varepsilon_r - t \varepsilon_{tr} \right)}, \quad \rho = \rho_j + r. \quad (2.12)$$

Формула для производной $\partial\Phi_R/\partial p$ получается соответствующим дифференцированием формулы трапеций на последнем шаге интегрирования в (2.5). Если $|p - p_*| < \delta \max(|p|, |p_*|)$ с некоторым заданным достаточно малым δ , то используется акустическое приближение (2.7).

Окончательно алгоритм выглядит следующим образом. По заданным значениям p_* и $\rho_* = v_*^{-1}$, с помощью упомянутой выше процедуры обращения уравнения состояния, определяются T_* , табличная ячейка i, j , в которую попадает точка (T_*, ρ_*) , а также $t_0 = T_* - T_i$ и $r_0 = \rho_* - \rho_j$. Далее применяется формула (2.11) с шагом $\Delta r = r - r_0 < 0$, который выбирается из следующих условий, учитывающих, что вдоль изэнтропы плотность и температура уменьшаются вместе с давлением.

$$|\Delta r| \leq \Delta r_{max}, \quad (2.13a)$$

$$|\Delta r| \leq r_0, \quad (2.13б)$$

$$t(r) \geq 0, \quad (2.13в)$$

$$p(t(r), r) \geq p. \quad (2.13г)$$

Условие (а) обеспечивает заданную точность интегрирования по формуле Симпсона в (2.11), условие (б) запрещает выход за границу $\rho = \rho_j$ ячейки, условие (в) запрещает выход за границу $T = T_i$. Дальнейшие вычисления зависят от того, какое из условий (2.13) обращается в равенство для выбранного шага Δr . Если это условие (а), то продолжается расчет в выбранной ячейке; если (б), то происходит переход в ячейку $i, j - 1$ и полагается $r_0 = \Delta \rho_{j-1}$; если (в), то переход в ячейку $i - 1, j$ и $t_0 = \Delta T_{i-1}$; если (г), то расчет прекращается.

Если давление p оказывается настолько маленьким, что изэнтропа попадает на границу нефизической области (см. фиг. 1) или на границу таблицы, то расчет изэнтропы прекращается, а в основную программу расчета распада разрыва передается соответствующий сигнал.

Шаг интегрирования изэнтропы в предлагаемом методе ограничен размерами табличной ячейки. Поэтому метод не имеет смысла использовать в случае очень подробных таблиц, когда какой-либо стандартный численный метод решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения позволит интегрировать уравнение (2.6) с шагом порядка или большим размера табличной ячейки. Ситуация меняется в случае не слишком подробных таблиц, с которыми приходится иметь дело при моделировании течений с большим диапазоном

изменения термодинамических функций. В пределах табличной ячейки формула (2.11) с использованием метода Симпсона обладает высокой точностью и позволяет интегрировать уравнение (2.10) с шагом, недоступным для стандартных численных методов.

Ударная волна. Рассматривая уравнение (2.4) совместно с уравнениями состояния (2.1), приходим к двум уравнениям

$$\varepsilon(T, \rho) - \varepsilon_* - 0.5(p + p_*) \left(\frac{1}{\rho_*} - \frac{1}{\rho} \right) = 0, \quad p = p(T, \rho), \quad (2.14)$$

которые надо решать относительно ρ и T при заданном p . Предлагаемый численный метод опирается на простой алгоритм решения уравнений (2.14) относительно p и T при заданном ρ . В самом деле, подставляя уравнения состояния внутри табличной ячейки (2.8) в (2.14), приходим к линейному уравнению относительно T . Остается перебрать ячейки таблицы по i при фиксированном j и найти такую ячейку i, j , для которой $T_i \leq T \leq T_{i+1}$. Начальное значение индекса $i = i_0$ берется из предыдущего обращения к соответствующей процедуре. В результате, как правило, это значение оказывается близким к нужному значению i . Если найденное для $i = i_0$ значение $T > T_{i_0+1}$, то вначале перебираются ячейки с $i = i_0 + 1, \dots, n - 1$, а затем ячейки с $i = i_0 - 1, \dots, 1$. Если $T < T_{i_0}$, то, наоборот, первым выполняется перебор с уменьшением индекса i . В результате нужная ячейка, как правило, находится очень быстро.

