В.И.Елкин, Ю.Н. Павловский

Декомпозиция моделей управляемых процессов

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Введение

Смысл слова "декомпозиция" в применении как к математическим моделям вообще, так и к моделям управляемых процессов в современной научной литературе остается достаточно расплывчатым. Настоящий обзор связан с "геометрическим" подходом к проблеме декомпозиции. Его суть состоит в погружении изучаемого объекта (модели) в класс "родственных", "однотипных" объектов, введении в этом классе эквивалентных преобразований (изоморфизмов) объектов друг в друга и отыскании среди объектов, эквивалентных (изоморфных) данному, такого, который "составлен" из некоторого количества более простых в некотором смысле объектов.

При таком подходе один и тот же объект может быть погружен в разные классы с разными понятиями об изоморфизме и иметь поэтому в этих классах разные декомпозиционные свойства. Ясно также, что декомпозиционные свойства объектов при таком подходе должны выражаться в терминах инвариантов преобразований эквивалентности (изоморфизмов), поскольку если некоторый объект обладает декомпозиционным представлением, то таким же представлением обладает всякий эквивалентный ему объект. Поэтому проблема декомпозиции тесно связана с соответствующими классификационными проблемами, состоящими в получении "простейших" представителей или, как принято говорить, "канонических форм", среди эквивалентных (изоморфных) друг другу объектов в рамках некоторого класса "однотипных" объектов относительно зафиксированного для этого класса понятия об эквивалентности (изоморфизме). В ряде случаев, как будет ясно из рассмотренных ниже примеров, канонической формой объекта является как раз его максимальная декомпозиция.

Для линейных моделей управляемых процессов (по фазовым переменным и управлениям) с линейными же отображениями в качестве преобразований эквивалентности проблема декомпозиции изучена к настоящему времени достаточно полно с помощью тех средств, которые естественным образом возникают в линейной теории (см., например, обзоры [82,83]). Настоящий обзор практически не касается линейных моделей с линейными эквивалентностями, а посвящен общему случаю, где средства линейной теории не применимы.

В современной математике имеются две языковые системы, ориентированные на изучение свойств объектов, инвариантных относительно изоморфизмов, независимо от того, каков тип изучаемого объекта - теория категорий [19, 31, 117], а также языковая система, ассоциированная с формальными системами Н.Бурбаки [20], более точно, с исчислением родов структур в бурбаковских формальных системах, более сильных, чем бурбаковская "Теория множеств". То направление в изучении проблемы декомпозиции, о котором здесь идет речь, использует обе эти языковые системы. Поскольку бурбаковская языковая система распространена гораздо меньше, чем теория категорий, в разделе 3 о ней дается некоторое представление.

Первый раздел обзора посвящен общей проблеме декомпозиции математических моделей, частным случаем которой является проблема декомпозиции моделей управляемых процессов. Второй раздел посвящен содержательным аспектам проблемы декомпозиции моделей управляемых процессов. В нем, в частности, анализируется связь между проблемами достижимости, наблюдаемости, реализации моделей управляемых процессов и декомпозициями этих моделей. Кроме того, здесь обсуждается основанная на декомпозиционных свойствах возможность управлять процессом при помощи иерархических организаций. Третий раздел содержит краткое описание языковых средств, ассоциированных с исчислением родов структур Н.Бурбаки [20], и анализ проблемы декомпозиции семейств отображений, являющихся основой для изучения декомпозиций управляемых систем. Четвертый раздел содержит обзор результатов по декомпозиции управляемых процессов, полученных в рамках обозреваемого подхода.

1 Проблема декомпозиции в математическом моделировании

1. Проиллюстрируем обозреваемый здесь подход к проблеме декомпозиции на примере системы

$$dx^i/dt = a^i_j x^j, \quad i, j = 1, 2, ..., n \tag{1.1}$$

линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с постоянными действительными коэффициентами a^i_j относительно искомых функций $x^i(t)$ действительного переменного t, принимающих действительные значения. (Принято тензорное правило записи суммы: по повторяющемуся индексу производится суммирование. Если множество значений, которое пробегает индекс, очевидно либо несущественно, то его описание будет опускаться. Совокупность величин, обозначенных буквой с индексом, пробегающим некоторое множество значений, будет, если не оговорено противное, обозначаться той же буквой без индексов).

Объект (1.1) часто возникает при описании движения механической системы, имеющей n степеней свободы, около положения равновесия. Величины $x(t)$ характеризуют отклонение системы от положения равновесия y_*, движение которой в окрестности точки y_* описывается нелинейными,вообще говоря, уравнениями

$$dy^i/dt = f^i(y^1, ..., y^n), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{1.2}$$

с гладкими правыми частями, такими, что $f(y_*) = 0$. Система (1.1) является линейным приближением, полученным из (1.2) заменой $x = y - y_*$, разложением правых частей получившейся системы в ряд вокруг нулевого вектора и пренебрежением всеми членами, кроме линейных.

Если считать объект (1.1) элементом класса линейных однородных ОДУ с постоянными комплексными коэффициентами относительно комплекснозначных искомых функций действительного аргумента, а изоморфизмами - линейные однородные невырожденные преобразования

$$z^i = b^i_j x^j, \quad i, j = 1, 2, ..., n \tag{1.3}$$

с постоянными комплексными коэффициентами, то простейшим эквивалентным представителем системы (1.1) является система, матрица которой имеет жорданову форму. Жорданово представление системы (1.1) есть, очевидно, ее максимальная декомпозиция в рассматриваемом классе объектов с указанным понятием об изоморфизме: объект "распадается" "горизонтально" на независимые друг от друга объекты - жордановы блоки, каждый из которых уже не распадается подобным образом на независимые объекты в рамках рассматриваемых изоморфизмов; внутри каждого жорданова блока объект имеет "иерархическую", "вертикальную" декомпозицию, также, очевидно, максимальную. Поскольку жорданово представление системы (1.1) есть в то же время решение задачи классификации системы (1.1) в указанном выше классе, относительно указанных изоморфизмов, то рассмотренный пример относится к тому случаю, когда канонической формой объекта при решении задачи классификации является его максимальная декомпозиция.

Если расширить класс объектов, в который вкладывается исследуемый объект (1.1), расширив, соответственно, класс изоморфизмов, то его способность к декомпозиции, вообще говоря, должна увеличиться. В самом деле, если считать объект (1.1) элементом класса линейных однородных ОДУ с коэффициентами, являющимися действительными функциями действительного аргумента t, а изоморфизмами - линейные однородные преобразования

$$z^i = c^i_j(t)x^j, \qquad i, j = 1, 2, ..., n \tag{1.4}$$

с переменными гладкими действительными коэффициентами, такими, что

$$(\forall t) det \parallel c^i_j(t) \parallel \neq 0, \tag{1.5}$$

то простейшее эквивалентное представление системы (1.1) будет иметь вид

$$dz^i/dt = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{1.6}$$

также несомненно являющийся максимальной декомпозицией системы (1.1) в указанном классе систем относительно указанных изоморфизмов.

Если же сузить класс объектов, представителем которого считается исследуемый объект, то его способность к декомпозиции, вообще говоря, должна уменьшиться, о чем свидетельствует являющаяся максимальной декомпозицией каноническая форма объекта (1.1) относительно линейных однородных невырожденных преобразований вида (1.3), но с действительными постоянными коэффициентами b^i_j в качестве изоморфизмов.

В какой класс вкладывать изучаемый объект и какой класс преобразований использовать в качестве изоморфизмов для выполнения декомпозиции объекта зависит от характера практической задачи, ради облегчения решения которой обращаются к декомпозиции данного объекта [94].

2. Декомпозиционные свойства объектов, так, как они здесь трактуются, инвариантны относительно преобразований эквивалентности в рамках которых ведется их рассмотрение. Поэтому они должны допускать формулировку в терминах, инвариантных относительно преобразований эквивалентности.

Для жордановой декомпозиции системы (1.1) такая формулировка может быть дана в терминах собственных подпространств, а также фактор - пространств, индуцируемых в $\mathcal{R}^n$ линейным оператором $\mathbf{A}$ с матрицей $\| \ a^i_j \ \|$. Каждому k-ому жорданову блоку размерности d_k соответствует, как известно, собственное подпространство $\mathcal{R}^{d_k}$, на котором оператор $\mathbf{A}$ определяет так называемый индуцированный объект (подоператор, подобъект). Аналогично, система (1.1) индуцирует, очевидно, на $\mathcal{R}^{d_k}$ подсистему (подобъект): любое решение системы (1.1), имеющее с $\mathcal{R}^{d_k}$ хотя бы одну общую точку, целиком принадлежит $\mathcal{R}^{d_k}$. Таким образом, можно сказать, что исходный объект (1.1) "распался" на соответствующие жордановым блокам независимые подобъекты. Если эти независимые подобъекты известны, то исходный объект восстанавливается по ним операцией прямого произведения.

Двойственная интерпретация возникает, если ассоциировать с жордановым блоком фактор - пространство $\overline{\mathcal{R}}^{n-d_k} = \mathcal{R}^n / \ \mathcal{R}^{d_k}$, на котором оператор $\mathbf{A}$ определяет фактор-оператор (фактор-объект). Аналогично, система (1.1) индуцирует на $\overline{\mathcal{R}}^{n-d_k}$ фактор - систему: все интегральные кривые системы (1.1), начинающиеся в некоторый момент времени t_0 на одном и том же классе эквивалентности в один и тот же момент t будут находиться опять на одном и том же классе эквивалентности.

Две аналогичные двойственные друг другу инвариантные интерпретации допускает декомпозиция внутри каждой жордановой клетки. Первая состоит в том, что декомпозиции внутри жордановой клетки соответствуют вложенные друг в друга собственные подпространства оператора, на которых система (1.1) индуцирует подобъекты, которые также можно считать вложенными друг в друга. Двойственная интерпретация состоит в сопоставлении с каждой жордановой клеткой вложенных друг в друга фактор-объектов.

3. Переведем рассуждения на более общий уровень и дадим инвариантную формулировку иерархической декомпозиции

$$dz^k/dt = \phi^k(t, z^1, ..., z^m), \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{1.7}$$

$$dx^l/dt = \psi^l(t, z^1, ..., z^m, x^1, ..., x^{n-m},), \quad l = 1, 2, ..., n-m, \tag{1.8}$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dy^i/dt = f^i(t, y^1, ..., y^n), \quad i = 1, 2, ..., n, (t, y) \in M \subset \mathcal{R}^{n+1}, \tag{1.9}$$

выполненной с помощью преобразований эквивалентности

$$z^k = I^k(t, y), \quad k = 1, 2, ..., m \tag{1.10}$$

$$x^l = J^l(t, y). \quad l = 1, 2, ..., n-m \tag{1.11}$$

Будем считать правые части класса рассматриваемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений определенными и гладкими (имеющими производные всех порядков) в некоторой области M расширенного фазового пространства $\mathcal{R}^{n+1}$, а преобразованиями эквивалентности - сохраняющие t диффеоморфизмы, определяемые функциями $(1.10), (1.11)$

Решение $z^{*j}(t), j = 1, 2, ..., s$ системы (1.7) определяют решение $y^*(t)$ системы (1.9) с точностью до принадлежности последнего классам эквивалентности по отношению Q: $((t, y), (t', y')) \in Q \iff t =$

$t' \wedge I^k(t,y) = I^k(t',y'), \quad k = 1,2,...,m$. Таким образом, систему (1.7) естественно трактовать как фактор-систему (фактор-объект) системы (1.9), генерируемую ею на множестве $\overline{M} = M/Q$ классов эквивалентности по отношению Q. Отношение эквивалентности Q будем далее называть факторизующим (F-отношением) или декомпозирующим для системы (1.9).

Пусть функции

$$y^i = J^i(t,z,x), i = 1,2,...,n \tag{1.12}$$

являются обращениями функций (1.10), (1.11). Подставив в (1.12) некоторое гладкое решение $z^j = z^{*j}(t), \quad j = 1,2,...,m$ системы (1.7) получим $n-s$-мерное подмножество $\tilde{M}$ в множестве M, определяемое соотношениями

$$y^i = J^i(t,z^*(t),x), \quad i = 1,2,...,n, \tag{1.13}$$

точка которого фиксируется, если определить значения параметров x^1,...,x^{n-m}.

Если вместо этих параметров в (1.13) подставить произвольное решение $x^l = x^{*l}(t)$, $l = 1,...,n-m$, системы

$$dx^l/dt = \psi^l(t,z^*(t),x), \quad l = 1,...,n-m, \tag{1.14}$$

то получится, естественно, некоторое решение системы (1.9). Значит, множество $\tilde{M}$ "состоит", "соткано" из интегральных кривых системы (1.9) и конкретная интегральная кривая, принадлежащая этому множеству, фиксируется, если определить некоторое решение системы (1.8).

Таким образом, можно сказать, что система (1.9) для каждого решения $z = z^*(t)$ своего фактор-объекта (1.7) индуцирует на подмножестве $\tilde{M}$ множества M, определяемого посредством (1.13), подсистему (подобъект) (1.14).

Всю декомпозицию (1.7), (1.8) системы (1.9) можно трактовать как разложение исходного объекта на совокупность подобъектов, параметризованную решениями фактор-объекта. Такая трактовка декомпозиции носит инвариантный характер, т.е. она не зависит от системы координат, в которой записана (1.9) и является обобщением инвариантной трактовки декомпозиции линейных систем, выявляющей важность понятий фактор-объекта и подобъекта для анализа проблемы декомпозиции.

4. Для общего анализа проблемы декомпозиции математических моделей потребуется общая трактовка понятия "математическая модель". Из большого числа таких трактовок наиболее естественной для целей, связанных с анализом рассматриваемой здесь проблемы декомпозиции, является трактовка моделей как отображений "вход-выход" [145,168,169,170]. В соответствии с этой трактовкой математическая модель будет трактоваться как система соотношений (отношений) между характеристиками реального процесса, обладающая свойством замкнутости относительно некоторого разбиения участвующих в ней характеристик на два класса - класс внешних величин модели и класс ее внутренних величин. Это разбиение выполнено таким образом, что

если задать все внешние величины, то из соотношений модели можно вычислить все ее внутренние величины.

