УДК 519.87

КОЛЕБАНИЯ В МНОГОМЕРНЫХ НЕЧЕТНЫХ КОНКУРЕНТНЫХ СИСТЕМАХ[1]

Ю.И. Бродский

Введение

Цель данной работы – расширить арсенал элементарных моделей, пригодных для моделирования колебательных процессов, являющихся суперпозицией нескольких циклов различной периодичности. Такие циклы встречаются, например, в экономике, и интерес к их изучению особенно возрастает во времена экономических спадов.

В этой связи предлагается рассмотреть специальный вид уравнений конкуренции нечетной размерности. Несмотря на высокую популярность уравнений конкуренции со времен А. Лотки и В. Вольтерра и множество публикаций по этой теме, (например [1], [2]), предлагаемый вид уравнений конкуренции, по-видимому, ранее не исследовался.

Широко известный источник колебаний в межпопуляционной динамике – консервативные системы типа "хищник – жертва" (например, [2]). Однако в экономике явно друг друга не едят, поэтому кососимметрические матрицы

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 10-07-00176-а, 10-07-00420-а.

в модельных уравнениях не всегда естественны. В свободной экономике все политкорректно конкурируют. Конкурируют со многими, с кем-то сильнее, с кем-то слабее. В результате, как показывает эксперимент, в котором все мы участвуем, время от времени наблюдаются подъемы и спады основных характеристик процесса, различной периодичности [3].

Предлагаемая далее простейшая модель, на взгляд автора, по крайней мере качественно согласуется как с исходными посылками, так и с результатами упомянутого эксперимента.

Анализ нечетной конкурентной системы

Будем рассматривать n-мерную систему уравнений конкуренции
(n – нечетно, $n > 1$):

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i \left(1 - \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \frac{x_j}{x_j^*}\right), \quad m_{k,k} = 1. \tag{1}$$

Здесь α_i – коэффициент прироста i-й популяции, x_i^* – емкость среды для нее – т. е. предельная численность популяции, которая установилась бы в данной модели, если бы других популяций в ней не было. Матрица $M = \|m_{i,j}\|_{i,j=1}^{n}$ – матрица конкуренции. Ее компоненты $m_{i,j}$ – коэффициенты нетерпимости ([4]), их смысл в предметной области модели – сравнение межпопуляционной конкуренции с внутрипопуляционной. Так $m_{i,j}$ показывает, во сколько раз конкуренция популяции j с популяцией i сильнее ($m_{i,j} > 1$ – j нетерпима к i), или наоборот, слабее ($m_{i,j} < 1$ – j толерантна к i), чем конкуренция внутри самой популяции j.

Поскольку конкуренция внутри популяций выступает здесь в качестве эталона измерения, все диагональные элементы матрицы конкуренции единичны.

Для упрощения выкладок, сделаем ряд предположений:

•Избавимся в уравнениях от емкостей среды, перейдя к изучению динамики приведенных численностей, путем замены переменных $X_i = \dfrac{x_i}{x_i^*}$. Эта замена обратима, поэтому получив какие-либо результаты и сделав обратную замену переменных, мы сможем интерпретировать полученные результаты также и в терминах исходной системы (1) с емкостями среды.

•Предположим одинаковость коэффициентов прироста: $\alpha_i = \alpha$, $1 \le i \le n$. Это гораздо более ограничивающее допущение, однако без него, увы, автор не в состоянии получить какие-либо содержательные результаты. В утешение можно сказать, что полученные при этом допущении результаты допускают некую приближенную интерпретацию и в случае различных коэффициентов прироста. Сделав предположение об одинаковости коэффициентов прироста, можно избавиться от α в уравнениях заменой времени $t = \alpha\tau$.