Уравнения (2.14) относительно ρ и T при заданном p эквивалентны уравнению

$$p - p(\rho) = 0, \quad (2.15)$$

где функция $p(\rho)$ определяется описанным выше алгоритмом. Для решения (2.15) реализованы метод Ньютона и метод хорд. Формула для $dp/d\rho$ в методе Ньютона имеет вид

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{p_r + tp_{tr} + \gamma(0.5(p + p_*)/\rho^2 - \varepsilon_r - t\varepsilon_{tr})}{1 - 0.5\gamma(1/\rho_* - 1/\rho)}, \quad \gamma = \frac{p_t + rp_{tr}}{\varepsilon_t + r\varepsilon_{tr}}. \quad (2.16)$$

Для получения этой формулы надо взять дифференциал от обоих уравнений (2.14) и исключить dT .

Начальные точки ρ_1 и ρ_2 в методе хорд выбирались так, что $p(\rho_1) < p$, $p(\rho_2) > p$. Такой выбор не представляет трудностей, так как функция $p(\rho)$ является монотонно возрастающей и $p(\rho_*) = p_* < p$.

Вначале делалась одна итерация по методу хорд, а затем применялся метод Ньютона. В тех редких случаях, когда метод Ньютона не сходиллся, решение находилось методом хорд.

Описанный выше метод позволял надежно находить решение системы (2.14) при условии, что такое решение существует. Расчеты проводились с упоминавшимся выше уравнением состояния алюминия и аналогичным уравнением состояния свинца. Как показали эти расчеты, решение (2.14) существует, если точка p_*, ρ_* не принадлежит области фазового перехода между жидкостью и газом (см. фиг. 1). Поэтому было решено заменить в этой области ударную адиабату изэнтропой. Метод интегрирования изэнтропы в направлении увеличения давления вполне аналогичен описанному выше методу интегрирования в противоположном направлении для волны разрежения. Интегрирование изэнтропы выполняется до границы табличной ячейки, все узлы которой относятся к жидкости, или до давления p . Далее, если давление p не достигнуто, решается система (2.14) с p_*, ρ_* и ε_* , отвечающими последней точке на изэнтропе.

Функция $\Phi_S(p, p_*, v_*)$ вычисляется по формуле (2.3). Для производной $\partial\Phi_S/\partial p$ легко получить формулу

$$\frac{\partial\Phi_S}{\partial p} = \frac{\Phi_S}{2} \left[\frac{1}{p - p_*} + \frac{\rho_*}{(\rho - \rho_*)\rho} \left(\frac{dp}{d\rho} \right)^{-1} \right],$$

где $dp/d\rho$ определяется формулой (2.16).

Переход на акустическое приближение (2.7) при значениях p близких к p_* происходит также, как и в случае волны разрежения. Асимптотический анализ уравнений (2.14) приводит для a_* к той же формуле (2.12), что и в случае волны разрежения. Это следует из очевидной асимптотики

$$\Phi_S = \frac{p - p_*}{\rho_* \sqrt{(dp/d\rho)_*}} + o(p - p_*)$$

и формулы (2.16) при $p = p_*$, $\rho = \rho_*$.

3. ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОДАВЛЕНИЮ ЭНТРОПИЙНЫХ СЛЕДОВ

Решения уравнений гидродинамики могут содержать ударные волны, являющиеся разрывами этих решений. Соотношения между значениями функций по обе стороны ударной волны определяются законами сохранения, которые являются интегральными следствиями тех же уравнений. Известно большое количество консервативных разностных схем, которые позволяют, не выделяя явно ударную волну, воспроизводить ее в виде перемещающейся по сетке узкой структуры с резким изменением разностных функций на небольшом числе ячеек сетки. Образование этой структуры и ее любая перестройка, вызванная взаимодействием с разного рода границами, сопровождается появлением так называемого энтропийного следа — узкой структуры с резким изменением температуры и плотности, а следовательно и энтропии, при почти не меняющихся давлении и скорости.

Как следует из уравнений гидродинамики, в отсутствие теплопроводности энтропия лагранжевой частицы не меняется, если частица не проходит через ударную волну. Поэтому, хотя энтропийный след является чисто вычислительным эффектом, не имеющим отношения к решению уравнений гидродинамики, в рамках этих уравнений отсутствует механизм "рассасывания" энтропийного следа. Энтропийный след перемещается по разностной сетке в соответствии с полем скорости, как и любой контактный разрыв. На лагранжевой сетке, в частности, энтропийный след остается неподвижным. Как указывалось во введении, в некоторых задачах энтропийный след может существенно исказить результаты расчета.

