РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А. ДОРОДНИЦЫНА
СООБЩЕНИЕ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Ю. И. БРОДСКИЙ

ТОЛЕРАНТНОСТЬ И НЕТЕРПИМОСТЬ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СИСТЕМНОЙ ДИНАМИКИ И ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

ВЦ РАН
МОСКВА
2008

УДК 519.87+316.7

Ответственный редактор
член-корр. РАН Ю.Н. Павловский

Из всех аспектов такого сложного явления как культура, мы выберем два противоположных – толерантность и нетерпимость по отношению к другим культурам. Целью исследования является выяснение того, как взаимодействуют между собой культуры с разными уровнями толерантности, к чему приведет их взаимодействие, что нужно делать и чего делать нельзя, если мы хотим сохранить все многообразие существующих ныне культур.

TOLERANCE AND INTOLERANCE FROM THE POSITION OF SYSTEM DYNAMICS AND OPERATION RESEARCH
From all aspects of such complex phenomenon as a culture, we shall choose two opposite – tolerance and intolerance in attention to other cultures. The purpose of the research is finding out how cultures with different levels of tolerance interact among themselves; what is vital to do and what we could do by no means, if we wish to maintain all the variety of cultures existing nowadays.

Ключевые слова:
математическое моделирование социальных процессов, межкультурные взаимодействия, толерантность, нетерпимость, системная динамика, исследование операций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 07-07-00071-а.

Рецензенты: Ю.Н. Кондрашов,
В.М. Кривцов

Научное издание

Введение

События последних лет в России, на Балканах, в Западной Европе, на Ближнем Востоке показали жизненную необходимость изучения взаимодействия различных культур. Ясно, что настоящее состояние их общения между собой оставляет желать лучшего, нужны какие-то идеи, рекомендации, мероприятия, иначе в ближайшем будущем не все участники этого общения могут оказаться в наличии. По данной теме издается много литературы, проводятся семинары, конференции, однако общепризнанных решений пока не выработано. Спектр мнений по данному вопросу весьма широк, от «ученого», часто высказываемого в научных выступлениях и публикациях мнения, что все проблемы межкультурного взаимодействия решаются повышением толерантности к иным культурам, до «базарного», что нужно срочно гнать всех «этих», которые «понаехали тут и размножаются в десять раз быстрее». Полностью разделить высказанное выше «ученое» мнение мешают события последних лет в толерантной, до полной потери самоидентификации Западной Европе. Безоговорочно принять «базарную» точку зрения также непросто всякому хоть сколько-нибудь прикоснувшемуся к истории и практике мировых культур. Для выработки по-настоящему научной точки зрения на данную проблему необходимо выделение основных тенденций развития изучаемого явления, очерчивание границ благоприятных и нежелательных тенденций и, наконец, выработка управленческих решений, призванных усилить благоприятные и исключить или ослабить неблагоприятные.

Чем же может здесь помочь математика? Математика накопила огромный опыт создания и исследования моделей различных явлений, относящихся к области естественных наук, в основе которого лежит изучение количественных связей между различными величинами, характеризующими явление, и выявление законов изменения характеристик явления на основе имеющих место связей между ними. Сложность применения этого опыта в гуманитарной области состоит в том, что далеко не все характеристики встречающихся в жизни явлений, мы умеем измерять и выражать числом. Собственно, по этой грани и проходит разделение на естественные и гуманитарные науки.

Например, мы не в состоянии описать дифференциальными уравнениями такое сложное явление, как взаимодействие культур во всем его многообразии. Постараемся, однако, упростить задачу, исключив из рассмотрения верхний слой понятия культуры, тем более что на этом слое обычно происходит взаимообогащение культур, а не конфликты между ними. Ограничимся рассмотрением культуры на «бытовом» ее уровне, где она есть набор усвоенных с детства стандартных ответов на стандартные запросы окружающей среды. Именно на этом уровне и происходят все конфликты, с упоминания о которых начинается работа. Рассматривая бытовую культуру как воспитываемый к моменту социальной зрелости индивидуума набор стандартных для данной культуры ответов на стандартные запросы окружающей среды, можно заметить, что она функционально подобна операционным системам компьютеров, решающим похожие задачи, и, следовательно, вполне может быть объектом описания и изучения со стороны информатики. Во всяком случае, подобный взгляд на бытовую культуру не вызывает неприятия у некоторых признанных культурологов [1].

Информатика за последние 25 лет накопила большой и положительный опыт бесконфликтного объединения разнородных платформ и сетей в единую Сеть. Не исключено, что декомпозиция межкультурных взаимодействий в духе иерархической модели взаимодействия открытых систем ISO-OSI (см., например, [2]), моделирование и разработка соответствующих протоколов и интерфейсов, могли бы оказаться полезными и в непростом деле изучения и совершенствования межкультурных отношений.

Оставим, однако, это интересное исследование на будущее: прежде чем браться за декомпозицию сложного явления, полезно взглянуть на него в целом, чтобы в дальнейшем «за деревьями не потерять леса». Признанным инструментом такого охвата явления в целом (правда, абстрагируясь при этом от многих, зачастую достаточно важных деталей), является системная динамика. Она и будет основным инструментом данной работы.

Еще сильнее упростим объект нашего изучения: из множества аспектов такого сложного явления как бытовая культура выберем лишь два противоположных – толерантность и нетерпимость по отношению к другим культурам [3]. Теперь можно окончательно определить предмет нашего исследования:

- Будем различать два множества (популяции, общины, виды) со своими начальными численностями, способностью к увеличению этих численностей и характеристиками их прироста. Природа элементов множеств нам не важна.
- Представителям каждого из множеств приходится вступать в конкурентные отношения по поводу некоторого ограниченного, но жизненно важного ресурса, природа которого на данном уровне абстракции нас не интересует, как с представителями своего, так и чужого множества.
- В ходе таких конкурентных взаимодействий может оказаться, что конкуренция с представителями своего множества острее, чем с представителями чужого, и тогда мы будем говорить о **толерантном** отношении к чужому множеству. Если же конкуренция с представителями чужого множества сильнее, чем внутри своего, мы будем говорить о **нетерпимости** по отношению к чужому множеству. Наконец, когда стороны не

проявляют ни толерантности, ни нетерпимости в смысле нашего определения, а относятся к иноплеменнику в точности так же как и к соплеменнику, будем говорить об отношении друг к другу без предубеждений и предпочтений, для краткости – **без предубеждений**. Будем также рассматривать случай, когда вместо конкуренции с представителями чужого множества, имеет место, наоборот, оказание им помощи (т. е. предоставление им важного для их жизни ресурса). При этом конкуренция внутри своего множества по-прежнему остается. Такое отношение к представителям чужого множества будем называть **сверхтолерантностью** [4].

Отметим что, несмотря на свою «одномерность», наши определения толерантности и нетерпимости в достаточной мере согласуются с классическими, начиная от Вольтера и кончая современными исследователями [1,5,6]. О равном отношении к «своим» и «чужим» говорится в Новом Завете (Матф. 22,39; Мар. 12,31; Лук. 10,27). Сверхтолерантность – гораздо более сильное отношение, чем просто приятие и даже благосклонность к чужому множеству. В нашей модели это обязательно некая положительная работа на благо этого множества. В индивидуальных проявлениях ее можно уподобить деятельности А. Швейцера в Ломбарене, в межнациональных отношениях – государственным программам развития малых народностей и национальных культур.

Целью нашего исследования будет выяснение того, как взаимодействуют между собой культуры с разными уровнями толерантности и нетерпимости, каких результатов можно ждать от их взаимодействия, что нужно делать, и чего делать нельзя, если мы хотим сохранить все многообразие существующих ныне культур.

Заметим, что на данном уровне абстракции бытовая культура популяции исчерпывается ее сверхтолерантным, толерантным или нетерпимым откликом на предъявление ей окружающей средой популяции-конкурента. Еще заметим, что сверхтолерантность, толерантность и нетерпимость в данной модели выявляются на основе жизненно важной для каждой из рассматриваемых популяций постоянной практики разрешения конкурентных конфликтов по поводу ограниченного ресурса. Механизм разрешения таких конфликтов не входит в нашу абстракцию.

Системно-динамический анализ модели

Дифференциальные уравнения, которыми можно описать определенную выше на словесном уровне модель, хорошо известны и подробно исследованы (например, в [7]). Это уравнения конкурентного взаимодействия двух популяций с численностями N и M соответственно.

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - aN^2 - eMN,$$
$$\frac{dM}{dt} = \beta M - bM^2 - cMN. \tag{1}$$

Известны несколько качественно различающихся типов решений системы (1). Например, со временем может установиться равновесие между численностями популяций, или, наоборот, одна из популяций полностью вымирает, а другая остается. Иногда конечное состояние равновесия зависит от начальных численностей популяций, а иногда – нет. Понятно, что качественные особенности поведения системы зависят от значений параметров α, β, a, b, c и e, а также от соотношений между ними. При этом смысл параметров a, b, c и e в предметной области не слишком прозрачен, хотя, конечно, понятно, что a и b связаны с внутривидовой, а c и e – с межвидовой конкуренцией.

Для успеха моделирования, очень важно не только выявить качественные особенности поведения системы модельных уравнений, но и найти набор параметров,

имеющих прозрачный смысл в предметной области модели, от которых зависит ее поведение, выделить ряд ключевых значений этих параметров, таких, при прохождении которых качественно меняется картина развития системы. Желательно, чтобы эти ключевые значения параметров также находили ясную интерпретацию в предметной области моделирования.

Такими параметрами в данной модели будут **коэффициенты нетерпимости** – характерное именно для этой модели понятие, которое будет определено чуть позже.

Попробуем переписать систему (1) так, чтобы ее коэффициенты приобрели некий достаточно прозрачный смысл в исследуемой области. Вынесем в правых частях за скобку коэффициенты прироста α и β, умноженные на численности популяций, и обозначим: $N^* = \dfrac{\alpha}{a}$, $M^* = \dfrac{\beta}{b}$, $m = \dfrac{eM^*}{\alpha}$, $n = \dfrac{cN^*}{\beta}$. Получаем основные уравнения нашей модели, с которыми и будем работать в дальнейшем:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \alpha N(1 - \frac{N}{N^*} - m\frac{M}{M^*}), \\ \frac{dM}{dt} &= \beta M(1 - \frac{M}{M^*} - n\frac{N}{N^*}). \end{aligned} \tag{2}$$

Числа N^* и M^* обычно называют емкостями среды по отношению к популяциям соответствующего вида. Для каждой из популяций, при отсутствии другой, они имеют смысл предельной численности популяции, которую еще способна «прокормить» или «выдержать» среда обитания. При превышении этих предельных численностей начинается убывание соответствующих популяций. Отношения $\dfrac{M}{M^*}$ и

$\frac{N}{N^*}$ определяют силу внутривидовой конкуренции. Числа n и m определяют силу межвидовой конкуренции, по сравнению с внутривидовой. Например, при равенстве этих чисел единице можно сказать, что межвидовая конкуренция столь же сильна, как и внутривидовая, при $n > 1$, $m > 1$ – межвидовая конкуренция сильнее, а при $n < 1$, $m < 1$ – наоборот, слабее внутривидовой. Поэтому числа n и m можно назвать **коэффициентами нетерпимости** при межвидовой конкуренции популяций. Так, например, при $n < 1$ конкуренция популяции N с M слабее, чем внутривидовая конкуренция внутри самой N, поэтому можно сказать о **толерантном** отношении популяции N к M. И наоборот, при $n > 1$ конкуренция между популяциями N и M сильнее, чем внутривидовая конкуренция в N, поэтому можно сказать о **нетерпимом** отношении популяции N к M. При значениях коэффициента нетерпимости в пределах полуинтервала $[0,1)$ имеет место толерантность, если он равен 1 – имеет место **отношение без предубеждений**, и наконец при значениях из интервала $(1,\infty)$ имеет место нетерпимость. Будем рассматривать также и отрицательные значения коэффициентов нетерпимости $0 > n, m > -\infty$. Содержательно при таких значениях коэффициентов вместо межвидовой конкуренции имеет место «помощь» одного вида другому, такое межвидовое отношение будем называть **сверхтолерантностью.**

