УДК 519.24

О ПРОБЛЕМЕ ФОРМИРОВАНИЯ ОБРАЗОВ

Ю. Н. Павловский

1. Рассматривается множество U некоторых объектов. Предполагается, что каждый объект x из множества U описывается значениями x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ атрибутов X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. В выполняемых здесь рассуждениях понятие "атрибут" будет синонимом понятия "множество". Например, объект — пациент. Одним из его атрибутов является "возраст". Каждому пациенту соответствует значение этого атрибута, которое есть натуральное целое число. Множество значений атрибута, т.е. множества "возраст", таким образом, есть множество натуральных целых чисел.

Когда множество U предъявлено, то часто возникает задача, которую естественно назвать задачей "структуризации" этого множества, а также построения на базе этой структуризации "образов" элементов из множества U. Если, например, оказалось, что возраст пациентов некоторой системы здравоохранения или больше 70 или меньше 10, то про такое множество пациентов говорят, что это — старики и дети. Тем самым на множестве возрастов пациентов введена структуризация, т.е. оно разбито на два непересекающихся подмножества и каждому значению возраста пациента поставлен в соответствие его образ (старик или ребенок) в зависимости от принадлежности этого значения тому или иному классу множества возрастов пациентов.

В описываемой задаче признаки, по которым следует выполнять структуризацию, не считаются заранее известными. Таким образом, выявление существования некоторой "структуры" в предъявленном множестве U объектов является частью задачи.

Обратим внимание на то, что в рассмотренном выше примере в основе разбиения множества пациентов на "стариков" и "детей" лежит линейная упорядоченность множества X возрастов пациентов, а также то, что определено отображение $f : X \to A$ этого множества в состоящее из четырех элементов множество $A = \{$дети, подростки, взрослые, старики$\}$, причем это отображение в некотором смысле согласовано с линейным порядком: отношение эквивалентности Q_f, ассоциированное с f, факторизует линейный порядок. Это означает, что структуризация множества U, в рассмотренном примере основана на том, что множество X значений атрибута "возраст" само снабжено некоторой "структурой" — системой взаимоотношений между своими элементами и, возможно, элементами некоторых других множеств.

2. Предлагаемый подход к формализации охарактеризованной задачи базируется на представлении о том, что понятие "структура" множества объектов должно быть инвариантным при таких преобразованиях соответствующего класса множеств (атрибутов), которые не

меняют заданные на них априори и известные нам взаимоотношения между их элементами. Для формализации описанной задачи предлагается совокупность X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ атрибутов, характеризующих объекты из множества U, и естественные взаимоотношения между значениями x_i атрибутов X_i, $i = 1, 2, ..., n$, трактовать как бурбаковский объект (X, σ). Здесь $X = (X_1, ..., X_n)$ — совокупность множеств X_i, $i = 1, 2, ..., n$, а σ — структура рода $\Sigma = (X; \sigma; A; \sigma \in S(X, A); R(X, A))$ на этих множествах [1]. Теперь множество U значений атрибутов объектов можно трактовать как часть множества X, снабженного структурой σ рода Σ.

Итак, в некоторой бурбаковской формальной системе BI (например, в "Теории множеств") задан бурбаковский Σ-объект (X, σ) и часть U множества X. Подчеркнем, что объект (X, σ) нам известен — это совокупность атрибутов, каждый из которых есть известное множество, вместе с известными взаимоотношениями между элементами этих множеств, задаваемыми структурой σ рода Σ. Известно, естественно, и множество U. Погружение изучаемых объектов в бурбаковскую систему делает доступным понятие об их изоморфизме и позволяет изучать свойства и оперировать характеристиками этих объектов, инвариантными при изоморфизмах. Существо предлагаемого подхода состоит в том, чтобы искомую "структуризацию" множества U считать декомпозиционной структурой этого множества, рассматриваемого как часть множества X, снабженного структурой σ рода Σ. В соответствии с подходом к проблеме декомпозиции математических объектов, развитом в [3], их декомпозиционные свойства (т. е. их способность в результате изоморфного преобразования “распадаться”, “разлагаться” на семейство более простых объектов), в частности, их декомпозиционные структуры (т. е. порождаемые исходной структурой взаимоотношения между различными декомпозициями) инвариантны при изоморфных преобразованиях этих объектов. Не переходя на формальный уровень рассуждений, поясним, что имеется в виду под инвариантными свойствами и инвариантными характеристиками объектов при изоморфизмах и охарактеризуем способ изучения инвариантных свойств объектов при помощи морфизмов.

