УДК 519.9

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ В БАНАХОВЫХ РЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ю.И.Бродский

Введение

Исследование экстремальных задач в рефлексивных пространствах с помощью теорем интересно тем, что, как правило, хорошо известен вид отделяющих функционалов - элементов сопряженных пространств. Однако исследование таких задач с ограничениями типа неравенства осложняется тем, что вводимый в этих пространствах естественным образом конус неотрицательных элементов, как правило, не имеет внутренней точки.

В данной работе будет рассмотрена задача, выпуклая по функционалу и ограничениям типа неравенства и линейная по ограничениям типа равенства. Конус, частично упорядочивающий пространство, в котором рассматривается задача, не предполагается телесным. Основным результатом работы является теорема 1, устанавливающая необходимые условия экстремума, а также требования, накладываемые на функционал и операторы задачи, при которых эта теорема справедлива. Для полноты освещения вопроса приведена без доказательства известная в выпуклом программировании теорема 2, формулирующая достаточные условия экстремума.

Постановка задачи

Найти $\min \varphi(u)$, при ограничениях

$$\Phi(u) \leq 0, \quad \Theta(u) = 0$$

Здесь $\varphi(u)$ – выпуклый собственный функционал, заданный на E_1; E_1, E_2 и E_3 – рефлексивные банаховы пространства, E_2 частично упорядочено выпуклым замкнутым конусом K. Принадлежность конусу $v \in K$ будем обозначать, как $v \geqslant 0$; $\Phi(u)$ – выпуклый ограниченный оператор, действующий из E_1 в E_2; $\Theta(u)$ – ограниченный аффинный оператор, действующий из E_1 в E_3 (т. е. $\Theta(u) = \Theta_u u + w_0$, где Θ_u – линейный оператор, а $w_0 \in E_3$).

Определение I. Будем говорить, что оператор $P(u)$, действующий из E_1 в E_2, слабо полунепрерывен снизу по u, если из того, что u_n слабо сходится к u_0, следует

$$\underline{\lim_{n}} \left(v^*, P(u_n) - P(u_0) \right) \geqslant 0; \ \forall v^* \geqslant 0, v^* \in E_2^*.$$

Определение 2. Будем говорить, что для задачи выполнено условие Слейтера, если найдется $\bar{u} \in E_1$ такой, что $\Theta(\bar{u}) = 0$, а элемент $\bar{v} = \Phi(\bar{u})$ обладает следующим свойством:

$$v^* \bar{v} \leq -\gamma \| v^* \|, \ \gamma > 0; \ \forall v^* \geqslant 0, \ v^* \in E_2^*.$$

Требования к функционалу и операторам.

Будем предполагать, что функционал φ и операторы Φ и Θ обладают следующими свойствами:

1. $\varphi(u)$ и $\Phi(u)$ слабо полунепрерывны снизу по u. Например, это так, если они дифференцируемы в смысле Гато,

действительно, пусть u_n слабо сходится к u_0, тогда

$$\Phi(u_n)-\Phi(u_0)\geqslant \Phi_u(u_0)(u_n-u_0),$$

отсюда

$$\underline{\lim_n}(v,^*\Phi(u_n)-\Phi(u_0))\geqslant \lim_n(\Phi_u^*(u_0)v^*,u_n-u_0)=0,\ \forall v^*\geqslant 0.$$

2. θ_u ограничен и отображает E_1 на все E_3.

3. Для задачи выполнено условие Слейтера.

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема I. Пусть для задачи выполнены условия I–3, и элемент u_0 является ее решением, тогда найдутся элементы сопряженных пространств $v^*\in E_2^*;\ v^*\geqslant 0;\ w^*\in E_3^*$ такие, что

$$v^*\Phi(u_0)=0, \tag{I}$$

$$\varphi(u)+v^*\Phi(u)+w^*\theta(u)\geqslant\varphi(u_0),\ \forall u\in E_1. \tag{2}$$

Доказательство.

Пусть γ число такое, что $\gamma>\|u_0\|$. Рассмотрим следующее множество M: $M=\{\alpha,\beta,v,w:\ \exists u\in E_1,$

$$\alpha\geqslant\varphi(u)-\varphi(u_0),\ \beta\geqslant\|u\|-\gamma,\ v\geqslant\Phi(u),\ w=\theta(u)\}.$$

Нетрудно видеть, что M –выпуклое множество. Докажем его замкнутость. Пусть $\alpha_n\to\alpha_0$, $\beta_n\to\beta_0$, $v_n\to v_0$, $w_n\to w_0$; u_n - соответствующие элементы из E_1. Из сходимости, а следовательно, и ограниченности β_n следует ограниченность и u_n. Отсюда и из слабой компактности единичного шара в рефлексивных банаховых пространствах следует, что из u_n можно выделить подпоследовательность u_{n_k} слабо сходящуюся к некоторому $\tilde{u}$. Очевидно, $\beta_0 \geq \|\tilde{u}\| - \gamma$. Из слабой полунепрерывности снизу $\varphi(u)$ следует

$$\alpha_0 = \lim_k \alpha_{n_k} \geq \overline{\lim_k} (\varphi(u_{n_k}) - \varphi(u_0)) \geq \varphi(\tilde{u}) - \varphi(u_0).$$

Далее, из слабой полунепрерывности снизу $\Phi(u)$ заключаем

$$v^* v_0 = \lim_k v^* v_{n_k} \geq \overline{\lim_k}\, v^* \Phi(u_{n_k}) \geq v^* \Phi(\tilde{u}),\ \forall v^* \geq 0,$$

т. е. $v_0 = \Theta(\tilde{u})$. Из ограниченности Θ_u следует также $w_0 = \Theta(\tilde{u})$. Следовательно, $\alpha_0, \beta_0, v_0, w_0 \in M$, и замкнутость множества M доказана.