На формальном уровне утверждения о замкнутости математических моделей имеют вид соответствующих теорем о существовании и единственности. Разбиение величин, фигурирующих в модели, на внешние и внутренние так, что она становится относительно этого разбиения замкнутой, определяет, очевидно, внутренние величины этой модели как функции ее внешних величин, т.е. определяет отображение $\mathbf{A} : U \to Y$, где U - множество возможных значений внешних величин, Y - множество значений внутренних величин. Это отображение будет далее называться, отображением, ассоциированным с данной замкнутой моделью или отображением вход-выход. Часто интерес представляют ограничения отображения $\mathbf{A}$ на подмножества различного характера множества U - тогда, главным образом, когда часть внешних величин модели является известной и зависимость от них внутренних величин не представляет интереса. В таких случаях именно эти ограничения трактуются как отображения вход-выход, ассоциированные с моделью. Например, соотношения (1.1), описывающие движение механической системы около положения равновесия, становятся замкнутой моделью в том понимании, которое было изложено выше, если присоединить к ним начальные условия.

$$x^i(t_0) = x_0^i, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{1.15}$$

и считать внутренними величинами функции $x^i(t)$, характеризующие местоположение и скорости элементов системы в момент t, и определенные на всей числовой оси, а внешними величинами - числа a_j^i, характеризующие устройство (конструкцию) системы, и числа x_0^i, фигурирующие в (1.15), дающие начальные значения внутренних величин. Фиксация чисел a_j^i и значений x_0^i позволяет из соотношений (1.1) и (1.15) модели определить внутренние величины $x^i(t)$ в силу теоремы о существовании и единственности решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкими правыми частями. Если считать числа a_j^i известными и не интересоваться зависимостью решения от них, то отображение $\mathbf{A}$, ассоциированное с моделью (1.1), (1.15), дается общим решением (1.1) с начальными условиями (1.15).

Для того, чтобы дать с помощью замкнутой математической модели прогноз течения изучаемого процесса, необходимо знать внешние величины этой модели. Внешние величины моделей с содержательной точки зрения могут носить разнообразный характер. Наиболее распространенными типами их являются фундаментальные физические постоянные (гравитационная постоянная, скорость света, заряды элементарных частиц и т.д.); характеристики изучаемого процесса (массы тел в моделях механических движений, коэффициенты теплопроводности, вязкости в моделях механики сплошных сред и т.д.), являющиеся или постоянными или функциями внутренних величин модели; величины, описывающие влияние на изучаемый процесс "внешних" по отношению к нему процессов, на которые изучаемый процесс не влияет или же мы пренебрегаем этим влиянием (характерный пример такого сорта величин - влияющие на процесс "возмущения"); начальные значения внутренних величин в моделях процессов, развивающихся во времени, которые также будут относиться к внешним величинам, поскольку они должны быть известны (измерены) для того, чтобы модель могла давать прогноз развития процесса. Процедуры определения перечисленных типов внешних величин принято называть идентификацией математических моделей.

Совершенно особым типом фигурирующих в моделях внешних величин являются управления, т.е. величины, с помощью которых управляющие субъекты (органы) могут целенаправленно влиять на течение процесса. Составляющие существенную часть теории управления задачи назначения управлений, фигурирующих в моделях процессов, не принято относить к задачам идентификации моделей. Содержательные аспекты декомпозиционных свойств моделей управляемых процессов будут рассмотрены в следующем разделе.

Проблеме идентификации математических моделей посвящена обширная литература [75,130,170]. Для пояснения связи между декомпозицией моделей и их идентификацией здесь будет рассмотрена простейшая из такого сорта задач - задача определения начальных значений внутренних величин модели, которая является системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1.9). Типичной ситуацией является невозможность измерить в некоторый момент времени t_0 все начальные значения

$$y^i(t_0) = y_0^i, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{1.16}$$

внутренних величин y модели. Измерениям доступны обычно функции

$$w^j = \Phi^j(t, y), \; j = 1, 2, ..., q, \tag{1.17}$$

внутренних величин модели, количество которых меньше, чем n.

(Практическая важность задач идентификации математических моделей такого типа хорошо видна на примере идентификации модели движения спутника после вывода на орбиту. Для выполнения этой идентификации, т.е. определения местоположения и вектора скорости спутника в некоторый момент времени или, что то же самое, для определения параметров его орбиты, применяются специальные измерительные радиотехнические комплексы - РЛС, измеряющие расстояние до спутника как функцию времени. По сравнению с расходами на проектирование, строительство и эксплуатацию РЛС все остальные расходы, обеспечивающие получение прогноза движения спутника, можно считать нулевыми. Такая ситуация является типичной при получения прогноза развития во времени реальных процессов или их свойств с помощью технологии математического моделирования).

Отображение, ассоциированное с моделью $(1.9), (1.16)$, о котором шла речь выше, в рассматриваемом случае дается общим решением системы (1.9) с начальным условием (1.16):

$y^i = F^i(t, t_0, y_0), \quad i = 1, 2, ..., n,$

Это отображение будем обозначать $\mathbf{A}_{t_0} : M \to Y$, понимая под Y множество вектор-функций $y^*(t)$, являющихся решениями $(1.9), (1.16)$. Необходимо, однако, иметь в виду, что t_0 здесь естественно считать не внешней величиной, подлежащей определению, а известным параметром, поскольку в практических задачах идентификации момент t_0, как правило, известен. Таким образом, оперирование происходит не с одной моделью, а с их множеством, параметризованным с помощью t_0. Задача идентификации модели $(1.9), (1.16)$ состоит в восстановлении по имеющимся измерениям $z^*(t)$ на некотором отрезке времени всех соответствующих им функций $y^*(t)$, являющихся решением $(1.9), (1.16)$

Поскольку каждому решению $y^*(t)$ системы (1.9) в силу (1.17) соответствуют функции $w^{*j}(t) = \Phi^j(t, y^*(t)), j = 1, 2, ..., q$, то (1.17) определяет отображение $\mathbf{I} : Y \to Z$ множества Y внешних величин модели $(1.9), (1.16)$ в множество измерений Z. Теперь формулой

$w^{*j}(t) = \Phi^j(t, F(t, t_0, y_0)), j = 1, 2, ..., q,$

можно определить суперпозицию $\mathbf{I} \circ \mathbf{A_{t_0}} : M \to Z$, являющуюся отображением из множества значений внешних величин M в множество измерений Z. Если отображение $\mathbf{I} \circ \mathbf{A_{t_0}} : M \to Z$ инъективно, то модель $(1.9), (1.16)$ называется наблюдаемой в M относительно системы измерений (1.17), а в противном случае - ненаблюдаемой в M относительно этой системы измерений.

Если декомпозиция $(1.7), (1.8)$ системы (1.9) такова, что все измеряемые функции (1.17) выражаются через функции (1.10):

$$w^j = \Phi^j(t, y) = \Phi'^j(t, I(t, y)),\ j = 1, 2, ..., q, \tag{1.18}$$

то модель (1.9), (1.16), очевидно, ненаблюдаема относительно системы измерения, характеризующейся функциями (1.17).

Проведенный анализ устанавливает следующий факт: для того, чтобы модель (1.9), (1.16) была наблюдаема в области M относительно системы измерений (1.17) необходимо, чтобы отношение эквивалентности $Q_{\mathbf{I}}$

$$((t, y), (t', y')) \in Q_\Phi \Longleftrightarrow t = t' \wedge \Phi^j(t, y) = \Phi^j(t', y'), \quad j = 1, 2, ..., q.$$

определяемое в M измеряемыми функциями (1.17) не содержало никакое нетривиальное декомпозирующее отношение эквивалентности для системы (1.9). (Тривиальное отношение эквивалентности Q_0, определяемое соотношениями

$$((t, y), (t', y')) \in Q_0 \Longleftrightarrow t = t' \wedge y^i = y'^i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

формально является декомпозирующим.) В некоторой форме справедливо и обратное утверждение [40].

5. Понятие о наблюдаемости модели относительно системы измерений допускает естественное обобщение на любые замкнутые модели с любыми типами фигурирующих в них внешних величин, если наблюдаются некоторые функции внутренних величин модели. Пусть отображение ассоциированное с моделью есть: $\mathbf{A} : U \to Y$, где U - множество значений внешних величин, Y - множество значений внутренних величин. Пусть система измерения реализует отображение $\mathbf{I} : Y \to Z$.

Модель $\mathbf{A}$ будем называть наблюдаемой относительно системы измерения $\mathbf{I}$, если отображение $\mathbf{I} \circ \mathbf{A} : U \to Z$ инъективно.

Существо связи между ненаблюдаемостью и декомпозицией, продемонстрированное в пункте 4 настоящего раздела на примере модели $(1.9), (1.16)$, состоит в том, что всякое неинъективное отображение допускает некоторую естественную декомпозицию. Вопрос о декомпозиции отображений рассматривается в пункте 5 раздела 3. Здесь кратко, опуская ряд деталей, описывается природа обсуждаемой связи.

Пусть $f : X \to Y$ – отображение, Q_x, Q_y – отношения эквивалентности на множествах X ,Y, соответственно, $\overline{X} = X/Q_x$, $\overline{Y} = Y/Q_y$ – соответствующие им фактор-множества. Далее класс эквивалентности по отношению Q, которому принадлежит некоторый элемент $x \in X$ будет обозначаться $\overline{x}_Q$. Индекс Q будет опускаться, если понятно, какое отношение эквивалентности имеется в виду. Если

$$(x, x') \in Q_x \Rightarrow (f(x), f(x')) \in Q_y, \tag{1.19}$$

то функция f определяет фактор-отображение $\overline{f}$ множества $\overline{X}$ в множество $\overline{Y}$: $\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f(x)}$, где x - любой элемент из $\overline{x}$.

Одновременно функция f определяет совокупность

$$\{f_{\overline{x}} : \overline{x} \to \{\overline{f}(\overline{x})\}\}_{\overline{x} \in \overline{X}} \tag{1.20}$$

своих подобъектов $f_{\overline{x}}$ – ограничений f на классы $\overline{x}$. Таким образом, можно сказать (допуская некоторую вольность – см. пункт 5 раздела 3), что f декомпозировалась на совокупность (1.20) своих подобъектов, ассоциированную с некоторым ее фактор-объектом $\overline{f}$. В связи с этим пару отношений эквивалентности (Q_x, Q_y) будем называть декомпозирующей, если она удовлетворяет (1.19). Декомпозирующую пару будем называть тривиальной, если Q_x есть диагональ в $X \times X$, т.е. $Q_x = \Delta_X$. Для всякого отображения $f : X \to Y$ пара (Q_f, Δ_y), где Q_f – отношение эквивалентности, ассоциированное с f : $(x, x') \in Q_f \Longleftrightarrow f(x) = f(x')$, является декомпозирующей. В этом случае подобъекты, на которые декомпозируется f являются постоянными отображениями.

Для того, чтобы отображение $\mathbf{I} \circ \mathbf{A}$ было инъективно, необходимо, чтобы отображение $\mathbf{A}$ было инъективно. Это условие естественно предъявлять к отображению $\mathbf{A}$ в рассуждениях общего характера, поскольку в противном случае количество внешних величин в модели $\mathbf{A}$ можно было бы уменьшить, переходя от множества U к соответствующему фактор-множеству. Отображение $\mathbf{I}$, напротив, как правило, не является инъективным (на математическое моделирование можно смотреть как на технологию, позволяющую делать прогнозы развития процессов с помощью минимального количества измерений). Для того, чтобы отображение $\mathbf{I} \circ \mathbf{A}$ было инъективно, необходимо и достаточно, чтобы в каждом классе эквивалентности по отношению $Q_{\mathbf{I}}$, ассоциированном с отображением $\mathbf{I}$, содержался ровно один образ инъективного отображения $\mathbf{A}$. В терминах введенных выше понятий, характеризующих декомпозиционные свойства отображений, это условие можно сформулировать в следующей форме: для того, чтобы модель $\mathbf{A}$ была наблюдаема относительно системы измерения $\mathbf{I}$ необходимо и достаточно, чтобы всякая декомпозирующая для $\mathbf{A}$ пара (Q_U, Q_Y) такая, что $Q_Y \subset Q_{\mathbf{I}}$, была тривиальной.

2 Содержательные аспекты декомпозиции моделей управляемых процессов

1. Настоящий раздел посвящен анализу содержательных аспектов декомпозиционных свойств моделей управляемых процессов. Как и в предыдущих разделах будут игнорироваться многие практические обстоятельства, затрудняющие рассматриваемые проблемы, но не относящиеся к тому, что здесь считается их "существом". В качестве модели управляемого процесса будут рассматриваться управляемые динамические системы

$$dy^i/dt = f^i(t, y^1, ..., y^n, u^1, ..., u^r,), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2.1}$$

с начальными условиями

$$y^i(t_0) = y^i_0, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2.2}$$

Правые части (2.1) при каждом фиксированном u из множества $U \subset \mathcal{R}^r$, определены в независящей от u связной области $M \subset \mathcal{R}^{n+1}$ и являются гладкими. Кроме того, при каждых фиксированных $(t, y) \in M$ правые части (2.1) непрерывны по u (это не исключает случай, когда U

дискретно, например, конечно; в этом случае под непрерывностью понимается существование непрерывной функции, совпадающей с данной на U). На множество U пока не накладывается никаких ограничений.

Решением системы (2.1) будет называться совокупность $(y^*(t), u^*(t))$ функций, где $y^*(t)$ - кусочно-дифференцируемы, $u^*(t)$ - кусочно непрерывны, $(t, y^*(t)) \in M$, $u^*(t) \in U$, обращающие (6.1) в тождество по t. Управление $u^*(t)$, фигурирующее в каком либо решении, называется допустимым, множество допустимых управлений обозначается через $\mathbf{U}$.

Управляемой системой с выходами будем называть совокупность системы (2.1) и функций

$$\nu^j = \Phi^j(t, y, u), j = 1, 2, ..., q, \tag{2.3}$$

которые считаются гладкими по t, y и непрерывными по u.

Хотя управления - это внешние величины модели, поскольку они должны быть заданы, чтобы модель могла дать прогноз развития процесса, проблема конкретизации управлений с содержательной точки зрения очевидным образом отличается от задач идентификации моделей, т.е. определения их неконтролируемых внешних величин. Она, в частности, включает в себя трудную и весьма существенную проблему (часто не имеющую никакого решения) формализации того, чем руководствуются управляющие субъекты при управлении данным процессом, к чему они стремятся, какие они ставят цели. Одной из распространенных формализаций цели управления является следующая: перевести процесс с помощью каких-либо управлений $u^*(t)$, из начального состояния (t_0, y_0) в какое-либо состояние из множества $T \subset M$ (задача о терминальном управлении), что и есть цель управления (множество T может сводиться к единственной точке (t_1, y_1).

В связи с этим естественным образом возникает представление о *достижимости* различных состояний друг из друга [2, 27, 37, 39, 40, 68, 88, 150]: состояние (t_1, y_1) называется достижимым из состояния (t_0, y_0), причем $t_1 > t_0$ для системы (2.1), если существует решение $(y^*(t), u^*(t))$ системы (2.1), такое, что $y^*(t_0) = y_0, y^*(t_1) = y_1$. Множество $T \subset M$ называется достижимым из (t_0, y_0), если из (t_0, y_0) достижима какая-либо его точка. С другой стороны, *множеством достижимости* $D(t_0, y_0)$, соответствующим состоянию (t_0, y_0), называется совокупность всех состояний, которые достижимы из (t_0, y_0). С представлением о достижимости тесно связаны различные варианты определений *управляемости* [2, 7, 27, 37, 39, 40, 68, 88, 135, 137, 143,1 51] системы (2.1), характеризующие в какой мере и при каких условиях ее можно переводить из некоторого состояния в другие состояния.