3. Рассмотрим соотношение $C(N, Z, A)$. В этом соотношении фигурируют объекты трех типов: “независимые”, обозначенные буквой N, “зависимые”, обозначенные буквой Z и “вспомогательные”, обозначенные буквой A. Будет считаться, что для независимых и зависимых объектов определено понятие об изоморфизме, причем изоморфизмы $f\colon N \to N'$ независимых объектов индуцируют изоморфизмы $S(f)\colon Z \to Z'$ зависимых объектов. Что касается вспомогательных объектов, то они никак не связаны ни с независимыми ни с зависимыми объектами и, когда независимые и зависимые объекты подвергаются изоморфным преобразованиям, как это указано выше, вспомогательные объекты не меняются или, другими словами, подвергаются тождественным преобразованиям. Соотношение $C(N, Z, A)$ будет считаться

инвариантным при изоморфизмах, если имеет место

$$C(N, Z, A) \Longleftrightarrow C(N', Z', A).$$

Пусть теперь имеется объект $U(N, Z, A)$, который определяется при помощи независимых, зависимых и вспомогательных объектов. Будем считать, что известно множество $M_U(N, A)$, элементом которого является объект $U(N, Z, A)$, причем изоморфизмы $f : N \to N'$ независимых объектов индуцируют отображение $S_U(f)$ множества $M_U(N, A)$ в множество $M_U(N', A)$. Если имеет место $U(N', Z', A) = S_U(f)(U(N, Z, A))$, то объект $U(N, Z, A)$ будет считаться инвариантным при изоморфизмах.

Если $a : N \to N$, — автоморфизмы и, либо в образовании объекта U объекты Z не участвуют, либо автоморфизмы a индуцируют автоморфизмы $S_i(a)$ объектов Z_i, то из инвариантности объекта U при изоморфизмах вытекает $U(N, Z, A) = S_U(f)(U(N, Z, A))$. Таким образом, при указанных условиях инварианты изоморфизмов "переходят в себя" при автоморфизмах, т.е. не меняются при автоморфизмах, т.е. являются инвариантами автоморфизмов в "естественном" значении этого слова. Обратное, вообще говоря, не имеет место.

Один из способов изучения инвариантных характеристик некоторого класса математических объектов состоит в сопоставлении с каждыми двумя объектами из этого класса множества морфизмов.

Пусть $\Sigma = (X; \sigma; A; \sigma \in S(X, A); R(X, A))$ — некоторый род структуры в BI и x, s, y, t — буквы, отличные друг от друга, не являющиеся константами BI , не совпадающие с буквами X, σ и не фигурирующие в A. Пусть терм $M(x,\, s,\, y,\, t)$ в системе BI удовлетворяет следующим условиям:

- а) Соотношение "s есть структура рода Σ на x" $\wedge$"t есть структура рода Σ на y " влечет в BI соотношение "$M(x,\, s,\, y,\, t)$ есть часть множества всех отображений из x в y";

- б) Пусть $(E,\, \tau)$, $(E',\, \tau')$ — Σ-объекты в некоторой $BI' \geq BI$. Биекция f тогда и только тогда является изоморфизмом объекта $(E,\, \tau)$ в объект $(E',\, \tau')$, когда $f \in M(E,\, \tau,\, E',\, \tau')$ и $f^{-1} \in M(E,\, \tau,\, E',\, \tau')$;

- в) Пусть $(E,\, \tau)$, $(E',\, \tau')(E'',\, \tau'')$ — Σ-объекты в некоторой $BI' \geq BI$, $f : E \to E'$, $f' : E' \to E''$, $f \in M(E, \tau, E', \tau')$, $f' \in M(E',\, \tau',\, E'', \tau'')$. Тогда $f' \circ f \in M(E,\, \tau,\, E'', \tau'')$.

В этом случае говорят, что род структуры Σ снабжен M-морфизмами (в системе BI) или что имеется род структуры Σ с M-морфизмами или что терм M задает в $BI\Sigma$ морфизмы. Соотношение $f \in M(x,\, s,\, y,\, t)$ принято выражать словами "f есть M-морфизм Σ-объекта $(x,\, s)$ в Σ-объект $(y,\, t)$" (или просто "f есть M-морфизм", если ясно или несущественно о каких объектах идет речь или даже "f есть морфизм", если ясно или несущественно также, о каком терме M, удовлетворяющем перечисленным выше условиям, идет речь), а терм $M(E,\, \tau,\, E', \tau')$ (здесь $(E,\, \tau)$, $(E',\, \tau')$ — Σ-объекты в некоторой $BI' \geq BI$) принято называть множеством M-морфизмов (или просто множеством морфизмов, если очевидно или несущественно, о каком терме M идет речь), из Σ-объекта $(E,\, \tau)$ в Σ-объект $(E',\, \tau')$.

