МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖКУЛЬТУРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ[1]

Бродский Ю.И.

Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН (ВЦ РАН), Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова 40, тел.: (499)135-62-04, факс: (499)135-61-59, e-mail: brodsky@ccas.ru

Из множества аспектов взаимодействия культур предлагается остановиться на отношении к иной культуре и сравнивать это отношение с отношением к собственной. В этом случае взаимодействие культур можно описать уравнениями конкуренции. Измерение межвидовой конкуренции через внутривидовую оказывается плодотворным: качественное поведение модели зависит именно от соотношения между собой коэффициентов, выражающих это измерение.

MATHEMATICAL MODEL OF INTERCULTURAL INTERACTION

Brodsky Yu.I.

From all aspects of culture, we shall choose two opposite - tolerance and intolerance in relation to other cultures. Our purpose is finding out how cultures with different levels of tolerance interact among themselves. The key concept of the research is introduction of the factors of intolerance.

В рамках предложенной абстракции предлагается описывать взаимодействие культур уравнениями конкуренции:

$$\dot{\vec{x}} = (E - CX^{*}\Delta\vec{x})A\vec{x}\,. \tag{1}$$

Здесь $\vec{x}$ - n-мерный вектор численностей популяций, E - единичная матрица $n*n$. C - квадратная $n*n$ матрица конкуренции, применительно к теме данной работы ее также можно назвать матрицей нетерпимости или же матрицей толерантности. Ее диагональные элементы единичны, остальные же c_j^i являются коэффициентами нетерпимости, - показывают во сколько раз конкуренция популяции i с популяцией j сильнее или наоборот, слабее конкуренции внутри самой популяции i. X^* - диагональная квадратная $n*n$ матрица, на диагонали которой стоят элементы $\frac{1}{X_i^*}$, где X_i^* - емкость среды для i-й популяции. Δ - линейный оператор, действующий из R_n в пространство линейных операторов над R_n так, что всякий вектор он переводит в диагональную матрицу

$$\vec{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_n \end{Vmatrix}.$$

Такой линейный оператор можно представить n-мерным трехранговым тензором

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 07-07-00071-а.

$$\left\|\delta^i_{j,k}\right\|,\ \delta^i_{j,k}=\begin{cases}1, & i=j=k,\\ 0, & в\quad противном\quad случае\end{cases}.$$

Наконец, A - квадратная $n*n$ матрица прироста. При рассмотрении биологических систем ее обычно считают диагональной, при изучении систем социальных, имеет смысл рассмотрение также и общего случая – различных вкладов в прирост социального слоя всех социальных слоев (тогда a^i_j – вклад i-го социального слоя в прирост j-го социального слоя).

Диапазон изменения коэффициентов нетерпимости матрицы C от $-\infty$ до ∞ будем делить на следующие области:

$(-\infty,0)$	$[0,1)$	1	$(1,\infty)$
сверхтолерантность	толерантность	отношение без предубеждений и предпочтений	нетерпимость

Поясним предложенные названия областей:

- Сверхтолерантность означает, что вместо конкуренции одна популяция помогает другой (из-за отрицательности коэффициента соответствующий член добавляется к производной, а не вычитается).
- Толерантность означает, что с данной чужой популяцией конкуренция слабее, чем внутри своей.
- Отношение без предубеждений и предпочтений означает одинаковую конкуренцию как внутри своей популяции, так и с данной.
- Наконец, нетерпимость означает более сильную конкуренцию с данной чужой популяцией, нежели внутри своей.