Часто также на множестве $\mathbf{U_0}$ управлений, которые достигают сформулированную для системы цель, определяют отображение $\mathbf{F} : \mathbf{U_0} \to \mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ - частично или линейно упорядоченное множество, содержательно трактуя элементы $\mathbf{X}$ как характеристики качества управления, и ставят задачу отыскания в множестве $\mathbf{U}_0$ подмножества, на котором $\mathbf{F}$

принимает экстремальные значения (задача об оптимальном управлении [28, 73, 104]).

До сих пор, когда речь шла об управлениях, имелось в виду, что они являются "программными", т.е. назначаются органами управления функциями времени $u = u^*(t)$.

Другой способ конкретизации управлений состоит в назначении их функциями измеряемых в процессе функционирования системы величин, а также тех величин, которые можно вычислить, располагая такими измерениями. Система измерений, как правило, характеризуется функциями (2.3) и проектируется так, чтобы по выполненным измерениям (и известным управлениям) можно было вычислить все фазовые переменные т.е. система (2.1) должна быть наблюдаема в некотором смысле относительно наблюдаемых величин (2.3) (см. ниже). Тогда управления можно назначать как функции $u = u^*(t, y)$ называемые обратными связями или синтезом управлений.

Такой способ управления является одной из причин, по которой целесообразно рассматривать систему с выходами. Еще одной причиной является то, что практическое значение часто имеют лишь характеристики (2.3), а не фазовые переменные $y^1, ..., y^n$, с чем связана задача *реализации* отображения вход-выход для системы (2.1) с выходами (2.3) (см. ниже).

2. Для облегчения анализа будем считать, что все внешние величины, фигурирующие в правых частях системы (2.1) известны. Тогда

внутренними величинами модели (2.1), (2.2) являются вектор-функции $y(t)$, внешними - начальные значения y_0 внутренних величин и управления $u(t)$. Отображением внешних величин во внутренние является отображение $\mathbf{A} : M \times \mathbf{U} \to Y$, ставящее в соответствие каждому начальному состоянию (t_0, y_0) системы (2.1) и каждой вектор-функции $u = u^*(t)$ из множества $\mathbf{U}$ функции $y = y^*(t)$ такие, что $(y^*(t), u^*(t))$ - решение системы (2.1), удовлетворяющее условию $y^*(t_0) = y_0$. Далее, однако, удобно оперировать не самим отображением $\mathbf{A}$, а множеством $\mathbf{W}$ частичных отображений $\mathbf{A}_{t_0 y_0} : \mathbf{U} \to Y$, каждое из которых получается из $\mathbf{A}$, если зафиксировать в нем первый аргумент, а также отображением $\mathbf{B} : M \to \mathbf{W}$, ставящим в соответствие каждому начальному состоянию $(t_0, y_0) \in M$ системы (2.1) отображение $\mathbf{A}_{t_0 y_0} : \mathbf{U} \to Y$. Отображения $\mathbf{A}_{t_0 y_0}$ называются отображениями вход-выход при заданном (начальном) состоянии (t_0, y_0), $\mathbf{W}$ - множество таких отображений.

Также как в разделе 1 начальный момент t_0 в этих и последующих построениях считается заранее известным фиксированным параметром, а не внешней величиной модели, поскольку в практических задачах этот момент бывает известен.

Выходы (2.3) продуцируют отображение $\mathbf{I} : \mathbf{U} \times Y \to \Phi$, где через Φ обозначено множество вектор-функций $\nu^j = \nu^{*j}(t), \quad j = 1, 2, ..., q$. Системы с выходами поэтому характеризуются также отображением $\mathbf{A'}_{t_0 y_0} = \mathbf{I} \circ \mathbf{A}_{t_0 y_0} : \mathbf{U} \to \Phi$, которое для этой системы есть отображение вход-выход при заданном начальном состоянии, а также отображением

$\mathbf{C} : M \to \mathbf{V}$, являющимся аналогом отображения $\mathbf{B}$. Здесь $\mathbf{V}$ – множество отображений вход-выход при фиксированном начальном состоянии для системы с выходами.

Введенные отображения дают возможность определить понятие *наблюдаемости* [2, 7, 27, 37, 39, 40, 68, 88, 135, 151] для управляемых систем (см. также раздел 4, пункт 5). Система (2.1) называется *наблюдаемой* в области M относительно системы наблюдения (2.3), если отображение $\mathbf{C}$ инъективно при каждом фиксированном t_0 из проекции области M на ось t. Таким образом, данные наблюдения у наблюдаемых управляемых систем позволяют, в принципе, выполнить ее идентификацию, т.е. восстановить ее начальное состояние (t_0, y_0).

Для практического осуществления этой идентификации необходимо иметь алгоритм восстановления текущего состояния системы по данным наблюдения, т.е. располагать отображением, являющимся обращением отображения $\mathbf{C}$, необходимо учитывать ошибки наблюдения, неточное знание внешних величин модели (2.1), фигурирующих в ее правых частях, в том числе возмущения, действующие на систему, которые, как правило, невозможно измерить. Решение такого сорта задач, составляющих существенный раздел теории управления (см., например, [130]) в настоящем обзоре не рассматриваются.

В теории управления существенной также является проблема *реализации* [2, 37, 39, 40, 88, 162, 167, 169, 171]. Рассмотрим наряду с системой (2.1) – (2.3) следующую систему

$$dz^k/dt = \phi^k(t, z, u), \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{2.4}$$

$$z^k(t_0) = z_0^k, \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{2.5}$$

$$w^j = \eta^j(z, u), \quad j = 1, 2, ..., q, \tag{2.6}$$

где $(t, z) \in N \subset \mathcal{R}^{m+1}, N$ - область, u - управления, причем множество $\mathbf{U}$ значений управлений, совпадает с этим же множеством для системы (2.1). Обозначим через $\mathbf{B}_{t_0z_0} : \mathbf{U} \to \mathbf{Z}$ отображение вход-выход системы (2.4) при фиксированных (t_0, z_0), через $\mathbf{J} : \mathbf{U} \times Z \to \mathbf{W}$ отображение, продуцируемое функциями (2.6).

Если для любого состояния $(t_0, y_0) \in \tilde{M} \subset M$ существует состояние $(t_0, z_0) \in \ N$ такое, что отображения $\mathbf{I} \circ \mathbf{A}_{t_0y_0}$ и $\mathbf{J} \circ \mathbf{B}_{t_0z_0}$ совпадают, (для каждого входа выходы совпадают на пересечении интервалов их определения), то система $(2.4) - (2.6)$ называется реализацией системы (2.1) – (2.3) в $\tilde{M}$. Если при оперировании с системой $(2.1), (2.2), (2.3)$ интерес представляют только выходы ν, то естественной является задача построения более простой (например, меньшей размерности) ее реализации.

3. Пусть в результате диффеоморфизма вида

$$z^k = I^k(t, y), \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{2.7}$$

$$x^l = J^l(t, y), \quad l = 1, 2, ..., n - m, \tag{2.8}$$

области M на некоторую область N система (2.1) приняла вид

$$dz^k/dt = \phi^k(t, z, u), \quad k = 1, , ..., m, \tag{2.9}$$

$$dx^l/dt = \psi^l(t, z, x, u), \quad l = 1, 2, ..., n - m, \tag{2.10}$$

называемый далее простейшей иерархической декомпозицией системы (2.1).

Очевидно, что в этом случае система (2.1) ненаблюдаема в M относительно всякой системы наблюдения (2.3), такой, что все функции $\Phi^j(t, y, u), \quad j = 1, 2, ..., q$, можно выразить через функции $I^k(t, y), \quad k = 1, 2, ..., m : \Phi(t, y, u) \equiv \tilde{\Phi}(t, I(t, y), u)$.

Очевидно также, что если имеет место

$\Phi^j(t, y, u) \equiv \tilde{\Phi}^j(t, I^1(t, y), ..., I^m(t, y), u), \quad j = 1, 2, ..., q,$

то система (2.9) с выходами

$$\nu^j = \tilde{\Phi}^j(t, z^1, ..., z^m, u^1, ..., u^r), \quad j = 1, 2, ..., q, \tag{2.11}$$

является реализацией в M системы (2.1) с выходами (2.3).

Рассмотрим теперь тот частный случай, когда в системе (2.9) отсутствуют управления и она имеет вид

$$dz^k/dt = \phi^k(t, z), \quad k = 1, ..., m, \tag{2.12}$$

Пусть $z = z^*(t)$ - некоторое решение системы (2.12), соответствующее начальному условию $z(t_0) = z_0$. Рассмотрим многообразие в области M, определяемое соотношениями

$$z^{*k}(t) = I^k(t, y^1, ..., y^n), \quad k = 1, 2, ..., m. \tag{2.13}$$

Если процесс, описываемый (2.1) в некоторый момент t_0 находился на многообразии (2.13), то какие бы допустимые управления ни фигурировали в (2.1) он останется на этом многообразии в течение всего промежутка времени, на котором определено соответствующее решение системы (2.1). В частности, взаимно недостижимы друг из друга любые две точки, лежащие на разных многообразиях вида (2.13), определяемых разными решениями системы (2.12).

Итак с декомпозицией (2.9), (2.10) системы (2.1) связаны:

- ее ненаблюдаемость относительно определенного класса систем наблюдения;

- возможность для определенного класса выходных функций реализации отображения вход-выход с помощью системы меньшей размерности.

Кроме того, если система (4.11) в декомпозиции (4.11), (4.12) не зависит от управлений, то у системы имеются недостижимые друг из друга состояния.

4. Расширим класс эквивалентных преобразований, в рамках которых выполняется анализ проблемы декомпозиции системы (2.1), расширив, соответственно,класс изоморфных друг другу систем. Именно, будем считать изоморфизмом совокупность диффеоморфизма, заданного соотношениями (2.7), (2.8) и гомеоморфного отображения, заданного функциями

$$\nu^\alpha = V^\alpha(u^1, ..., u^r), \quad \alpha = 1, 2, ..., s, \tag{2.14}$$

$$w^\beta = W^\beta(u^1, ..., u^r), \quad \beta = 1, 2, ..., r - s, \tag{2.15}$$

обратным к которому является

$$u^\alpha = \overline{V}^\alpha(\nu, w), \quad \alpha = 1, 2, ..., r, \tag{2.16}$$

Будем считать, что функции (2.14), (2.15) отображают некоторую область U' пространства $\mathcal{R}^r$, содержащую множество U, на область $V' \subset \mathcal{R}^r$. Простейшей иерархической декомпозицией будет теперь считаться следующее представление системы (2.1)

$$dz^k/dt = \phi^k(t, z, \nu), \quad k = 1, , ..., m, \tag{2.17}$$

$$dx^l/dt = \psi^l(t, z, x, \nu, w), \quad l = 1, 2, ..., n - m, \tag{2.18}$$

полученное путем замены переменных в (2.1) по формулам (2.7), (2.8), (2.14), (2.1 Для сокращения речи будем изоморфизмы, рассмотренные в предыдущем пункте, задающиеся только диффеоморфизмом (2.7), (2.8), называть CDS(U) - изоморфизмами, а введенные здесь изоморфизмы - CDS -изоморфизмами.

Ясно, что всякий CDS(U) - изоморфизм есть в то же время CDS-изоморфизм, у которого отображение (2.14), (2.15) есть тождественное преобразование. С другой стороны, если система (2.17), (2.18) CDS-изоморфна системе (2.1), то выразив в (2.17), (2.18) ν через u с помощью (2.14), (2.15), получим систему CDS(U) - изоморфную (2.1).Ясно также, что CDS(U)-декомпозиция (2.9), (2.10) системы (2.1) есть в то же время CDS-декомпозиция , а всякую CDS-декомпозицию можно получить из некоторой CDS(U)-декомпозиции вида (2.9), (2.10), решив для правых частей (2.9) задачу о существенных параметрах [133], считая таковыми величины u. Несмотря на такой "практический изоморфизм" между CDS(U)-декомпозициями и CDS-декомпозициями, последние могут быть более "содержательны", чем соответствующие им CDS(U)-декомпозиции.

Вместе со свойством ненаблюдаемости относительно класса систем наблюдения, у которых наблюдаемые функции выражаются через функции $(2, 7)$, а также возможностью для таких выходных функций допускать реализацию меньшей размерности, система (2.1), допускающая CDS-декомпозицию $(2.17), (2.18)$, обладает еще одним свойством, являвшимся предметом исследования в так называемой "теории инвариантности" [14, 23, 24, 35-40, 60, 71, 72, 76, 81, 84, 100, 115, 118-122, 132, 136-138, 142].

В терминах величин, фигурирующих в $(2.17), (2.18)$, это свойство есть очевидная независимость (инвариантность) фазовых переменных z, фигурирующих в (2.17) от управлений w фигурирующих в (2.18). В терминах исходной системы (2.1) это свойство можно сформулировать как независимость всякой системы выходов (2.3), если они выражаются функционально только через функции (2.7) от функциональных комбинаций (2.15) управлений u.

Исходной идеей, послужившей началом "теории инвариантности" [132] была идея с помощью обратных связей, т.е. назначения некоторых управлений как функций фазовых переменных, реализовать CDS-декомпозицию вида, например, (2.17), (2.18) так, чтобы на представляющие практический интерес "выходы" $z^1, ..., z^m$ не влияли являющиеся не контролируемыми и неизмеряемыми возмущения "входы" w (см. раздел 4, пункт 5).

Наличие у системы (2.1) CDS-декомпозиций (2.17), (2.18) позволяет вместе с традиционным способом формализации цели управления для системы (2.1), состоящим в постановке для нее *одной* цели, например, в достижении из начального состояния (t_0, y_0) множества состояний $T \subset M$ (с условием, возможно, чтобы некоторая функция, определенная на множестве $\mathbf{U}_0$ управлений, достигающих этой цели, приняла экстремальное значение - см. выше) предложить также еще один способ управления, состоящий в постановке для нее *двух* целей, находящихся друг с другом, вообще говоря, в отношении порядка. Одна из них - "верхняя", ставится для системы (2.17) и формулируется в терминах фигурирующих в ней величин z, ν, например, достичь множества состояний T' в пространстве (t, z). После того,как будут определены достигающие эту цель управления $\nu = \nu^*(t)$ и соответствующие этим управлениям и начальному состоянию (t_0, z_0) фазовые переменные $z = z^*(t)$, эти величины подставляются в систему (2.18). Для возникшей после этого подстановки замкнутой системы ставится своя - "низшая" цель, которая достигается выбором фигурирующих в этой системе управлений w.

