УДК 519.4

О ДЕКОМПОЗИЦИОННОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ОБРАЗОВ ПОДМНОЖЕСТВ СНАБЖЕННЫХ СТРУКТУРОЙ МНОЖЕСТВ

Чл.-корр. РАН Ю.Н. Павловский

Доклады РАН, 2000, т. 374, 4, с. 450-452

1. Через $\widetilde{X}$ обозначется часть множества X, через $\omega : \widetilde{X} \to X$ — соответствующая каноническая инъекция, через $Card(X)$ - мощность X, через $\beta(X)$ — его множество частей. Пусть $\mathbf{B}$ — бурбаковская формальная система, более сильная, чем бурбаковская теория множеств [1], [2]. Последовательность вида $\Sigma = (X;\sigma;A;\sigma \subset S(X,A));R(X,\sigma)$ обозначает род структуры в $\mathbf{B}$. Здесь X — базисные множества, σ — родовые константы, A — вспомогательные множества; $S(X,A)$ — множества, полученные из множеств X,A операциями прямого произведения и образования множества частей, причем S — схемы образования этих множеств, указывающие с какими множествами и в какой последовательности выполняются эти операции [2]. В последовательности Σ, далее, $R(X,\sigma)$ — соотношение, которое должно быть по терминологии [1] биективно переносимо в $\mathbf{B}$ относительно типизации $\Sigma_0 = (X;\sigma;A;\sigma \subset S(X,A))$ рода структуры Σ (Σ_0 - инвариантно в $\mathbf{B}$ по терминологии [3]). Это означает, что из $\sigma \subset S(X,A)$ и "$f : X \to X'$ — биекция" в $\mathbf{B}$ должно следовать $R(X,\sigma) \Leftrightarrow R(X',\sigma')$, где $\sigma' = S(f,id_A)(\sigma)$, а $S(f,id_A)$ — распространение отображения f и тождественных отображений множеств A по схеме S до отображения

из множества $S(X,A)$ в множество $S(X',A)$ [2, стр.54]. Через $\mathbf{B}\Sigma$ обозначается бурбаковская система, получающаяся из $\mathbf{B}$ прибавлением к ее явным аксиомам соотношений $\sigma \subset S(X,A))$ и $R(X,\sigma)$. В системе $\mathbf{B}\Sigma$ совокупность (X,σ) называется Σ-объектом, а изоморфизм одного Σ-объекта в другой — Σ-изоморфизмом (в $\mathbf{B}$).

Для дальнейшего изложения необходимы понятия о переносимых термах и соотношениях [1, стр.281-297]. Здесь используется терминология [3]. Терм $V(X,\sigma)$ системы $\mathbf{B}\Sigma$ имеет в $\mathbf{B}\Sigma$ тип $S_V(X,A)$, если $V(X,\sigma) \in S_V(X,A)$ — теорема в $\mathbf{B}\Sigma$. Пусть терм $V(X,\sigma,U)$ имеет в $\mathbf{B}\Sigma$ тип $S_V(X,A)$. Этот терм называется Σ-инвариантным в $\mathbf{B}$ (при изоморфизмах) если из "$f : X \to X'$ — биекция" в $\mathbf{B}\Sigma$ следует соотношение $V(X',\sigma') = S_V(f,id_A)(V(X,\sigma))$, где $\sigma' = S(f,id_A)(\sigma)$. Далее, если тип терма очевиден, он не будет указываться.

Соотношение $I(X,\sigma)$ системы $\mathbf{B}\Sigma$ называется Σ-инвариантным (в $\mathbf{B}$), если из "$f : X \to X'$ — биекция" в $\mathbf{B}\Sigma$ следует $I(X,\sigma) \Leftrightarrow I(X',\sigma'))$.