•В работе [5] найдены необходимые и достаточные условия возникновения незатухающих колебаний в трехмерной конкурентной системе. Они состоят в специальном виде матрицы конкуренции M. Обобщим найденную в [5] трехмерную матрицу конкуренции на многомерный случай:

$$m_{i,j} = d_{i,j} = \begin{cases} 1 - (-1)^{j-i}d, & i < j; \\ 1, & i = j; \\ 1 + (-1)^{i-j}d, & i > j. \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $d > 0$. Это матрица вида (П.1) из Приложения. Далее будет показано, что такого вида матрицы достаточно для возникновения в нечетной n-мерной системе колебаний с $\dfrac{n-1}{2}$ различными периодами.

В результате сделанных допущений и преобразований, получаем следующую систему уравнений:

$$\dot{X}_i = X_i\left(1-\sum_{j=1}^{n} d_{i,j}X_j\right). \tag{3}$$

В Приложении показано, что определитель матрицы $D=\|d_{i,j}\|_{i,j=1}^{n}$ равен $n^2 d^{n-1}>0$, поэтому решение системы линейных уравнений $1-\sum\limits_{j=1}^{n} d_{i,j}X_j = 0$ существует, единственно, и согласно Приложению, равно $\bar{X} = \left(\dfrac{1}{n},...,\dfrac{1}{n}\right)$. Вектор $\bar{X}$ является стационарной точкой системы (3). Исследуем систему (3) в малой окрестности этой стационарной точки. Пусть $X_i=\bar{X}_i+x_i$, где x_i малы. Тогда пренебрегая более высокими по сравнению с ними порядками малости, получаем:

$$\dot{x}_i = -\bar{X}_i\sum_{j=1}^{n} d_{i,j}x_j = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} d_{i,j}x_j,$$

и после еще одной замены времени $\tau=\dfrac{1}{n}t$:

$$\dot{x}_i = -\sum_{j=1}^{n} d_{i,j}x_j. \tag{4}$$

Полученная система (4), является линейной однородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для решения такой системы достаточно найти собственные числа и собственные векторы матрицы $-D$.

В Приложении найдены собственные числа и инвариантные подпространства матрицы $D = \|d_{i,j}\|_{i,j=1}^{n}$. В уравнениях (4) фигурирует та же матрица, но со знаком минус. Для нее остаются верными все утверждения Приложения со следующей коррекцией: единственное вещественное собственное число $-n$ и определитель $-n^2 d^{n-1}$ теперь становятся отрицательными, остальные, чисто мнимые собственные числа, по-прежнему определяются формулой (П.10). Также остаются инвариантными для $-D$ все найденные для D инвариантные подпространства.

Качественно траектория системы (3) в малой окрестности стационарной точки $\bar{X}$ ведет себя следующим образом: отрицательное вещественное собственное число "затягивает" ее в аффинную гиперплоскость $\left\{X : X = \bar{X} + x, (x, e) = 0\right\}$. Эта гиперплоскость проходит через точки $(1, 0, ..., 0)$, $(0, 1, ..., 0)$,. . . , $(0, ..., 1)$, она есть прямая сумма $\dfrac{n-1}{2}$ двумерных аффинных подпространств, в каждом из которых может происходить колебательный процесс с частотой

$$d\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi k}{n}\right), 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}.$$

Вспомним, что мы дважды делали замену времени $t = \alpha\tau$ и $\tau = \dfrac{1}{n}t$. Возвращаясь к исходному времени, получаем частоты колебаний:

$$\frac{\alpha d}{n}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi k}{n}\right), \quad 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}. \tag{5}$$

Заметим, что при $n \to \infty$ справедливо:

$$\frac{\alpha d}{n} tg \frac{\pi(n-1)}{2n} = \frac{\alpha d}{n} \frac{\cos\dfrac{\pi}{2n}}{\sin\dfrac{\pi}{2n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2\alpha d}{\pi}.$$

Частота самой высокой гармоники нечетной n-мерной системы стремится к $\dfrac{2\alpha d}{\pi}$, при $n \to \infty$. Предельные частоты предыдущих гармоник будут меньше в 2, 3, 4, 5,... раз.