Ценность множеств морфизмов состоит в том, что в этих множествах содержится как бы “выжимка” из некоторых (каких именно — зависит от того, как введены морфизмы) инвариантных свойств рассматриваемого класса объектов, позволяющая изучать их, не интересуясь тем, что представляет собой этот объект. Такая интуитивная трактовка множеств морфизмов основана на их свойствах, выражаемых приводимыми ниже утверждениями.

Предложение 1. *Пусть* $(X,\, \sigma)$, $(Y,\, \omega)$ — Σ-*объекты.* $a : (X, \sigma) \to (X', \sigma')$, $b : (Y, \omega) \to (Y', \omega')$ — *изоморфизмы,* $f' = b \circ f \circ a^{-1}$. *Тогда* $f \in M(X,\, \sigma,\, Y,\, \omega) \Longleftrightarrow f' \in M(X',\, \sigma',\, Y',\, \omega')$.

В самом деле, в силу свойств б) и в) морфизмов отображение $f' = b \circ f \circ a^{-1}$ является морфизмом. Кроме того, формула $f' = b \circ f \circ a^{-1}$ определяет отображение $S(a, b) : M(X,\, \sigma,\, Y,\, \omega) \to M(X',\, \sigma',\, Y',\, \omega')$, а формула $f = b^{-1} \circ f' \circ a$ определяет отображение $\bar{S}(a, b)$: $M(X', \sigma', Y', \omega') \to M(X,\, \sigma,\, Y,\, \omega)$, причем $S(a, b) \circ \bar{S}(a, b) = id_{M(X, \sigma, Y, \omega)}$ и $\bar{S}(a, b) \circ S(a, b) = id_{M(X', \sigma', Y', \omega')}$. Отсюда вытекает, что $S(a, b)$ — биекция, а $\bar{S}(a, b)$ — обратная биекция. Таким образом, $f \in M(X,\, \sigma,\, Y,\, \omega) \Longleftrightarrow f' \in M(X',\, \sigma',\, Y',\, \omega')$.

Пользуясь введенным выше представлением о соотношениях, инвариантных при изоморфизмах, доказанное утверждение можно сформулировать так: “ соотношение $f \in M(X,\,\sigma,\,Y,\,\omega)$ инвариантно при изоморфизмах, если считать, что в этом соотношении объекты (X,σ), $(Y,\,\omega)$ независимыми, а объект f — зависимым”. В качестве другой краткой формулировки предложения 1 можно взять следующую: “объект $M(X,\,\sigma,\,Y,\,\omega)$ инвариантен при изоморфизмах”.

Предложение 2. *Пусть* $f : (X,\sigma) \to (Y,\omega)$ — *морфизм* Σ-*объекта* (X,σ) *в* Σ-*объект* (Y,ω), *который обладает свойством: для всякого* Σ-*объекта* (Z,ν) *и всякого отображения* $g : Z \to X$, *условие “*$f \circ g$ *— морфизм” влечет в* BI *условие “*g *— морфизм”. Пусть* $a : (X,\sigma) \to (X',\sigma')$ *и* $b : (Y,\omega) \to (Y',\omega')$ *— изоморфизмы. Тогда морфизм* $f' = b \circ f \circ a^{-1} : (X',\sigma') \to (Y',\omega')$ *обладает таким же свойством, т. е. для всякого* Σ-*объекта* (Z,ν) *и всякого отображения* $g : Z \to X'$, *условие “*$f' \circ g$ *— морфизм” влечет в* BI *условие “*g *— морфизм”.*

Доказательство сформулированного утверждения основано на свойствах б) и в) морфизмов и практически повторяет доказательство предложения 1.

Предложение 2 означает, что соотношение $f \in M(X,\,\sigma,\,Y,\,\omega)$ и для всякого Σ-объекта (Z,ν) и всякого отображения $g : Z \to X$, условие “$f \circ g \in M(Z,\,\nu,\,Y,\,\omega)$” влечет в BI условие “$g \in M(Z,\,\nu,\,X,\,\sigma)$” является инвариантным при изоморфизмах, что можно считать краткой формулировкой этого предложения.

