

## **ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ СЕТОЧНЫЙ ГЕНЕРАТОР НА БАЗЕ КВАЗИОДНОМЕРНЫХ СЕТОК <sup>1</sup>**

**А.А.ЧАРАХЧЬЯН**

*(117967 Москва, ГСП-1, ул. Вавилова 40, ВЦ РАН)*

Предлагается метод построения регулярных сеток, являющийся компиляцией известного сеточного генератора, гарантирующего выпуклость всех ячеек сетки, и простой квазиодномерной сетки с расстановкой узлов вдоль прямых. Демонстрируется эффективность такого подхода для задач с подвижными границами.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Рассматривается проблема построения регулярных сеток в областях с криволинейными границами. На плоскости  $(x, y)$  имеется некоторая область, в которой нужно построить сетку

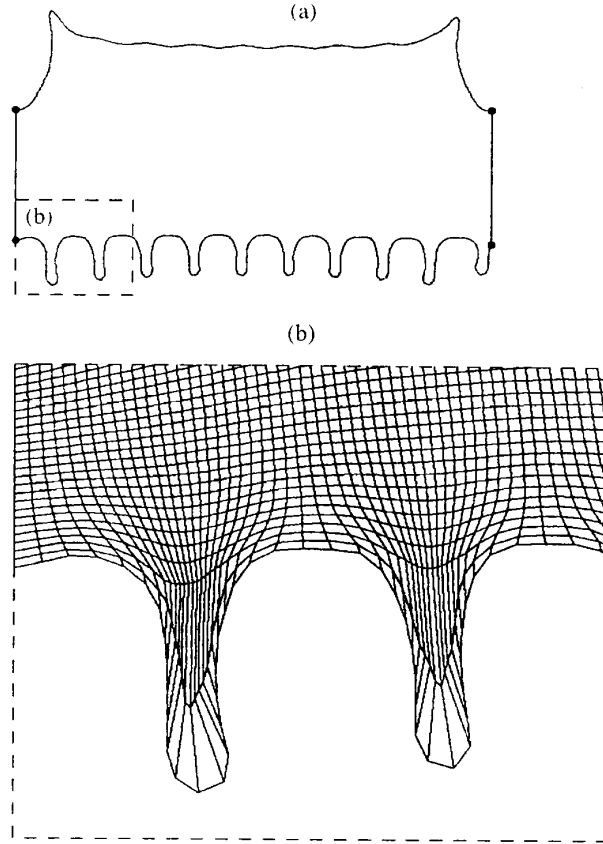
$$G = \{(x, y)_{ij}, i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M\} \quad (1)$$

при заданных координатах граничных узлов  $(x, y)_{i0}, (x, y)_{iM}, (x, y)_{0j}, (x, y)_{Nj}$ . Имеется много работ, посвященных этой проблеме (см., например, книги [1,2] и один из последних обзоров [3]). Большинство методов построено на приближенном решении уравнений в частных производных эллиптического типа или соответствующих вариационных задач. Эти методы часто называют эллиптическими сеточными генераторами.

Регулярная сетка состоит из четырехугольных ячеек, и одна из серьезных трудностей, возникающих при ее построении, заключается в возможном появлении самопересекающихся ячеек, что делает сетку непригодной для расчетов. Эта трудность была преодолена в методе [4], который, на каждой итерации, гарантирует выпуклость всех ячеек сетки (за естественным исключением тех ячеек, невы-

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00095).



Фиг. 1: Область и фрагмент сетки, полученной методом [4].

пуклость которых предопределена соответствующим заданием граничных узлов) практически при любом искривлении граничных линий.