Для реализации этого способа управления необходима иерархическая двухуровневая организация, верхний уровень которой оперирует с системой (2.17), нижний - с системой (2.18), однако, после того, как верхний уровень "спустит" в нее свои "решения" $\nu = \nu^*(t)$, $z = z^*(t)$.

У системы (2.1) могут быть CDS-декомпозиции более сложного вида, чем простейшая декомпозиция вида (2.17), (2.18) .

Множество таких декомпозиций строится следующим образом За основу берется естественное представление о множестве $\mathbf{S}(\tilde{M})$ всех простейших двухуровневых иерархических CDS(U)-декомпозиций вида (2.9), (2.10) системы (2.1) в подобласти $\tilde{M}$ области M (декомпозиционные свойства системы (2.1) с гладкими правыми частями в различных подобластях исходной области M могут быть различны - см.7, раздел 4). На множестве $\mathbf{S}(\tilde{M})$ вводится отношение частичного порядка: одна такая декомпозиция следует за другой, если фактор-система первой является в то же время фактор-системой фактор-системы второй. Частично упорядоченное множество $\mathbf{S}(\tilde{M})$ содержит наименьший элемент $\mathbf{s}_{min}$, предшествующий всем остальным, соответствующий тривиальной декомпозиции, когда фактор-система в этой декомпозиции есть исходная система (2.1), а подсистема отсутствует. Различным декомпозициям системы (2.1) соответствуют конечные подмножества $\tilde{\mathbf{S}}(\tilde{M})$ множества $\mathbf{S}(\tilde{M})$, содержащие элемент $\mathbf{s}_{min}$ и содержащие вместе с каждыми своими двумя элементами их минимальный последующий относительно частичного порядка на $\mathbf{S}(\tilde{M})$. Такие подмножества называются "структурами декомпозиции" системы (2.1) [85-88].

Каждой CDS(U)-декомпозиции соответствует CDS-декомпозиция, которая получается из CDS(U)-декомпозиции решением соответствующих задач о существенных параметрах системы функций. Возникшим таким образом CDS-декомпозициям соответствуют способы управления системой (2.1) с помощью организаций, структуры которых характеризуются соответствующими "структурами декомпозиции".

При отсутствии ограничений на управления органы управления в таких организациях полностью отделены друг от друга, если иметь в виду присущую ей естественную иерархию: каждый орган, после того, как все вышестоящие по отношению к нему органы "спустят" свои управления и соответствующие им фазовые переменные, становится полностью замкнут, т.е. на фазовые переменные этого органа (содержательно - те показатели, которые этот орган прогнозирует и которыми он управляет) влияют только управления этого органа. Ограничения на управления могут создавать дополнительные зависимости между органами. Пусть, например, скалярные управления ν_1 и ν_2 фигурируют в двух находящихся на одном и том же уровне иерархии подсистемах и связаны ограничениями

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 = 1 \tag{2.19}$$

В этом случае даже после того, как все высшие по отношению к этим двум системам органы "спустили" в них свои управления и фазовые переменные органы этих двух подистем не могут независимо друг от друга выбирать свои управления ν_1 и ν_2 в силу ограничения (2.19). Однако, путем некоторых "запретов" можно "развязать" органы. Например, введение ограничений

$$| \nu_1 |< \alpha \leq 1, | \nu_2 |< (1-\alpha^2)^{1/2}, \tag{2.20}$$

полностью "развязывает" органы, т.е. позволяет им выбирать свои управления независимо друг от друга. Это "развязывание" происходит за счет сужения области, которой могут принадлежать управления. Параметр α в (2.20) есть длина прямоугольника (2.20), вписанного в круг (2.19) и содержательно характеризует степень предпочтения при выборе управлений, которой обладает первый орган по сравнению со вторым. Установление этого параметра может быть предметом переговоров между первым и вторым органами, или же этот параметр может назначаться высшим органом, исходя из его представления о предпочтительности целей, которые достигаются первым и вторым органами. Описанный способ декомпозиции будет далее называться "ограничениями на управления".

Таким образом, возникает класс SD возможных способов управлений, реализуемых в рамках соответствующих организаций, базирующихся на декомпозиционных свойствах системы (2.1) и на ограничениях на управления. Конечно, это не единственная возможность управлять процессом, описываемым системой (2.1), с помощью некоторой организации. Можно, например, просто "раздать" различные группы управлений u разным органам, поручив каждому из них заботиться о своей группе показателей, выражаемых в терминах величин x и u. В этом случае между органами управления возникнут отношения, изучаемые в теории игр: значения показателей, интересующих органы, будут зависеть не только от своих управлений, но и от управлений, которыми распоряжаются другие органы. Способы управления из класса SD по сравнению с такими "свободными" способами организации управления обладают и достоинствами и недостатками. Достоинства состоят в том, что при способах управления из класса SD между органами не возникает отношений игрового характера: в силу свойств инвариантности высшие органы полностью "отделены" от низших, лишенных какой-либо возможности повлиять на деятельность высших органов. Поэтому управленческие задачи при способах управления из класса SD существенно легче, чем при "свободном" способе управления, требуют для своего решения меньшего количества информации и менее мощных средств их переработки. Цена, которую за это приходится платить, - ограничения в системе тех показателей, за которыми при способах управления из класса SD, способны следить органы: величины, в терминах которых органы могут формулировать свои цели, "навязаны" декомпозицией, в рамках которой происходит управление. Другими словами, при каждом фиксированном способе управления из класса SD фиксирована также иерархия "ценностей" (предпочтений), сопоставляемая с данным способом управления. Таких иерархий существует столько, сколько структур декомпозиции в множестве S системы. (Если бы способы управления из класса SD реализовывались практически, то, поскольку никаких точных декомпозиций реальных процессов не существует и любая точная декомпозиция становится приближенной, если уточнить модель процесса, то эти способы управления не ликвидировали бы, а лишь минимизировали бы в некотором смысле игровые отношения между органами управления).

Если иерархия целей (ценностей, предпочтений), которые необходимо достигать при функционировании системы, заранее задана, то способа управления из класса SD, реализующего именно эту иерархию, может не оказаться. Однако, практически всегда можно организовать соответствующую этой иерархии декомпозицию системы, ликвидирующую игровые отношения между различными органами и облегчающую тем самым решение управленческих задач, потратив на это часть ресурса управления, т.е. назначая часть управлений в виде обратных связей так, чтобы в системе возникла желательная декомпозиция.

5. Наблюдение за достаточно сложными техническими, организационно - техническими, биологическими, социальными управляемыми системами (порядок систем в этом перечислении (примерно) соответствует возрастанию их сложности) дает основание полагать, что все они тратят часть своего ресурса управления на осуществление декомпозиции с помощью обратных связей и ограничений на управления. Целью этой декомпозиции является реализация иерархической системы целей (ценностей, предпочтений), достигаемых системой, приведение в соответствие возникающих при этом управленческих задач имеющимся возможностям их решения и встроенной в систему информационной

технологии (средств сбора, хранения, обработки, передачи информации). Работы [99, 105, 106, 129] свидетельствуют о том, что управление техническими системами достаточной сложности вряд ли осуществимо вне их предварительной декомпозиции с помощью обратных связей.

В очень сложных биологических и социальных системах существует еще одна цель декомпозиций, осуществляемых с помощью обратных связей и ограничений на управления, которая состоит в удержании определенной совокупности характеристик системы в некоторых, как правило, очень узких пределах. Совокупность таких характеристик естественно назвать "внутренней средой системы". Такая система существует как данная система до тех пор, пока она способна поддерживать внутреннюю среду и свою декомпозиционную структуру - вне этой поддержки она либо разрушается либо переходит в другую систему, способную какими-то другими обратными связями поддерживать другую среду и другую структуру. В очень сложных социально-экономических, биологических системах существуют, по-видимому, несколько уровней такого поддержания: на первом уровне сама исходная система декомпозируется (организуется) с помощью назначения части управлений в виде обратных связей, на втором уровне декомпозируются подсистемы в той декомпозиции, которые возникли на первом уровне, с помощью оставшегося в них ресурса управления и т.д. Каждый уровень декомпозиции при этом как на фундаменте основан на всех предыдущих и синтез управлений, осуществляемый этим уровнем, становится совершенно неадекватным, если по каким либо причинам неправильно функционируют предыдущие уровни.

Для биологических и экологических систем совокупность обратных связей, поддерживающих внутреннюю среду системы и ее структуру называют "гомеостазом". Элементы гомеостаза (самосохранения) присутствуют и в социально - экономических сообществах. Например, одним из элементов, определяющих социально-экономическую структуру сообщества, является действующая в нем политическая подсистема, реализующая обратную связь между интересами и стремлениями людей и иерархией ценностей (предпочтений), которая достигается властями и которой соответствует определенное устройство общества. В таких сообществах обратными связями и ограничениями на управления являются также, правовые, нравственные и этические нормы.

Таким образом, все достаточно сложные управляемые системы, которые мы наблюдаем, обладают декомпозиционной структурой поддерживаемой механизмами обратных связей и ограничений на управления. Несмотря на то, что адекватное описание многих сложных управляемых систем, о которых шла речь, пока недоступно технологии математического моделирования как раз из-за сложности, тем не менее изучение их с помощью средств теории декомпозиции - языковой среды, которую она порождает, ее понятий и фактов представляется естественным, перспективным и полезным.

3 Декомпозиция семейств отображений

1. Пусть X - множество, Q - отношение эквивалентности на $X. \tilde{X}$ будет обозначать часть множества $X(\tilde{X} \subset X), \beta(X)$ - множество всех его частей, $\omega_{\tilde{X}X} : \tilde{X} \to X$ - каноническую инъекцию $(\omega_{\tilde{X}X}(y) = y), X_Q = X/Q$ - фактор-множество по Q, x_Q содержащий x класс эквивалентности по $Q, \pi_{QX} : X_Q \to X$ - каноническую проекцию $(\pi_{QX}(x) = x_Q), \Delta_X$ - диагональ множества $X(\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\})$. Индексы во введенных обозначениях будут опускаться, если это не может привести к недоразумениям. Далее будет отождествляться с помощью естественной канонической биекции $x \to \{x\}$ множество X и его фактор-множество $X_\Delta = X/\Delta_X$, состоящее из тех и только тех подмножеств множества X, которые содержат его единственный элемент. Пусть $f : X \to Y$ - отображение. Q_f будет обозначать отношение эквивалентности на X, ассоциированное с $f : (x,x') \in Q_f \iff f(x) = f(x')$. Пусть $(E_i)_{i \in I}$ - семейство множеств. $\prod\limits_{i \in I}{}^p E_i$ будет обозначать декартово произведение множеств E_i, (т.е. множество функциональных графиков F с областью определения I, таких, что $(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in E_i))$, $pr_i : \prod\limits_{i \in I}{}^p E_i \to E_i - i-$ую каноническую проекцию, $\sum\limits_{i \in I}{}^c E_i$ - свободную сумму (т.е. $\bigcup\limits_{i \in I}(E_i \times \{i\})$) множеств $E_i, j_i : E_i \to \sum\limits_{i \in I}{}^c E_i - i-$ую каноническую инъекцию $(j_i(x) = (x,i))$.

2. Исчисления родов структур [20], средства которых используются для изучения декомпозиций семейств отображений являются формальными системами (ФС) определенного типа, называемыми далее "бур-

баковскими". Также как и в большинстве ФС в этих системах объекты, с которыми оперируют в математических рассуждениях, интерпретируются как термы, а свойства этих объектов - как соотношения. И термы и соотношения являются словами некоторого языка (который можно считать одним и тем же для всех бурбаковских ФС) над некоторым алфавитом.

Часть соотношений объявляется аксиомами - истинными в рамках данной ФС утверждениями о свойствах объектов. Аксиомы делятся на два класса - неявные и явные (собственные). Неявные аксиомы (логические тавтологии) определяются посредством схем аксиом, задающих правила, с помощью которых из некоторого (своего для каждой схемы) количества термов и соотношений строятся соотношения, по определению являющиеся неявными аксиомами. Явные аксиомы - это почерпнутые из опыта соотношения, из которых (и также из неявных аксиом) с помощью носящего стандартный характер правила (modus pones) в данной ФС выводятся теоремы - истинные в ней утверждения о свойствах объектов. Буквы, фигурирующие в явных аксиомах ФС, называются ее константами.

"Обычные" математические рассуждения (т.е. те, которые не имеют "языковой" основы) интерпретируются как оперирование не в одной, а в нескольких бурбаковских ФС с постоянными, подчиняющимися определенным правилам, переходами из одной системы в другую. Имеется "центральная" бурбаковская ФС - "теория множеств" [20], которая далее для краткости обозначается идентификатором ТМ. Интуитивно, термы в ТМ - это множества, соотношения - это взаимоотношения между термами, сводящиеся в конечном счете к двум "основополагающим" - принадлежности одного терма другому и их равенства. ТМ содержит восемь схем аксиом и пять явных аксиом, не содержащих никаких букв (т.е. ТМ - это ФС без констант). Натуральные числа (0,1,2,...), множество $\mathcal{N}$ натуральных чисел, множество $\mathcal{Z}$ целых чисел, множество $\mathcal{Q}$ рациональных чисел, множество $\mathcal{R}$ действительных чисел являются в ТМ термами, не содержащими никаких букв.

Формальная система Ф считается более сильной чем формальная система Ф' если все буквы Ф' - буквы Ф, все аксиомы Ф' - теоремы Ф. В этом случае и все теоремы Ф' - теоремы Ф.

Для пояснения приводимого далее описания исчисления родов структур, рассмотрим коротко несколько примеров задания математических объектов. Частично упорядоченное множество X можно задать зафиксировав, бинарное отношение $\sigma \subset X \times X$ и предъявив к нему требования $\Delta_x \subset \sigma, \sigma^{-1} \circ \sigma = \Delta_X, \sigma \circ \sigma = \sigma$. Абстрактную группу G можно задать, зафиксировав тернарное отношение $\sigma \subset G \times G \times G((a, b, c) \in \sigma \iff a \cdot b = c)$ и предъявив к нему требования, выражающие известные свойства задаваемой с помощью σ алгебраической операции. Действие абстрактной группы G на множестве X можно задать, зафиксировав тернарное отношение $\mu \subset G \times X \times X$ и предъявив к нему соответствующие требования. Поле P можно задать, зафиксировав два тернарных отношения $\sigma_1 \subset P \times P \times P$ и $\sigma_2 \subset P \times P \times P$, первое из которых определяет сложение в $P((a,b,c) \in \sigma_1 \Longleftrightarrow a+b=c)$, второе - умножение $((a,b,c) \in \sigma_2 \Longleftrightarrow a \cdot b = c)$. К этим отношениям необходимо предъявить требования, выражающие известные свойства задаваемых ими алгебраических операций. Пусть уже имеется некоторое поле P (т.е. тройка (P, σ_1, σ_2)). Задать линейное векторное пространство X над полем P можно, зафиксировав два тернарных отношения $s_1 \subset X \times X \times X$ и $s_2 \subset P \times X \times X$, первое из которых определяет сложение в X, второе - умножение элементов из X на "скаляры" из P. К этим отношениям необходимо предъявить требования, выражающие известные свойства соответствующих алгебраических операций. Задать топологическое пространство X можно, зафиксировав отношение $t \subset \beta(X) \times X$. Соотношение $(U, a) \in t$ на "топологическом языке" читается как "a есть предельная точка множества U". К t необходимо предъявить требования, делающие естественной его трактовку как отношения близости между точкой и множеством.