Возвращаясь теперь к исходным переменным $x_i = x_i^* X_i$, получаем: стационарная точка $\bar{x}$ системы (1) имеет компоненты $\bar{x}_i = \dfrac{x_i^*}{n}$, а гиперплоскость, в которой происходят колебания, проходит через точки емкостей среды на осях координат: $(x_1^*, 0, ..., 0)$, $(0, x_2^*, 0, ..., 0)$,. . . , $(0, ..., 0, x_n^*)$, ее уравнение:

$$1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i^*} = 0.$$

Эта гиперплоскость – граница толерантности, разделяющая области толерантности и нетерпимости ([4]) фазового пространства системы (1).

Инвариантные подпространства в исходных переменных будут выглядеть следующим образом: $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ – одномерное подпространство, соответствующее единственному вещественному собственному
числу, и двумерные подпространства, соответствующие сопряженным парам мнимых:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(x_1^*, x_2^* \cos\dfrac{2\pi k}{n}, ..., x_n^* \cos\dfrac{2\pi(n-1)k}{n}\right) \\ \left(x_1^*, x_2^* \sin\dfrac{2\pi k}{n}, ..., x_n^* \sin\dfrac{2\pi(n-1)k}{n}\right) \end{array} \right. , \quad 1 \le k \le \frac{n-1}{2}.$$

Остановимся теперь на случае, когда коэффициенты прироста α_i в (1) различны. В этом случае формула (5) будет приближенно описывать частоты колебаний, если вместо α в нее подставить некое $\bar{\alpha}$ – усреднение компонент α_i. Можно поставить оптимизационную задачу – найти такое усреднение $\bar{\alpha}$, чтобы характеристический многочлен с этим усреднением минимально отличался от исходного. В силу непрерывности характеристического многочлена, в том числе и по α, можно ожидать, что его корни будут стремиться к задаваемым формулой (5), по крайней мере, при выравнивании компонент α_i.

Примеры

1. $n = 3$. В системе возможны колебания с частотой $\dfrac{\alpha d}{3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\alpha d}{\sqrt{3}}$ и периодом $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{\alpha d}$ [5].

2. $n = 5$. В системе возможны колебания с двумя частотами $\dfrac{\alpha d}{5}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5} = \alpha d\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5} \approx 0,145\alpha d$ и $\dfrac{\alpha d}{5}\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{5} = \alpha d\dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5} \approx 0,616\alpha d$, и периодами $\dfrac{2\pi\sqrt{5}}{\alpha d\sqrt{\sqrt{5}-2}}$ и $\dfrac{2\pi\sqrt{5}}{\alpha d\sqrt{\sqrt{5}+2}}$ соответственно.

3. $n = 9$. В системе возможны колебания с четырьмя частотами $\dfrac{\alpha d}{9}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9} \approx 0,04\alpha d$, $\dfrac{\alpha d}{9}\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{9} \approx 0,093\alpha d$, $\dfrac{\alpha d}{9}\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{9} \approx 0,19\alpha d$ и $\dfrac{\alpha d}{9}\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{9} \approx 0,63\alpha d$.

Между прочим, отношение между этими частотами, а значит и между периодами колебаний, приближенно равно

$1 : 2,3 : 2,06 : 3,27$, что достаточно близко к отношению периодов известных экономических циклов: Китчина (3-4 года), Жюгляра (7-11 лет), Кузнеца (15-25 лет) и Кондратьева (45-60 лет) [3].

Приложение. Кое-что из линейной алгебры.

Пусть $d > 0$. Будем рассматривать квадратные $n \times n$ матрицы, задаваемые формулой (2):

$$\left\| \begin{array}{rrrr} 1 & 1+d & \ldots & 1-d \\ 1-d & 1 & \ldots & 1+d \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1+d & 1-d & \ldots & 1 \end{array} \right\|, \tag{П.1}$$

где n – нечетное, и сходную по устройству четную матрицу:

$$\left\| \begin{array}{rrrr} 1 & 1+d & \ldots & 1+d \\ 1-d & 1 & \ldots & 1-d \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1-d & 1+d & \ldots & 1 \end{array} \right\|, \tag{П.2}$$

где n – четное.