Пусть имеется консервативная разностная схема в переменных Лагранжа, позволяющая определять значения искомым разностных функций на верхнем временном слое по значениям на нижнем слое. Разностные функции определены в серединах ячеек сетки. Для по-

следующих рассуждений размерность пространства, для которого построена схема, не имеет значения. Заметим, что такая схема может применяться не только на лагранжевой сетке, но и на произвольной подвижной сетке в качестве первого этапа схемы расщепления, вторым этапом которой является расчет уравнений переноса, отвечающих пересчету поля течения с лагранжевой сетки на сетку, полученную на очередном моменте времени (см. [3,13]).

Ячейка сетки является лагранжевой частицей, энтропия которой, как упоминалось выше, может измениться только под действием ударной волны, увеличивающей энтропию. Предлагается перебрать те границы ячейки, для которых задача о распаде разрыва дает ударную волну внутрь ячейки, и найти ударную волну с максимальной энтропией S_{max} . Далее применяется разностная схема и определяются значения неизвестных функций, в частности энтропии S , на верхнем временном слое. Если $S < S_{max}$, то найденные значения остаются без изменения. В противном случае одна из термодинамических функций, например давление p , остается без изменения, а остальные термодинамические функции определяются по S_{max} , p и уравнению состояния. Такая же коррекция разностной схемы выполняется и в том случае, когда для всех границ внутрь ячейки идут волны разрежения. В качестве S_{max} в этом случае выбирается энтропия на нижнем временном слое.

Рассмотренная выше коррекция разностной схемы нарушает ее консервативность, которая является необходимым условием правильного "сквозного" расчета ударной волны. Поэтому, если коррекции подвергаются ячейки сетки внутри структуры разностной ударной волны, то такая структура уже не будет аппроксимировать разрывное решение уравнений гидродинамики, что, разумеется, недопустимо. Как показали тестовые расчеты, для того, чтобы этого избежать, надо при вычислении максимально возможной энтропии S_{max} учесть не только ударные волны внутрь ячейки, но и энтропии соседних ячеек. В этом случае условие применения коррекции $S > S_{max}$ оказывается настолько сильным, что ему не удовлетворяют ячейки внутри структуры разностной ударной волны.

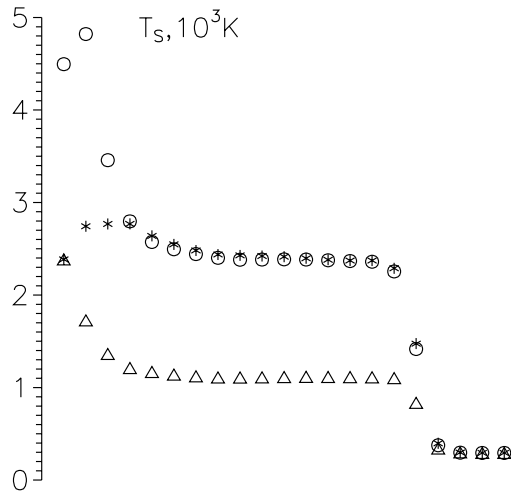
Для реализации рассмотренного выше подхода можно вместо энтропии использовать любую функцию, принимающую определенное значение для каждой изэнтропы, и возрастающую вместе с энтропией. Такой функцией является температура

$$T_S = T(S, \rho_*) \quad (3.1)$$

при некоторой фиксированной плотности ρ_* . Функцию (3.1) далее будем называть энтропийной температурой. В качестве ρ_* возьмем плотность в ячейке на нижнем временном слое. Для определения T_S по значениям двух любых термодинамических функций, например, ρ и T , надо решить уравнение (2.6) вместе с уравнением состояния на интервале от ρ до ρ_* , взяв точку T, ρ в качестве граничного условия. Для уравнения состояния совершенного газа $p = \varepsilon\rho(\gamma - 1)$, $\varepsilon = c_v T$ с постоянными γ и c_v , интегрирование (2.6) дает $T_S = (\rho_*/\rho)^{\gamma-1}T$. Метод интегрирования (2.6) для произвольного уравнения состояния в табличной форме изложен в разделе 2.