Оказывается поведение системы (1) в значительной мере зависит от соотношения между собой коэффициентов нетерпимости матрицы C. В работе [1] достаточно подробно был рассмотрен двумерный вариант системы (1). Заметим, что хотя исследования различных типов равновесия двумерных конкурентных систем известны со времен А. Лотки и В. Вольтера (например, очень обстоятельная монография [2]), в социальных системах к вопросу нахождения точек равновесия неизбежно добавляется вопрос об устойчивости этого равновесия относительно рефлектирующих воздействий со стороны популяций: естественно ожидать, что они будут пытаться улучшать свое положение путем изменения своих параметров, в первую очередь коэффициентов нетерпимости. Система (1) в этом случае рассматривался как многоматричная игра с непротивоположными интересами, управлениями сторон в которой являются коэффициенты матрицы C, а выигрышем сторон – их предельные численности. Поддержание стороной своих коэффициентов нетерпимости в выделенных выше диапазонах сверхтолерантности, толерантности, отношения без предубеждений и нетерпимости можно считать ее стратегиями в этой игре. Приведем результаты, полученные в [1] для двумерного варианта системы (1), которую запишем в следующем виде:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(1 - \frac{N}{N^*} - m\frac{M}{M^*}),$$
$$\frac{dM}{dt} = \beta M(1 - \frac{M}{M^*} - n\frac{N}{N^*})\,. \qquad (2)$$

Здесь N и M численности популяций, соответственно N^* и M^* их емкости среды, α и β - их коэффициенты прироста, и, наконец, n и m - их коэффициенты нетерпимости.

Сверхтолерантность – сверхтолерантность.

При $n,m < 0$, $nm < 1$ решение системы линейных уравнений $CX^*\vec{x} = \vec{e}$, точка

$$\overline{N} = N^*\frac{1-m}{1-nm}, \quad \overline{M} = M^*\frac{1-n}{1-nm}\,. \qquad (3)$$

является устойчивым узлом системы (2), в который она приходит на бесконечности при любых неотрицательных значениях коэффициентов прироста и начальных численностей популяций. При этом стратегия сверхтолерантности оказывается устойчивой относительно стремления сторон увеличить свой выигрыш – уменьшение коэффициента нетерпимости дает каждой стороне увеличение выигрыша, пока, наконец, при $nm \geq 1$ система (2) не преодолеет свой логистический характер и не начнет бесконечно расти на бесконечности.

Толерантность – толерантность.

Точка (3) по-прежнему устойчивый узел системы, в который она приходит на бесконечности при любых неотрицательных значениях коэффициентов прироста и начальных численностей популяций. Однако стратегия толерантности оказывается неустойчивой относительно стремления сторон увеличить свой выигрыш – уменьшение коэффициента нетерпимости дает каждой стороне уменьшение выигрыша, а увеличение нетерпимости – увеличения выигрыша. Эта неустойчивость стратегии либо вытолкнет обе стороны из области толерантности, либо побудит одну из них к некой жертве гамбитного типа, которой посвящен следующий пункт.

Сверхтолерантность – толерантность.

По-прежнему точка (3) – устойчивый узел системы. Толерантной стороне выгодно, а сверхтолерантной – невыгодно уменьшать свою нетерпимость. Поэтому данную ситуацию можно считать разрешением неустойчивости предыдущего пункта: одна из толерантных сторон предыдущего пункта идет на гамбитную жертву – выходит в область сверхтолерантности, соглашаясь тем самым на потенциальное уменьшение своего выигрыша. Однако, у нее есть веские основания надеяться что и другая сторона последует ее примеру, т. к. теперь этой другой стороне стало выгодно уменьшать свою нетерпимость, при этом первая сторона отыгрывает свою жертву – ей также выгодно уменьшение нетерпимости партнера.

Сверхтолерантность, или толерантность, или отношение без предубеждений – нетерпимость. Сверхтолерантность или толерантность – отношение без предубеждений или нетерпимость.

В этих ситуациях устойчивым узлом является точка емкости среды более нетерпимой популяции при нулевом значении численности более толерантной. При любых неотрицательных значениях коэффициентов прироста и начальных численностей популяций, более нетерпимая популяция остается, более толерантная –

погибает. При столкновении со стратегией нетерпимости стратегии отношения без предубеждений, толерантности и сверхтолерантности оказываются проигрышными. Отметим, что этот вывод противоречит расхожему мнению, что толерантность является панацеей в межкультурных отношениях.

Обоюдное отношение без предубеждений и предпочтений.