Эти, казалось бы, столь похожие друг на друга матрицы, на самом деле, как мы увидим далее, обладают весьма непохожими свойствами. Наряду с указанными матрицами (П.1) и (П.2), будем рассматривать связанные с ними кососимметрические матрицы:

$$\left\| \begin{array}{rrrr} 0 & d & \ldots & -d \\ -d & 0 & \ldots & d \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d & -d & \ldots & 0 \end{array} \right\|, \tag{П.3}$$

n – нечетное, и

$$\left\| \begin{array}{rrrr} 0 & d & ... & d \\ -d & 0 & ... & -d \\ ... & ... & ... & ... \\ -d & d & ... & 0 \end{array} \right\|, \tag{П.4}$$

n – четное.

Докажем, что определитель матрицы (П.2) равен d^n. Доказывать будем по индукции. Для $n = 2$ это действительно так, предположим, что данная формула верна вплоть до определителя матрицы (П.2) размерности $n - 2$. Будем вычислять определитель n-мерной матрицы, для этого из последней ее строки вычтем первую. Определитель от этого не изменится, а последняя его строка примет следующий вид: $(-d, 0, ..., 0, -d)$. Разложим определитель по этой строке. Заметим, что алгебраическое дополнение последнего в строке элемента есть определитель матрицы (П.1), размерности $n - 1$. Обозначим его величину через Δ_{n-1}. Минор, соответствующий первому элементу строки имеет следующий вид:

$$\left\| \begin{array}{rrrrr} 1+d & 1-d & ... & 1-d & 1+d \\ 1 & 1+d & ... & 1+d & 1-d \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1-d & 1+d & ... & 1 & 1+d \end{array} \right\|.$$

Опустим первую строку вниз, меняя ее последовательно со второй, …, $n - 1$. Это не изменит знака определителя, так как число обменов – четное. Заметим, что в алгебраическое дополнение определитель этого минора входит со знаком минус. Итак, нам нужно вычислить

$$A_{n,1} = -\begin{vmatrix} 1 & 1+d & ... & 1-d \\ 1-d & 1 & ... & 1+d \\ ... & ... & ... & ... \\ 1+d & 1-d & ... & 1+d \end{vmatrix}.$$

Заметим, что данный определитель отличается от определителя матрицы типа (П.1) размерности $n-1$ лишь "довеском" $+d$ в последнем диагональном элементе, поэтому в силу линейности определителя как функции столбца,

$$A_{n,1} = -\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & ... & 1+d & 0 \\ 1-d & ... & 1-d & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1+d & ... & 1-d & d \end{vmatrix} = -\Delta_{n-1} - d \cdot d^{n-2}.$$

Мы разложили последнее слагаемое по последнему столбцу и воспользовались индукционной гипотезой. Окончательно вычисляем наш определитель:

$$\Delta_n = -dA_{n,1} - dA_{n,n} = -d(-\Delta_{n-1} - d^{n-1}) - d\Delta_{n-1} = d^n,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что то же самое рассуждение с тем же самым результатом d^n, применимо и к определителю матрицы (П.4). Более того, если A – невырожденная кососимметрическая четная матрица, а B отличается от нее тем, что к каждому ее элементу прибавляется единица, то в силу линейности определителя, как функции столбца, вспоминая правило Крамера, имеем:

$$|B| = |A| + |B|\,(\bar{y}, e), \tag{П.5}$$

где e – вектор из единиц $(1, ..., 1)$, а $\bar{y}$ – решение уравнения $By = e$. Далее заметим, что $|B|\,(\bar{y}, e) = |A|\,(\bar{x}, e)$, где $\bar{x}$ – решение уравнения $Ax = e$ – в матрице появился единичный столбец, который можно вычитать из остальных, не меняя значения определителя. Но в силу того, что матрица A кососимметрическая, заключаем: $(x, Ax) = -(xA, x) = 0$, $\forall x$, откуда следует $(\bar{x}, e) = (\bar{x}, A\bar{x}) = 0$, и, стало быть, $|B| = |A|$.