Окончательно алгоритм коррекции разностной схемы принимает следующий вид. Для границ ячейки с ударными волнами внутрь и для соседних ячеек определяются энтропийные температуры и находится их максимальное значение T_{Smax} . Если энтропийная температура на верхнем временном слое $T_S > T_{Smax}$, то давление p на верхнем временном слое не меняется, а остальные термодинамические функции определяются интегрированием (2.6) от состояния T_{Smax}, ρ_* до состояния с давлением p . Если для всех границ внутрь ячейки идут волны разрежения, то интегрирование в процедуре коррекции выполняется от состояния, отвечающего нижнему временному слою.

Перейдем к описанию результатов расчета. Для демонстрации энтропийных следов вместо энтропии будет использоваться энтропийная температура T_S , определенная формулой (3.1) с плотностью ρ_* , равной нормальной плотности алюминия, отвечающей атмосферному давлению и комнатной температуре. Как указывалось выше, энтропийная температура ведет себя также, как энтропия, т.е. возрастает при прохождении лагранжевой частицей ударной волны и сохраняется

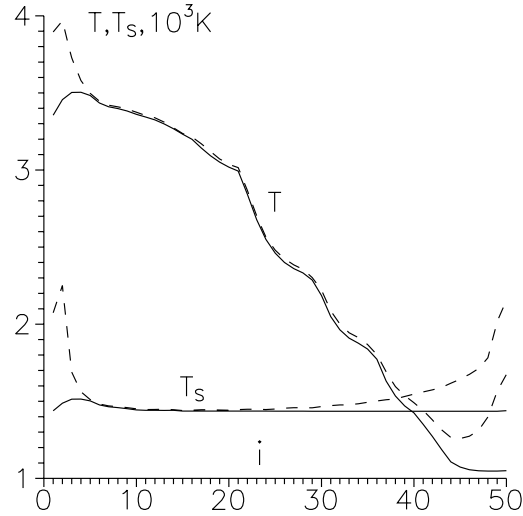


Фиг. 4: Удар по жесткой стенке; "○" — стандартная схема, "*" — схема с коррекцией, "△" — схема с коррекцией только по ударным волнам.

во всех остальных случаях.

На фиг. 4 показаны результаты расчета задачи об ударе алюминиевой плиты со скоростью 5 км/с по жесткой стенке. Решением задачи является ударная волна, идущая от стенки, в данном случае слева направо. Расчет проводится на лагранжевой сетке с использованием стандартной разностной схемы из [1]. Приведены распределения энтропийной температуры в зависимости от номера i узла сетки через 30 шагов по времени. Видно, что у левой границы, где формировалась структура разностной ударной волны, стандартная разностная схема (кружочки) дает сильный энтропийный след. Попытка ограничить энтропию в ячейке только максимальной энтропией ударных волн внутри ячейки (треугольники) дает явно неудовлетворительный результат. Вместе с уменьшением энтропии в энтропийном следе, уменьшается и энтропия за фронтом ударной волны, что приводит к изменению и других функций за фронтом волны. Нужный результат дает схема с коррекцией, учитывающей энтропии соседних ячеек (звездочки). По сравнению со стандартной схемой, энтропийный след значительно уменьшен, а структура разностной ударной волны не изменилась.

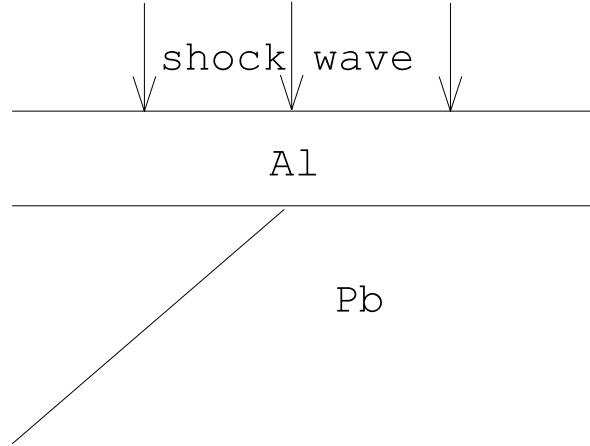
Фиг. 5 посвящена задаче о выходе сильной ударной волны на



Фиг. 5: Выход ударной волны на свободную границу; штриховая линия — стандартная схема, сплошная линия — схема с коррекцией.