Качественное поведение системы (1) хорошо известно. Она всегда имеет три стационарные точки:

$$(N = 0, M = 0),\ (N = N^*, M = 0),\ (N = 0, M = M^*),$$

из которых неустойчивый узел $(N = 0, M = 0)$ нам интересен менее всего из-за своей «бессодержательности» в предметной области, и поэтому в дальнейшем упоминаться не будет. Также стационарными точками будут решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$1-\frac{N}{N^*}-m\frac{M}{M^*}=0\,, \tag{3}$$

$$1-\frac{M}{M^*}-n\frac{N}{N^*}=0\,. \tag{4}$$

При $n=m=1$ таких решений бесконечно много, а именно вся прямая

$$N=N^*-\frac{N^*}{M^*}M\,. \tag{5}$$

При $n\neq 1$, но $nm=1$ решений нет. В остальных случаях решение единственно и находится по формуле

$$\overline{N}=N^*\frac{1-m}{1-nm}\,,\quad \overline{M}=M^*\frac{1-n}{1-nm}\,. \tag{6}$$

Качественное поведение системы (2) зависит от существования и расположения точки (6) относительно отрезка прямой (5), лежащего в первом квадранте системы координат. Опишем это поведение в зависимости от значений коэффициентов нетерпимости n и m сторон N и M.

Будем называть прямую (5) границей толерантности, область первого квадранта, лежащую выше этой прямой и при этом не выше прямой $N=N^*$ и не правее прямой $M=M^*$ – областью толерантности, а область первого квадранта, лежащую ниже границы толерантности, – областью нетерпимости. Область первого квадранта расположенную выше прямой $N=N^*$ будем называть областью сверхтолерантности популяции M, область правее прямой $M=M^*$ – областью сверхтолерантности популяции N и, наконец, область выше прямой $N=N^*$ и правее прямой $M=M^*$ – областью обоюдной сверхтолерантности.

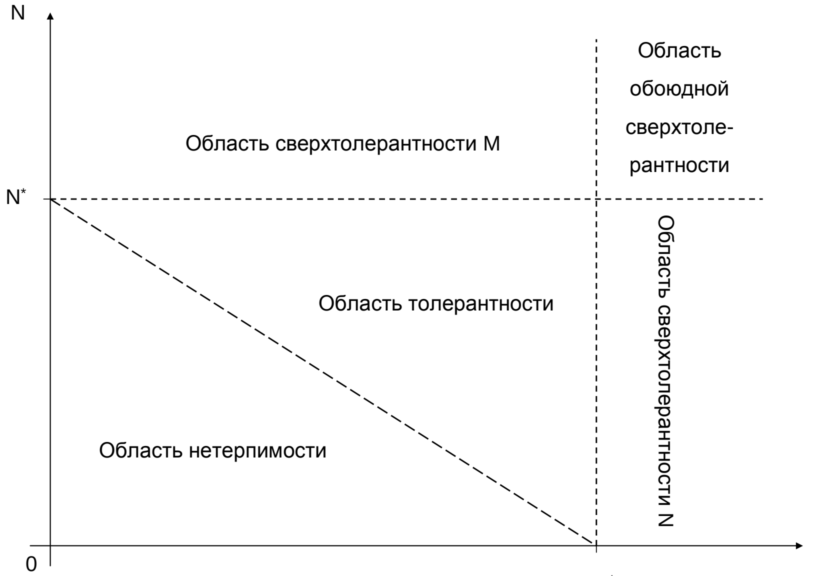

Рис. 1.

Дальнейший анализ свойств системы (2) в фазовой плоскости проясняет смысл этих названий. Рассмотрим, например, прямую (3). При $M=0$, она выходит из точки N^*, а где пройдет ее дальнейший путь, зависит от коэффициента нетерпимости m: при $1<m<\infty$ она проходит в области нетерпимости, при $m=1$ – сливается с границей толерантности (5), при $1>m\geq 0$ – проходит в области толерантности, сливаясь при $m=0$ с ее границей, прямой $N=N^*$ и, наконец, – при $0>m>-\infty$ проходит в области сверхтолерантности. Как следует из первого уравнения системы (2), прямая (3) является границей изменения знака производной $\frac{dN}{dt}$. Выше нее производная $\frac{dN}{dt}$ отрицательна, следовательно, N убывает, ниже нее производная $\frac{dN}{dt}$ положительна, следовательно, N

растет. На рис. 2 проиллюстрированы описанные выше возможные виды расположения прямой (3) в первом квадранте фазовой плоскости системы дифференциальных уравнений (2).

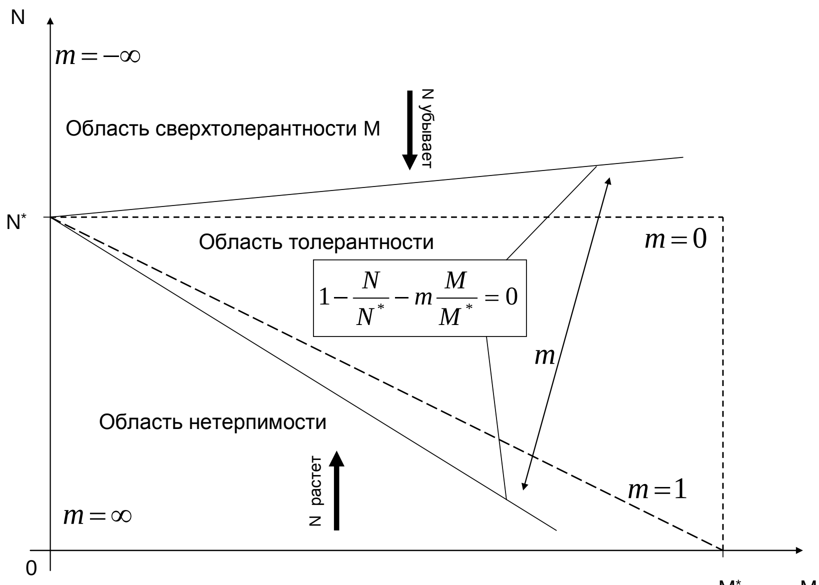

Рис. 2.

Аналогично можно рассмотреть прямую (4). При $N=0$ она выходит из точки M^* и проходит в зависимости от коэффициента нетерпимости n, при $\infty > n > 1$ – в области нетерпимости, при $n=1$ – по границе толерантности, при $1 > n \geq 0$ – в области толерантности и наконец, при $0 > n > -\infty$ – выходит в область сверхтолерантности. Прямая (4) – граница изменения знака производной $\frac{dM}{dt}$. Левее нее M растет, правее – убывает.

Рис. 3 иллюстрирует возможные расположения прямой (4) в первом квадранте фазовой плоскости, в зависимости от коэффициента нетерпимости n.

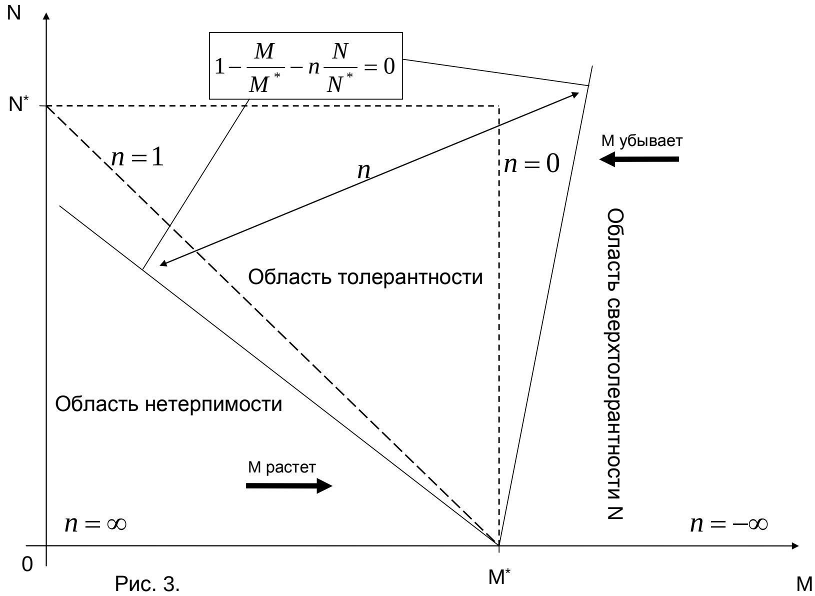

Рис. 3.

Теперь приступим непосредственно к анализу поведения модели.

1. Пусть обе стороны толерантны друг к другу. Тогда решение системы (3)-(4), точка (6), лежит в области толерантности (т.е. в первом квадранте системы координат, выше границы толерантности, не выше прямой $N = N^*$ и не правее прямой $M = M^*$) и является устойчивым узлом системы, а стационарные точки

$$(N = N^*, M = 0),\quad (N = 0, M = M^*)$$

являются седлами. В этом случае с течением времени **независимо от начальных численностей популяций и коэффициентов рождаемости** система стремится к устойчивому состоянию, в котором представлены оба вида, предельные численности которых определяются формулой (6). На рис. 4 стрелками показаны направления изменений численностей популяций.

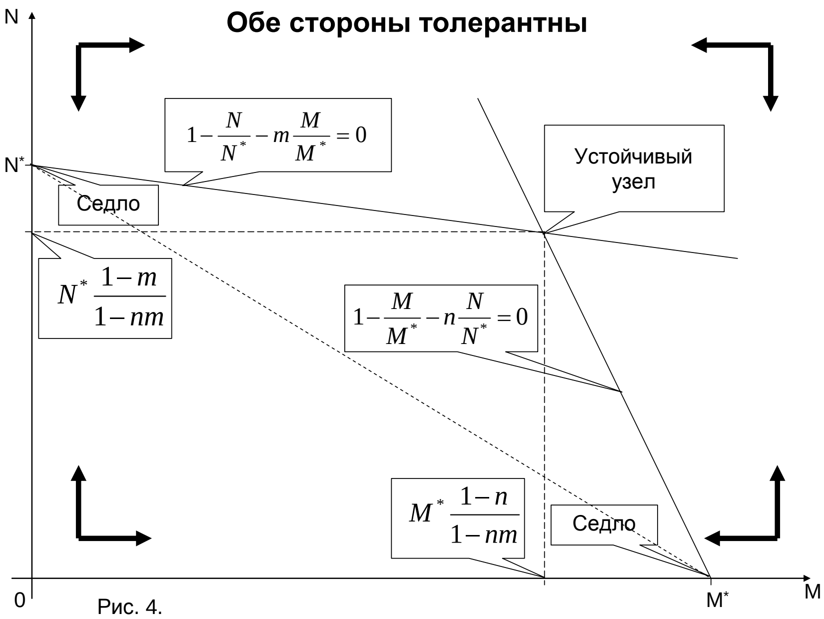

Рис. 4.