Заметим, что для нечетных матриц все обстоит совсем по-другому. Как известно, определитель нечетной кососимметрической матрицы равен нулю: $|A| = |-A| = -|A| = 0$, определитель же матрицы (П.1), как нам предстоит выяснить далее, равен $n^2 d^{n-1}$.

Перейдем теперь к вычислению определителя матрицы (П.1). Выберем в матрице (П.1) j-й столбец, и сложим с ним все остальные, определитель матрицы от этого не изменится, получаем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+d & ... & 1-d \\ 1-d & 1 & ... & 1+d \\ ... & ... & ... & ... \\ 1+d & 1-d & ... & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & ... & n & ... & 1-d \\ 1-d & ... & n & ... & 1+d \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1+d & ... & n & ... & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= n \begin{vmatrix} 1 & ... & 1 & ... & 1-d \\ 1-d & ... & 1 & ... & 1+d \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1+d & ... & 1 & ... & 1 \end{vmatrix} = \tag{П.6}$$

$$= n \begin{vmatrix} 0 & ... & 1 & ... & -d \\ -d & ... & 1 & ... & d \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ d & ... & 1 & ... & 0 \end{vmatrix}. \tag{П.7}$$

Полученное соотношение, между прочим, является аналогом формулы (П.5), так как в данном случае $|A| = 0$. Очевидно, определители (П.6) и (П.7) при любых $0 \le j \le n$ равны между собой, и все равны $\frac{1}{n}\Delta_n$, где Δ_n – искомый определитель матрицы (П.1). Когда мы докажем, что $\Delta_n > 0$, отсюда будет следовать, что если обозначить через D матрицу (П.1), то решением уравнения $Dx = e$, будет вектор $\bar{x} = \left(\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right)$. Рассмотрим теперь определитель вида (П.7) при $j = n$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & d & ... & d & 1 \\ -d & 0 & ... & -d & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ d & -d & ... & -d & 1 \end{vmatrix} \qquad (П.8)$$

Попробуем вычислить определитель (П.8), по формуле окаймленного определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} & & 1 \\ & A_{n-1} & ... \\ d & ... & 1 \end{vmatrix} = |A_{n-1}| - (d, ..., -d)\tilde{A}_{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= d^{n-1} + d \sum_{j,k=1}^{n-1} (-1)^k A_{j,k} = d^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k d \sum_{j=1}^{n-1} A_{j,k}.$$

Здесь A_{n-1} – хорошо известная нам четная матрица типа (П.4), определитель которой $|A_{n-1}| = d^{n-1}$ был вычислен ранее; $\tilde{A}_{n-1}$ – взаимная с A_{n-1} матрица, т. е. такая, что на месте каждого элемента $a_{i,j}$ стоит его алгебраическое дополнение $A_{i,j}$; и, наконец, $A_{j,k}$ – уже упомянутые алгебраические дополнения элементов матрицы A_{n-1}.

Заметим, что строка $\left\{(-1)^k d\right\}_{k=1}^{n-1}$ есть сумма всех строк матрицы (П.4) размерности $n-1$, отсюда, вспоминая свойство произведений строк определителя на их алгебраические дополнения, заключаем:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k d\sum_{j=1}^{n-1}A_{j,k}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}a_{l,k}\sum_{j=1}^{n-1}A_{j,k}=$$

$$=\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}a_{l,k}A_{j,k}=\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\delta_{l,j}\left|A_{n-1}\right|=(n-1)d^{n-1}.$$

Отсюда получаем значение определителя матрицы (П.8):

$$\Delta=nd^{n-1}.$$

Вычислив определитель (П.8), и зная, что искомый определитель матрицы (П.1) в n раз больше, мы, наконец, можем окончательно записать значение определителя нечетной матрицы (П.1):

$$\Delta_n=n^2d^{n-1}.$$

Вычислим теперь собственные значения матрицы (П.1). Заметим, что эта матрица представляет собой циркулянт – частный случай матрицы Тёплица, который полностью определяется своей первой строкой – последующие строки получаются из предыдущих циклическим сдвигом вправо на одну позицию. Из курса линейной алгебры (например, [6]) известно, что циркулянт диагонализируется дискретным преобразованием Фурье, которое задается следующей матрицей Вандермонда:

$$\left\| \begin{array}{lllll} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & ... & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & ... & \varepsilon^{2(n-1)} \\ ... & ... & ... & ... & \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & ... & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{array} \right\|,$$