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ точка $(-\varepsilon, 0, 0, 0)$ не принадлежит выпуклому замкнутому множеству M и, следовательно, может быть отделена от него некоторым нетривиальным линейным функционалом $\alpha_\varepsilon^*, \beta_\varepsilon^*, v_\varepsilon^*, w_\varepsilon^*$, т. е.

$$\alpha_\varepsilon^* \alpha + \beta_\varepsilon^* \beta + v_\varepsilon^* v + w_\varepsilon^* w > -\alpha_\varepsilon^* \varepsilon,\ \forall \alpha, \beta, v, w \in M.$$

Очевидно, точки $(\alpha, 0, 0, 0)$ при $\alpha \geq 0$; $(0, \beta, 0, 0)$ при $\beta \geq \|u_0\| - \gamma$ и $(0, 0, v, 0)$ при $v \geq 0$ принадлежат M , так как в качестве $u \in E_1$ можно взять u_0. Отсюда следует, что $\alpha_\varepsilon^* \geq 0,\ v_\varepsilon^* \geq 0,\ \beta_\varepsilon^* = 0$ и что для любого $u \in E_1$ будет выполнено

$$\alpha_\varepsilon^* \varphi(u) + v_\varepsilon^* \Phi(u) + w_\varepsilon^* \Theta(u) \geq \alpha_\varepsilon^* (\varphi(u_0) - \varepsilon).$$

Так как выполнено условие Слейтера, можно считать, что $\alpha_\varepsilon^* > 0$, действительно, в противном случае выполнялось бы

$$v_\varepsilon^* \Phi(\bar{u}) + w_\varepsilon^* \Theta(\bar{u}) \leq -const\, \| v_\varepsilon^* \|,\ const > 0,$$

откуда $v_\varepsilon^* = 0$, но тогда $w_\varepsilon^* \theta(u) \geq 0$, $\forall u \in E_1$ противоречит тому, что θ_u отображает E_1 на все E_3 . Поэтому далее будем считать, что $\alpha_\varepsilon^* = 1$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $v_\varepsilon^* \geq 0$, w_ε^* такие, что

$$\varphi(u) + v_\varepsilon^* \Phi(u) + w_\varepsilon^* \theta(u) \geq \varphi(u_0) - \varepsilon, \ \forall u \in E_1. \quad (3)$$

Множество $\{v_\varepsilon^*\}$ при $\varepsilon \to 0$ ограничено, так как

$$\varphi(\bar{u}) + v_\varepsilon^* \Phi(\bar{u}) + w_\varepsilon^* \theta(\bar{u}) \leq const_1 - const_2 \| v_\varepsilon^* \|,$$

где $const_2 > 0$, и в случае неограниченности $\{v_\varepsilon^*\}$ нарушалось бы (3). Отсюда следует и ограниченность $\{w_\varepsilon^*\}$, в самом деле, каждому w_ε^* можно поставить в соответствие элемент $w_\varepsilon \in E_3$, $\| w_\varepsilon \| = 1$ такой, что $w_\varepsilon^* w_\varepsilon \leq -\| w_\varepsilon^* \| + \varepsilon$. Так как θ_u отображает E_1 на все E_3, найдется последовательность $u_\varepsilon \in E_1$, $\| u_\varepsilon \| \leq const$ таких, что $w_\varepsilon = \theta(u_\varepsilon)$, тогда на последовательности u_ε справедливо

$$\varphi(u_\varepsilon) + v_\varepsilon^* \Phi(u_\varepsilon) + w_\varepsilon^* \theta(u_\varepsilon) \leq const_1 - const_2 (\| w_\varepsilon^* \| - \varepsilon),$$

где $const_2 > 0$. Мы видим, что и в случае неограниченности $\{w_\varepsilon^*\}$ нарушалось бы (3).

Так как $\{v_\varepsilon^*\}$ и $\{w_\varepsilon^*\}$ ограничены и являются элементами рефлексивных банаховых пространств, можно считать, что при $\varepsilon \to 0$ они слабо сходятся к некоторым v^*, w^*. Переходя теперь в (3) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\varphi(u) + v^* \Phi(u) + w^* \theta(u) \geq \varphi(u_0), \ \forall u \in E_1,$$

т. е. соотношение (2). Подставляя в (2) $u = u_0$, получаем соотношение (I):

$$\upsilon^{*}\Phi(u_0)=0.$$

Теорема доказана.

Легко проверяется справедливость следующего обратного утверждения.

Теорема 2. Пусть для допустимого элемента задачи найдутся $\upsilon^{*}\in E_2^{*}$, $\upsilon^{*}\geqslant 0$, $\omega^{*}\in E_3^{*}$ такие, что выполнено (I)-(2), тогда u_0 - решение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

I. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления . М.: Наука, 1971.

2. Пшеничный Б.Н. Выпуклое программирование в нормированных пространствах //Кибернетика, 1965, №5, С.46-54.

3. Тер-Крикрров А.М. Оптимальное управление и математическая экономика. М.: Наука, 1977.