Обратим внимание на факт, что при фиксированном коэффициенте нетерпимости одной из сторон, например $n = const$, и при уменьшении нетерпимости (увеличении толерантности) другой стороной M ее предельная численность $M^*\dfrac{1-n}{1-nm}$ убывает, а предельная численность первой стороны, наоборот, возрастает: $N^*\dfrac{1-m}{1-nm}$. Таким образом, если ассоциировать увеличение предельной численности популяции с ее пользой, можно сказать, что в условиях обоюдной толерантности одностороннее увеличение толерантности одной из популяций вредно для нее и полезно для ее соперника, а одностороннее увеличение нетерпимости, наоборот, полезно для ставшей чуть нетерпимей популяции и вредно для ее соперника.

2. Пусть одна из сторон сверхтолерантна, а другая толерантна или сверхтолерантна. Для начала разберем случай $n, m > -1$. В данном случае прямые (3), (4) пересекаются в области сверхтолерантности первого квадранта, причем их точка пересечения (6), так же как и в случае обоюдной толерантности, является устойчивым узлом, а точки $(N = N^*, M = 0)$, $(N = 0, M = M^*)$ являются седлами.

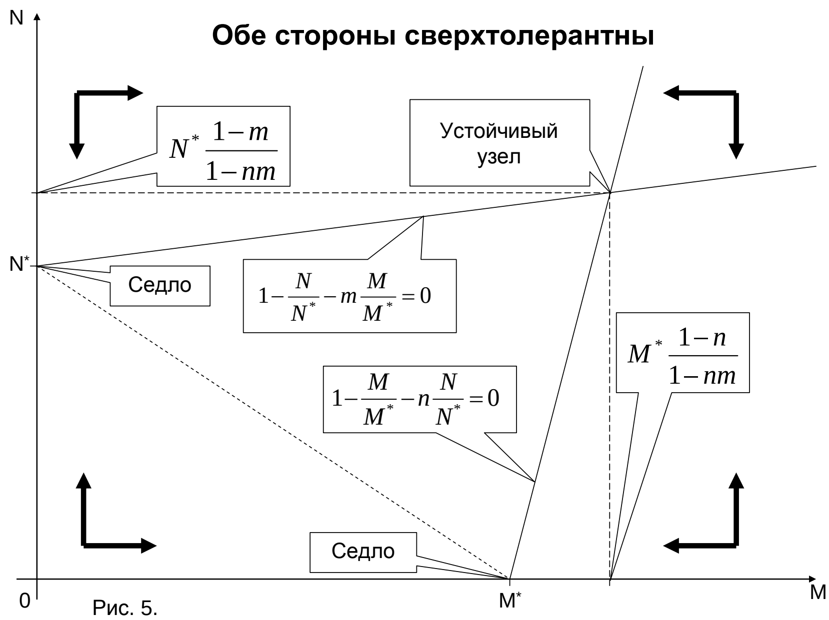

Рис. 5.

На рис. 5 показана обоюдная сверхтолерантность. На первый взгляд ситуация в данном случае мало чем отличается от рассмотренной ранее обоюдной толерантности. Однако на самом деле эти ситуации различаются принципиально, а именно, как следует из формул (6), если обе стороны сверхтолерантны, то дальнейшее уменьшение коэффициента нетерпимости (увеличение толерантности) любой из сторон, становится полезным (в смысле увеличения предельной численности), не только партнеру-сопернику этой стороны, как это было в случае простой обоюдной толерантности, но и ей самой. При этом предельная численность сверхтолерантной популяции становится больше емкости среды для нее, а при $n, m < 0$, $nm \geq 1$ прямые (3), (4) перестают пересекаться в первом квадранте, что в содержательной области модели означает неограниченный рост обеих популяций за бесконечное время. Если же сверхтолерантна лишь одна из сторон, а другая просто толерантна, одной просто толерантной стороне выгодно увеличивать свою толерантность, сверхтолерантной же невыгодно до тех пор, пока ее партнер также не станет сверхтолерантным.

3. Пусть обе стороны нетерпимы друг к другу. Тогда стационарная точка (6) лежит в области нетерпимости и является седлом, а стационарные точки

$$(N = N^*, M = 0), \quad (N = 0, M = M^*)$$

являются устойчивыми узлами системы. В этом случае система с течением времени в зависимости от начальных условий приходит либо в один, либо в другой устойчивый узел, т.е. одна из популяций полностью исчезает. Остается та, к узлу которой на фазовой диаграмме тяготеет точка начальных численностей популяций (N_0, M_0).

Интересен вопрос, как распределены в фазовой плоскости точки начальных численностей, тяготеющие к одному и другому устойчивому узлу. Чтобы не отвлекаться от основного хода исследования, выяснение этого вопроса вынесено в приложение. Здесь же приведем основные его результаты. В упрощенном случае, когда равны коэффициенты прироста популяций, $\gamma = \alpha = \beta$, прямая

$$N = \frac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)} M\ , \tag{7}$$

разделяет области тяготения. Если точка начальных численностей лежит ниже прямой (7), то траектория придет на бесконечности в точку $(0, M^*)$, если выше прямой (7), – то в точку $(N^*, 0)$, если же на самой этой прямой, то траектория придет в седловую точку (6).

В общем случае $\alpha \neq \beta$ области тяготения начальных значений разделяет более сложная кривая, однако общая закономерность, которой подчиняется соотношение областей тяготения начальных значений, остается той же: при заданной нетерпимости одной из сторон, например при $m = const$, для любого $\varepsilon > 0$, можно выбрать столь большое значение коэффициента нетерпимости n другой стороны, что отношение площади точек начальных значений, тяготеющих к узлу $(0, M^*)$ внутри произвольного квадрата с вершиной в начале координат и сторонами, направленными по осям, к площади всего этого квадрата будет меньше ε. Соответственно отношение площади точек начальных значений, тяготеющих к узлу $(N^*, 0)$, более нетерпимой стороны к площади всего квадрата будет отличаться от единицы меньше, чем на ε. Сказанное выше можно трактовать, как то, что при фиксированной нетерпимости одной из сторон и бесконечно возрастающей нетерпимости другой, вероятность попадания в область, тяготеющую к узлу менее нетерпимой популяции, при случайном броске точки начальных численностей в первый квадрант фазовой плоскости, стремится к нулю, а в область, тяготеющую к узлу более нетерпимой популяции – к единице. Рис. 6 иллюстрирует сказанное. На нем проведена прямая (7), которая разделяет области тяготения точек фазовой плоскости к устойчивым узлам в случае $\alpha = \beta$. Стрелками показаны направления изменений численностей популяций.

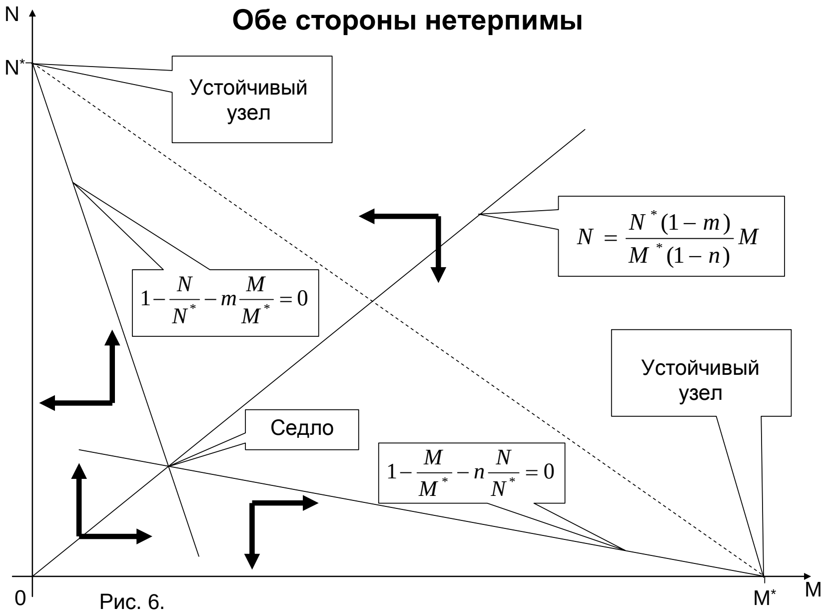

Рис. 6.

Следует также заметить, что при увеличении обоюдной нетерпимости большинство точек первого квадранта оказывается в области

$$N, M : \begin{cases} 1 - \dfrac{N}{N^*} - m\dfrac{M}{M^*} < 0, \\ 1 - \dfrac{M}{M^*} - n\dfrac{N}{N^*} < 0. \end{cases} \qquad (8)$$

(Площадь невошедших в область (8) точек первого квадранта $\dfrac{M^* N^* (1-n-m)}{2(1-nm)}$ стремится к 0, при стремлении к бесконечности n и m.) В области (8) производные уравнений (2) отрицательные, следовательно, в этой области большой коэффициент прироста становится не преимуществом, а недостатком, ведущим к более быстрому уменьшению численности более плодовитой популяции. Например, пусть точка (N_0, M_0) начальных численностей лежит в области

$$N, M : \begin{cases} N > N^* \dfrac{1-m}{1-mn}, \\ M > M^* \dfrac{1-n}{1-nm}. \end{cases} \qquad (9)$$

(Это также достаточно представительная область первого квадранта, не включающая в себя лишь его часть, меньшую по площади, чем $\dfrac{M^* N^* (1-n-m)}{1-nm}$), и при заданных значениях $\alpha, \beta > 0$ тяготеет, например, к узлу $(N^*, 0)$. Тогда уменьшая должным образом коэффициент прироста β популяции M при сохранении остальных параметров системы (2) неизменными, можно привести траекторию на бесконечности к узлу $(0, M^*)$. Отметим, что этот вывод достаточно сильно противоречит расхожей «базарной» точке зрения на изучаемый вопрос, процитированной в начале работы, и утверждающей важность в условиях взаимной нетерпимости «размножения в десять раз быстрее».

Продолжая рассматривать ситуацию обоюдной нетерпимости, предположим теперь, что имеется некая «третья сила», которая включается тогда, когда траектория системы попадает в «опасную зону» фазовой плоскости Ω, чреватую необратимым скатыванием к одному из двух устойчивых узлов:

$$\Omega=\left\{N,M:\begin{matrix}1-\frac{N}{N^*}-m\frac{M}{M^*}>0\\ 1-\frac{M}{M^*}-n\frac{N}{N^*}<0\end{matrix}\right\}\cup\left\{N,M:\begin{matrix}1-\frac{N}{N^*}-m\frac{M}{M^*}<0\\ 1-\frac{M}{M^*}-n\frac{N}{N^*}>0\end{matrix}\right\} \qquad (10)$$

Эта сила призвана «помочь» стороне, чья производная отрицательна, и «помешать» стороне, чья производная положительна в области Ω фазовой плоскости системы. Так как правые части системы (2) мультипликативны, можно предложить единообразный для обеих сторон и поэтому вполне «политкорректный» механизм такого действия: при наличии в системе хотя бы одной нетерпимой популяции наказывать за заход траектории системы (2) в область Ω фазовой плоскости изменением знака коэффициентов прироста обеих популяций на отрицательный. Функционирование «третьей силы», управляющей коэффициентами прироста сторон по формулам

$$\begin{aligned}\alpha(N,M)&=\begin{cases}\alpha, & \{N,M\}\notin\Omega\\ -\alpha, & \{N,M\}\in\Omega\end{cases}\\ \beta(N,M)&=\begin{cases}\beta, & \{N,M\}\notin\Omega\\ -\beta, & \{N,M\}\in\Omega\end{cases}\end{aligned} \qquad (11)$$

превращает точку (6) из седла в устойчивый узел, а точки $(N^*,0)$ и $(0,M^*)$, наоборот, из устойчивых узлов – в седла. Следует также отметить следующее важное свойство узла (6) в условиях обоюдной нетерпимости и присутствия «третьей силы», существенно отличающее его от узла, задаваемого теми же формулами в случае обоюдной толерантности. При фиксированной нетерпимости одной из сторон, например при $m=const$, уменьшение нетерпимости n другой стороны приводит к увеличению предельной численности последней $N^*\dfrac{1-m}{1-nm}$ и уменьшению предельной численности первой $M^*\dfrac{1-n}{1-nm}$. Таким образом, наличие описанной выше «третьей силы» должно со временем «вытолкнуть» обе популяции из области нетерпимости, так как настаивание на имеющей место собственной нетерпимости, в условиях уменьшения соперником своей, в данной ситуации чревато полным исчезновением упорной в нетерпимости стороны.