свободную поверхность алюминия. Начальные данные отвечают нормальному состоянию алюминия. На левой границе задается давление ударной волны (1 Мбар), на правой границе - атмосферное давление. Точным решением задачи является вначале ударная волна, а затем и центрированная волна разрежения, которую инициирует ударная волна после выхода на правую границу. На фиг. 5 приведен результат расчета для некоторого момента времени после выхода ударной волны на правую границу, когда в точном решении энтропия во всем течении постоянна. Видно, что стандартная схема приводит к энтропийным следам на обеих границах. Волнообразный характер профиля температуры в центральной части течения объясняется не ошибками численного метода, а использованием табличного уравнения состояния с билинейной интерполяцией, для которого изэнтропы в плоскости термодинамических переменных имеют волнообразный характер.

Для правой границы, как упоминалось во введении, нужно считать выходящее излучение, определяемое профилем температуры. Видно, что этот профиль в случае стандартной схемы имеет качественно неправильный вид — при подходе к границе температура возрастает, в то время, как в волне разрежения она должна уменьшаться. Предлагаемая коррекция схемы исправляет ситуацию. Энтропия всюду почти



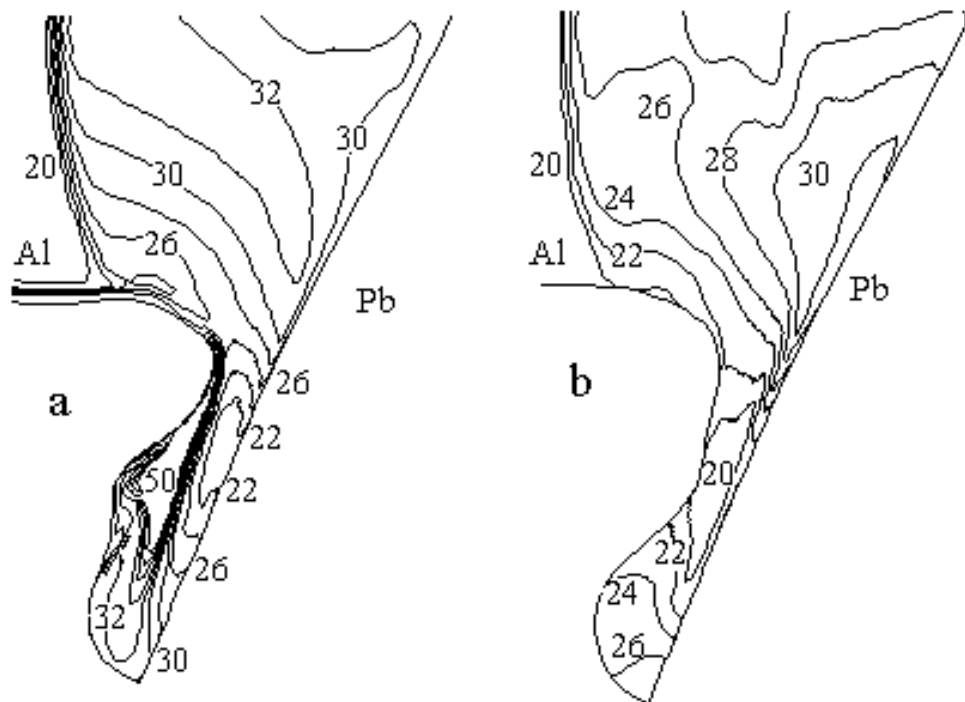
Фиг. 6: Постановка задачи о клине.

постоянна, а температура при подходе к правой границе уменьшается. Значительно уменьшается энтропийный след и у левой границы.