Из предложений 1 и 2 следует, что соотношения

- “семейство $((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I}$ является P - декомпозицией (F - декомпозицией) объекта (E,τ)”,
- “Σ-объект $(\tilde{X},\tilde{\sigma})$ ((Σ-объект $(\bar{X},\bar{\sigma})$) является P-объектом (F-объектом) Σ-объекта (X,σ)”,
- “$(\sum\limits_{i\in I}^{c} E_i,\tau^c)$ $(\prod\limits_{i\in I}^{d} E_i,\tau^d)$, является свободной суммой (декартовым произведением) семейства Σ-объектов $((E_i,\tau_i))_{i\in I}$”.

являются инвариантными при изоморфизмах. Каждое из этих трех утверждений можно считать краткой формулировкой некоторого строгого утверждения. Например, второму из них в части, касающейся P-объектов, соответствует следующее строгое утверждение:

Пусть Σ-объект $(\tilde{X},\tilde{\sigma})$ является P-объектом Σ-объекта (X,σ), $a : (X,\sigma) \to (X',\sigma')$ — автоморфизм. Тогда Σ-объект $(a(\tilde{X}), S(a,id_A)(\tilde{\sigma}))$ является P-объектом Σ-объекта (X',σ').

Аналогично формулируются строгие утверждения, соответствующие всем остальным приведенным выше утверждениям.

То же самое касается декомпозиций над подчиненными структурами [5]. Именно, соотношения

- “семейство $((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I}$ является P - декомпозицией (F - декомпозицией) объекта (E,τ) над подчиненной структурой t”,
- “Σ-объект $(\tilde{X},\tilde{\sigma})$ ((Σ-объект $(\bar{X},\bar{\sigma})$) является P-объектом (F-объектом) Σ-объекта (X,σ) над подчиненной структурой $\tilde{t}$ $(\bar{t})$”,

- “$(\sum\limits_{i\in I}^{c} E_i, \tau^c)$ $(\prod\limits_{i\in I}^{d} E_i, \tau^d)$, является свободной суммой (декартовым произведением) семейства Σ-объектов $((E_i,\tau_i))_{i\in I}$ над подчиненной структурой t^c (t^d)”.

являются инвариантными при изоморфизмах.

Инвариантными при изоморфизмах являются также множество $P(X, \sigma)$ подобъектов Σ-объекта (X, σ) и множество $F(X, \sigma)$ его F-объектов над подчиненными структурами.

4. Возвратимся к обсуждению проблемы структуризации множества U, которое считается частью множества X, снабженного структурой σ рода Σ. Введем наряду с родом структуры Σ род структуры $\Sigma' = (X; \sigma, U; A; \sigma \in S(X, A) \wedge U \in \beta(X); R(X, A))$. Σ'-объекты — это тройки (X, σ, U), причем U в соответствии с типизацией рода структуры Σ' является частью множества X. Предположим, что род структуры Σ в бурбаковской системе BI снабжен морфизмами, которые будем далее называть Σ-морфизмами. Снабдим род структуры Σ' в BI Σ'-морфизмами следующим образом. Σ'-морфизмом Σ'-объекта (X, σ, U) в Σ'-объект (X', σ', U') будем считать Σ-морфизм $f : X \to X'$ Σ-объекта (X, σ) в Σ-объект (X', σ'), удовлетворяющий условию $f(U) \subset U'$. Каждый Σ'-морфизм является очевидным образом Σ-морфизмом.

Таким образом, Σ-объект (X, σ) является подчиненным по отношению к Σ'-объекту (X, σ, U) [4, 5]. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 3. *Для того чтобы семейство* $((X_i,\sigma_i, U_i),f_i)_{i\in I}$

Σ'-объектов являлось P - декомпозицией (F - декомпозицией) Σ'-объекта (X,σ,U) над подчиненной структурой σ рода Σ, необходимо и достаточно, чтобы все отображения f_i были Σ'-морфизмами и выполнялось условие $\bigcup\limits_{i\in I} f_i(U_i) = U$ $(\bigcap\limits_{i\in I} f_i^{-1}(U_i) = U)$

Достаточность сформулированных условий как для Р- так и для F-декомпозиций очевидна. Пусть условие условие $\bigcup\limits_{i\in I} f_i(U_i) = U$ не имеет место, т.е. существует элемент множества U, не принадлежащий $\bigcup\limits_{i\in I} f_i(U_i)$. Рассмотрим Σ'-объект $(X,\sigma,\bigcup\limits_{i\in I} f_i(U_i))$ и отображение $id_X : (X,\sigma,U)\rightarrow(X,\sigma,\bigcup\limits_{i\in I} f_i(U_i))$. Это отображение не является Σ'-морфизмом, так как $\bigcup\limits_{i\in I} f_i(U_i) \neq U$. В то же время, все отображения $id_X \circ f_i$, очевидно, — морфизмы. Аналогично доказывается необходимость сформулированного утверждения для F-декомпозиций.