4. Пусть сторона M нетерпима к N ($\infty > m > 1$), а коэффициент нетерпимости стороны N изменяется в пределах $1 \geq n > -\infty$, т. е. либо N относится к M без предубеждения, либо толерантна либо сверхтолерантна; или же пусть $\infty > m \geq 1$ и $1 > n > -\infty$. Тогда либо система (3)-(4) не имеет решения, либо ее решение (6) лежит вне внутренности первого квадранта системы координат. Точка $(N = N^*, M = 0)$ является седлом, а точка $(N = 0, M = M^*)$ – устойчивым узлом системы. Следовательно, в данном случае с течением времени **вне зависимости от начальных условий и значений коэффициентов прироста,** полностью исчезает толерантная сторона N и остается нетерпимая сторона M.

   Отметим, что данный результат кардинально противоречит процитированному в начале работы расхожему «ученому» мнению о толерантности как панацее от всех бед в области межкультурных взаимоотношений. К сожалению, толерантность полностью погибает при столкновении с нетерпимостью, вне зависимости от начальных численностей и скоростей прироста. В данном случае, так же как и в случае обоюдной нетерпимости, можно предложить воздействие «третьей силы», функционирующей по правилам (11). К сожалению, никакая третья сила не способна в этом случае сохранить обе популяции. Третья сила превращает седло толерантной стороны в устойчивый узел, а устойчивый узел нетерпимой стороны наоборот, в седло. При наличии подобной силы нетерпимой стороне не остается ничего кроме перехода к толерантности, под угрозой полного исчезновения. На рис. 7, иллюстрируется столкновение толерантности и нетерпимости. Стрелками показаны направления изменений численностей популяций (без учета «третьей силы»).

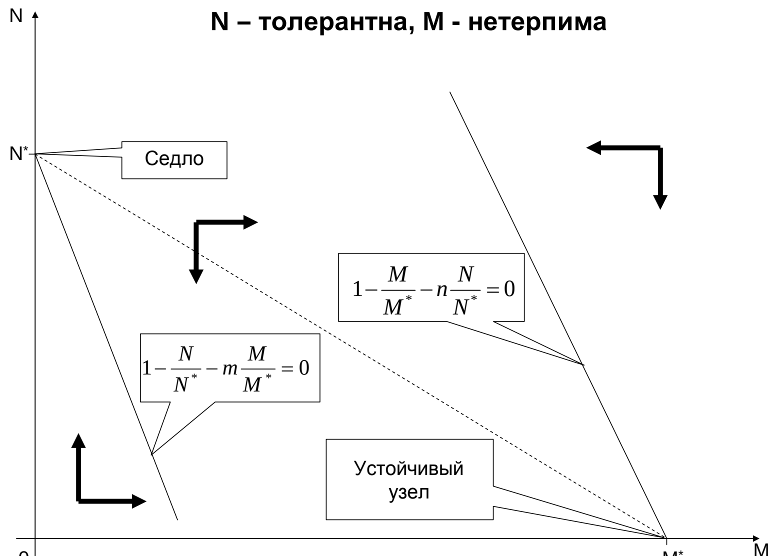

Рис. 7.

5. Пусть теперь, сторона N нетерпима к M ($\infty > n > 1$), а M сверхтолерантна или толерантна, или относится без предубеждений к стороне N ($1 \geq m > -\infty$); или же пусть $\infty > n \geq 1$ и $1 > m > -\infty$. Тогда точка $(N = 0, M = M^*)$ будет седлом, а $(N = N^*, M = 0)$ –

устойчивым узлом системы. Окончательный вывод тот же, что и в предыдущем пункте – **вне зависимости от начальных условий и значений коэффициентов прироста** полностью исчезает толерантная сторона, и остается нетерпимая. Рис. 8 иллюстрирует сказанное.

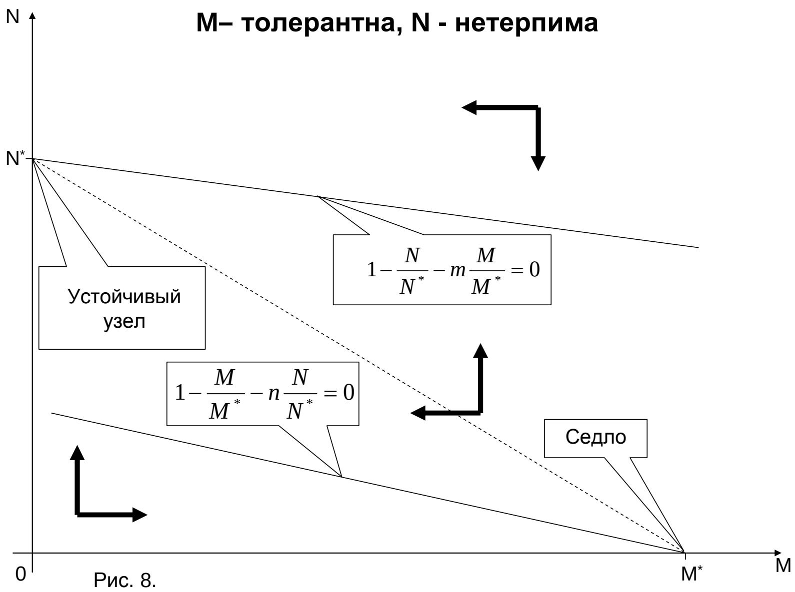

Рис. 8.

6. Для полноты картины следует также рассмотреть случай $n = m = 1$, т. е. когда стороны относятся друг к другу без предубеждений.
   Следует заметить, что, хотя обычно ограничения типа равенства не слишком устойчивы, в данной модели может существовать механизм поддержания такого равенства $n = m = 1$, особенно в случае функционирования в области нетерпимости описанной выше «третьей силы». Эта «третья сила» выталкивала бы стороны из области нетерпимости, а из области толерантности их должен выталкивать факт выгодности

уменьшения толерантности любой из сторон, при фиксированной толерантности соперника.
Данный случай также достаточно интересен и заслуживает исследования. Здесь весь отрезок прямой (5) между точками $(N = N^*, M = 0)$ и $(N = 0, M = M^*)$ является областью притяжения траекторий.
Графически направления изменения численностей популяций представлены рис. 9

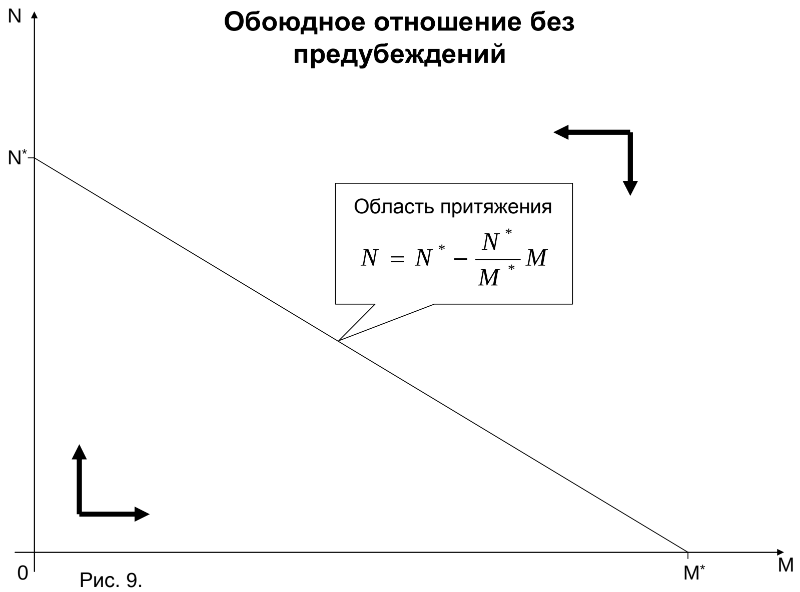

Рис. 9.

Чтобы понять, к какой из точек прямой (5) придет система, разделим первое из уравнений (2) на второе (помня, что $n = m = 1$), получаем

$$\frac{dN}{dM} = \frac{\alpha N}{\beta M},$$

откуда заключаем

$$N^{\beta} = \frac{N_0^{\beta}}{M_0^{\alpha}} M^{\alpha}. \qquad (12)$$

Искомая точка является решением системы уравнений (5), (12). В данном случае, с течением времени система стремится к равновесному состоянию, в котором представлены обе популяции, причем их равновесные численности **зависят от начальных численностей и коэффициентов рождаемости**. С точки зрения нашей модели, данный случай есть случай полной культурной ассимиляции (так как культурная идентичность в нашей простейшей модели исчерпывается разницей между внутривидовой и межвидовой конкуренцией), остаются лишь биологические различия популяций – начальные численности и коэффициенты прироста.

Такие прогнозы развития нашей двухкомпонентной системы дает системная динамика. Посмотрим теперь, какие управленческие решения может нам подсказать теория исследования операций.

Теоретико-игровой анализ модели

До сих пор мы выясняли, как зависят предельные численности популяций от различных классов значений внешних переменных модели, в первую очередь от коэффициентов нетерпимости. Интересен вопрос, каковы тенденции изменения предельных численностей при возможности целенаправленного управления сторонами своими коэффициентами нетерпимости, а также в некоторых случаях и другими внешними переменными модели.

Будем трактовать коэффициенты нетерпимости в (2) как управления сторон, т.е. сторона N управляет коэффициентом n, а сторона M – коэффициентом m. Можно считать, что стороны играют в игру, где стратегиями являются задания сверхтолерантных, толерантных, без предубеждений или нетерпимых управлений n и m, а выигрышем – предельное значение популяции при таких управлениях.

Получаем биматричную игру с непротивоположными интересами [8]. Выпишем матрицы выигрышей сторон:

Выигрыш стороны N				
Страте-гии	N сверхто-лерантна	N толе-рантна	N без преду-беждений	N нетер-пима
M сверх-толе-рантна	∞ , $nm \geq 1$; $N^* \dfrac{1-m}{1-nm}$, $nm < 1$ $(> N^*)$	$N^* \dfrac{1-m}{1-nm}$, $(> N^*)$	N^*	N^*
M толе-рантна	$N^* \dfrac{1-m}{1-nm}$, $(\leq N^*)$	$N^* \dfrac{1-m}{1-nm}$, $(\leq N^*)$	N^*	N^*
M без преду-беж-дений	0	0	$N(N_0, M_0, \alpha, \beta)$ $(< N^*)$	N^*
M нетер-пима	0	0	0	0 или N^*

В скобках приводится сравнение получаемого выигрыша с емкостью среды для соответствующей популяции. Здесь $N^* \dfrac{1-m}{1-nm}$, $M^* \dfrac{1-n}{1-nm}$ есть точка (6) – решение системы (3)-(4). Собственно, анализ зависимости (6) от изменения значений коэффициентов нетерпимости n и m и является одним из основных предметов данного раздела.