2. Пусть (X,σ) — Σ-объект в $\mathbf{B}\Sigma$, $U \subset X$. Образуем род структуры Σ', присоединив к Σ родовую константу U и типизацию $U \subset X$. Σ'-объекты в $\mathbf{B}\Sigma'$ имеют вид (X,σ,U). Пусть $I(X,\sigma,U)$ — Σ'-инвариантное соотношение, $f : X \to X'$ — биекция и $\sigma' = S(f,id_A)(\sigma)$. Поскольку соотношение $R(X,\sigma)$ является Σ_0-инвариантным в $\mathbf{B}$, то Σ-объект (X,σ) изоморфен объекту Σ-объекту (X',σ'). Таким образом, Σ'-инвариантное при изоморфизмах соотношение $I(X,\sigma,U)$ есть свойство подмножества U множества X , которое "сохраняется", при Σ - изоморфизмах (в частности, при автоморфизмах) Σ - объекта (X,σ). Поэтому Σ'-инвариантные соотношения будут называться Σ-образами

подмножества U первого уровня или простыми Σ-образами. Одним из способов формирования как простых так и иерархических (см. далее) Σ-образов является изучение декомпозиций Σ'-объекта (X, σ, U) над объектом Σ-объектом (X, σ). Конкретизируем общие понятия о такой декомпозиции [2, раздел 2.6.5, стр. 103] для рассматриваемого случая.

Пусть род структуры Σ в **B** снабжен морфизмами [1, стр.255], которые будут называться Σ-морфизмами. Снабдим род структуры Σ'-морфизмами следующим образом: $f : X \to X'$ есть Σ'-морфизм объекта (X, σ, U) в объект (X', σ', U') тогда и только тогда, когда f есть Σ-морфизм и $f(U) \subset U'$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $(X_i, \sigma_i, U_i)_{i \in I}$ — семейство Σ'-объектов, (X, σ, U) - Σ'-объект, $f_i : X_i \to X$ $\left(f_i = X \to X_i\right)$ для всякого i из I — Σ'-морфизмы. Если для любого Σ'-объекта (X', σ', U') и любого Σ-морфизма $g : X \to X'$ $\left(g : X' \to X\right)$ соотношение "для любого $i \in I$ суперпозиция $g \circ f_i$ есть Σ'-морфизм $\left(f_i \circ g \text{ есть } \Sigma'\text{-морфизм}\right)$" влечет соотношение "$g$ есть Σ'-морфизм", то будем говорить, что семейство $((X_i, \sigma_i, U_i), f_i)_{i \in I}$ является P-декомпозицией $\left(F - \text{декомпозицией}\right)$ Σ'-объекта (X, σ, U) над Σ-объектом (X, σ). $Card(I)$ называется мощностью декомпозиции. Декомпозиция называется тривиальной, если существует такое $i \in I$, что f_i есть Σ'-изоморфизм.

З а м е ч а н и е 1. Для сокращения речи вместо словосочетания Р-декомпозиция Σ'-объекта (X, σ, U) над Σ-объектом (X, σ) будет употребляться словосочетание Р-декомпозиция для (X, σ, U), если это не может вызвать недоразумений (аналогично для F-декомпозиций).

З а м е ч а н и е 2. Пусть $((X_i, \sigma_i, U_i), f_i)_{i \in I}$ — декомпозиция

(P- или F-) для (X, σ, U). Совокупность $((X_i, \sigma_i, U_i), f_i)$ для некоторого фиксированного i из I называется элементом этой декомпозиции. Две декомпозиции для (X, σ, U), множества элементов которых совпадают, не будут далее различаться.

П р е д л о ж е н и е 1. Существует не более одного множества $U \subset X$, такого, что семейство $((X_i, \sigma_i, U_i), f_i)_{i \in I}$ является P-декомпозицией (F-декомпозицией) для (X, σ, U).

П р е д л о ж е н и е 2. Для того, чтобы семейство $((X_i, \sigma_i, U_i), f_i)_{i \in I}$ Σ'-объектов и Σ'-морфизмов $f_i : X_i \to X (f_i : X \to X_i)$ было P-декомпозицией (F-декомпозицией) для (X, σ, U) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\bigcup_{i \in I} f_i(U_i) = U$ $(\bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(U_i) = U)$.

П р е д л о ж е н и е 3. Всякое семейство $((\widetilde{X}_i, \widetilde{\sigma}_i, \widetilde{U}_i), \omega_i)_{i \in I}$, такое, что для любого i канонические инъекции $\omega_i : \widetilde{X}_i \to X$ — Σ-морфизмы и $\bigcup_{i \in I} \widetilde{X}_i = U$, является P-декомпозицией для (X, σ, U) (двойственно — для F-декомпозиции).