где $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ – корень n-й степени из единицы. При этом, собственные числа матрицы (П.1) можно определить по формуле:

$$\lambda_j = 1 + (1+d)\varepsilon_j + (1-d)\varepsilon_j^2 + ... + (1-d)\varepsilon_j^{n-1}, \qquad (\text{П}.9)$$

где $\varepsilon_j = \cos\dfrac{2\pi j}{n} + i\sin\dfrac{2\pi j}{n}$, $0 \le j \le n-1$.

Попробуем вычислить эти собственные числа. Легче всего это сделать при $j = 0$, тогда $\varepsilon_0 = 1$ и $\lambda_0 = n$ – это единственное вещественное собственное число. Пусть теперь $j > 0$, будем вычислять λ_j по формуле (П.9). Будем пользоваться известным свойством корней n-й степени из единицы, следующим из формулы Муавра:

$$\varepsilon_j^k = \varepsilon_1^{jk} = \cos\frac{2\pi jk}{n} + i\sin\frac{2\pi jk}{n}.$$

Во-первых, заметим, что из суммы (П.9) исчезают все члены, связанные с единицами, действительно, по формуле суммы геометрической прогрессии $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_j^k = \frac{1-\varepsilon_j^n}{1-\varepsilon_j} = 0.$

Во-вторых, сокращаются все члены, связанные с косинусами. Действительно, при нечетных k, $0 < k < n$ слагаемые $d\cos\dfrac{2\pi jk}{n}$ входят в сумму (П.9) со знаком плюс, а при четных – со знаком минус. Каждому k, $0 < k < \dfrac{n}{2}$ поставим в соответствие l, $\dfrac{n}{2} < l < n$ такое, что $l = n - k$, тогда

$$\cos\frac{2\pi jk}{n} = \cos\left(-\frac{2\pi jk}{n}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi jk}{n} + 2\pi j\right) = \cos\frac{2\pi jl}{n},$$

но k и l имеют противоположную четность, так как n нечетно, и поэтому входят в сумму (П.9) с противоположными знаками. В силу сказанного выше, все косинусы в (П.9) взаимно сократятся, а синусы, как нечетные функции, наоборот, удвоятся. Учитывая сказанное, перепишем (П.9) следующим образом:

$$\lambda_j = 2id\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin\left(\frac{2\pi jk}{n}\right) =$$

$$= 2id\frac{\sin\left(\dfrac{\frac{n-1}{2}+1}{2}\cdot\dfrac{2\pi j}{n}\right)\sin\left(\dfrac{n-1}{4}\cdot\dfrac{2\pi j}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi j}{n}\right)} =$$

$$= 2id\frac{\sin\left(\dfrac{\pi j}{2}+\dfrac{\pi j}{2n}\right)\sin\left(\dfrac{\pi j}{2}-\dfrac{\pi j}{2n}\right)}{\sin\dfrac{\pi j}{n}} =$$

$$= \frac{2id}{\sin\dfrac{\pi j}{n}}\left(\sin\frac{\pi j}{2}\cos\frac{\pi j}{2n}+\cos\frac{\pi j}{2}\sin\frac{\pi j}{2n}\right)\times$$

$$\times\left(\sin\frac{\pi j}{2}\cos\frac{\pi j}{2n}-\cos\frac{\pi j}{2}\sin\frac{\pi j}{2n}\right)=$$

$$= id\frac{\sin^2\dfrac{\pi j}{2}\cos^2\dfrac{\pi j}{2n}-\cos^2\dfrac{\pi j}{2}\sin^2\dfrac{\pi j}{2n}}{\sin\dfrac{\pi j}{2n}\cos\dfrac{\pi j}{2n}}.$$