В этом случае предельные численности сторон на бесконечности зависят от начальных численностей и коэффициентов прироста, и являются решением системы уравнений:

$$N = N^* - \frac{N^*}{M^*} M \,, \; N^\beta = \frac{N_0^\beta}{M_0^\alpha} M^\alpha \,. \qquad (4)$$

С игровой точки зрения состояние обоюдного отношения без предубеждений неустойчиво: как следует из предыдущего пункта – каждой из сторон выгодно выйти в область нетерпимости.

Обоюдная нетерпимость.

В этом случае точка (3) является седлом, а точки емкостей среды сторон при нулевом значении численности другой стороны – устойчивыми узлами. К какому узлу придет траектория системы зависит от начальных условий, коэффициентов прироста и коэффициентов нетерпимости. В упрощенном случае $\alpha = \beta$ сепаратрисой седла (3) является прямая $N = \frac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)} M$. При $\alpha \neq \beta$ это более сложная кривая. Однако, при любых неотрицательных значениях коэффициентов прироста и начальных численностей популяций, если коэффициент нетерпимости одной из сторон не меняется, другая сторона может увеличить свой коэффициент нетерпимости настолько, что траектория системы на бесконечности придет именно в ее узел.

В свете изложенного выше, можно заключить, что в условиях обоюдной нетерпимости и обоюдного стремления сторон увеличить свою предельную численность стратегии, обеспечивающей стопроцентный успех, не существует, так как соперник может использовать тот же самый набор стратегий. Если же один из партнеров почему-то не меняет своих внешних переменных, против него очень эффективно, во-первых, увеличение нетерпимости и, во-вторых, если первое почему-либо невозможно (к примеру, из-за договорных, или законодательных, или культурных ограничений), столь же эффективным является вполне «политкорректное», т. е. на первый взгляд совсем не касающееся соперника сочетание повышения своей внутривидовой конкуренции (уменьшения емкости среды), с уменьшением коэффициента прироста своей популяции.

Поясним последнее утверждение примером. Пусть мы играем за сторону N. Пусть точка начальных значений лежит в первом квадранте фазовой плоскости, но не на оси M, тогда

- Если наша точка начальных значений $\{N, M\}$ попала внутрь области $N > N^* \frac{1-m}{1-mn}$, переходим к следующему пункту, если же нет – уменьшаем N^*, оставляя его при этом положительным, настолько, чтобы последнее неравенство выполнялось. Заметим, что в предметной области, это уменьшение емкости среды, скорее всего, будет не каким-то серьезным ущемлением интересов популяции, а всего лишь приведением ее амбиций (ожидания предельной численности) в определенное соответствие с ее настоящей численностью. При достаточно больших n, после такого уменьшения может даже выполняться $N^* >> N$.

- Если выполнено $0 \le M \le \overline{M} = M^* \frac{1-n}{1-mn}$, ничего более предпринимать не надо, траектория и так придет в узел N^*. Если же нет – выбираем N', $N > N' > N^* \frac{1-m}{1-mn}$ и уменьшаем α, оставляя его при этом положительным, настолько, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\alpha N(M-\overline{M})(m\frac{M}{M^*}+\frac{N}{N^*}-1)}{\beta\overline{M}(n\frac{N'}{N^*}+\frac{\overline{M}}{M^*}-1)} < N - N'.$$

Этого достаточно, чтобы траектория пришла в узел N^*.

Отметим, что приведенный выше алгоритм поведения противоречит расхожему мнению, что в случае обоюдной нетерпимости преимущество имеет сторона с большим коэффициентом прироста.