З а м е ч а н и е 3. Обратим внимание на то, что Σ-объекты $(\widetilde{X}_i, \widetilde{\sigma}_i)$, участвующие в P-декомпозиции $((\widetilde{X}_i, \widetilde{\sigma}_i, \widetilde{U}_i))_{i \in I}$ объекта (X, σ, U) над (X, σ) могут не быть его бурбаковскими подобъектами (двойственно — для F-декомпозиций) [4].

З а м е ч а н и е 4. Множество $P(X, \sigma, U)$ P-декомпозиций вида $((\widetilde{X}_i, \widetilde{\sigma}_i, \widetilde{U}_i), \omega_i)_{i \in I}$ для (X, σ, U) естественным образом снабжается структурой $\lambda(X, \sigma, U)$ [2, разд. 2.6]. Множество $P(X, \sigma, U)$ и структура $\lambda(X, \sigma, U)$ на нем являются Σ'-инвариантными термами (двойственно — для F-декомпозиций). Тесная связь между инвариантными при изоморфизмах термами и соотношениями [1, стр.281-297], [3] позволяет естественным образом формировать Σ-образы подмножества U.

Рамки статьи позволяют описать схему построения иерархических образов подмножества U на очень общем уровне. Более полное изложение этой схемы, основанное на понятии о шкале родов структур [3], будет опубликовано в сборнике “Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов” за 2000 г., издание ВЦ РАН. Пусть $I(X, \sigma, U)$ — простой Σ-образ подмножества U, являющийся утверждением о существовании и единственности некоторой декомпозиции $V(X, \sigma, U)$ для (X, σ, U). Образуем из Σ' последовательность Σ'', присоединив к аксиоме $R(X, \sigma)$ последовательности Σ' в качестве явной аксиомы соотношение $I(X, \sigma, U)$. Образуем бурбаковскую формальную систему $\mathbf{B}\Sigma''$. В системе $\mathbf{B}\Sigma''$ становится доступным Σ'-инвариантный объект $V(X, \sigma, U)$ и, возможно, некоторые Σ'-инвариантные объекты P, которые можно построить, имея объект $V(X, \sigma, U)$, обладающий свойствами, определяемыми соотношением $I(X, \sigma, U)$. Некоторое Σ''-инвариантное соотношение $I'(X, \sigma, U, V, P)$ в системе $\mathbf{B}\Sigma''$ вместе с Σ'-инвариантным соотношением $I(X, \sigma, U)$ образуют двухуровневый иерархический образ подмножества U. Аналогично строятся более высокие уровни образа множества U. Следующий пример в некоторой мере конкретизирует изложенную схему.

4. П р и м е р. Пусть система $\mathbf{B}$ есть бурбаковская теория множеств, $\Sigma_0 = (X, L; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \mathbb{R}; \sigma_1 \in \beta(X \times X \times X), \sigma_2 \in \beta(\mathbb{R} \times X \times X), \sigma_3 \in \beta(X \times X \times L))$, Σ получается из Σ_0 присоединением явной аксиомы $R(X, L, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3))$, утверждающей, что (L, σ_1, σ_2) является линейным векторным пространством размерности 2 над полем $\mathbb{R}$, а (X, σ_3) — аф-

финным пространством над (L, σ_1, σ_2), Σ' получается из Σ присоединением к Σ родовой константы U и типизации $U \subset X$, а также условия непустоты U. Σ-морфизмами будем считать аффинные гомоморфизмы. Далее для краткости обозначено $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Обозначим через $I_1(X, L, \sigma, U)$ следующее Σ'-инвариантное соотношение:

существует и единственна (см. замечание 2) P-декомпозиция $((\widetilde{X}_i, \widetilde{L}_i, \widetilde{\sigma}_i, \widetilde{U}_i), \omega_i)_{i \in I}$ мощности 3 для (X, L, σ, U) такая, что для любого i множества $\widetilde{U}_i$ не пусты, Σ'-объекты $(\widetilde{X}_i, \widetilde{L}_i, \widetilde{\sigma}_i)$ являются одномерными подобъектами объекта (X, L, σ) и каждая пара $(\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_j)$ имеет единственную общую точку P_{ij}, причем при $\{i, j\} \neq \{i', j'\}$ имеет место $P_{ij} \neq P_{i'j'}$.

На человеческом языке это означает, что "существуют единственные три попарно различные непараллельные, не имеющие единственной общей точки прямые, содержащие все точки подмножества U". В соответствии с введенной выше терминологией это это словосочетание характеризует простой аффинный образ множества U.