Последнее выражение ведет себя по-разному в зависимости от четности j. При четном j выполняется $\sin\dfrac{\pi j}{2}=0$ и $\cos^2\dfrac{\pi j}{2}=1$, поэтому $\lambda_j=-id\operatorname{tg}\dfrac{\pi j}{2n}$. При нечетном – наоборот, $\sin^2\dfrac{\pi j}{2}=1$ и $\cos\dfrac{\pi j}{2}=0$, поэтому $\lambda_j=id\operatorname{ctg}\dfrac{\pi j}{2n}$.

Заметим, что всякому четному l, $0<l<n$, соответствует нечетное j, $0<j<n$ такое, что $j=n-l$ и наоборот. Отсюда заключаем:

$$\lambda_j = id\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi j}{2n}\right)=id\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(n-l)}{2n}\right)=id\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi l}{2n}\right)=$$

$$= id\operatorname{tg}\left(\frac{\pi l}{2n}\right)=-\lambda_l.$$

Пары чисто мнимых собственных чисел матрицы (П.1), как им и положено, комплексно сопряжены. Теперь можно записать единую формулу для пар комплексно сопряженных собственных чисел:

$$\lambda_{k_{1,2}}=\mp id\operatorname{tg}\left(\frac{\pi k}{n}\right),\quad 1\le k\le\frac{n-1}{2}. \qquad (\text{П}.10)$$

Далее, с одной стороны, как было показано выше, определитель матрицы (П.1) равен $n^2 d^{n-1}$, с другой – это произведение всех собственных чисел матрицы: $nd^{n-1}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)$. Приравнивая эти выражения, получаем любопытное тождество: $n = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)$, или вспоминая что n нечетно:

$$\prod_{k=1}^{m} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi k}{2m+1}\right) = 2m+1.$$

При $m = 1$ оно общеизвестно: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Аналог данного тождества для четных чисел, начиная с $2m = 4$,

$$\prod_{k=1}^{m-1} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi k}{2m}\right) = 1,$$

на наш взгляд не столь содержателен. Его легко получить, пользуясь симметрией четных долей π относительно биссектрисы первого квадранта системы координат (каждому тангенсу ниже биссектрисы соответствует котангенс того же угла выше нее, плюс при нечетном $m - 1$, в центре еще и сама биссектриса).

Собственный вектор, соответствующий $\lambda_0 = n$, это e – вектор, состоящий из единиц. Дополняющее подпространство можно определить уравнением: $(e, x) = 0$. Инвариантные двумерные подпространства, соответствующие парам мнимых собственных чисел $\lambda_{k_{1,2}}$ (П.10), есть линейные оболочки пар векторов

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1, \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right), ..., \cos\left(\frac{2\pi(n-1)k}{n}\right)\right) \\ \left(1, \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), ..., \sin\left(\frac{2\pi(n-1)k}{n}\right)\right) \end{array} \right. , \quad 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}.$$

Литература

1. *Базыкин А.Д.* Нелинейная динамика взаимодействующих популяций, Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 368 с.

2. *Разжевайкин В.Н.* Анализ моделей динамики популяций, М.: МФТИ, 2010, 196 с.

3. История и Математика: Анализ и моделирование глобальной динамики //Альманах под ред. *Коротаев А.В., Малков С.Ю., Гринин Л.Е.,* М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ 2010, 352 с.

4. *Бродский Ю.И.* Толерантность и нетерпимость с точки зрения системной динамики и исследования операций М.: ВЦ РАН, 2008, 53 с.

5. *Бродский Ю.И.* Социальный строй, как способ синтеза сложной системы. Проблемы кризисов и устойчивости. //Социальные процессы и технологии: моделирование и управление /Под ред. проф. Б.А. Суслакова, - М.: РАЕН-РОС-МИГКУ, 2010, С. 13-18.
(http://simul.ccas.ru/articles)

6. *Тыртышников Е.Е.* Матричный анализ и линейная алгебра М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, 480 с.