Во всех случаях при задании математического объекта фиксируется исходное (базисное) множество (их может быть несколько), на котором этот объект будет определяться, фиксируется некоторое вспомогательное множество (например, поле P при определении ЛВП), с помощью которого это объект будет определяться (вспомогательных множеств может быть несколько или не быть вовсе), фиксируется некоторое количество отношений (т.е. подмножеств прямого произведения некоторого семейства множеств) между элементами базисных и вспомогательных множеств (или между их элементами и элементами их подмножеств, как, например, при задании топологического пространства), и этим отношениям предъявляют необходимые требования.

3. Род структуры $\Sigma = (X, \sigma, A, \sigma \in S(X, A), R(X, \sigma))$ в некоторой бурбаковской системе B, более сильной чем ТМ, есть текст, т.е. последовательность термов и соотношений, задающий схему образования математического объекта. Эта последовательность содержит:

- буквы $X_1, ..., X_n$, обозначающие множества, на которых задается объект, называемые базисными множествами рода структуры Σ (они не должны совпадать с константами B);

- букву σ, называемую родовой константой (имеется единственный род структуры - род структуры SET абстрактного множества, у которого отсутствует родовая константа);

- термы (множества) $A_1, ..., A_m$, (они не должны содержать букв X и σ) называемые вспомогательными множествами рода структуры Σ (они могут отсутствовать);

- соотношение $\sigma \in S(X_1, ..., X_n, A_1, ..., A_m)$, называемое типизацией рода структуры, где S обозначает схему образования с помощью операций прямого произведения и взятия множества частей некоторого множества из множеств X и A (см. ниже);

- соотношение $R(X_1, ..., X_n, \sigma)$, называемое аксиомой рода структуры Σ, предъявляющее к σ некоторое требование (аксиома может отсутствовать).

Схема, о которой упоминалось выше, есть последовательность, в которой нужно выполнять операции декартова произведения и взятия множества частей, с указанием номеров множеств, над которыми эти операции совершаются. (Считается, что основные множества перенумерованы от 1 до n, а вспомогательные - от $n+1$ до $n+m$). Например, схема $\beta(1 \times 1 \times 1) \times \beta(2 \times 1 \times 1)$ для случая, когда имеется одно базисное множество X и одно вспомогательное - P, означает множество $\beta(X \times X \times X) \times \beta(P \times X \times X)$ (оно фигурирует в типизации рода структуры поля). Такого сорта схемы будут далее обозначаться буквой S, снабженной, может быть индексами и (или) штрихами.

Для дальнейшего необходимо понятие о каноническом распространении отображений по некоторой схеме S. Пусть $f : X \to X'$ - отображение. Каноническим распространением отображения f на множество частей называется отображение $\beta(f) : \beta(X) \to \beta(X')$, определенное формулой $\beta(f)(U) = f(U)$, где $U \subset X$. Пусть $f_i : X_i \to X_i', i = 1, 2$ - отображения. Каноническим распространением отображений f_i на прямое произведение называется отображение $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to X_1' \times X_2'$, определенное формулой $f_1 \times f_2(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$. Пусть теперь $X_i, X_i', i = 1, ..., N$, множества, $f_i : X_i \to X_i', i = 1, ..., n$ - отображения. Данные выше определения позволяют канонически распространить отображения f по схеме S, в результате чего получится отображение $S(f) : S(X) \to S(X')$. Например, для упомянутой выше схемы

$\beta(1 \times 1 \times 1) \times \beta(2 \times 1 \times 1)$ каноническое распространение отображений $f : X \to X', g : P \to P'$ по этой схеме есть
$\beta(f \times f \times f) \times \beta(g \times f \times f) :$
$\beta(X \times X \times X) \times \beta(P \times X \times X) \to \beta(X' \times X' \times X') \times \beta(P' \times X' \times X')$.

Далее в рассуждениях общего характера будем считать, что род структуры Σ содержит одно базисное и одно вспомогательное множество. Однако, все рассуждения будут допускать тривиальное распространение на общий случай.

Аксиома $R(X, \sigma)$ рода структуры должна быть переносима в системе B при биекциях. Это означает, что, если $f : X \to X'$ - биекция и $\sigma' = S(f, id_A)(\sigma)$, где $id_A : A \to A$ - тождественные отображения вспомогательных множеств, то соотношения $R(X, \sigma)$ и $R(X', \sigma')$ в системе B эквивалентны.

Исчисление $B\Sigma$ рода структуры Σ в B есть ФС, получающаяся присоединением к явным аксиомам B соотношения типизации и аксиомы рода структуры Σ. Интуитивно, задавая род структуры Σ в B мы конструируем математический объект, состоящий из множеств X, с заданными, удовлетворяющими требованиям $R(X, \sigma)$, отношениями σ типа S между его элементами, которые строятся, может быть, с помощью вспомогательных множеств A, а система $B\Sigma$ специально предназначена для изучения такого объекта. Пусть некоторая бурбаковская система B' сильнее чем B. Совокупность термов (E, τ) системы B' называется Σ - объектом в B', если в B' справедливы соотношения

$\tau \in S(E,A)$ и $R(E,\tau)$. Терм τ называется структурой рода Σ на множестве E. Говорят также, что множество E снабжено структурой τ рода Σ. Все то, что выводимо в $B\Sigma$ относительно (X,σ) выполняется в B' для (E,τ).

Пусть - (E,τ), (E',τ') - два Σ-объекта. Биекция $f : X \to X'$ называется изоморфизмом объекта (E,τ) на объект (E',τ'), если $\tau' = S(f, id_A)(\tau)$. Автоморфизм объекта (E,τ) - это его изоморфизм на себя. Множество автоморфизмов объекта (E,τ) обозначается $Aut(E,\tau)$. Оно естественным образом снабжается структурой $GA(E,\tau) \subset Aut(E,\tau) \times Aut(E,\tau) \times Aut(E,\tau)$ рода абстрактной группы, а множество E - структурой $TA(E,\tau) \subset Aut(E,\tau) \times E \times E$ действия группы $(Aut(E,\tau), GA(E,\tau))$ на E.

4. Пусть $M(x,s,y,t)$ - терм в системе B. Если $M(x,s,y,t)$ удовлетворяет условиям:

а) соотношение "s - структура рода Σ на x" $\wedge$ "t - структура рода Σ на y" $\wedge\, f \in M(x,s,y,t)$ влечет соотношение "f есть отображение из x в y";

б) для любой B' более сильной чем B и любых Σ-объектов (E,τ), (E',τ'), (E'',τ'') соотношения $f \in M(E,\tau,E',\tau') \wedge g \in M(E',\tau',E'',\tau'')$ влекут $g \circ f \in M(E,\tau,E'',\tau'')$;

в)для любой B' более сильной чем B и любых Σ-объектов (E,τ), (E',τ') соотношение "$f : E \to E'$ - биекция"$\wedge f \in M(E,\tau,E',\tau') \wedge f^{-1} \in M(E',\tau',E,\tau)$ эквивалентно соотношению "f - изоморфизм объекта

(E, τ) в объект (E, τ)".

Тогда говорят, что терм M задает M-морфизмы и словосочетание "f - морфизм из (E, τ), в (E', τ')" употребляют для обозначения соотношения $f \in M(E, \tau, E', \tau')$.

Класс Σ-объектов в B' с M-морфизмами удовлетворяет, очевидно, аксиомам теории категорий. В связи с этим четверка (B, Σ, M, B') будет именоваться категорией. Далее будут использоваться как средства исчисления родов структур, так и средства теории категорий. Необходимо заметить, однако, что ряд объектов, имеющих в теории категорий и в исчислениях родов структур одинаковые названия, обладают разным смыслом в этих двух языковых системах. Там, где могут возникнуть недоразумения, понятия теории категорий будут снабжаться определением "категорный". Как правило, все элементы категории (B, Σ, M, B') будут носить стандартный характер: B будет, если не оговорено противное, бурбаковской теорией множеств, M - каноническими естественными морфизмами (см. ниже), B' - произвольной бурбаковской системой, более сильной, чем теория множеств. В связи с этим категория (B, Σ, M, B') и участвующий в ней род структуры Σ будут иногда отождествляться.

Определение 1. Пусть (E, τ) - Σ-объект, $\tilde{E} \subset E, Q$ - отношение эквивалентности. Если $\tilde{E}$ (фактор-множество $E_Q = E/Q$) можно снабдить структурой $\tilde{\tau}$ (структурой τ_Q) рода Σ так, что для любого Σ-объекта (E', τ') и любого отображения $g : E' \to \tilde{E}$ (и любого отображения

$g : E_Q \to E'$) условие "g есть M-морфизм" и условие "$\omega_{\tilde{E}E} \circ g$ есть M-морфизм" ("$g \circ \pi_{EQ}$ есть M-морфизм") эквивалентны, то структура $\tilde{\tau}(\tau_Q)$ называется подструктурой (фактор-структурой) структуры τ, объект $(\tilde{E}, \tilde{\tau})((E_Q, \tau_Q))$ называется подобъектом (фактор-объектом) или P-объектом (F-объектом) объекта (E, τ), множество $\tilde{E}$ называется P-множеством (отношение Q называется F-отношением). Далее для подобъекта $(\tilde{E}, \tilde{\tau})$ объекта (E, τ) будет употребляться обозначение $(E, \tau) \mid_{\tilde{E}}$, для F-объекта по F-отношению Q - обозначение $(E, \tau)/Q$. Множество P-множеств объекта (E, τ) будет обозначаться $\mathrm{P}(E, \tau)$, множество F-отношений - $\mathrm{F}(E, \tau)$. ■

Объект будет называться P-простым, если он не имеет нетривиальных P - объектов, - F-простым, если он не имеет нетривиальных F-объектов. (Всякий объект имеет тривиальный P-объект и тривиальный F-объект - самого себя).

На множестве $\mathrm{P}(E, \tau)$ $(\mathrm{F}(E, \tau))$ объекта (E, τ) естественным образом (по включению P-множеств (F-отношений)) генерируется структура $\mathrm{V}(E, \tau)$ $(W(E, \tau))$ рода частичного порядка.

Непосредственно из определений вытекают следующие утверждения [20]:

(а) если (Y, τ_Y) $((E_Q, \tau_Q))$ - P-объект (F-объект) объекта (E, τ), то ω_{YE} (π_{QE}) - морфизм;

(б) если на множестве $\tilde{E} \subset E$ (на множестве $E_Q = E/Q$) существует P-объект (F-объект) $(\tilde{E}, \tilde{\tau})$ $((E_Q, \tau_Q))$ Σ-объекта (E, τ) , то он единственен;

(в) P-объект (F-объект) P-объекта (F-объекта) есть P-объект (F-объект) исходного объекта.

Важность понятий подобъекта и фактор-объекта объясняется следующим фактом.

Предложение 1. При изоморфизме P-множества переходят в P-множества, F-отношения - в F-отношения. (Доказательство см. в [97].)

Таким образом, всякий автоморфизм объекта (E,τ) порождает автоморфизм объекта $(\mathrm{P}(E,\tau),\ \mathrm{V}(E,\tau))$, а также автоморфизм объекта $(\mathrm{F}(E,\tau),\ \mathrm{W}(E,\tau))$.

Определение 2. Пусть $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ - семейство Σ объектов. Если прямое произведение $\prod\limits_{i\in I}{}^pE_i$ (свободную сумму $\sum\limits_{i\in I}{}^cE_i$) множеств E_i можно снабдить структурой τ рода Σ так, что для любого Σ-объекта (E',τ') и любого отображения $g: E'\to\prod\limits_{i\in I}{}^pE_i$ (и любого отображения $g:\sum\limits_{i\in I}{}^cE_i\to E'$) условие "$g - M$-морфизм" и условие "для любого i все отображения $pr_i\circ g$ (все отображения $g\circ j_i$) $- M$-морфизмы" эквивалентны, то структура τ называется прямым произведением (свободной суммой) структур τ_i,Σ-объект $(\prod\limits_{i\in I}{}^pE_i,\tau)$ $((\sum\limits_{i\in I}{}^cE_i,\tau))$ называется декартовым произведением (свободной суммой) семейства Σ-объектов $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$.

Следующая схема,

$$(E',\tau')\xrightarrow{g}(\prod_{i\in I}{}^pE_i,\tau)\xrightarrow{pr_i}(E_i,\tau_i)\mid(E_i,\tau_i)\xrightarrow{j_i}(\sum_{i\in I}{}^cE_i,\tau)\xrightarrow{g}(E',\tau'),$$

иллюстрирующая определение 2, подчеркивает двойственный характер свободной суммы и декартова произведения семейства объектов.

В [20] то, что названо здесь "декартовым произведением", называется просто "произведением", а то, что здесь названо свободной суммой называется просто "суммой". Это изменение терминологии, введенной в [20], вызвано тем,что понятие "произведение" и "сумма" определяются также в теории категорий и имеют там смысл, отличный от определяемых здесь декартова произведения и свободной суммы. Именно, определение категорного произведения и категорной суммы в рамках используемых здесь языковых средств выглядят следующим образом.

Определение 3. Пусть $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ - семейство Σ-объектов, (E, τ) - некоторый Σ-объект. Если найдутся такие M-морфизмы $f_i : E \to E_i (f_i : E_i \to E)$, что для любого Σ-объекта (E', τ') и любых M-морфизмов $g_i : E' \to E_i (g_i : E_i \to E')$ существует единственный M-морфизм $f : E' \to E (f : E \to E')$ такой, что для всех $i \in I$ имеет место $f_i \circ f = g_i$ $(f \circ f_i = g_i)$, то объект (E, τ) называется произведением (суммой или копроизведением) семейства объектов $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ относительно M-морфизмов и обозначается $\prod\limits_{i \in I}(E_i, \tau_i)$ $(\sum\limits_{i \in I}(E_i, \tau_i))$. ■

Предложение 2. Если декартово произведение (свободная сумма) семейства объектов существует, то оно единственно [20,95,96].