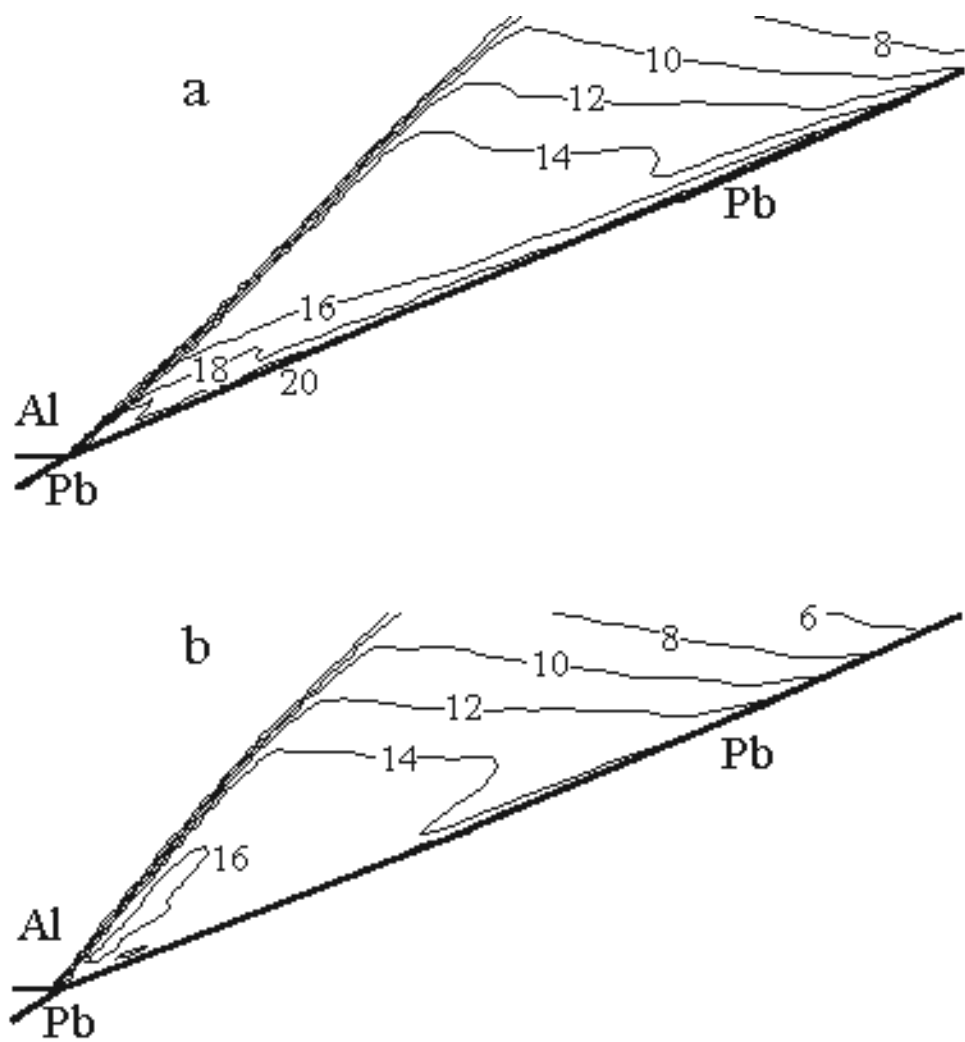
Следующая задача — выход сильной ударной волны на внутреннюю границу клина из алюминия и свинца, расположенных так, как показано на фиг. 6. Ударная волна инициируется на внешней стороне алюминиевой пластины с помощью ударника, состоящего также из алюминия. После выхода ударной волны на свободную границу алюминия, в зависимости от параметров задачи, может возникать кумулятивная струя, распространяющаяся вдоль границы со свинцом.

Расчет задачи ведется на подвижных сетках с явным выделением границ раздела в виде линий сетки. Используется расщепление на лагранжев этап и этап пересчета с лагранжевой сетки на сетку очередного шага по времени. На лагранжевом этапе используется почти консервативная модификация [12] схемы второго порядка точности [8], которая ниже будет называться стандартной схемой.

На фиг. 7 приведено поле температур в окрестности кумулятивной струи, полученное с использованием стандартной схемы и той же схемы с дополнительной коррекцией, рекомендованной в настоящей статье. Видно, что, в случае стандартной схемы энтропийный след на свободной границе алюминия проникает в кумулятивную струю, где возникает высокотемпературная (около 5000 K) область. В результате нижняя часть струи оказывается состоящей из кипящей жидкости.



Фиг. 7: Изотермы (10^2K) в окрестности кумулятивной струи; а — стандартная схема, б — схема с коррекцией.



Фиг. 8: Изотермы (10^3K) в окрестности присоединенной ударной волны; а — стандартная схема, б — схема с коррекцией.