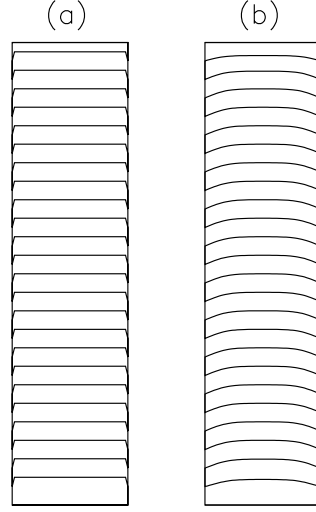
Остановимся на недостатках метода [4], устранению которых и посвящена настоящая заметка. Наиболее серьезный из них заключается в том, что узлы сеточной линии, ближайшей к границе, могут сильно от нее отходить. На фиг. 1 приведена область, возникавшая при моделировании гидродинамической неустойчивости границы раздела сред. Точками отмечены угловые узлы сетки  $(0,0)$ ,  $(0,M)$ ,  $(N,M)$  и  $(N,0)$ . Наиболее серьезная трудность при построении сетки связана с нижней границей, на которой имеются несколько узких и длинных "языков". Заметим, что вариант метода Winslow из [1] дает для данной области сетку с самопересекающи-

мися ячейками. Фрагмент сетки, построенной методом [4], показан на фиг. 1. Сетка состоит только из выпуклых ячеек. Тем не менее в языке, поведение которого и представляет основной интерес в данной задаче, точность расчета невысокая из-за больших размеров ячеек.

Как было продемонстрировано в [4], этот недостаток в принципе можно устранить с помощью механизма управления расположением узлов из [5], который связан с заданием значений управляющей функции во всех ячейках сетки. Однако для каждой новой задачи подбор такой управляющей функции требует значительных усилий, увеличивающихся вместе с увеличением числа узлов сетки. Кроме того, имеющийся опыт применения метода [4] показал, что введение управляющей функции приводит, как правило, к уменьшению скорости сходимости итерационного процесса.

Другим недостатком метода [4] является низкая скорость сходимости итерационного процесса даже в отсутствие управляющей функции. Как указывалось еще в книге [1], наиболее сильно этот недостаток проявляется при решении нестационарных задач с подвижными границами, когда сетку нужно строить на каждом шаге по времени, что требует разумного ограничения на число итераций при построении сетки.

Продemonстрируем указанный недостаток на следующем простом примере. Пусть имеется прямоугольная область с равномерной расстановкой узлов вдоль всех границ, показанная на фиг. 2. Наиболее подходящей сеткой для такой области как правило является прямоугольная сетка из прямых, параллельных границам. Эта сетка является и решением алгебраических уравнений метода [4]. Пусть теперь все граничные узлы сетки сместились вниз на некоторый шаг, а внутренние узлы сетки остались неподвижными. Вертикальные линии сетки при этом не изменились, а горизонтальные сместились вверх, и на них появились изломы вблизи боковых границ, как это показано на фиг. 2а. Эта сетка берется в качестве начальной для метода [4]. Горизонтальные линии сетки, полученной



Фиг. 2: Недоитерированность сетки при движении границ: а — линии одного семейства для начальной сетки, б — для сетки после 50 итераций методом [4].

после 50 итераций, показаны на фиг. 2б. Видно, что движение границ по-прежнему оставляет на сетке существенный след, что может приводить к заметному падению точности по сравнению с расчетом на сетке из прямых линий.

## 1. КВАЗИОДНОМЕРНЫЕ СЕТКИ

Здесь и далее для сокращения записи вводится обозначение  $\vec{r}_{ij} = (x, y)_{ij}$  и формулы приводятся в векторном виде.

Простейший способ построения сетки (1) заключается в следующем (см. [1]). Линии одного семейства, отвечающие, для определенности, постоянному значению индекса  $j$ , полагаются прямыми, узлы вдоль которых расставляются некоторым разумным образом. Для граничной линии  $j = 0$  вначале вычисляются величины  $s_i^0$ :

$$s_0^0 = 0, \quad s_{i+1}^0 = s_i^0 + |\vec{r}_{i+1,0} - \vec{r}_{i0}|^2, \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Монотонно возрастающая последовательность

$$t_i^0 = s_i^0 / s_N^0, \quad i = 0, \dots, N, \quad t_0^0 = 0, \quad t_N^0 = 1$$

называется законом расстановки. Аналогично определяется закон расстановки  $t_i^M$  вдоль граничной линии  $j = M$ . Закон расстановки

вдоль других линий семейства определяется линейной интерполяцией  $t_i^j = [t_i^0(M - j) + t_i^M j]/M$ , после чего внутренние узлы сетки определяются по формулам