Определение 4. Пусть (E, τ) – Σ-объект, $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ -семейство Σ -объектов, $(\sum\limits_{i \in I}{}^c E_i, \tau^c)$ - их свободная сумма $((\prod\limits_{i \in I}{}^p E_i, \tau^p)$ - их декартово произведение). Если существует изоморфизм объекта (E, τ) на объект

$(\sum\limits_{i\in I}{}^{c}E_i,\tau^c)$ $((\prod\limits_{i\in I}{}^{p}E_i,\tau^p))$, то будем говорить, что объект (E,τ) допускает декомпозицию на свободную сумму (декартово произведение) семейства $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ и писать $(E,\tau) \approx (\sum\limits_{i\in I}{}^{c}E_i,\tau^c)$ $((E,\tau) \approx (\prod\limits_{i\in I}{}^{p}E_i,\tau^p))$. Для сокращения речи вместо слов "декомпозиция на свободную сумму" будет употребляться выражение "СС-декомпозиция". Аналогичный смысл будет иметь выражение "ПП-декомпозиция". Объект, не допускающий никакой нетривиальной СС-декомпозиции (тривиальная декомпозиция соответствует случаю, когда семейство объектов, о котором идет речь в определении 4, состоит из единственного объекта - его самого) будет называться неразложимым, недопускающий никакой нетривиальной ПП-декомпозиции - нерасслаивающимся. ∎

Декартово произведение и свободная сумма для данного семейства объектов определяются единственным образом, категорные произведения и сумма - с точностью до единственного изоморфизма [19]: если (E,τ) и (E',τ') - два произведения (копроизведения) одного и того же семейства объектов $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$, то существует единственный изоморфизм $f:(E,\tau)\to(E',\tau')$.

Если для любого семейства Σ-объектов $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ в $BI' \geq\ BI$ свободная сумма (сумма) относительно M-морфизмов существует, то категория (B,Σ,M,B') называется категорией со свободной суммой (суммой). Аналогично определяется категория с декартовым произведением (произведением) и категория с конечной свободной суммой (конечным декартовым произведением (произведением)).

Следующее определение вводит класс категорий, в которых изучение декомпозиций объектов существенно упрощается и к которым принадлежат многие представляющие непосредственный практический интерес объекты.

Определение 5. Пусть (E, τ) и (E', τ') -произвольные Σ-объекты в категории $(B, \Sigma, M,\ B')$, $f : E \to E'$ - произвольный M-морфизм, $f = \omega_f \circ b_f \circ \pi_f$ - каноническое разложение этого морфизма на проекцию $\pi_f : E \to E_Q = E/Q_f$, биекцию $b_f : E_Q \to \tilde{E}' = f(E)$ и инъекцию $\omega_f : \tilde{E}' \to E'$. Если всегда на E_Q существует фактор-структура τ_Q структуры τ, на $\tilde{E}'$ существует подструктура $\tilde{\tau}'$ структуры τ' и биекция b_f является изоморфизмом объекта (E_Q, τ_Q) на объект $(\tilde{E}', \tilde{\tau}')$, то категорию (B, Σ, M, B') будем называть HPF-категорией. $\blacksquare$

Непосредственными следствиями введенного определения являются следующие предложения 3-6, доказательства которых можно найти в [97].

Предложение 3. В HPF-категориях биективный морфизм является изоморфизмом.

Предложение 4. Пусть (B, Σ, M, B') - HPF-категория, $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ - семейство Σ-объектов, $(\sum\limits_{i \in I}{}^{c} E_i, \tau^c)$ - их свободная сумма $((\prod\limits_{i \in I}{}^{p} E_i, \tau^p)$ - их декартово произведение). Подмножество $E_i \times \{i\}$ является P-множеством и подобъект, индуцируемый объектом $(\sum\limits_{i \in I}{}^{c} E_i, \tau^c)$ на множестве $E_i \times \{i\}$ изоморфен объекту (E_i, τ_i). (Отношение эквивалентности Q_i, ассоциированное с канонической проекцией $pr_i : \prod\limits_{i \in I}{}^{p} E_i \to E_i$

является F-отношением и фактор-объект объекта $(\prod\limits_{i\in I}{}^pE_i,\tau^p)$ по этому отношению изоморфен объекту (E_i,τ_i)).

<u>Предложение 5.</u> В HPF-категориях со свободной суммой Σ-объект (E,τ) допускает декомпозицию на свободную сумму тогда и только тогда, когда существует семейство $(E_i)_{i\in I}$ P-множеств для объекта (E,τ) (семейство $(E_{1i},E_{2i})_{i\in I}$ P-пар для объекта (E_1,E_2,τ), если род структуры содержит два базисных множества - аналогично в случае, если род структуры содержит более двух базисных множеств), образующее разбиение множества E, т.е. такое, что $\bigcup\limits_{i\in I}E_i=E$ и $E_i\bigcap E_j=\oslash$ при $i\neq j$ ($\bigcup\limits_{i\in I}E_{1i}=E_1$, $\bigcup\limits_{i\in I}E_{2i}=E_2$ и $E_{1i}\bigcap E_{1j}=\oslash$ при $i\neq j$, $E_{2i}\bigcap E_{2j}=\oslash$ при $i\neq j$, если род структуры содержит два базисных множества).

<u>Предложение 6.</u> В HPF-категориях с декартовым произведением объект (E,τ) допускает декомпозицию на декартово произведение $(\prod\limits_{i\in I}{}^pE_i,\tau^p)$ семейства Σ-объектов $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ тогда и только тогда, когда существует семейство $(Q_i)_{i\in I}$ F-отношений для объекта (E,τ) (семейство $(Q_{1i},Q_{2i})_{i\in I}$ F-пар для объекта (E_1,E_2,τ), если род структуры содержит два базисных множества - аналогично в случае, если род структуры содержит более двух базисных множеств),такое, что $\bigcap\limits_{i\in I}(x_{Qi})$, где $x_{Qi}\in\ E/Q_i$, содержит единственный элемент множества E ($\bigcap\limits_{i\in I}x_{Q1i}$ и $\bigcap\limits_{i\in I}x_{Q2i}$ содержат по единственному элементу множеств E_1 и E_2, соответственно, где $x_{Q1i}\in E_1/Q_{1i}$, $x_{Q2i}\in E_2/Q_{2i}$).

<u>Определение 6.</u> Пусть (B,Σ,M,B') - HPF-категория со свободной

суммой, (E,τ) - Σ - объект. Множество разбиений множества E, удовлетворяющее условиям предложения 5, будем обозначать $D(E,\tau)$ и называть множеством СС-декомпозиций объекта (E,τ). Множество $D(E,\tau)$ естественным образом снабжается структурой $S(E,\tau)$ частичного порядка: $(R_1,R_2)\in S(E,\tau)$ для $R_1\in D(E,\tau)$ и $R_2\in D(E,\tau)$ если и только если разбиение R_1 крупнее разбиения R_2 или, что то же самое, $Q_1\supset Q_2$, где Q_1 и Q_2 - отношения эквивалентности, соответствующие разбиениям R_1 и R_2. Объект $(D(E,\tau),S(E,\tau))$ будет называться декомпозиционной СС-структурой для (E,τ). Далее мы будем отождествлять разбиения множества E, принадлежащее $D(E,\tau)$ и соответствующие им отношения эквивалентности.

Определение 7. Пусть (B,Σ,M,B') - HPF-категория с декартовым произведением, (E,τ) – Σ-объект. Множество семейств $(Q_i)_{i\in I}$ F-отношений для объекта (E,τ), удовлетворяющих условиям предложения 6, будем обозначать $H(E,\tau)$ и называть множеством ПП-декомпозиций объекта (E,τ). Множество $H(E,\tau)$ естественным образом снабжается структурой $T(E,\tau)$ частичного порядка: $((Q_i)_{i\in I},(Q'_j)_{j\in J})\in T(E,\tau)$ для $(Q_i)_{i\in I}\in G(E,\tau)$ и $(Q'_j)_{j\in J}\in G(E,\tau)$ если и только если для любого $j\in J$ найдется $i\in I$ такое, что $Q'_j\subset Q_i$. Объект $(H(E,\tau),T(E,\tau))$ будет называться декомпозиционной ПП-структурой для (E,τ).

Предложение 7. В HPF-категориях со свободной суммой (декартовым произведением) декомпозиционные СС-структуры (ПП-структуры) изоморфных объектов изоморфны.

5. Род структуры Σ будем называть естественным, если его типизация может быть записана в форме $\sigma \subset S(X, A)$. Пусть Σ - естественный род структуры и (E, τ), (E', τ') - два Σ-объекта. Отображение $f : X \to X'$ назовем естественным каноническим морфизмом объекта (E, τ) в объект (E', τ'), если $S(f, id_A)(\tau) \subseteq \tau'$. Очевидно, что естественные канонические морфизмы удовлетворяют перечисленным выше условиям а), б), в).

Далее будут рассматриваться только естественные рода структур и, если не оговорено противное - естественные канонические морфизмы, обозначаемые для краткости ЕКМ.

5.1. Категория SET множеств с произвольными отображениями в качестве морфизмов является HPF-категорией со свободной суммой и декартовым произведением. Любая часть Y множества X является его P-множеством в категории SET, любое отношение эквивалентности Q на X - его F-отношением. В этой категории множеству $D(X)$ принадлежит любое разбиение множества X, $(D(X), S(X))$ является полной решеткой с наибольшим элементом, соответствующим отношению эквивалентности Δ_X и наименьшим элементом, соответствующим отношению эквивалентности $X \times X$.

5.2. Категория MSET (категория морфизмов в категории SET) произвольных отображений $f = (A, B, F)$, обычно записываемых как $f : A \to B$, в которой ЕКМ объекта $f = (A, B, F)$ $(f : A \to B)$

в объект $f' = (A', B', F')$ $(f' : A' \to B')$ есть пара отображений $(m_A : A \to A'\ m_B : B \to B')$, сохраняющая график, т.е. такая, что $m_A \times m_B(F) \subset F'$ или $m_B \circ f = f' \circ m_A$, является HPF-категорией со свободной суммой и декартовым произведением. Род структуры этой категории содержит два базисных множества, поэтому здесь нужно говорить не о P-множествах и F-отношениях, а о P-парах и F-парах. Имеют место соотношения: $(X, Y) \in P(f) \to f(X) \subset Y, (Q_A, Q_B) \in F(f) \Longleftrightarrow Q_A \subset (f \times f)^{-1}(Q_B)$ [93-95].

В силу предложения 5 объект (X, Y, F) допускает декомпозицию на свободную сумму тогда и только тогда, когда существует семейство $(X_i, Y_i)_{i \in I}$ P-пар для (X, Y, F), таких что $(X_i)_{i \in I}$ и $(Y_i)_{i \in I}$ образуют разбиения множеств X и Y, соответственно. Пусть Q_X, Q_Y отношения эквивалентности, порождаемые на X и Y этими разбиениями. Тогда пара (Q_X, Q_Y) есть F-пара для f. Таким образом, множество $D(f)$ объекта $f = (X, Y, F)$ категории MSET состоит из тех и только тех пар разбиений множеств X и Y, которым соответствуют пары F-отношений для f такие, что соответствующие им F-объекты являются биекциями. Декомпозиционная структура $(D(f), S(f))$ объекта $f = (X, Y, F)$ в этой категории является полной решеткой с наименьшим элементом $(X \times X, Y \times Y)$. Декомпозиционная структура сюръективного отображения f содержит наибольший элемент, соответствующий паре (Q_f, Δ_Y). Неразложимыми объектами являются постоянные отображения.

Пара отношений эквивалентности, соответствующая подобъекту $(h_j^X, h_j^Y)_{j \in J}$ объекта $(Aut(f), GA(f))$ является F-парой для объекта f [94]. Таким образом, в этой категории существует отображение $PAut : P(Aut(f), GA(f)) \to F(f)$.

5.3. Категория ESET (категория эндоморфизмов в категории SET) отображений $f : X \to X$ множеств в себя, в которой ЕКМ объекта $f : X \to X$ в объект $f' : X' \to X'$ есть отображение $m : X \to X'$ сохраняющее график, т.е. такое, что $m \circ f = f' \circ m$, является HPF-категорией со свободной суммой и декартовым произведением. $\tilde{X} \in P(f) \iff f(\tilde{X}) \subset \tilde{X}$, $Q \in F(f) \to Q \subset (f \times f)^{-1}(Q)$. Если $\tilde{X}$ есть P-множество (Q есть F-отношение) для f, то $\tilde{X}(Q)$ есть P-множество (F-отношение) для каждой функции семейства $(f^i)_{i \in \mathcal{N}} = \{id_X, f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f, ...\}$ [94]. Если Q (семейство $(Q_i)_{i \in I}$) принадлежит декомпозиционной СС-структуре (ПП-структуре) объекта f, то Q (семейство $(Q_i)_{i \in I}$) принадлежит декомпозиционной СС-структуре (ПП-структуре) объекта $(f^i)_{i \in \mathcal{N}}$.

В этой категории множеству $D(f)$ объекта $f : X \to X$ принадлежат разбиения X, соответствующие таким F-отношениям Q, для которых $f/Q = id_{X_Q}$ и только они. Здесь $(D(f), S(f))$ является полной решеткой с наибольшим - $Q_{min}(f)$ и наименьшим - $X \times X$ элементами. $Q_{min}(f)$ есть транзитивное дополнение бинарного отношения

$$\{(x, x') \mid ((\exists n \in \mathcal{N})(x' = f^n(x)) \vee (\exists m \in \mathcal{N})(x = f^m(x')))\}.$$

В этой категории с каждым F-отношением Q можно ассоциировать некоторый элемент множества $D(f)$. Этот элемент порождается отношением $Q_{min}(f/Q)$, трактуемым как отношение эквивалентности на X. Действие на множестве X любой подгруппы группы автоморфизмов $(Aut(f), GA(f))$ объекта $f : X \to X$ категории ESET порождает F-отношение для f. Поэтому в этой категории существует отображение $PAut : P(Aut(f)) \to D(f)$ из множества подобъектов объекта $Aut(f)$ в $D(f)$.

5.4. Категория GR абстрактной группы является HPF-категорией, что устанавливается классической теоремой о гомоморфизмах. Категория абстрактных групп является категорией с декартовым произведением, но без свободной суммы. Однако, категорная сумма в категории абстрактных групп существует [117].

Категория EQ отношений эквивалентности, объекты которой есть пары (X, Q), где X - множество, Q - отношение эквивалентности на X с каноническими естественными морфизмами не является HPF-категорией. Аналогичным образом дело обстоит в категории EQ^*, где объекты те же самые, а морфизм объекта (X, Q) в объект (X', Q') есть отображение $f : X :\to X'$ такое, что $(f \times f)^{-1}(Q') \subset Q$ также не являющейся HPF-категорией. Категория топологических пространств как с морфизмами, являющимися непрерывными отображениями, так и с морфизмами, являющимися открытыми отображениями не является HPF-категорией.