Предложение 3 дает возможность сформулировать схемы решения поставленной задачи о структуризации заданного множества U объектов и об определении на базе этой сруктуризации образов объектов. Изложим две такие схемы. В основе первой из них лежит положение о том, что “образ” объекта u из множества U должен быть связан с разбиением множества U на классы по некоторому отношению эквивалентности, а также предположение о том, что пересечение P-множеств Σ-объекта (X,σ) есть P-множество. Рассмотрим все множество $M(U)$ отношений эквивалентности на множестве U. Пусть Q — некоторое отношение, $(U_i)_{i\in I}$ — разбиение множества U на классы эквивалентности по отношению Q. Каждому множеству U_i поставим в соответствие наименьший P-объект (X_i,σ_i) Σ-объекта (X,σ) такой, что $U_i \subset X_i$. В силу сделанного выше предположения такой всегда существует. Из предложения 3 вытекает, что семейство $((X_i,\sigma_i, U_i)_{i\in I}$ является P - декомпозицией объекта Σ'-объекта (X, σ, U) над подчиненной структурой σ. Может случиться так, что построенная P-декомпозиция является тривиальной, т.е. семейство P-объектов в этой P-декомпозиции состоит из единственного объекта, которым является сам объект (X, σ, U). Множество отношений эквивалентности Q из множества $M(U)$, которым соответствует нетривиальная P-декомпозиция D, обозначим через $PP(X, \sigma, U)$. Каждое отношение Q из $PP(X, \sigma, U)$ можно считать искомой структуризацией множества U, а классы эквивалентности по этому отношению — образами тех элементов множества U, которые принадлежат этим классам. В основе каждой такой структуризации лежит инвариантное при изоморфизмах соотношение $C(Q, M(U), D, (X, \sigma, U))$, в качестве краткой формулировки которого можно принять словосочетание:

"отношение эквивалентности Q из множества $M(U)$ порождает нетривиальную P-декомпозицию $D=$ $((X_i, \sigma_i, U_i), \omega_i)_{i\in I}$ Σ'-объекта (X, σ, U) над подчиненной структурой σ, реализуемую с помощью семейства подобъектов этого объекта и соответствующих канонических инъекций".

Здесь возможны две крайние ситуации. Первая из них состоит в том, что в множестве $M(U)$ нет отношений эквивалентности Q, которые порождают нетривиальную P-декомпозицию D Σ'-объекта (X, σ, U) над подчиненной структурой σ, т.е. множество $PP(X, \sigma, U)$ пусто. Это означает отсутствие искомой структуризации в рамках принятого подхода при выбранных морфизмах и постулированном роде структуры Σ. В этом случае нужно или по другому ввести морфизмы [2], или ослабить род структуры Σ [1].

Другая крайность состоит в том, что множество $PP(X, \sigma, U)$ слишком большое. В этом случае возникает задача выбора из возможных структуризаций множества U, определяемых множеством $PP(X, \sigma, U)$, некоторого более узкого подмножества. Это можно сделать посредством усиления инвариантного при изоморфизмах соотношения $C(Q, D, X, \sigma, U)$, которое при рассматриваемом подходе лежит в основе способа структуризации множества U. Например, соотношение $C'(Q, D, X, \sigma, U)$:

"отношение эквивалентности Q из множества $M(U)$ порождает нетривиальную P-декомпозицию $D=$ $((X_i, \sigma_i, U_i), \omega_i)_{i \in I}$ Σ'-объекта (X, σ, U) над подчиненной структурой σ, реализуемую с помощью семейства подобъектов этого объекта и соответствующих канонических инъекций такую, что всякое P-множество $\tilde{X}_i$ в этой декомпозиции является классом эквивалентности по некоторому факторизующему Σ'-объект (X, σ, U) над подчиненной структурой σ отношению эквивалентности Q_i"