Точка $N(N_0, M_0, \alpha, \beta)$, $M(N_0, M_0, \alpha, \beta)$ есть решение системы уравнений (5), (12).

Выигрыш стороны M				
Стратегии	N сверхтолерантна	N толерантна	N без предубеждений	N нетерпима
M сверхтолерантна	∞ , $nm \geq 1$; $M^* \dfrac{1-n}{1-nm}$, $nm < 1$ $(> M^*)$	$M^* \dfrac{1-n}{1-nm}$, $(\leq M^*)$	0	0
M толерантна	$M^* \dfrac{1-n}{1-nm}$, $(> M^*)$	$M^* \dfrac{1-n}{1-nm}$, $(\leq M^*)$	0	0
M без предубеждений	M^*	M^*	$M(N_0, M_0, \alpha, \beta)$ $(< M^*)$	0
M нетерпима	M^*	M^*	M^*	0 или M^*

Поля «0 или N^*» и «0 или M^*» означают, что достигается одно из указанных в поле значений, какое – зависит в первую очередь от выбираемых управлений, а также от внешних переменных модели, причем если точка начальных значений не лежит на осях координат, всегда существуют управления, приводящие систему как в один, так и в другой устойчивый узел.

Мы видим, что гарантировать положительный результат игры при любых действиях противника не в состоянии ни одна из стратегий. Наиболее универсальной оказывается стратегия нетерпимости, она дает выигрыш, равный емкости среды для популяции, до тех пор, пока не наталкивается на еще большую нетерпимость. В этом случае от значений управлений игроков зависит, к какому из двух устойчивых узлов придет система. В любом случае обоюдная нетерпимость ведет к сохранению лишь одной популяции.

Если смотреть на ситуацию с позиций сторонников «устойчивого развития» (см., например, [9]), стремящихся к сохранению всего многообразия существующих в природе видов и культур, нас, несомненно, должны привлечь четыре левые верхние клетки матриц игры, соответствующие стратегиям толерантности и сверхтолерантности, которые дают такую возможность.

Обоюдная сверхтолерантность, если ее удается достичь, хороша тем, что это устойчивое относительно действий игроков, направленных на увеличение своего выигрыша, состояние. В этом состоянии каждый из игроков получает выигрыш больший, чем емкость среды для него, уменьшение нетерпимости ведет каждого из игроков к увеличению, а увеличение нетерпимости – к уменьшению выигрыша, $N^*\dfrac{1-m}{1-nm} < N^*\dfrac{1-m}{1-n'm}$, $M^*\dfrac{1-n}{1-nm} < M^*\dfrac{1-n}{1-nm'}$, при выполнении $-\infty < n' < n < 0$, $-\infty < m' < m < 0$, $n'm, nm' < 1$. Увеличивать свою толерантность становится выгодным. Более того, при $nm \geq 1$ выигрыш сторон становится бесконечным.

Состояние сверхтолерантности одного партнера и толерантности другого является своеобразным «гамбитом» сверхтолерантной стороны. Действительно, переходя в это состояние от простой толерантности, она неизбежно теряет часть своего выигрыша. Например, $N^*\dfrac{1-m}{1-nm} > N^*\dfrac{1-m}{1-n'm}$, если $0 < n, m < 1$, а $n' < 0$. Однако при этом сверхтолерантная сторона надеется на то, что соперник также начнет увеличивать свою толерантность, так как при сверхтолерантном партнере ему это выгодно – ведет к увеличению его выигрыша. Продолжая пример, $M^*\dfrac{1-n}{1-nm} < M^*\dfrac{1-n}{1-nm'}$ при $n < 0$, $m < 1$, $m' < m$ и $nm' < 1$. В конце концов, желание увеличить свой выигрыш должно привести толерантную сторону к сверхтолерантности, где и окупается с избытком жертва гамбита. Заметим, что сторона, вырывающаяся в область сверхтолерантности, не должна переусердствовать с размером жертвы, действительно, $N^*\dfrac{1-m}{1-nm} \xrightarrow[n\to-\infty]{} 0$, $M^*\dfrac{1-n}{1-nm} \xrightarrow[n\to-\infty]{} \dfrac{M^*}{m}$ при $n < 0$, $0 < m < 1$.

Обоюдная толерантность, даже если бы о ней каким-либо образом удалось договориться, неустойчива с теоретико-игровой точки зрения: каждому игроку для получения большего выигрыша выгодно быть как можно менее толерантным. Чем меньше толерантность игрока, тем больше его выигрыш. Действительно, если при обоюдной толерантности, толерантность стороны M равна m, то выигрыш стороны N согласно (6) есть $\overline{N} = N^*\dfrac{1-m}{1-nm}$, что стремится к максимуму при $n \to 1$ и достигает его при переходе стороны N от толерантности к отношению без предубеждений. Аналогичное рассуждение применимо и к стороне M. Таким образом, вырисовывается правило: при обоюдной толерантности каждому из партнеров все время выгоднее быть менее толерантным, чем он есть в данный момент. В конце концов, это правило должно «выдавить» игроков из области толерантности: либо они перейдут к отношению без предубеждений, либо один из них предпримет «гамбитную» жертву – перейдет к сверхтолерантности, в небезосновательной надежде, что партнер сразу или же постепенно последует его примеру и тогда его жертва окупится.

Обоюдное отношение без предубеждений также сохраняет обе популяции, однако следует ожидать его неустойчивость в предметной области, так как обычно строгое равенство поддерживать сложнее, чем неравенство. Сверху устойчивость этого равенства, как было сказано выше, поддерживает неустойчивость состояния обоюдной толерантности. Механизма его поддержания снизу в самой модели нет, однако можно придумать некий внешний механизм – например, описанную выше «третью силу», управляющую коэффициентами прироста так, что игроки «выдавливаются» из области нетерпимости. Тогда взаимное отношение без предубеждений становится устойчивым. Это решение может быть привлекательным своей зависимостью от начальных условий, т.е. определенным сохранением начального «статус-кво» с элементами «сглаживания» первоначального неравенства сторон, за счет степенной зависимости в (12).

Как следует из матриц игры, толерантность к нетерпимому партнеру всегда губительна для толерантной стороны. Причем, если в рассмотренном выше случае сверхтолерантность – толерантность, можно было рассматривать выход в область сверхтолерантности, как временную жертву с вполне обоснованной надеждой впоследствии отыграть ее и получить дополнительный выигрыш, то в данном случае толерантность к нетерпимому партнеру ничем кроме глупости назвать нельзя, так как никакой перспективы, кроме полного вымирания, у толерантной стороны здесь не имеется. Участие внешней силы может изменить остающуюся на бесконечности сторону. Хотя само по себе такое решение и неспособно сохранить обе популяции, оно может стимулировать нетерпимую сторону угрозой полного исчезновения последней, перейти от нетерпимости к отношению без предубеждений или толерантности.

Наконец, состояние обоюдной нетерпимости. В этой ситуации, как мы видели, наиболее нетерпимый конкурент получает все (а именно предельную численность популяции, равную емкости среды для нее). Если стороны начинают рефлексировать, т.е. в соответствии с рассмотренной моделью отвечать на нетерпимость конкурента еще большей нетерпимостью, а он, в свою очередь, – тоже, седловая точка (6), а с ней и возможные траектории системы (2) в своем пути к одному из устойчивых узлов все ближе будут подходить к началу координат, что чревато тем, что однажды в силу какой-либо флуктуации, лежащей вне рамок данной модели (например, в силу того что реальные численности популяций – дискретные, а не непрерывные величины), в системе не останется ни победителей, ни побежденных. Интересным управленческим решением, способным улучшить положение одной из сторон в условиях обоюдной нетерпимости является уменьшение ее коэффициента прироста, весьма эффективное, если точка начальных численностей популяций лежит в области (9) фазовой плоскости. Воздействие внешней силы по формулам (10)-(11) превращает точку (6) из седла в устойчивый узел и стимулирует обе стороны покинуть область нетерпимости.

Мы видим, что в рассматриваемой двухкомпонентной системе нет внутренних механизмов саморегулирования, в отличие, например, от модели Лотки-Вольтерра, которые обеспечивали бы ее устойчивое существование именно как двухкомпонентной системы. Однако такая устойчивость может быть внесена в нее извне, в виде внешних (например, государственных) механизмов регулирования, делающих нетерпимость невыгодной, особенно при толерантности с противоположной стороны. Таким универсальным механизмом для любых стратегий игроков может быть описанная выше «третья сила», которая включается, если в системе есть хотя бы одна нетерпимая сторона, и функционирует согласно формулам (10)-(11).

Выводы

Совместное развитие популяций в нашей модели может быть устойчивым относительно их стремления увеличивать свои предельные численности лишь в условиях реального взаимообогащения ими друг друга (в нашей модели – это состояние обоюдной сверхтолерантности). При наличии некоторого внешнего воздействия локальной устойчивостью может обладать также состояние обоюдного отношения без предубеждений и предпочтений. Поясним эти тезисы подробнее.

Обоюдная сверхтолерантность ($0 > n, m$) – это единственный способ достичь неограниченного роста обеих популяций на бесконечном времени (при $nm \geq 1$). Это сочетание стратегий устойчиво относительно стремления сторон увеличить свои предельные численности, которые в этом случае превосходят соответствующие емкости среды (при $nm < 1$ предельные численности конечны и задаются формулой (6)).

Сочетание стратегий сверхтолерантность – толерантность можно рассматривать как промежуточный шаг к обоюдной сверхтолерантности. Для стороны, выходящей в область сверхтолерантности из области толерантности, этот шаг сопряжен с жертвой в предельной численности популяции, однако данная жертва переводит ее партнера в состояние, когда, во-первых, он сразу получает выигрыш, больший емкости среды для него, чего не может ему предоставить ни одна из его собственных стратегий, и во-вторых, ему становится выгодно увеличивать свою толерантность. В связи со сказанным выше, возникает обоснованная надежда, во-первых, отыграть принесенную жертву и, во-вторых, получить дополнительный выигрыш, когда партнер также перейдет в ставшее привлекательным для него состояние сверхтолерантности.

Обоюдная толерантность ($0 \leq n, m < 1$) – состояние неустойчивое относительно стремления сторон увеличивать свои предельные численности. Каждой из сторон при заданной толерантности другой стороны выгодно уменьшать свою толерантность вплоть до нетерпимости, которая способна дать нетерпимой стороне предельную численность, равную емкости среды для нее (если, конечно, другая сторона не перейдет также к достаточно сильной нетерпимости). Выход из этой неустойчивости – либо уход обеих сторон из области толерантности, либо «гамбит» одной из сторон – выход ее в область сверхтолерантности, сулящий обеим сторонам выигрыши большие, чем емкости сред.

Сочетание стратегий толерантность – нетерпимость, или даже толерантность – отношение без предубеждений и предпочтений – непозволительная неосторожность со стороны толерантного партнера, ведущая в пределе к его полному исчезновению. Самое плохое, что может случиться с толерантной культурой – ее встреча с культурой нетерпимой!