5.5. HPF-категорией является категория $TR(G) = (X, \mu, G, \mu \subset G \times X \times X,\ ATR(X, G,\ \sigma, \mu))$ действия на множествах фиксированной абстрактной группы G. В этой категории система B есть теория рода структуры группы в ТМ с родовой константой G (см. пункт 5.4), а G является вспомогательным множеством. Система B' в этой категории - некоторая система, более сильная чем теория рода структуры группы в "теории множеств". Аксиома $ATR(X, G, \sigma, \mu)$ рода структуры $TR(G)$ утверждает, что действие $\sigma \subset G \times X \times X$ группы G на X таково, что для любого $g \in G$ множество F_g пар (x, x'), участвующих в тройках (g, x, x') из σ является графиком биективного отображения $T_g : X \to X$, эти отображения таковы, что $T_g \circ T_h = T_{g \circ h}$ и $T_e = id_X$, где e - единица группы G. $TR(G)$-объекты будут обозначаться далее $T_G(E)$ или $\{T_g : E \to E\}_{g \in G}$. ЕКМ объекта $T_G(X)$ в объект $T_G(X')$ в этой категории есть отображение $f : X \to X'$, такое, что $(\forall g \in G)\ f \circ T_g = T'_g \circ f$.

$\tilde{E} \subset E (Q \subset E \times E)$ есть Р-множество (F-отношение) для $T_G(X)$ тогда и только тогда, когда $(\forall g \in G)\ (T_g(\tilde{E}) = \tilde{E})\ \ ((\forall g \in G)\ (T_g \times T_g(Q) = (Q)))$, множество $D(T_G(E))$ составляют F-отношения такие, что соответствующий фактор-объект состоит лишь из тождественного преобразования, и только они.

$$(P(T_G(E)), V(T_G(E)))\ , (F(T_G(E)), W(T_G(E)))\ , (D(T_G(E)), S(T_G(E)))$$

являются полными решетками с наибольшим и наименьшим элементами. Решетки

$$(P(T_G(E)), V(T_G(E)))\ , (F(T_G(E)), W(T_G(E)))$$

являются подрешетками, соответственно, решетки множества всех частей множества E и решетки всех отношений эквивалентности на E. Отношению эквивалентности Q_G,порождаемому на X действием группы G $((x \underset{Q_G}{\sim} x') \iff (\exists T_g \in T_G(E))\ (x' = T_g x))$, соответствует наибольший элемент декомпозиционной структуры объекта $T_G(E)$. Также как и в категории ESET с каждым F-отношением Q объекта $T_G(E)$ можно ассоциировать элемент декомпозиционной структуры $D(T_G(E))$, порождаемый отношением $Q_{min}(T_G(E)/Q)$.

Действие на множестве E любой подгруппы группы автоморфизмов $Aut(T_G(E))$ объекта $T_G(E)$ категории $TR(G)$ порождает F-отношение для $T_G(E)$. Поэтому в этой категории, также как и в категории ESET существует отображение $PAut : P(Aut(T_G(E), GA(T_G(E)))) \rightarrow D(T_G(E))$.

Р-простыми объектами в этой категории являются транзитивные группы.

<u>Определение 8.</u> $TR(H)$-объект $T_H(E)$ называется F-группой [35,36,39,40,127] для $TR(G)$-объекта $T_G(E)$, если $Q(T_H(E)) \in F(T_G(E))$ или, другими словами, отношение эквивалентности на X, соответствующее максимальной СС - декомпозиции объекта $T_H(E)$ является факторизующим для объекта $T_G(E)$.

<u>Предложение 8.</u> $TR(H)$-объект $T_H(E)$ является F-группой для $TR(G)$-объекта $T_G(E)$ тогда, когда $(\forall h \in H)(\forall g \in G)\ (T_g \circ T_h \circ T_g^{-1} \circ T_h^{-1}) \in T_H(E)$. Доказательство см. в [39]

Пусть (E,σ) - EQ-объект, т.е. σ - отношение эквивалентности на $E, Q_d = \bigcup\limits_{Q\in N}{}' Q$, где $N = \{Q \mid Q \subset \sigma \wedge Q \in F(T_G(E))\}$, $Q_u = \bigcap\limits_{Q\in L} Q$, где $L = \{Q \mid Q \supset \sigma \wedge Q \in F(T_G(E))\}$. (Здесь штрих у знака суммы означает операцию транзитивного замыкания соответствующего бинарного отношения.) Поскольку $F(T_G(E))$ полная решетка и подрешетка решетки всех отношений эквивалентности на E, то $Q_d \in F(T_G(E))$ и $Q_u \in F(T_G(E))$, т.е. Q_d - наибольшее F-отношение, содержащееся в σ, а Q_u - наименьшее F-отношение, содержащее σ.

Образуем ряд

$Q_1 = \sigma, Q_2 = \bigcap\limits_{g\in G} T_g \times T_g(Q_1), ..., Q_k = \bigcap\limits_{g\in G} T_g \times T_g(Q_{k-1}), ...,$
называемый нижним факторизующим для σ и ряд

$R_1 = \sigma, R_2 = \bigcup\limits_{g\in G}{}' T_g \times T_g(Q_1), ..., Q_k = \bigcup\limits_{g\in G}{}' T_g \times T_g(Q_{k-1}), ...,$
называемый верхним факторизующим для σ.

Имеют место соотношения $Q_d = \bigcap\limits_{n\in\mathcal{N}} Q_n$ $Q_u = \bigcup\limits_{n\in\mathcal{N}}{}' R_n$ [40].

5.6. Рассматривается HPF-категория FASET(I) семейств $\{f_i : E \to E\}_{i\in I}$ преобразований множества E. Соответствующий род структуры есть $(X;\sigma;I;\sigma \subset I \times X \times X;\ AFASET(X,\ \sigma))$. Его аксиома AFSET$(X,\sigma)$ утверждает, что при любом $i \in I$ множество пар (x,x') в тройках (i,x,x') из σ являются графиками биективного отображения множества X на X. Каждому объекту $\{f_i : E \to E\}_{i\in I}$ категории FASET(I) можно поставить в соответствие $TR(G)$-объект $\{f_g : E \to E\}_{g\in G}$, где G - свободная группа над I [117]. Говоря проще, $\{f_g : E \to E\}_{g\in G}$ есть наименьшая группа преобразований множества E, содержащая все преобразования семейства $\{f_i : E \to E\}_{i\in I}$. Декомпозиционные свойства объектов $\{f_i\}_{i\in I}$ и $\{f_g\}_{g\in G}$ совпадают: $P(\{f_i\}_{i\in I}) = P(\{f_g\}_{g\in G})$, $F(\{f_i\}_{i\in I}) = F(\{f_g\}_{g\in G})$, $D(\{f_i\}_{i\in I}) = D(\{f_g\}_{g\in G})$, $H(\{f_i\}_{i\in I}) = H(\{f_g\}_{g\in G})$.

5.7. Рассматривается категория GLT(G) семейств $L_G(E) = \{f_g : E \to E\}_{g\in G}$ всюду определенных групп локальных преобразований множества E. Соответствующий род структуры есть $(X;\sigma;G;\sigma \subset G \times X \times X;AFLT(X,\sigma))$, где G - вспомогательное множество, не наделенное заранее никакой структурой. Его аксиома $AFLT(X,\sigma)$ утверждает, что при любом $g \in G$ множество пар (x,x') в тройках (g,x,x') из σ являются графиками биективного отображения $f_g : dom(f_g) \to ran(f_g)$, где $dom(f_g) \subset E, ran(f_g) \subset E$; что $(\forall x \in E)(\exists g \in G)(x \in dom(f_g))$, что $f \in L_G(E) \Rightarrow f^{-1} \in L_G(E)$; что $f \in L_G(E) \wedge h \in L_G(E) \Rightarrow h \circ f \in L_G(E)$ (если $ran(f) \cap dom(h) \neq \oslash$, то $h \circ f$ есть биективное отображение из $f^{-1}(ran(f) \cap dom(h))$ в $g(ran(f) \cap dom(h))$ если $ran(f) \cap dom(h) = \oslash$, то $h \circ f$ есть пустое отображение: $h \circ f = (\oslash, \oslash, \oslash)$, которое в этом случае обязано присутствовать в$L_G(E)$).

Категория GLT(G) не является HPF-категорией, тем не менее, декомпозиционные свойства ее объектов близки к свойствам объектов категории $TR(G)$. Канонический естественный морфизм GLT(G)-объекта $L_G(E) = \{f_g : E \to E\}_{g\in G}$ в GLT(G)-объект $L_G(E') = \{f'_g : E' \to E'\}_{g\in G}$ есть $m : E \to E'$ такое, что $(\forall g \in G)((x \in dom(f_g)) \Rightarrow (m(x) \in dom(f'_g) \wedge m \circ f_g = f'_g \circ m))$. Любое $\tilde{E} \subset E$ есть P-множество объекта

$L_G(E), Q \in F(L_G(E))$ тогда и только тогда, когда $x \in dom(f_g) \wedge x' \in dom(f_g) \wedge (x, x') \in Q \Rightarrow (f_g(x), f_g(x')) \in Q$.

Также как и в категории $TR(G)$ с любой факторизацией GLT(G) - объекта $L_G(E)=\{f_g\}_{g \in G}$, такой, что фактор-объект $L_G(E)/Q$ состоит лишь из тождественных преобразований некоторых подмножеств (фактор-множеств по Q областей определения функций f_g) множества E, можно связать декомпозицию объекта $L_G(E)$ на свободную сумму. Наименьшим F-отношением $Q_{min}(L_G(E))$ такого сорта является отношение эквивалентности, генерируемое на E самим объектом $L_G(E) : (x, x') \in Q_{min}(L_G(E)) \Longleftrightarrow (\exists g \in G)(x' = f_g(x))$.

Также как и в категории $TR(G)$ с каждой факторизацией GLT(G)-объекта $L_G(E)=\{f_g\}_{g \in G}$ по F-отношению Q можно связать его декомпозицию на свободную сумму. Эта декомпозиция соответствует трактуемому как отношение эквивалентности на множестве E отношению $Q_{min}(L_G(E)/Q)$. Также как и в категории $TR(G)$ отношение эквивалентности, генерируемое на E любой подгруппой группы автоморфизмов GLT(G)-объекта $L_G(E) = \{f_g\}_{g \in G}$, является для него факторизующим.

GLT(G)-объект $L_H(E) = \{l_h\}_{h \in H}$ называется группой локальных автоморфизмов GLT(G)-объекта $L_G(E) = \{f_g\}_{g \in G}$, если $(\forall g \in G)(\forall h \in H)(((x \in dom(f_g)) \wedge (l_h(x) \in dom(f_g)) \Rightarrow (f_g(x) \in dom(l_h)) \wedge m \circ f_g = f'_g \circ m)))$. Отношение эквивалентности $Q(L_H(E))$, генерируемое группой $L_H(E)$ локальных автоморфизмов GLT(G)-объекта $L_G(E) = \{f_g\}_{g \in G}$, является для него факторизующим.

GLT(G)-объект $L_H(E) = \{l_h\}_{h\in H}$ называется локальной F - группой для GLT(G) - объекта $L_G(E) = \{f_g\}_{g\in G}$, если $Q_{min}(L_H(E))$ является F-отношением для $L_G(E)$

5.8. Каждому объекту $L_I(E) = \{f_i : E_i \to E'_i\}_{i\in I}$ категории FLT(I) семейств локальных всюду определенных преобразований можно естественным образом сопоставить FLT(G)-объект $L_G(E) = \{f_g\}_{g\in G}$ - минимальную локальную группу преобразований, содержащую все отображения из $L_I(E)$. Декомпозиционные свойства объектов $L_I(E)$ и $L_G(E)$ совпадают.

В рассматриваемых далее примерах будет опускаться громоздкая формулировка родов структур, соответствующих рассматриваемым объектам.

5.9. Рассматривается категория VF, объекты которой есть совокупность связной области $M \subset \mathcal{R}^n$, каноническим образом (с помощью тождественного отображения id_M) снабженной структурой дифференцируемого многообразия, и заданного на M гладкого векторного поля $Y : M \to TM$. Морфизмом поля Y в поле $Z : N \to TN$, где $N \in \mathcal{R}^m$, является гладкое отображение $m : M \to N$, такое, что поля Y и Z m-связны: $(\forall y \in M)(dI_y(Y(y)) = Z\mid_{m(y)})$.

Пусть

$$Y(y) = f^i(y)\partial/\partial y^i, y \in M \tag{3.1}$$

$$Z(z) = g^k(z)\partial/\partial z^k, z \in N \tag{3.2}$$

записи полей Y и Z в канонических (соответствующих картам $(M, id_M : M \to M), (N, id_N : N \to N))$ координатах. Этим объектам соответствуют объекты эквивалентной категории, обозначаемой AODE - автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dy^i/dt = f^i(y^1, ..., y^n), i = 1, ..., n, \tag{3.3}$$

$$dz^k/dt = g^k(z^1, ..., z^n), k = 1, ..., m, \tag{3.4}$$

в которой VF-морфизм $m : M \to N$ есть AODE-морфизм, обладающий свойством переводить любое решение системы (3.3) в решение системы (3.4), т.е. $z^*(t) = m(y^*(t))$ есть решение системы (3.4) для любого решения $y^{*i}(t), i = 1, ..., n$, системы (3.3).

Объектам (3.1), (3.2) и, соответственно, объектам (3.3), (3.4) соответствуют объекты категории, обозначаемой FLD(R) и эквивалентной как VF, так и AODE - порождаемые (3.1) и (3.2), локальные, вообще говоря, однопараметрические группы

$L(M) = \{T_t : domT_t \to ranT_t\}_{t \in \mathcal{R}}$

$L(N) = \{T'_t : domT'_t \to ranT'_t\}_{t \in \mathcal{R}}$

диффеоморфизмов областей M и N, соответственно, задаваемые в канонических координатах решениями $y = T(t, y_0)$ и $z = T'(t, z_0)$ систем $(3.3), (3.4)$ с начальными условиями $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, соответственно. Далее, когда речь будет идти об однопараметрических группах, порождаемых векторными полями, будут иметься в виду локальные группы, а определение "локальная" будет иногда для краткости опускаться. Случай, когда группа, порождаемая полем, глобальная, не исключается, а считается частным случаем. VF-морфизм $m : M \to N$ есть FLD(R)-морфизм, т.е. $(\forall t \in \mathcal{R})((y \in dom(T_t)) \Rightarrow (m(y) \in dom(T'_t) \wedge m \circ T_t = T'_t \circ m))$. Все морфизмы, о которых шла речь, являются естественными каноническими в соответствующих категориях. В рассматриваемых категориях на любой подобласти $\tilde{M}$ области M существует подобъект исходного объекта, определенного на M, который принято называть "ограничением" исходного объекта на область $\tilde{M}$ или его открытым подобъектом.