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_{0j} + t_i^j(\vec{r}_{Nj} - \vec{r}_{0j}), \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, M - 1. \quad (2)$$

Такие сетки будем называть квазиодномерными. Их очевидным преимуществом является безитерационность построения, а очевидным недостатком — узкая область применимости. В то же время для многих практически важных задач квазиодномерные сетки оказываются неудовлетворительными только в сравнительно небольших подобластях. Это относится, в частности, к области на фиг. 1. Поэтому представляется оправданной разработка эллиптических сеточных генераторов, которые исправляют квазиодномерные сетки по возможности только там, где они не работают. Кроме того, забегая вперед следует отметить высокое качество получаемых сеток и в тех подобластях, где линии сетки искривляются, поскольку задаваемый закон расстановки узлов продолжает примерно выполняться и в этих подобластях.

Возможность использования квазиодномерных сеток при создании эллиптических сеточных генераторов базируется на следующей задаче минимизации, эквивалентной уравнениям (2). Вычитая уравнения (2) друг из друга при ближайших значениях индекса  $i$ , можно получить уравнения

$$\vec{u}_{ij} = q_{ij}(\vec{r}_{ij} - \vec{r}_{i+1,j}) + q_{i-1,j}(\vec{r}_{ij} - \vec{r}_{i-1,j}) = 0, \quad (3)$$

$$i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, M - 1,$$

где  $q_{ij} = 1/[N(t_{i+1}^j - t_i^j)]$ . Здесь при выводе было учтено, что уравнения (2) формально справедливы и на границе при  $i = 0$  и  $i = N$ . Коэффициенты  $q_{ij}$  определяются с точностью до постоянного множителя, который в данном случае выбран так, чтобы  $q_{ij} = 1$  для равномерного закона расстановки  $t_i^j = i/N$ .

Рассмотрим теперь функцию

$$Q(G) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} q_{ij} |\vec{r}_{i+1,j} - \vec{r}_{i,j}|^2 / 2, \quad (4)$$

которая зависит от всех координат внутренних узлов сетки. Вычисляя первые и вторые производные этой функции можно показать, что уравнения (3), и следовательно формулы (2), при  $q_{ij} > 0$  являются решением задачи  $Q(G) = \min$ .

## 2. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Рассмотрим функцию

$$J(G) = Q(G) + \varepsilon \sigma I(G), \quad (5)$$

где функция  $Q(G)$  определена в (4),  $\varepsilon$  — параметр,  $\sigma$  — средняя площадь ячейки сетки, равная площади области деленной на число ячеек,  $I(G)$  — минимизируемая функция метода [4]. Введение в (5) постоянного множителя  $\sigma$  связано с желанием иметь безразмерный параметр  $\varepsilon$ , поскольку  $Q(G)$  имеет размерность квадрата длины, а  $I(G)$  — безразмерна. Здесь и далее не будет приводиться конкретный вид функции  $I(G)$  и другие подробности метода [4], включая алгоритм расчета производных функции  $I(G)$ , которые можно найти, помимо [4], в недавно опубликованной работе [6].

Напомним, что функция  $I(G)$  обладает следующим свойством. Рассматриваются четырехугольные ячейки сетки (1), состоящие из узлов с ближайшими значениями индексов. Сетку, состоящую только из выпуклых ячеек, будем для краткости называть выпуклой сеткой, а множество таких сеток обозначим через  $D$ . Условие выпуклости ячейки эквивалентно условию положительности площадей всех четырех треугольников, которые можно построить по узлам ячейки. Если сетка  $G \in D$ , то  $I(G) > 0$ , а если площадь хотя бы одного треугольника для какой-то ячейки стремится к нулю, оставаясь при этом положительной, то  $I^h(G) \rightarrow +\infty$ . Наличие такого бесконечного барьера на границе множества выпуклых сеток и обеспечивает

надежность метода [4]. С одной стороны, если множество  $D$  не пусто, наличие барьера гарантирует существование хотя бы одной выпуклой сетки, для которой  $I(G)$  имеет локальный минимум. С другой стороны, наличие барьера позволяет организовать итерационный процесс таким образом, чтобы на каждой итерации  $n$  сетка  $G_n \in D$ , если только начальная сетка  $G_0 \in D$ .