Обоюдное отношение без предубеждений – устойчивое относительно смещения в область толерантности состояние. Как уже говорилось выше, выход одного из партнеров в область толерантности, сулит ему исчезновение. Вывести из этого устойчивого состояния мог бы переход одного из партнеров к сверхтолерантности, так как другому сразу стало бы выгодно увеличивать свою толерантность. Однако такой шаг хотя и возможен, но весьма рискован: не увеличивая своей толерантности, второй партнер получает тоже вполне неплохую предельную численность – емкость среды, и тогда рискнувший полностью исчезает. Относительно смещения в область нетерпимости данное состояние неустойчиво: переходя в эту область, нетерпимый партнер получает предельное значение численности, равное емкости среды для него, а сохраняющий отношение без предубеждений – исчезает. Сделать обоюдное отношение без предубеждений и предпочтений устойчивым относительно смещений в область нетерпимости может внешний механизм, например, описываемый формулами (10)-(11). Заметим, что в соотношениях (5), (12), определяющих предельные численности популяций в данном случае, заключена некая идея справедливости: «поступайте по отношению друг к другу справедливо, и никто не будет обижен – предельные численности популяций будут зависеть от начальных, от скоростей прироста и емкостей окружающей среды». Недаром стратегия обоюдного отношения без предубеждений и предпочтений провозглашена в Новом Завете (Матф. 22,39; Мар. 12,31; Лук. 10,27) как заповедь, причем многие библеисты считают, что в контексте того времени, культуры и других новозаветных повествований (например, Лук. 10,25-37) она прежде всего относилась именно к народам, а не к индивидуумам.

При обоюдной нетерпимости выживает только одна, наиболее нетерпимая популяция. Здесь нужны оговорки. Во-первых, существуют начальные условия, при которых на бесконечности остаются обе популяции, но мера таких точек начальных численностей в первом квадранте фазовой плоскости равна нулю. Кроме того, самое малое отклонение, без которых невозможна реальная жизнь, уведет любую такую «особенную» траекторию к одному из устойчивых узлов – ситуации выживания лишь одной стороны. Во-вторых, наиболее нетерпимая в данном контексте, означает вовсе не буквальное сравнение значений коэффициентов нетерпимости между собой. Значение коэффициента нетерпимости, достаточное, для того чтобы остаться «в живых», в условиях обоюдной нетерпимости, будет конечно зависеть от коэффициента нетерпимости партнера, начальных численностей и коэффициентов прироста. Сказанное выше обозначает тенденцию, которая состоит в том, что при любых положительных начальных численностях популяций, коэффициентах прироста и фиксированном коэффициенте нетерпимости одной стороны, вторая сторона может выбрать столь большой коэффициент своей нетерпимости, что на бесконечности останется именно она.

Наращивание обоюдной нетерпимости, как отмечалось выше, вряд ли может быть плодотворным, поэтому вполне может быть ограничено каким-либо договором или существующими общекультурными традициями. В связи с этим интересны альтернативные, «политкорректные» варианты улучшения положения популяции в условиях обоюдной нетерпимости. Это увеличение конкуренции внутри своей популяции (уменьшение емкости среды) в сочетании с уменьшением собственного коэффициента прироста. В переводе на человеческие реалии этот метод можно уподобить замене погромов чужой популяции увеличением в своей количества нобелевских лауреатов и олимпийских чемпионов на миллион населения. Предельная численность популяции при уменьшении емкости среды конечно уменьшается, но главное при обоюдной нетерпимости – выжить.

Интересным оказывается также вывод о том, что в условиях обоюдной нетерпимости популяции не выгодно держаться за то, что когда-то она была «великой», т. е. за большую емкость среды, если ее текущая численность по сравнению с этой емкостью по каким-то причинам стала совсем мала. Память о большой емкости среды – это замах на больший выигрыш, но гораздо практичнее получить хоть какой-то выигрыш, приведя в соответствие свои притязания с реальным состоянием. Этим притязаниям (емкости среды) лучше бы быть меньше числа $N\dfrac{mn-1}{m-1}$, где N – текущая численность популяции, а n и m – коэффициенты нетерпимости. (Между прочим, не такое уж и маленькое число при достаточно сильной нетерпимости!)

Еще один интересный вывод – в условиях обоюдной нетерпимости, чаще всего (а именно при попадании начальных значений в область (8) фазового пространства) большой коэффициент прироста является не преимуществом, а недостатком в конкурентной борьбе популяций.

Наконец, быть может, самый важный вывод состоит в том, что возможны внешние воздействия на модель, проявляющие себя лишь тогда, когда в системе есть нетерпимость, и делающие нетерпимость невыгодной с точки зрения увеличения популяциями их предельных численностей. Пример подобного воздействия может быть задан формулами (10)-(11).

Отношение к полученным выводам

Написать этот раздел автора побуждает обилие критики в адрес системно-динамических моделей, начиная от Мальтуса и кончая Форрестером и Медоузом, а также горячее желание самому, по возможности, уберечься от подобной критики.

В пылу полемики Мальтусу ставилось в вину и то, что по основной своей профессии он был священником, Форрестера и Медоуза обвиняли в слишком упрощенном моделировании экономики и т.д. В связи с этим хочется остановиться на том, чего можно ожидать и чего ожидать не следует от такого сорта моделирования.

Модели данного класса очень абстрактны и поэтому неизбежно весьма упрощены. Многие существенные детали конкретной действительности они не учитывают. В этом и их сила, и их слабость одновременно. Так, наша модель не конкретизирует состав популяций. Это могут быть как козы и овцы, конкурирующие за пастбище, так и западный и восточный мир, делящие энергоносители. Для тех и других выявленные моделью тенденции взаимодействия будут справедливы, **но лишь как тенденции**. При проявлении же этих тенденций в разнообразных конкретных предметных областях, они могут облечься во множество подробностей, отброшенных нами при абстрагировании, и от этого стать весьма непохожими друг на друга. Тем не менее такие тенденции развития систем стоит знать и с их проявлениями следует считаться. Знакомство с подобными моделями и тенденциями их динамики создает и развивает язык, необходимый для последующего компетентного гуманитарного анализа моделируемых явлений [10].

Достоинствами подобных моделей является их простота и возможность с их помощью охватить явление в целом, а платой за это – взгляд на явление как бы «издалека», когда не просматриваются многие его детали. Вследствие простоты такие модели обычно очень хороши для первого математического знакомства с явлением. Моделирование в подробностях и деталях – следующий этап изучения явления, дорогу которому прокладывает первый, основанный на системно-динамических моделях.

Так, например, модель Мальтуса впервые обратила внимание на тенденцию неограниченного роста населения и в этом ее заслуга. Это вовсе не означает, что завтра наступит демографическая катастрофа, и поэтому сегодня необходимо приступать к поголовной стерилизации населения. Тем не менее тенденция, выявленная Мальтусом, так или иначе учитывается в любой демографической модели, она стала частью современной демографической культуры. Точно так же модели Форрестера и Медоуза впервые обратили внимание мировой общественности на факт ограниченности природных ресурсов и экологической емкости окружающей среды, на факт неочевидности антикризисных решений при управлении достаточно сложной системой, стимулировали деятельность Римского клуба и современные исследования в области устойчивости глобального развития, и в этом их основная заслуга, а вовсе не в том, с какой точностью они моделировали, например, мировую экономику 70х.

В свете сказанного выше автор заранее согласен со специалистами культурологами, этническими психологами и биологами в том, что данная модель не отразила многие и весьма существенные особенности их предметных областей. Она и не могла этого сделать, и не претендует на это. Тем не менее она выявляет определенные тенденции развития двухкомпонентных систем, встречающихся в этих предметных областях. Эти тенденции способны проявиться, однако, лишь в той мере, в какой такие системы укладываются в русло выбранной здесь абстракции.

Поэтому выводы данной работы не являются ни предреканием неотвратимо надвигающихся социальных катастроф, ни призывом к истреблению «вредных» с чьей-то точки зрения популяций, равно как и к прочим противоправным действиям, способствующим разжиганию расовой и межнациональной розни, а лишь призывом не проглядеть проявления обозначенных моделью тенденций в реальности.

Приложение. Исследование фазовой плоскости модели в случае обоюдной нетерпимости

Изучение возможного поведения траекторий на фазовой плоскости в условиях обоюдной нетерпимости весьма важно в контексте данного исследования. Действительно, теоретико-игровые выводы данной работы получены в предположении стремления каждой из сторон максимизировать свою предельную численность безотносительно к тому, что происходит при этом с предельной численностью партнера. В жизни отношения партнеров могут быть осложнены определенной предысторией, и если к стремлению увеличения своей предельной численности примешивается с некоторым весом стремление уменьшить предельную численность партнера – о толерантности вообще не может быть речи.

Рассмотрим семейство отображений X_t, действующих из R^2 в R^2 следующим образом: $X_t(N,M)=\{N(t),M(t)\}$, где $\{N,M\}$ – точка из R^2, а $\{N(t),M(t)\}$ – значение решения системы (2) в момент t, при начальных условиях $N(0)=N$, $M(0)=M$. Докажем следующее утверждение.

Лемма. Пусть Ξ – открытое множество в R^2, $\overline{\Xi}$ – его замыкание, $\Gamma(\Xi)=\overline{\Xi}\setminus\Xi$ – его граница. Тогда из $X_t(\Gamma(\Xi))\subset\overline{\Xi}$ следует $X_t(\overline{\Xi})\subseteq\overline{\Xi}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть найдется точка $\{N,M\}\in\overline{\Xi}$, такая что $X_t(N,M)\in\Lambda=R^2\setminus\overline{\Xi}$, хотя $X_t(\Gamma(\Xi))\subset\overline{\Xi}$. Очевидно, на самом деле $\{N,M\}\in\Xi$, так как по условию $X_t(\Gamma(\Xi))\subset\overline{\Xi}$. Так как множества Λ и Ξ – открытые, а решения системы (2) непрерывны, найдутся с одной стороны $\tau<t$, такие что $X_\tau(N,M)\in\Lambda$, а с другой стороны, $\xi>0$, такие что $X_\xi(N,M)\in\Xi$. Поэтому

$$\inf_{X_\tau(N,M)\in\Lambda}\tau=t^*>0 \qquad (13)$$

Очевидно, $\{N(t^*),M(t^*)\}\notin\Xi$, так как в каждой окрестности этой точки имеются точки из Λ. Далее, $\{N(t^*),M(t^*)\}\notin\Lambda$, так как иначе было бы неверно (13). Поскольку $R^2=\Lambda\oplus\Xi\oplus\Gamma(\Xi)$, то, $\{N(t^*),M(t^*)\}\in\Gamma(\Xi)$. Полагая теперь $\{N(t^*),M(t^*)\}$ начальной точкой системы (2), получаем, что имеются такие $t=\tau-t^*$, что $X_t(N(t^*),M(t^*))\in\Lambda$, следовательно, $X_t(N(t^*),M(t^*))\notin\overline{\Xi}$, хотя $\{N(t^*),M(t^*)\}\in\Gamma(\Xi)$, что противоречит нашим исходным предположениям. Полученное противоречие и доказывает лемму. $\blacksquare$

Воспользовавшись доказанной выше леммой, устанавливаем, что области фазовой плоскости

$$\Omega_N = \left\{ N, M : \begin{array}{c} 1 - \dfrac{N}{N^*} - m\dfrac{M}{M^*} \geq 0, \\ 1 - \dfrac{M}{M^*} - n\dfrac{N}{N^*} \leq 0, \\ M \geq 0. \end{array} \right\} \qquad \Omega_M = \left\{ N, M : \begin{array}{c} 1 - \dfrac{N}{N^*} - m\dfrac{M}{M^*} \leq 0, \\ 1 - \dfrac{M}{M^*} - n\dfrac{N}{N^*} \geq 0, \\ N \geq 0. \end{array} \right\}$$

при отображениях X_t, задаваемых системой (2), переходят сами в себя. Точки области Ω_N (кроме седла (6)), тяготеют к узлу N^*, а точки области Ω_M (также кроме седла (6)), тяготеют к узлу M^*.

На рис. 10, соответствующими буквами обозначены треугольные области Ω_N и Ω_M.