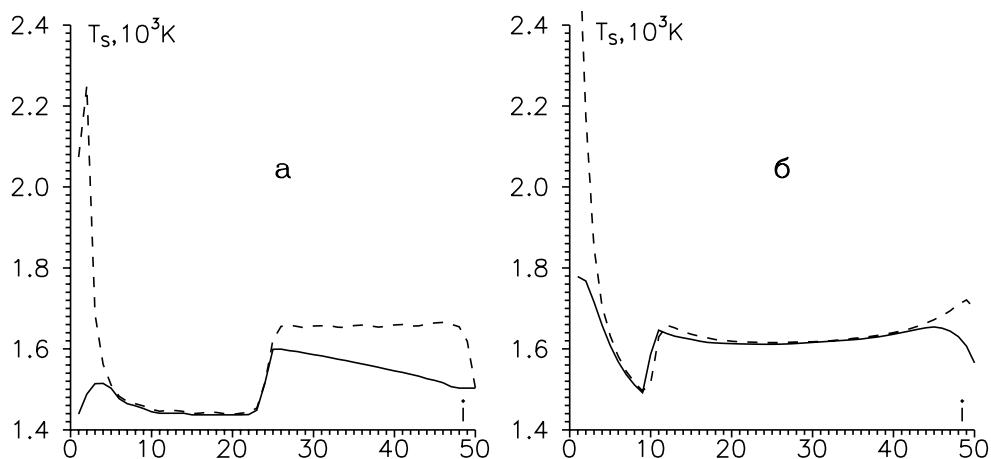
Коррекция схемы подавляет энтропийный след. Высокотемпературная область внутри струи исчезает, и вся струя оказывается состоящей только из жидкости.

Результат, показанный на фиг. 8, относится к таким значениям параметров, при которых кумулятивная струя не возникает. Характерной чертой течения в этом случае является присоединенная ударная волна в алюминии, в окрестности которой приведено поле температур на фиг. 8. Видно, что стандартная схема вблизи границы со свинцом дает сильный энтропийный след с температурой до 20000 К. Предлагаемая коррекция схемы устраняет этот энтропийный след.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Помимо энтропийных следов с завышенной энтропией, примеры которых приводились в разделе 3, встречаются следы с заниженной энтропией. Ясно, что, для такого энтропийного следа предлагаемый способ коррекции разностной схемы, основанный на ограничении энтропии сверху, не может привести к нужному результату. Более того, его применение в этом случае может привести к падению точности расчета вне энтропийного следа. Этот факт демонстрируется на фиг. 9а для задачи об отражении ударной волны. Начальные данные отвечают нормальному состоянию алюминия. На левой границе задается давление ударной волны (1 Мбар). Правая граница является жесткой стенкой. Расчет выполняется на лагранжевой сетке. При наличии следа с заниженной энтропией следует отключить коррекцию схемы в некоторой окрестности такого энтропийного следа.

Отметим, что, при расчете отражения ударной волны, далеко не всегда возникает след с заниженной энтропией. Это иллюстрируется на фиг. 9б, где приведен результат расчета той же задачи, но вместо лагранжевой сетки используется подвижная сетка с равномерной расстановкой узлов вдоль эйлеровой переменной, а в схему добавлен этап пересчета с лагранжевой сетки на подвижную эйлерову сетку. Видно, что в этом случае имеет место небольшое завышение энтропии у



Фиг. 9: Отражение ударной волны; а — лагранжева сетка, б — подвижная эйлерова сетка; штриховая линия — стандартная схема, сплошная линия — схема с коррекцией.

правой границы. Применение коррекции приводит к небольшому занижению энтропии в следе, не оказывая влияния на расчет остальной части течения.

В рассмотренном алгоритме коррекции давление на верхнем временном слое остается без изменения. Как показали некоторые тестовые расчеты, вполне работоспособным является и алгоритм, в котором в качестве неизменяемой термодинамической функции верхнего временного слоя выбрана плотность.

Для подавления энтропийного следа вблизи свободной границы при выходе на нее ударной волны может использоваться следующий упрощенный алгоритм. Если плотность в ячейке на шаге по времени уменьшается, то для определения давления и внутренней энергии, вместо разностного уравнения энергии, используется расчет по изэнтропе с энтропией нижнего временного слоя. Достоинством такого упрощенного алгоритма является возможность его применения в сочетании с приближенным алгоритмом расчета распада разрыва, построенного, например, на приближенной замене заданного уравнения состояния двучленным уравнением.