Ясно, что введенная в (5) функция  $J(G)$  при любом  $\varepsilon > 0$  так же имеет бесконечный барьер на границе множества  $D$ , что позволяет построить столь же надежный сеточный генератор, что и при минимизации функции  $I(G)$ . По аналогии с известным подходом к решению некорректных задач математической физики, формулу (5) естественно назвать регуляризацией функции  $Q(G)$ , а  $\varepsilon$  - параметром этой регуляризации.

### 3. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС

Локальный минимум функции (5) достигается на решении системы алгебраических уравнений

$$\vec{R}_{ij} = \vec{u}_{ij} + \varepsilon \sigma \begin{pmatrix} \partial I / \partial x_{ij} \\ \partial I / \partial y_{ij} \end{pmatrix} = 0, \quad (6)$$

где  $\vec{u}_{ij}$  определено в (3).

При решении задач с подвижными границами получение начальной сетки  $G_0 \in D$  не является трудной проблемой, поскольку в распоряжении вычислителя имеется заведомо выпуклая сетка с предыдущего временного слоя. В случае необходимости может использоваться специальный прием, описанный в [4].

Введем в рассмотрение вектор  $\Delta \vec{r}_{ij} = (\vec{r}_{ij}^{(n+1)} - \vec{r}_{ij}^{(n)}) / \tau_{ij}$ , где  $n$  — номер итерации,  $\tau_{ij}$  — итерационный параметр. Вектор  $\Delta \vec{r}_{ij}$  определяется из решения следующей системы линейных уравнений, получаемых путем огрубления метода Ньютона.

$$\vec{R}_{ij}^{(n)} + A_{ij} \Delta \vec{r}_{ij} - q_{ij} \Delta \vec{r}_{i+1,j} - q_{i-1,j} \Delta \vec{r}_{i-1,j} = 0, \quad (7)$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} q_{ij} + q_{i-1j} + \varepsilon\sigma\partial^2 I/\partial x_{ij}^2 & \varepsilon\sigma\partial^2 I/\partial x_{ij}\partial y_{ij} \\ \varepsilon\sigma\partial^2 I/\partial x_{ij}\partial y_{ij} & q_{ij} + q_{i-1j} + \varepsilon\sigma\partial^2 I/\partial y_{ij}^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь учтены все вторые производные функции  $Q(G)$  и те вторые производные функции  $I(G)$ , которые учитывались в квазиньютоновской итерационной процедуре метода [4]. Уравнения (7) решаются одномерными прогонками для векторов размерности 2 вдоль линий с  $j = \text{const}$ .

Как следует из вывода уравнений (7), при  $\varepsilon = 0$  и  $\tau_{ij} = 1$  итерационный процесс заканчивается на первой итерации и дает квазиодномерную сетку, определяемую формулами (2). Ясно, что и в случае  $0 < \varepsilon \ll 1$  итерационный процесс уже на первой итерации будет давать сетку, близкую к квазиодномерной в тех подобластях, где линиям выбранного семейства не нужно сильно изгибаться, чтобы нарушать условие выпуклости ячеек. Это обстоятельство выгодно отличает предлагаемый метод от метода [4], который в задачах с подвижными границами может давать сильно недоитерированные сетки даже для областей простой формы, как это было продемонстрировано во введении (см. фиг. 2).

Для уменьшения вычислительных затрат используется предложенные в [7] итерации на подмножестве узлов, меняющимся от итерации к итерации. Выделение подмножества базируется на анализе локальной относительной невязки уравнений (6)

$$\delta_{ij} = |\vec{R}_{ij}| / (q_{ij}|\vec{r}_{i+1,j} - \vec{r}_{ij}| + q_{i-1,j}|\vec{r}_{ij} - \vec{r}_{i-1,j}| + \varepsilon\sigma g_{ij}),$$

где  $g_{ij}$  имеет тот же порядок величины, что и слагаемые, входящие в  $\partial I/\partial x_{ij}$  и  $\partial I/\partial y_{ij}$ . Сделанный в [7] выбор величины  $g_{ij}$  оказался не совсем удачным из-за отсутствия инвариантности относительно поворота системы координат в плоскости  $(x, y)$ . В настоящей реализации  $g_{ij}$  является таким инвариантом.