влечет соотношение $C(Q, D, X, \sigma, U)$ и, значит, ему соответствует некоторое подмножество $\tilde{PP}(X, \sigma, U)$ в множестве $PP(X, \sigma, U)$. В свою очередь, соотношение $C''(Q, D, X, \sigma, U)$:

"отношение эквивалентности Q из множества $M(U)$ порождает нетривиальную P-декомпозицию $D=$ $((X_i, \sigma_i, U_i), \omega_i)_{i \in I}$ Σ'-объекта (X, σ, U) над подчиненной структурой σ, реализуемую с помощью семейства подобъектов этого объекта и соответствующих канонических инъекций такую, что всякое P-множество $\tilde{X}_i$ является классом эквивалентности по некоторому одному и тому же для всех i факторизующему Σ'-объект (X, σ, U) над подчиненной структурой σ отношению эквивалентности Q"

влечет соотношение $C'(Q, D, X, \sigma, U)$ и, значит, ему соответствует некоторое подмножество в множестве $\tilde{PP}(X, \sigma, U)$.

Примеры.

1. Пусть X — линейное векторное пространство размерности 2 над полем действительных чисел, U — множество точек в этом пространстве, не сводящееся к единственной точке (0,0), часть которых лежит на некоторой проходящей через начало координат прямой X_1, другая часть — на не совпадающей с ней такой же прямой X_2. В этом случае множество $PP(X, \sigma, U)$ состоит в точности из одного элемента Q. Если точка (0,0) не является элементом множества U, фактор-множество $\bar{U} = U/Q$ состоит из двух классов эквивалентности — $X_1 \cup U$, $X_2 \cup U$, т.е. в этом случае у точек из U имеется лишь два образа. В противном случае фактор-множество $\bar{U}$ состоит из трех классов эквивалентности, поскольку точка (0,0) является классом эквивалентности.

2. В основе структуризации множества U пациентов на "стариков" и "детей"

в примере, который рассматривался в п.1., лежит соотношение $C''(Q, D, X, \sigma, U)$. В этом случае Σ-объект (X, σ) есть множество X возрастов пациентов, со структурой σ рода Σ, которая есть линейный порядок и отображение из X во вспомогательное множество $A = \{$дети, подростки, взрослые, старики$\}$. Σ-объект (X, σ) факторизуется по отношению эквивалентности, ассоциированному с этим отображением. На двух фактор-множествах по этому отношению — на том, которому принадлежат старики и на том, которому принадлежат дети, Σ-объект (X, σ) генерирует подобъекты (X_1, σ_1), (X_2, σ_2) такие, что Σ'-объекты $(X_1, \sigma_1, X_1 \cap U)$, $(X_2, \sigma_2, X_2 \cap U)$ образуют P-декомпозицию Σ'-объекта (X, σ, U) над подчиненной структурой σ.

5. Изложим другой подход к формированию образов объектов на основе декомопозиции. Этот подход основан на предположении о том, что для любых двух Σ-объектов (X, σ) и (X', σ') (в любой бурбаковской системе $BI' \geq BI$), все Σ-морфизмы из Σ-объекта (X, σ) в Σ-объект (X', σ'), являются HPF-морфизмами [3]. В этом случае существует биективное соответствие между множеством $P(X, \sigma, U)$ P-объектов Σ'-объекта (X, σ, U) над соответствующими подчиненными структурами и множеством $P(X, \sigma)$ P-объектов Σ-объекта (X, σ): в силу HPF-свойства каждому P-объекту $(\tilde{X},\tilde{\sigma}, \tilde{U})$ Σ'-объекта (X, σ, U) над подчиненной структурой σ соответствует P-объект $(\tilde{X},\tilde{\sigma})$ Σ-объекта (X, σ) и обратно, каждому P-объекту $(\tilde{X},\tilde{\sigma})$ Σ-объекта (X, σ) соответствует в силу предложения 3 единственным образом P-объект $(\tilde{X},\tilde{\sigma}, \tilde{X} \cap U)$ Σ'-объекта (X, σ, U). Пусть $((\tilde{X}_i,\tilde{\sigma}_i))_{i \in I}$— такое конечное семейство элементов множества $P(X, \sigma)$, что семейство $((\tilde{X}_i,\tilde{\sigma}_i,\tilde{U}_i),\omega_i)_{i \in I}$, где $U_i = X_i \cap U$, является простой P-декомпозицией для (X, σ, U) над подчи-