Аналогично, в себя при отображениях X_t переходят области

$$Q_N = \left\{ N, M : N \geq N^* \frac{1-m}{1-nm}, 0 \leq M \leq M^* \frac{1-n}{1-mn} \right\} \text{ и}$$

$$Q_M = \left\{ N, M : M \geq M^* \frac{1-n}{1-nm}, 0 \leq N \leq N^* \frac{1-m}{1-mn} \right\}.$$

На рис. 10, эти области выделены штриховкой.

Из всех начальных точек области Q_N, кроме стационарной точки (6), система приходит в узел N^*. Из всех начальных точек области Q_M, кроме стационарной точки (6), система приходит в узел M^*. Отметим, что области Q_N и Q_M зависят лишь от коэффициентов нетерпимости и емкостей среды и никак не зависят от коэффициентов прироста популяций α и β.

Что касается точек начальных значений из областей

$$Q_O = \left\{ N, M : N > N^* \frac{1-m}{1-nm}, M > M^* \frac{1-n}{1-mn} \right\},$$

$$Q_I = \left\{ N, M : 0 < N < N^* \frac{1-m}{1-nm}, 0 < M < M^* \frac{1-n}{1-mn} \right\},$$

(на рис. 10 эти области белые), то из любой из этих точек можно прийти как к одному, так и к другому узлу в зависимости от соотношения между коэффициентами прироста популяций α и β.

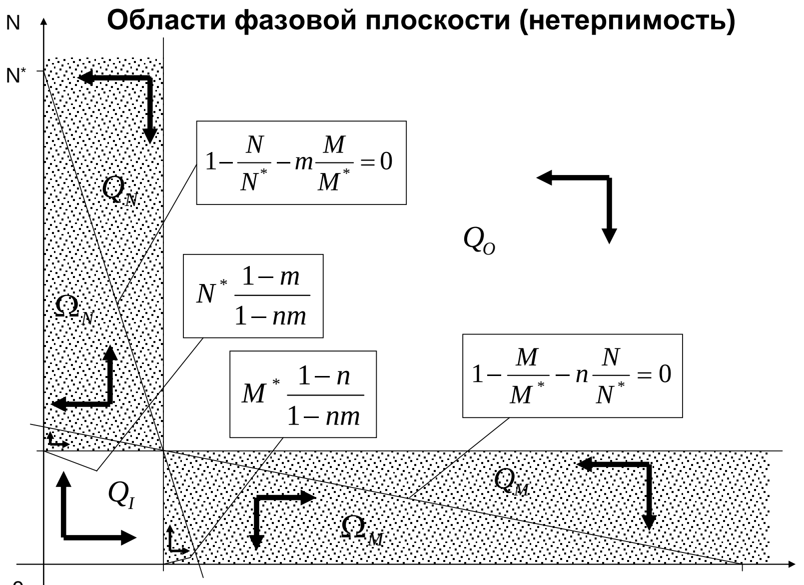

Рис. 10.

Пусть $\{N, M\} \in Q_O$. К какому из узлов придет траектория системы, зависит от того, какой из лучей, $N = N^* \frac{1-m}{1-nm}$, $M \geq M^* \frac{1-n}{1-nm}$ или $N \geq N^* \frac{1-m}{1-nm}$,

$M = M^* \dfrac{1-n}{1-nm}$ первым встретится на ее пути. Если оба встретятся одновременно (что, как мы увидим далее, возможно, но весьма маловероятно), траектория приходит в седло.

Укажем достаточные условия для того, чтобы траектория пришла как в один, так и в другой узел. Приведем траекторию в узел N^*. Выберем N', так чтобы выполнялось $N > N' > N^* \dfrac{1-m}{1-mn}$. Тогда при выполнении неравенства

$$\frac{\alpha N(M-\overline{M})(m\dfrac{M}{M^*}+\dfrac{N}{N^*}-1)}{\beta\overline{M}(n\dfrac{N'}{N^*}+\dfrac{\overline{M}}{M^*}-1)} < N - N', \tag{14}$$

где $\overline{M} = M^* \dfrac{1-n}{1-mn}$, траектория приходит в узел N^*. Заметим, что неравенство (14) вполне достижимо, например, при достаточно малых значениях $\dfrac{\alpha}{\beta}$. Пусть отношение $\dfrac{\alpha}{\beta}$ таково, что выполняется (14) и $N(t), M(t)$ – траектория, начинающаяся в точке $\{N, M\}$. Тогда, при $\overline{M} \le M(t) \le M$, $N' < N(t) < N$, справедливо

$$\beta M(t)(n\frac{N(t)}{N^*}+\frac{M(t)}{M^*}-1) \ge \beta\overline{M}(n\frac{N'}{N^*}+\frac{\overline{M}}{M^*}-1),$$

следовательно, время достижения функцией $M(t)$ прямой $M = M^* \dfrac{1-n}{1-nm} = \overline{M}$ не больше чем

$$\frac{(M-\overline{M})}{\beta\overline{M}(n\dfrac{N'}{N^*}+\dfrac{\overline{M}}{M^*}-1)}.$$

За это время $N(t)$ не успевает уменьшиться даже до N', не говоря о том, чтобы достичь прямой $N = N^* \dfrac{1-m}{1-nm}$.
Действительно, $\alpha N(t)(m\dfrac{M(t)}{M^*} + \dfrac{N(t)}{N^*} - 1) < \alpha N(m\dfrac{M}{M^*} + \dfrac{N}{N^*} - 1)$
и при этом выполняется неравенство (14).

Аналогично можно привести нашу точку $\{N, M\}$ и в противоположный узел M^*. Выберем M', так чтобы выполнялось $M > M' > M^* \dfrac{1-n}{1-mn}$, и обозначим $\overline{N} = N^* \dfrac{1-m}{1-mn}$. Тогда выполнение неравенства

$$\frac{\beta M(N - \overline{N})(n\dfrac{N}{N^*} + \dfrac{M}{M^*} - 1)}{\alpha \overline{N}(m\dfrac{M'}{M^*} + \dfrac{\overline{N}}{N^*} - 1)} < M - M',$$

достижимое при достаточно малых значениях $\dfrac{\beta}{\alpha}$, обеспечивает выход траектории на узел M^*.

Достаточные условия подобного типа можно найти и для точек множества Q_I. Пусть $\{N, M\} \in Q_I$, $\overline{N} = N^* \dfrac{1-m}{1-nm}$, $\overline{M} = M^* \dfrac{1-n}{1-nm}$ и $M < M' < M^* \dfrac{1-n}{1-mn}$, $N < N' < N^* \dfrac{1-m}{1-mn}$, тогда выполнения неравенства

$$\frac{\beta M'(\overline{N} - N)(1 - \dfrac{M}{M^*} - n\dfrac{N}{N^*})}{\alpha N(1 - \dfrac{\overline{N}}{N^*} - m\dfrac{M'}{M^*})} < M' - M$$

достаточно, чтобы траектория пришла в узел N^*, а выполнения неравенства

$$\frac{\alpha N'(\overline{M}-M)(1-\frac{N}{N^*}-m\frac{M}{M^*})}{\beta M(1-\frac{\overline{M}}{M^*}-n\frac{N'}{N^*})} < N'-N\,, -$$

для того чтобы траектория пришла в узел M^*. Заметим, что при усилении взаимной нетерпимости, роль множества Q_I становится существенно меньше, чем множества Q_O.

Полностью аналитически решить вопрос о том, какие точки начальных значений будут тяготеть к какому из устойчивых узлов, удается для упрощенного случая, когда $\gamma=\alpha=\beta$. Покажем, что если точка начальных численностей лежит ниже прямой (7), то траектория придет на бесконечности в точку $(0,M^*)$, если выше прямой (7) – то в точку $(N^*,0)$, если же на самой этой прямой, то траектория придет в седловую точку (6).

Рассмотрим на фазовой плоскости траекторию

$$N(t)=\frac{\overline{N}N_0e^{\gamma t}}{\overline{N}-N_0(1-e^{\gamma t})},\; M(t)=\frac{\overline{M}M_0e^{\gamma t}}{\overline{M}-M_0(1-e^{\gamma t})}, \tag{15}$$

являющуюся решением уравнений Ферхюльста

$$\frac{dN}{dt}=\gamma N(1-\frac{N}{\overline{N}}),\; \frac{dM}{dt}=\gamma M(1-\frac{M}{\overline{M}}), \tag{16}$$

где $\overline{N}$ и $\overline{M}$ определяются формулами (6). Тогда если точка начальных значений (N_0,M_0) лежит на прямой (7), то и вся траектория (15) лежит на этой прямой. В самом деле, из

$N_0 = \frac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)} M_0$ и $\overline{N} = \frac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)} \overline{M}$ (так как точка $(\overline{N}, \overline{M})$ тоже лежит на прямой (7)), следует, что при любом t

$$N(t) = \frac{\overline{N} N_0 e^{\gamma t}}{\overline{N} - N_0(1-e^{\gamma t})} = \frac{\left(\frac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)}\right)^2 \overline{M} M_0 e^{\gamma t}}{\frac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)}(\overline{M} - M_0(1-e^{\gamma t}))} =$$

$$= \frac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)} \frac{\overline{M} M_0 e^{\gamma t}}{\overline{M} - M_0(1-e^{\gamma t})} = \frac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)} M(t),$$

что означает, что траектория (15) целиком лежит на прямой (7).

Далее, $N(t)$ есть решение первого из уравнений (16). Подставим в это уравнение значение $\overline{N}$ из (6):

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N (1 - \frac{1-nm}{1-m}\frac{N}{N^*}) = \gamma N (1 - \frac{N}{N^*} + \frac{N}{N^*} - \frac{1-nm}{1-m}\frac{N}{N^*}) =$$

$$= \gamma N (1 - \frac{N}{N^*} - m\frac{1-n}{1-m}\frac{N}{N^*}).$$

Подставляя сюда (7), так как $N(t)$ при любом t лежит на прямой (7), получаем

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N (1 - \frac{N}{N^*} - m\frac{1-n}{1-m}\frac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)}\frac{M}{N^*}) = \gamma N (1 - \frac{N}{N^*} - m\frac{M}{M^*}).$$

Аналогично $M(t)$ есть решение второго из уравнений (16), которое точно так же, с учетом того, что $M(t)$ при любом t лежит на прямой (7), преобразуется в $\frac{dM}{dt} = \gamma M (1 - \frac{M}{M^*} - n\frac{N}{N^*})$. Таким образом, мы получили, что траектория (15) при условии нахождения начальной точки (N_0, M_0) на прямой (7), во-первых, вся лежит на этой прямой и, во-вторых, является решением системы (2). Отсюда и из доказанной выше леммы следует ряд выводов относительно зависимости финального состояния модели взаимодействия взаимно нетерпимых популяций от расположения на фазовой плоскости начального состояния модели относительно прямой (7):

- Если начальная точка находится на прямой (7), на бесконечности остаются обе популяции, так как система приходит в седловую точку (6).
- Если начальная точка находится ниже прямой (7), на бесконечности остается популяция M, система приходит в устойчивый узел $(0, M^*)$.
- Если начальная точка находится выше прямой (7), на бесконечности остается популяция N, система приходит в устойчивый узел $(N^*, 0)$.