Перейдем к описанию выбора итерационного параметра  $\tau_{ij}$ . В отличие от метода [4], где итерационный параметр один и тот же для всех узлов, здесь допускаются разные значения  $\tau_{ij}$  для разных узлов. Это сделано для того, чтобы иметь возможность выполнять



расчет первых нескольких итераций с  $\tau_{ij} = 1$  в тех подобластях, где функция квазиодномерных сеток  $Q(G)$  много больше регуляризующей добавки, и одновременно иметь возможность уменьшать  $\tau_{ij}$  в тех узлах, где использование  $\tau_{ij} = 1$  может приводить к выходу за границу множества  $D$ .

В настоящей реализации итерационный параметр имеет вид  $\tau_{ij} = \tau_{ij}^0 \tau$ . Параметр  $\tau_{ij}^0$  выбирается так, чтобы не допустить выхода за границу множества  $D$ . Ясно, что такой выход является фатальным для итерационного процесса из-за наличия того же бесконечного барьера минимизируемой функции на границе  $D$ . Дополнительный скалярный параметр  $\tau$  на нескольких первых итерациях полагается равным 1, чтобы обеспечить быструю сходимость в тех подобластях, где  $Q(G) \gg \varepsilon \sigma I(G)$ . В результате, как правило, алгоритм [7] значительно уменьшает число узлов в подмножестве, на котором выполняются итерации. Далее параметр  $\tau$  начинает выбираться так же, как и в [4], по возможности уменьшая суммарную квадратичную невязку уравнений (6) на очередном подмножестве узлов с помощью метода парабол.

Применяется следующий алгоритм выбора параметра  $\tau_{ij}^0$ . Вначале полагается  $\tau_{ij}^0 = 1$  для всех узлов. Затем выполняется проверка ячеек на выпуклость, и если площадь какого-либо треугольника ячейки отрицательна, параметр  $\tau_{ij}^0$  в трех соответствующих узлах уменьшается в два раза. Процесс уменьшения параметров заканчивается, если очередная проверка всех ячеек на выпуклость дает положительный результат. На практике уменьшение параметра  $\tau_{ij}^0$  наблюдается только на первых итерациях в случае близости начальной сетки  $G_0$  к границе множества  $D$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Предлагаемый сеточный генератор применялся в расчетах гидродинамических течений с подвижными границами раздела сред, которые выделялись явно в виде некоторых линий сетки. Первоначально границы раздела были почти прямыми, а затем на одной

из границ в процессе ее движения возникали один или несколько "языков" (см. фиг. 1). Ранее при решении таких задач применялся метод [4]. Предлагаемый метод практически снял проблему недоитерированности сетки при движении границ, проиллюстрированную во введении на фиг. 2.