ненной структурой σ. Здесь словосочетание "простая P-декомпозиция" означает, что если $I' \subset I \wedge I' \neq I$, то семейство $((\tilde{X}_i, \tilde{\sigma}_i, \tilde{U}_i))_{i \in I'}$ уже не является P-декомпозицией для (X, σ, U) над подчиненной структурой σ. Обозначим через $PD(X, \sigma, U)$ множество таких семейств. На множестве $PD(X, \sigma, U)$ вводится отношение $SPD(X, \sigma, U)$ предшествования: семейство $D = ((\tilde{X}_i, \tilde{\sigma}_i, \tilde{U}_i))_{i \in I}$ из $PD(X, \sigma, U)$ считается предшествующим семейству $D' = ((\tilde{X}'_j, \tilde{\sigma}'_j, \tilde{U}'_j))_{i \in J}$ из $PD(X, \sigma, U)$, если для всякого $i \in I$ найдется такое $j \in J$, что $\tilde{X}_i \subset \tilde{X}'_j$. При сделанных предположениях имеет место следующее утверждение.

Предложение 4. *Отношение $SPD(X, \sigma, U)$ на множестве $PD(X, \sigma, U)$ является отношением частичного порядка с наибольшим элементом.*

Рефлексивность и транзитивность отношения $SPD(X, \sigma, U)$ очевидны. Пусть для элементов D и D' из $PD(X, \sigma, U)$ имеет место $D \leq D' \wedge D' \leq D$. Пусть $(\tilde{X}_{i_1}, \tilde{\sigma}_{i_1})$ некоторый P-объект из D. Так как $D \leq D'$, то для i_1 из I существует j_1 из J такое, что $\tilde{X}_{i_1} \subset \tilde{X}_{j1}'$. Так как $D' \leq D$, то для j_1 из J существует i_2 из I такое, что $\tilde{X}'_{j_1} \subset \tilde{X}_{i2}$. Значит $\tilde{X}_{i_1} \subset \tilde{X}_{i2}$. Если $\tilde{X}_{i_1} \neq \tilde{X}_{i_2}$, то, поскольку Σ-морфизмы являются HPF-морфизмами, P-объект $(\tilde{X}_{i_1}, \tilde{\sigma}_{i_1})$ можно удалить из D и после этого D останется P-декомпозицией. Это противоречит сделанному предположению о простоте P-декомпозиций в множестве $PD(X, \sigma, U)$. Таким образом, $\tilde{X}_{i_1} = \tilde{X}_{i_2}$ и, значит, $\tilde{X}_{i_1} = \tilde{X}'_{j_1}$. Итак, для всякого $i \in I$ найдется такое $j \in J$, что $\tilde{X}_i = \tilde{X}'_j$. Точно также доказывается, что для всякого $j \in J$ найдется такое $i \in I$, что $\tilde{X}'_j = \tilde{X}_i$. Это означает, что соотношение $D \leq D' \wedge D' \leq D$ влечет $D = D'$.

В качестве искомой "структуры" множества U можно взять структуру $SPD(X, \sigma, U)$ частичного порядка на множестве $PD(X, \sigma, U)$. Что касается "образа" элемента u из множества U, то предлагаемый поход не дает возможности определить его однозначно. Пусть $D = ((\tilde{X}_i, \tilde{\sigma}_i))_{i \in I}$ элемент из $PD(X, \sigma, U)$. Образом элемента u, определяемым этим элементом, будем считать пару $(D, \tilde{E})$, где $\tilde{E}$ такой P-объект $(\tilde{X}_{i(u)}, \tilde{\sigma}_{i(u)})$ из D, для которого имеет место $u \in \tilde{X}$. Можно ввести понятие о "подробности" ("грубости") образа и определить меру этой подробности. Самые грубые образы соответствуют тем элементам D множества $PD(X, \sigma, U)$, которые "наиболее близки" к максимальному элементу $D_{max} = ((X, \sigma, U), id_X)$ этого множества, т.е. для которых не существует элемента D' из $PD(X, \sigma, U)$, такого, что $D \leq D' \leq D_{max}$. Мерой подробности этих образов будем считать число 1. Мера подробности 2 приписывается образам, которые соответствуют таким элементам D из $PD(X, \sigma, U)$, для которых существует элемента D' из $PD(X, \sigma, U)$, такой, что $D \leq D' \leq D_{max}$, но не существует элемент D'' из $PD(X, \sigma, U)$, такого, что $D \leq D' \leq D'' \leq D_{max}$ и так далее.

Примеры.