Для одномерной задачи, результаты расчета которой показаны на фиг. 5, упрощенный алгоритм дал вполне удовлетворительный ре-

зультат, немного занизив энтропию только в одной крайней ячейке на правой границе. Для двумерных и тем более трехмерных задач, условие уменьшения плотности на шаге по времени является значительно более мягким, чем условие отсутствия ударных волн внутрь ячейки для всех ее границ, выполнение которого требуется для перехода на расчет по изэнтропе нижнего временного слоя в алгоритме коррекции из раздела 3. Поэтому использование упрощенного алгоритма требует тщательного тестирования в каждом конкретном случае.

Автор благодарит И.В.Ломоносова из Института проблем химической физики РАН и К.В.Хищенко из Научно-исследовательского центра теплофизики импульсных воздействий РАН за предоставленные таблицы уравнений состояния алюминия и свинца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47, вып. 3. С. 271-306.
2. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.:Наука, 1976.
3. Van Leer B. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. №1. P. 101-136.
4. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. V. 43. №3. P. 357-372.
5. Osher S., Chakravarthy S. Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general geometries // J. Comput. Phys. 1983. V. 50. №3. P. 357-372.
6. Golella P. and Woodward P.R. The piecewise-parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // J. Comput. Phys. 1984. V. 54. №1. P. 174-201.

7. *Иванов М.Я., Нигматуллин Р.З.* Неявная схема С.К.Годунова повышенной точности для интегрирования уравнений Эйлера // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1987. Т. 27. №11. С. 1725-1735.
8. *Родионов А.В.* Повышение порядка аппроксимации схемы С.К.Годунова // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1987. Т. 27. №12. С. 1853—1860.
9. *Шаров Д.М.* Численное моделирование разрывных течений газа на неструктурированных адаптивных сетках. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат наук, Санкт-Петербург, 1992.
10. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction. Springer-Verlag, 1997.
11. *Чарахчьян А.А.* Эффект ложной кумуляции для схемы С.К.Годунова на подвижных сетках // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1988. Т. 28. №1. С. 142-146.
12. *Чарахчьян А.А.* Почти консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1993. Т. 33. №11. С. 1681-1692.
13. *Charakhch'yan A.A.* Application of moving regular grids to computation of gasdynamic flows with interfaces // *Modern Problems in Computational Aerogasdynamics*, A.A.Dorodnicyn and P.I.Chushkin (ed.), Mir Publishers, Moscow and CRC Press, Boca Ration, 1992, pp. 189-210.
14. *Чарахчьян А.А.* Об устойчивости кумулятивных струй, возникающих при импульсном воздействии на конические мишени // *Прикладн. механ. и технич. физ.* 1997. Т. 38. №3. С. 10-13.
15. *Наумова И.Н., Шмыглевский Ю.Д.* Алгоритм и программа расчета распадов разрывов в несовершенном газе. П002809. Информационный бюллетень "Алгоритмы и программы", №3. М., ВНТИЦентр, 1978.

16. *Charakhch'yan A.A.* Numerical investigation of circular cumulative jets compressing deuterium in conical targets // *Plasma Phys. Control. Fusion.* 1997. V. 39. №2. P. 237-247.
17. *Ломоносов И.В., Фролова А.А., Чарахчьян А.А.* Расчет высокоскоростного удара тонкой фольги по конической мишени // *Математическое моделирование.* 1997. Т. 9. №5. С. 48-60.
18. *Холодов А.С.* О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1978. Т. 18. №6. С. 1476-1492.
19. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы. М.:Наука, 1988.
20. *Семенов А.Ю.* Модификация метода Куранта-Исаксона-Риса для уравнений газодинамики с произвольным уравнением состояния // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1997. Т. 37. №11. С. 1376-1383.
21. *Roe P.L., Pike J.* Efficient construction and utilisation of approximate Riemann solutions // In "Computing Methods in Applied Science and Engineering, VI", North-Holland, 1984. P. 499-518.
22. *Glaister P.* An approximate linearised Riemann solver of the Euler equations of gas dynamics // *J. Comput. Phys.* 1988. V. 74. №2. P. 382-408.
23. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
24. *Чарахчьян А.А.* Об одном варианте полностью консервативной схемы для уравнений газовой динамики // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1979. Т. 19. №1. С. 259-263.
25. *Бушман А.В., Канель Г.И., Ни А.Л., Фортов В.Е.* Теплофизика и динамика интенсивных импульсных воздействий. Черногловка: ИХФ АН СССР, 1988.

26. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.:Наука, 1978.
27. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. Лейпциг: Тойбнер, 1979; М.: Наука, 1980.
28. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.:Наука, 1973.