Обозначим через Σ'' последовательность термов и соотношений, которая получается из Σ' присоединением к ней в качестве явной аксиомы соотношения $I_1(X, L, \sigma, U)$. В системе $\mathbf{B}\Sigma''$ можно оперировать объектами $\widetilde{X}_i, \widetilde{L}_i, \widetilde{\sigma}_i, \widetilde{U}_i,\ \ i = 1, 2, 3$, P_{12}, P_{13}, P_{23}, существование которых утверждается аксиомой $I_1(X, L, \sigma, U)$.

Пусть $(\widetilde{X}, \widetilde{L}, \widetilde{\sigma})$ — одномерный подобъект (т.е. прямая) аффинного пространства (X, L, σ) над $\mathbf{R}$. Множество $\widetilde{X}$ можно двумя способами снабдить структурой линейного порядка. Тернарное отношение

$Q \subset \widetilde{X} \times \widetilde{X} \times \widetilde{X}$, определенное соотношением $(x, y, z) \in Q \Leftrightarrow ((x \leq y \wedge y \leq z) \vee (z \leq y \wedge y \leq x)$ не зависит от того, как введен линейный порядок на $\widetilde{X}$. Допуская некоторую вольность соотношение $(x, y, z) \in Q$ можно охарактеризовать словосочетанием "y лежит между x и z". Это тернарное соотношение будет называться индуцированным. Терм Q является аффинно-инвариантным. Обозначим через $\widetilde{Q}_1, \widetilde{Q}_2, \widetilde{Q}_3$ индуцированные тернарные отношения на $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3$, соответственно. Соотношение $(\forall u)(u \in U \Rightarrow ((P_{12}, u, P_{13}) \in \widetilde{Q}_1 \vee (P_{12}, u, P_{23}) \in \widetilde{Q}_2 \vee (P_{13}, u, P_{23}) \in \widetilde{Q}_3))$, которое обозначим через $I_2(X, L, \sigma, U, P)$ (здесь $P = \{P_{12}, P_{13}, P_{23}\}$) является Σ''-инвариантным. Двухуровневый иерархический образ $I_1(X, L, \sigma, U)$, $I_2(X, L, \sigma, U, P)$ множества U естественно обозначить словосочетанием *образ множества U является треугольником.*

Алгоритм, который "узнает", что образ предъявленного множества U является треугольником должен уметь вычислять логическое значение соотношения $I_1(X, \sigma, U))$ и, если оно оказалось верным, логическое значение соотношения $I_2(X, \sigma, U, P)$. Эти задачи алгоритмически тривиальны. При практической реализации алгоритма необходимо, конечно, использовать метрику: во-первых, для того, чтобы трасформировать предъявленное множество в конечное (т.е. "оцифровывать" это множество с некоторым шагом h),во-вторых, практический алгоритм должен оперировать не прямыми, в полосами некоторой ширины ε. Величины h и ε является настраиваемыми параметрами алгоритма.

В заключение обратим внимание на то, что аффинный образ $I_1(X, L, \sigma, U)$, $I_2(X, L, \sigma, U, P)$ подмножества U является свойством декомпозиционной структуры $\lambda(X, L, \sigma, U)$, которой естественным образом наделяется множество $P(X, L, \sigma, U)$ декомпозиций (тех, в которых участвуют подобъекты исходного аффинного пространства) для объекта (X, L, σ, U) (см. замечание 4). Поэтому языковая среда теории декомпозиции [2] — [5] представляется перспективным инструментом для решения задачи автоматической генерации, накопления и рапознавания образов подмножеств снабженных структурой множеств.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00018) и Совета Программы поддержки ведущих научных школ (грант 00-15-96137).

Литература

1. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.:Мир.1965.456 с.

2. *Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г.* Проблема декомпозиции в математическом моделировании.М.:Фазис.1998.266 с.

3. *Павловский Ю.Н.*//О шкалах родов структур.ДАН.1998.Т.363.2.С.163-165.

4. *Данилов Н.Ю.*//О взаимосвязи декомпозиционных свойств исчисления родов структур и теории категорий. В кн. Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов.М.:ВЦ РАН.1996.Стр.49-62.

5. *Елкин В.И.*// Редукция нелинейных управляемых систем. М.:Наука.1997.317 с.