3. Рассмотрим ту же самую ситуацию, которая имела место в примере 1, т.е. X — линейное векторное пространство размерности 2 над полем действительных чисел, U — множество точек в этом пространстве, не сводящееся к единственной точке (0,0), часть которых лежит на некоторой проходящей через начало координат

прямой X_1, другая часть — на не совпадающей с ней такой же прямой X_2. В этом случае множество $PD(X, \sigma, U)$ (аналогично тому как это было в примере 1), состоит в точности из одного элемента. Таковым является совокупность двух P-объектов $(X_1, \sigma_1, X_1 \cap U)$, $(X_2, \sigma_2, X_2 \cap U)$ Σ'-объекта (X, σ, U). Образ элемента из U, являющегося элементом прямой X_1, есть подобъект $(X_1, \sigma_1, X_1 \cap U)$, образ элемента из U, являющегося элементом прямой X_2, есть подобъект $(X_2, \sigma_2, X_2 \cap U)$. Точка (0,0), если она принадлежит множеству U "имеет" оба эти образа.

4. Рассмотрим конечное множество U, $Card(U) = N$, элементов u конечномерного линейного векторного пространства X над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, $dim(X) = n$. Элемент u множества U, таким образом, можно считать набором $u^1, ..., u^n$ действительных чисел — его координат в некотором фиксированном базисе. Обозначим структуру линейного векторного пространства на X через σ. Таким образом, Σ-объект есть (X, σ), Σ'-объект есть (X, σ, U). В качестве Σ-морфизмов возьмем линейные отображения. Каждый ненулевой элемент u множества U принадлежит одномерному подпространству $(\tilde{X}(u), \tilde{\sigma}(u))$, где $\tilde{X}(u) = \{\alpha u \mid \alpha \in \Re\}$. Пусть $(\tilde{X}(u_1), \tilde{\sigma}(u_1)), ..., (\tilde{X}(u_m), \tilde{\sigma}(u_m))$ — попарно различные одномерные подпространства, такие, что для всякого $i = 1, 2, ..., m$ $U_i = X(u_i) \cap U \neq \emptyset$ и объединение всех множеств U_i есть U. Тогда семейство $((\tilde{X}(u_1), \tilde{\sigma}(u_1), U_1), ..., (\tilde{X}(u_m), \tilde{\sigma}(u_m), U_m))$, являющееся P-декомпозицией Σ'-объекта, есть (X, σ, U) над подчиненной структурой σ линейного векторного пространства и, значит, это семейство является элементом множества $PD(X, \sigma, U)$ объекта (X, σ, U), причем наименьшим элементом относительно частичного порядка, определяемого на $PD(X, \sigma, U)$ структурой $SPD(X, \sigma, U)$. Значит образы элементов множества U, соответствующие рассматриваемой декомпозиции, являются наиболее подробными.

То, в какой мере множество U действительно структуризовано на этом уровне подробности зависит от соотношений чисел m и N. Если $m \ll N$ то множество U на "одномерном уровне" структуризовано "хорошо". Если $m = N$, то оно на этом уровне не структурировано вовсе. Перенумеруем некоторым образом элементы множества U. Тогда $U = (u_i)_{i=1,2,...,N}$. Очевидно, что объект $(PD(X,\sigma,U), SPD(X,\sigma,U))$ в рассматриваемом случае полностью характеризует отображение I из множества $\beta(\{1,2,...,N\})$ частей множества $\{1,2,...,N\}$ в множество натуральных чисел, меньших или равных n. Значение отображения I на некоторой части $\{i_1, i_2, ..., i_r\}$ есть ранг матрицы $\| u_i^k \|_{i=i_1,...,i_r}^{k=1,...,n}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 96-01-00556.

Литература

[1] Б у р б а к и Н. *Теория множеств.* М.: Мир, 1965. 455 с.

[2] П а в л о в с к и й Ю.Н. *О естественных морфизмах.* В кн. Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 1996. С.3-13.

[3] П а в л о в с к и й Ю.Н., С м и р н о в а Т.Г. *Проблема декомпозиции в математическом моделировании.* М. Фазис, 1998. 272 с.

[4] П а в л о в с к и й Ю.Н. *О подобъектах дифференцируемых многообразий.* В кн. Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 1997. С.3-21.

[5] П а в л о в с к и й Ю.Н. *О декомпозициях снабженных структурой множеств над подчиненными структурами* //Доклады РАН, 1997.-Т.357, N 5. С.589-591.