Можно выяснить, какое количество точек фазовой плоскости тяготеет к какому из устойчивых узлов системы. Для этого вычислим вероятность попадания, например, в область, тяготеющую к узлу M^*, при случайном броске начального состояния системы в область первого квадранта фазовой плоскости модели, ограниченную квадратом размера $X * X$ с левым нижним углом в начале координат и сторонами, лежащими на осях координат,. Эта вероятность равна $P_{M^*}(m,n) = \dfrac{N^*(1-m)}{2M^*(1-n)}$ при $0 < \dfrac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)} \le 1$ и $P_{M^*}(m,n) = 1 - \dfrac{M^*(1-n)}{2N^*(1-m)}$ при $\dfrac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)} \ge 1$. Соответственно вероятность попасть в область, тяготеющую к узлу N^* будет $P_{N^*}(m,n) = 1 - \dfrac{N^*(1-m)}{2M^*(1-n)}$ при $0 < \dfrac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)} \le 1$ или же $P_{N^*}(m,n) = \dfrac{M^*(1-n)}{2N^*(1-m)}$ при $\dfrac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)} \ge 1$. Вероятность попасть на прямую (7), конечно же, равна 0.

Мы видим, что если при фиксированном коэффициенте нетерпимости одной из сторон устремить коэффициент нетерпимости другой к бесконечности, то вероятность того, что случайно брошенная в первый квадрант фазовой плоскости начальная точка попадет в область, тяготеющую к узлу именно этой, бесконечно нетерпимой стороны, будет стремиться к единице:

$$P_{M^*}(m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 1,\ P_{N^*}(m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$
$$P_{N^*}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,\ P_{M^*}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Перейдем к исследованию областей тяготения в общем случае $\alpha \neq \beta$.

Пусть $\alpha < \beta$. Рассмотрим открытое множество

$$\Xi = \left\{ N, M : \begin{matrix} N > N^* \dfrac{1-m}{1-mn}, 0 < M \le M^* \dfrac{1-n}{1-mn}, \\ N > \dfrac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)} M, M > M^* \dfrac{1-n}{1-mn}. \end{matrix} \right\}$$

При отображениях X_t, задаваемых системой (2), точки границы этого множества переходят в множество $\overline{\Xi}$. При $0 \le M \le M^* \dfrac{1-n}{1-mn}$ это достаточно очевидно. При $M > M^* \dfrac{1-n}{1-mn}$ обратим внимание на выявленный нами в начале данного приложения факт, что при нахождении точки $\{N, M\}$ на прямой (7), $N = \dfrac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)} M$, вектор

$$\left(\beta N (1 - \frac{N}{N^*} - m \frac{M}{M^*}), \beta M (1 - \frac{M}{M^*} - n \frac{N}{N^*}) \right)$$

направлен вдоль прямой (7) к началу координат. Далее,

$$\alpha N (1 - \frac{N}{N^*} - m \frac{M}{M^*}) = \beta N (1 - \frac{N}{N^*} - m \frac{M}{M^*}) +$$

$$+(\alpha-\beta)N(1-\frac{N}{N^*}-m\frac{M}{M^*}).$$

Последнее слагаемое строго положительное, значит, вектор $\left(\alpha N(1-\frac{N}{N^*}-m\frac{M}{M^*}), \beta M(1-\frac{M}{M^*}-n\frac{N}{N^*})\right)$ направлен внутрь области Ξ. Следовательно, область $\overline{\Xi}$ переходит в себя при отображениях X_t. Из сказанного следует, что множество начальных значений, тяготеющих к узлу M^*, лежит в $K \setminus \overline{\Xi}$ – дополнении $\overline{\Xi}$ в первом квадранте K фазовой плоскости. Следовательно, появляется возможность оценить сверху площадь этих точек в квадрате со стороной X и вершиной в начале координат, площадью пересечения этого квадрата с множеством $K \setminus \overline{\Xi}$.

Тогда вероятность $P(n)$ при случайном броске начальной точки в квадрат со сторонами X направленными по осям координат фазовой плоскости, попасть в область, тяготеющую к узлу M^*, можно оценить сверху выражением: $P_{M^*}(n) < \frac{N^*(1-m)}{2M^*(1-n)} + \frac{N^*M^*(1-n)(1-m)}{2X^2(1-nm)^2}$. Очевидно, что при увеличении n, нетерпимости стороны N, вероятность случайного попадания начальных данных в область, тяготеющую к узлу другой стороны, уменьшается $P_{M^*}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Соответственно вероятность попадания в область точек, тяготеющих к узлу N^*, оценивается снизу: $P_{N^*}(n) \ge 1 - \frac{N^*(1-m)}{2M^*(1-n)} - \frac{N^*M^*(1-n)(1-m)}{2X^2(1-nm)^2}$, следовательно, $P_{N^*}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Пусть, наконец, $\alpha > \beta$. Рассмотрим на фазовой плоскости следующее уравнение прямой:

$$N = \frac{N^*(\alpha m - \beta)}{M^*(\beta n - \alpha)} M + N^* \frac{\beta - \alpha}{\beta n - \alpha}. \qquad (17)$$

Эта прямая всегда проходит через точку (6). При $\frac{\alpha}{\beta} \to 0$, эта прямая стремится к прямой (4), а при $\frac{\beta}{\alpha} \to 0$, – к (3), а при $\alpha = \beta$, совпадает с прямой (7). Характеристическим свойством данной прямой является выполнение на ней следующего равенства:

$$\alpha(1 - \frac{N}{N^*} - m\frac{M}{M^*}) = \beta(1 - \frac{M}{M^*} - n\frac{N}{N^*}). \qquad (18)$$

Будем далее считать, что в (17) $\beta n > \alpha$. Это достаточно естественно, так как мы хотим искать оценки при $n \to \infty$. Учитывая это и то, что $\alpha > \beta$, заключаем, что прямая (17) пересекает ось N в ее отрицательной области. Рассмотрим открытое множество

$$\Xi = \left\{ N, M : \begin{array}{c} N > N^* \frac{1-m}{1-mn}, 0 < M \le M^* \frac{1-n}{1-mn}, \\ N > \frac{N^*(\alpha m - \beta)}{M^*(\beta n - \alpha)} M + N^* \frac{\beta - \alpha}{\beta n - \alpha}, M > M^* \frac{1-n}{1-mn}. \end{array} \right\}$$

Утверждается, что при отображениях семейства X_t, задаваемых системой (2), точки границы этого множества переходят в $\overline{\Xi}$. При $0 \le M \le M^* \frac{1-n}{1-mn}$ это очевидно. При $M > M^* \frac{1-n}{1-mn}$ и $N = \frac{N^*(\alpha m - \beta)}{M^*(\beta n - \alpha)} M + N^* \frac{\beta - \alpha}{\beta n - \alpha}$ получаем, учитывая (17), $\frac{dN}{dM}=\frac{N}{M}$, т. е. производная траектории выходящей из точки $\{N,M\}$ направлена точно в начало координат, а так как прямая (17) пересекает ось N в ее отрицательной области, это означает, что производная направлена внутрь области $\overline{\Xi}$. Повторяя теперь рассуждения, которые проводились при рассмотрении случая $\alpha<\beta$, получим, что и в данном случае $\alpha>\beta$, также справедливы оценки $P_{M^*}(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ и $P_{N^*}(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

Совершенно аналогично для любых соотношений между α и β получаются оценки $P_{M^*}(m)\xrightarrow[m\to\infty]{}1$ и $P_{N^*}(m)\xrightarrow[m\to\infty]{}0$.

В свете изложенного выше, можно заключить, что в условиях обоюдной нетерпимости и обоюдного стремления сторон увеличить свою предельную численность стратегии, обеспечивающей стопроцентный успех, не существует, так как соперник может использовать тот же самый набор стратегий. Если же один из партнеров почему-то не меняет своих внешних переменных, против него очень эффективно, во-первых, увеличение нетерпимости и, во-вторых, если первое почему-либо невозможно (к примеру, из-за договорных, или законодательных, или культурных ограничений), столь же эффективным является вполне «политкорректное», т. е. на первый взгляд совсем не касающееся соперника сочетание повышения своей внутривидовой конкуренции (уменьшения емкости среды), с уменьшением коэффициента прироста своей популяции.

Поясним последнее утверждение примером. Пусть мы играем за сторону N. Пусть точка начальных значений лежит в первом квадранте фазовой плоскости, но не на оси M, тогда

1. Если наша точка начальных значений $\{N, M\}$ попала внутрь области $N > N^* \frac{1-m}{1-mn}$, переходим к следующему пункту, если же нет – уменьшаем N^*, оставляя его при этом положительным, настолько, чтобы последнее неравенство выполнялось. Заметим, что в предметной области, это уменьшение емкости среды, скорее всего, будет не каким-то серьезным ущемлением интересов популяции, а всего лишь приведением ее амбиций (ожидания предельной численности) в определенное соответствие с ее настоящей численностью. При достаточно больших n, после такого уменьшения может даже выполняться $N^* >> N$.
2. Если выполнено $0 \le M \le M^* \frac{1-n}{1-mn} = \overline{M}$, ничего более предпринимать не надо, траектория и так придет в узел N^*. Если же нет – выбираем N', $N > N' > N^* \frac{1-m}{1-mn}$ и уменьшаем α, оставляя его при этом положительным, настолько, чтобы выполнялось неравенство (14). Как было показано выше, этого достаточно, чтобы траектория пришла в узел N^*.

Литература

1. *Триандис Г.К.* Культура и социальное поведение. М.: ФОРУМ, 2007, 384 с.
2. *Олифер В.Г., Олифер Н.А.* Основы сетей передачи данных. – М.: Интернет-университет информационных технологий ИНТУИТ.ру, 2003, 248 с.
3. *Бродский Ю. И.* Взгляд на толерантность и нетерпимость при межкультурном взаимодействии с позиций системной динамики и исследования опера-

ций. //Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов, М.: ВЦ РАН, 2005, С. 14-31.

4. *Бродский Ю. И.* Сверхтолерантность в модели конкурентного взаимодействия двух популяций. //Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов, М.: ВЦ РАН, 2007, С. 46-50.
5. *Лебедева Н.М, Лунева О.В. Стефаненко Т.Г.* Тренинг этнической толерантности для школьников. М.: Привет, 2004, 358 с.
6. Межкультурный диалог: Лекции по проблемам межэтнического и межконфессионального взаимодействия./Под ред. М.Ю. Мартыновой, В.А. Тишкова, Н.М. Лебедевой. М.: Изд-во РУДН, 2003, 406 с.
7. *Тарасевич Ю.Ю.* Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс. Изд.4, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. 152 с.
8. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976, 328 с.
9. *Белотелов Н.В., Бродский Ю.И., Оленев Н.Н., Павловский Ю.Н., Тарасова Н.П.* Проблема устойчивого развития: естественно-научный и гуманитарный анализ М.: ФАЗИС, 2004, 108 с.
10. *Павловский Ю.Н., Белотелов Н.В., Бродский Ю.И., Оленев Н.Н.* Опыт имитационного моделирования при анализе социально-экономических явлений. М.: МЗ Пресс, 2005. 137 с.

Содержание

Введение 3
Системно-динамический анализ модели............................. 7
Теоретико-игровой анализ модели 25
Выводы 32
Отношение к полученным выводам 36
Приложение. Исследование фазовой плоскости модели в случае обоюдной нетерпимости.. 38
Литература.. 51

Бродский Юрий Игоревич

**ТОЛЕРАНТНОСТЬ И НЕТЕРПИМОСТЬ
С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СИСТЕМНОЙ ДИНАМИКИ
И ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ**

Подписано в печать 29.02.2008
Формат бумаги 60x84 1/16
Уч.-изд.л. 2,5. Усл.-печ.л. 3,5
Тираж 120 экз. Заказ 8

Отпечатано на ротапринтах в Вычислительном центре
им. А.А. Дородницына Российской академии наук
119333, Москва, ул. Вавилова, 40