Заострим внимание на пользе увеличения внутривидовой конкуренции. Предположим, что ситуация еще хуже, чем обоюдная нетерпимость: пусть одну из сторон, что называется, едят поедом. Рассмотрим классические уравнения хищник – жертва:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \alpha N(1-\frac{M}{\overline{\overline{M}}}), \\ \frac{dM}{dt} &= \beta M(\frac{N}{\underline{N}}-1). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь N – численность популяции жертв, M – хищников, $\underline{N}$ – минимальное количество жертв, способное прокормить популяцию хищников, $\overline{\overline{M}}$ – максимальное количество хищников, которое способна выдержать популяция жертв. Как известно, точка $\{\underline{N},\overline{\overline{M}}\}$ является центром системы (5). Добавим теперь в первое из уравнений (5) логистический член с емкостью среды N^*:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(1-\frac{N}{N^*}-\frac{M}{\overline{\overline{M}}}).$$

Наш центр $\{\underline{N},\overline{\overline{M}}\}$ превращается при этом в устойчивый фокус и смещается в точку $\left\{\underline{N},\overline{\overline{M}}(1-\frac{\underline{N}}{N^*})\right\}$. Как только начинает выполняться соотношение $N^* \le \underline{N}$ – хищникам не остается места в нашей системе, они вымирают. Жертвы при этом ничего не теряют – их численность все равно колебалась в районе $\underline{N}$, а после вымирания хищников, быть может, можно и ослабить конкуренцию – увеличить N^*.

Вернемся к уравнениям конкуренции. Можно предложить внешнее воздействие на систему (2), которое исключает явление нетерпимости в ней. Пусть

$$\Omega = \left\{ N, M : \begin{matrix} 1 - \dfrac{N}{N^*} - m\dfrac{M}{M^*} > 0 \\ 1 - \dfrac{M}{M^*} - n\dfrac{N}{N^*} < 0 \end{matrix} \right\} \cup \left\{ N, M : \begin{matrix} 1 - \dfrac{N}{N^*} - m\dfrac{M}{M^*} < 0 \\ 1 - \dfrac{M}{M^*} - n\dfrac{N}{N^*} > 0 \end{matrix} \right\}.$$

Внешнее воздействие на систему заключается в «наказании» сторон за заход траектории в область Ω изменением знака их коэффициентов прироста на отрицательный по формулам:

$$\alpha(N,M) = \begin{cases} \alpha, & \{N,M\} \notin \Omega \\ -\alpha, & \{N,M\} \in \Omega \end{cases}, \quad \beta(N,M) = \begin{cases} \beta, & \{N,M\} \notin \Omega \\ -\beta, & \{N,M\} \in \Omega \end{cases}.$$

При таком воздействии точка (3) из седла превращается в устойчивый узел, а точки емкостей среды при нулевых численностях соперника – наоборот, в седла. При этом оставаться в области нетерпимости становится невыгодным и даже опасным – уменьшение нетерпимости одной из сторон увеличивает ее выигрыш и уменьшает выигрыш соперника, причем до нуля, если он не начнет также уменьшать свою нетерпимость. В этом случае состояние обоюдного отношения без предубеждений и предпочтений становится локально устойчивым относительно малых изменений сторонами своих коэффициентов нетерпимости с целью увеличения выигрыша.

Возвращаясь теперь к многомерной системе (1). Отметим, что уже в трехмерном ее варианте появляются виды равновесия системы, качественно отличающиеся от всех имеющихся в рассмотренном выше двумерном случае. Так, например, пусть имеются три популяции с численностями L, M и N. Причем L толерантна к M и нетерпима к N, M толерантна к N и нетерпима к L и, наконец, N толерантна к L и нетерпима к M. Тогда решение уравнения $CX^*\vec{x} = \vec{e}$ будет центром или фокусом, вокруг которого в фазовом пространстве вращается траектория системы, что как мы видели, совсем не характерно для систем уравнений конкуренции размерности меньше трех.

В заключение стоит отметить, что подобные простейшие динамические модели способны выявить тенденции изучаемых явлений, однако напрасно было бы ждать от них точных фактов на уровне прогноза. Жизнь намного богаче предложенной здесь абстракции. Автор, однако, надеется, что тенденции, выявленные данной моделью, могут оказаться полезными для развития языка последующего гуманитарного анализа проблемы межкультурного взаимодействия.

Литература

1. Бродский Ю.И. Толерантность и нетерпимость с точки зрения системной динамики и исследования операций, М.: ВЦ РАН, 2008, 53 с.
2. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций, Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 368 с.