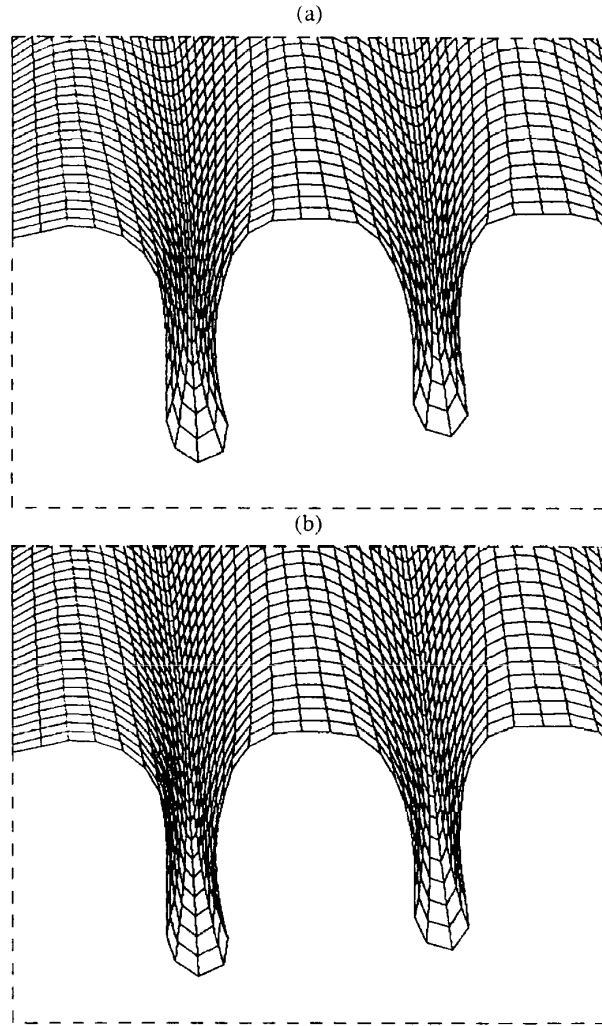
Предлагаемый метод позволил существенно увеличить точность расчета задачи о неустойчивости границы раздела сред, из которой взят пример области на фиг. 1. На фиг. 3 показан фрагмент сетки для этой области, полученной настоящим методом при  $\varepsilon = 10^{-2}$  и  $10^{-3}$ . Линии сетки  $j = \text{const}$  направлены от нижней границы области к верхней. Как видно из сравнения с сеткой на фиг. 1, полученной методом [4], предлагаемый метод "втянул" сетку внутрь языков, сохранив при этом выпуклость всех ячеек.

Уменьшение  $\varepsilon$ , как и следовало ожидать, приводит к спрямлению линий  $j = \text{const}$ . В данном случае это ухудшает качество сетки, поскольку уменьшаются размеры наиболее мелких ячеек. Для каждой конкретной задачи разумный выбор параметра  $\varepsilon$  скорее всего не будет трудной проблемой, во всяком случае по сравнению с выбором управляющей функции в методе [4].

## 5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Отметим то очевидное обстоятельство, что данный метод не претендует на универсальность. В самом деле, квазиодномерная сетка (2) почти не чувствительна к деформациям граничных линий  $j = 0$  и  $j = M$ , в отличие от деформаций двух других граничных линий  $i = 0$  и  $i = N$ . Поэтому данный метод имеет смысл применять в задачах, где существенной деформации подвергаются либо одна граница, либо две противоположные, причем линии  $j = \text{const}$  должны исходить из деформируемых границ.

В качестве перспективы для создания универсального сеточного генератора укажем на возможность добавления в функцию (5) минимизируемой функции квазиодномерных сеток вдоль линий другого семейства  $i = \text{const}$ . В результате, при  $\varepsilon = 0$  получится простой



Фиг. 3: Фрагмент сетки, полученной настоящим методом: а —  $\varepsilon = 10^{-2}$ , б —  $10^{-3}$ .

эллиптический сеточный генератор с небольшой областью применимости. Следует, однако, отметить, что для задач типа показанной на фиг. 1 такой универсальный генератор не сможет конкурировать с предлагаемым в настоящей работе из-за неизбежного увеличения объема вычислений без заметного улучшения качества сеток.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.:Наука, 1976.
2. Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. Numerical grid generation. N.Y. etc: North-Holland, 1985.
3. Иваненко С.А., Прокопов Г.П. Методы построения адаптивно-гармонических сеток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. №6. С. 643—662.
4. Иваненко С.А., Чарахчьян А.А. Криволинейные сетки из выпуклых четырехугольников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. №4. С. 503—514.
5. Bracbill J.U., Saltzman J.S. Adaptive zoning for singular problems in two dimensions // J. Comput. Phys. 1982. V. 46. N3, P. 342—368.
6. Charakhch'yan A.A. and Ivanenko S.A. A variational form of the Winslow grid generator // J. Comput. Phys. 1997. V. 136. N2. P. 385—398. 46. N3, P. 342—368.
7. Чарахчьян А.А. Об одном подходе к уменьшению вычислительных затрат при построении криволинейных сеток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. №2. С. 344—350.