Рассматриваемые категории не являются HPF-категориями: произвольный морфизм необязательно определяет F - объект первого объекта, P-объект второго и изоморфизм между ними. Однако, если морфизм m есть субмерсия в M [21], т.е. если

$$rank \parallel \partial m^k / \partial y^i \parallel = m, \tag{3.5}$$

где

$$z^k = m^k(y), k = 1, ..., m, \tag{3.6}$$

координатная запись морфизма m, то это имеет место: в каждой из введенных категорий отношение эквивалентности Q_m на M, ассоциированное с отображением m, является F-отношением, на M/Q_m существует F-объект, на $m(M)$ существует подобъект, изоморфный этому F-объекту.

В категории AODE в этом случае исходный объект (3.3) в некоторой окрестности каждой точки допускает представление,

$$dz^k/dt = \phi^k(z^1, ...z^m), k = 1, ..., m, \tag{3.7}$$

$$dx^l/dt = \psi^l(z^1, ...z^m, x^1, ..., x^{n-m}), l = 1, 2, ..., n-m, \tag{3.8}$$

которое в разделе 1, пункте 3 было названо простейшей иерархической декомпозицией. Это представление получается путем дополнения функций (3.6) функциями

$$dx^l = m^{m+l}(y^1, ...y^n), l = 1, 2, ..., n-m, \tag{3.9}$$

до диффеоморфизма и переходом в (3.3) к новым переменным по формулам (3.3), (3.6).

Пусть заданное на M гладкое векторное поле $X = a^i(y)\partial_i$ таково, что

$(Y, X) = (f^i\partial_i a^j - a^i\partial_i f^j)\partial_j = 0$

Тогда FLD(R)-объект $L'(M)$, соответствующий полю X, является для FLD(R) - объекта $L(M)$, соответствующего полю Y, группой локальных автоморфизмов (см. раздел 5.9).

FLD(R)-объект $L'(M) = \{h_t : domh_t \to ranh_t\}_{t\in\mathcal{R}}$ является локальной F-группой для FLD(R)-объекта $L(M) = \{T_t : domg_t \to ranT_t\}_{t\in\mathcal{R}}$, тогда и только тогда, когда для любых t, t', для любого $x \in M$, если определена суперпозиция $T_t \circ h_{t'} \circ T_t^{-1} \circ h_{t'}^{-1}(x)$, то существует t'', такое, что

$$T_t \circ h_{t'} \circ T_t^{-1} \circ h_{t'}^{-1}(x) = h_{t''}(x). \tag{3.10}$$

Если гладкое векторное поле X на M таково, что

$$(Y, X) = \mu(y)X, \tag{3.11}$$

где $\mu(y)$ - некоторая функция, то группа $L'(M)$, соответствующая X, является для $L(M)$ локальной F-группой. Условие (3.11) является инфинитезимальным аналогом условия (3.10), поскольку коммутатор (Y, X) является инфинитезимальным аналогом обычного группового коммутатора.

5.10. Рассматривается множество систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dy^i/dt = f^i(t, y^1, ...y^n), i = 1, ..., n, (t, y) \in M \tag{3.12}$$

с гладкими, определенными в области $M \subset \mathcal{R}^{n+1}$ правыми частями. С каждой такой системой сопоставляется система

$$dy^i/da = f^i(t, y^1, ...y^n), i = 1, ..., n, dt/da = 1 \tag{3.13}$$

С начальными условиями

$$y^i(0) = y^i_0, t(0) = t_0 \tag{3.14}$$

, Решение

$$dy^i = F^i(t_0, y_0, a), i = 1, ..., n, t = t_0 + a \tag{3.15}$$

$(3.13), (3.14)$ определено в некоторой области $M' \subset \mathcal{R}^{n+2}$, содержащей множество $\{0\} \times M$. Соотношения (3.15) можно считать записью в канонических координатах однопараметрической группы преобразований множества M', т.е. FLD(R)-объекта $L(M') = \{g_a : domg_a \rightarrow rang_a\}_{a\in\mathcal{R}}$. Системе (3.13) и группе $L(M')$ можно сопоставить векторное поле, которое в канонических координатах есть

$$Y = \partial_t + f^i(t,y)\partial_i eqno(3.16)$$

Морфизмом объекта (3.12) в объект

$$dz^k/d\tau = \phi^k(\tau, z^1, ...z^m), k = 1, ..., m, (\tau, z) \in N \subset \mathcal{R}^{m+1} \tag{3.17}$$

будет считаться гладкое отображение $I : M \rightarrow N$ вида

$$z^k = I^k(\tau, y^1, ...y^n), k = 1, ..., m, \tau = t, \tag{3.18}$$

такое, что функции $z^{*k}(\tau) = I^k(\tau, y^{*1}(\tau), ...y^{*n}(\tau)), k = 1, ..., m, \tau = t$, являются решениями системы (3.17) для любого решения $y^*(t)$ системы (3.12). Для векторных полей, соответствующих объектам (3.12) и (3.17) это условие есть условие их I-связности, для (локальных) однопараметрических групп - это условие того, что I есть естественный канонический морфизм.

Если морфизм (3.18) есть субмерсия, то ограничение (3.17) на $I(M) \subset N$ можно считать F-объектом объекта (3.12), по F-отношению Q_I: $((t,y),(t',y')) \in Q_I \rightarrow t = t' \wedge I^k(t,y) = I^k(t',y'), k = 1, ..., m$. В этом случае на M существуют координаты, в которых (3.12) имеет вид

$$dz^k/dt = \phi^k(t, z^1, ..., z^m), k = 1, ..., m, \tag{3.19}$$

$$dx^l/dt = \psi^l(t, z^1, ..., z^m, x^1, ..., x^{n-m}), l = 1, 2, ..., n-m, \tag{3.20}$$

(здесь и далее положено $\tau = t$). Эти координаты получаются добавлением к функциям (3.18) функций

$$x^l = J^l(t, y^1, ...y^n), l = 1, 2, ..., n-m, \tag{3.21}$$

произвольным образом, но так, чтобы (3.18) и (3.21) были диффеоморфизмом.

Система (3.19), как уже говорилось, трактуется как F-объект для (3.12). Пусть $z^k = z^{*k}(t), k = 1, ..., m,$ - произвольное гладкое решение системы (3.18). Система

$$dx^l/dt = \psi^l(t, z^*(t), x), l = 1, 2, ..., n-m, \tag{3.22}$$

является P-объектом объекта (3.12), заданном на определяемом соотношениями

$$y^i = K^i(t, z^*(t), x), i = 1, ..., n. \tag{3.23}$$

на подмножестве $\tilde{M}$ множества M, где $y^i = K^i(t, z, x), i = 1, ..., n$ - обращение (3.18), (3.21). Таким образом, представление (3.19), (3.20) системы (3.12) можно трактовать как порожденную F-отношением Q_I ее CC-декомпозицию на совокупность P-объектов (3.22), "параметризованную" решениями F-объекта (3.19).

4 Декомпозиция управляемых динамических систем

1. Рассматривается категория CDS(U), объектами которой являются управляемые динамические системы

$$dy^i/dt = f^i(y^1, ...y^n, u^1, ..., u^r), i = 1, ..., n, \tag{4.1}$$

Считается, что имеют место все те предположения относительно объекта (4.1), которые сформулированы в разделе 2, пункте 1: правые части (4.1) при каждом фиксированном u из множества $U \subset \mathcal{R}^r$, одного и того же для всех объектов категории CDS(U) (U - вспомогательное множество в соответствующем роде структуры), определены в независящей от u связной области $M \subset \mathcal{R}^n$ и являются гладкими; при каждом фиксированном $y \in M$ правые части (4.1) непрерывны по u. Решением системы (4.1) также, как в разделе 2 будет называться совокупность $(y^*(t), u^*(t))$ функций, где $y^*(t)$ - кусочно-дифференцируемы, $u^*(t)$ - кусочно-непрерывны, $(t, y^*(t)) \in M, u^*(t) \in U$, обращающие (4.1) в тождество по t. Управление $u^*(t)$, фигурирующее в каком либо решении, называется допустимым, множество допустимых управлений обозначается через $\mathbf{U}$. Если $(\forall u \in U)(\exists u' \in U)(\forall y \in M)(f(y, u) = -f(y, u))$, то (4.1) называется симметричной.

Если правые части (4.1) зависят от времени, стандартным приемом "автономизации", т.е. введением новой фазовой переменной $y^{n+1} = t$, большинство излагаемых ниже результатов можно перенести на случай неавтономных систем. Однако, в ряде задач управления, как отмечалось в разделе 2, время играет особую роль и учет этого обстоятельства и перенос результатов, полученных для автономных систем, на случай неавтономных систем вызывает до сих пор непреодоленные технические трудности.

Морфизмом объекта (4.1) в объект

$$dz^k/d\tau = \phi^k(z^1, ...z^m, u^1, ..., u^r), \ k = 1, ..., m, \tag{4.2}$$

$z \in N \subset \mathcal{R}^m, u \in U \subset \mathcal{R}^r$, будет считаться гладкое отображение $I : M \to N$ вида

$$z^k = I^k(y), k = 1, ..., m, \tag{4.3}$$

переводящее любое решение $(y^*(t), u^*(t))$ системы (4.1) в решение $(z^*(t), u^*(t))$, где $z^*(t) = I(y^*(t))$, системы (4.2).

Каждому объекту категории CDS(U) сопоставляются следующие объекты:

А. Семейство C_0 гладких векторных полей

$$\{X_{0u} = f^i_u(y)\partial_i\}_{u \in U}, \tag{4.4}$$

где обозначено $f^i_u(y) = f^i(y, u)$, определенных в области M, каноническим образом наделяемой структурой дифференцируемого многообразия, и минимальная алгебра Ли С, содержащая все поля семейства C_0. Точка $y_0 \in M$ называется регулярной точкой алгебры C, если существует ее окрестность, в которой размерность распределения, порождаемого алгеброй C, называемая также ее рангом, постоянна. Множество регулярных точек алгебры C открыто и всюду плотно в M. Вычисление ранга алгебры C выполняется с помощью алгебраических операций и дифференцирований: необходимо выбрать из C_0 некоторое базисное семейство B_0 и пополнить его. Количество полей в получившемся полном семействе B, называемом далее базисным семейством алгебры C, и есть $dim\ C$.

Если $y_0 \in M$ регулярная и $dim\ C(y_0) = p < n$, то полный набор $m = n - p$ независимых интегралов $z^k = I^k(y), k = 1, ..., m$, базисного семейства B, определенный в некоторой окрестности $\tilde{M}$ точки y_0 является для системы (4.1) в области $\tilde{M}$ так называемыми интегралами, независящими от управлений [134,135] : эти функции являются интегралами любой системы ОДУ, которая возникает при подстановке в систему (4.1) произвольных допустимых управлений.

Если (4.3) есть CDS(U)-морфизм объекта (4.1) в объект (4.2), то при каждом фиксированном $u \in U$ поля $X_{0u} = \partial_t + f_u^i(y)\partial_i$ и $Y_{0u} = \partial_t + \phi_u^k(z)\partial_k$ являются I-связанными.

Б. Семейство D_0 систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$\{dy^i/da = f_u^i(y^1, ...y^n),\ i = 1, ..., n\}_{u \in U}$

В. Семейство

$$S_0 = \{T_{ua}\}_{u \in U, a \in \mathcal{R}} = \{y^i = F_u^i(y_0, a)\}_{u \in U, a \in \mathcal{R}} \qquad (4.5)$$

(локальных) однопараметрических групп диффеоморфизмов, порожденных семейством векторных полей C_0 (или, что то же самое, семейством D_0) и минимальная (локальная) группа S, содержащая все преобразования из S_0. Группы из семейства (4.5) при каждом фиксированном $u \in U$ являются решениями системы

$$dy^i/da = f_u^i(y^1, ...y^n),\ i = 1, ..., n,$$

с начальными условиями

$$y^i(0) = y_0^i, i = 1, 2, ..., n,$$

Если (4.3) есть CDS(U)-морфизм объекта (4.1) в объект (4.2), то при каждом фиксированном $u \in U$(4.3) является AODE-морфизмом системы $dy/dt = f_u(y)$ в систему $dz/dt = \phi_u(z)$ (см. раздел 3, пункт 5.9), а также естественным каноническим морфизмом группы S в группу S', соответствующую системе (4.2).

2. Если морфизм (4.3) является субмерсией в M, т.е.

$$rank \parallel \partial I^k/\partial y^i \parallel = m, \tag{4.6}$$

везде в M, то он генерирует на M регулярное отношение эквивалентности Q_I, множество $I(M)$ тогда открыто и является факторизацией области M по отношению Q_I, а ограничение (4.2) на $I(M)$ является F-объектом объекта (4.1) по F-отношению Q_I. В этом случае в некоторой окрестности каждой точки области M существует представление объекта (4.1), названное в разделе 2, пункте 3 его простейшей иерархической декомпозицией.

$$dz^k/dt = \phi^k(z^1, ...z^m, u^1, ..., u^r),\ k = 1, ..., m, \tag{4.7}$$

$$dx^l/dt = \psi^l(z^1, ...z^m, x^1, ..., x^{n-m}, u^1, ..., u^r),\ l = 1, 2, ..., n-m, \tag{4.8}$$

получаемое добавлением к функциям (4.3) функций

$$x^l = J^l(y^1, ...y^n),\ l = 1, 2, ..., n-m, \tag{4.9}$$

произвольным образом, но так, чтобы (4.3) и (4.9) были диффеморфизмом, и переходом в (4.1) к переменным (z, x). Число $p = n - m$ будет называться порядком декомпозиции (4.7), (4.8), морфизм (4.3), удовлетворяющий (4.4) - декомпозирующим.

Предложение 1. Для того, чтобы система (4.1) допускала декомпозицию порядка p, $0 < p < n$, в окрестности точки y_0 необходимо и достаточно, чтобы в окрестности этой точки существовало p-мерное полное семейство B векторных полей вида

$$Z_a = b^i_a(y)\partial_i,\ a = 1, ..., p, \tag{4.11}$$

такое, что для любого поля X из алгебры C имеет место

$$(X, Z_a) = h^c_a(y)Z_c,\ a, c = 1, ..., p,\ u \in U, \tag{4.12}$$

где $h^c_a(y)$, $a, c = 1, ..., p$, - некоторые функции. Доказательство см. в [39,85].

Сформулированное утверждение интуитивно очевидно, поскольку является инфинитезимальным аналогом соотношения (3.10) и обобщением на рассматриваемый случай соотношения (3.11). Оно означает, что группа S (точнее - ограничение S на $\tilde{M}$) импримитивна и минимальная локальная группа H преобразований, порожденная семейством векторных полей (4.11) является локальной F-группой для S (см. раздел 3, пункт 5.9). Факторизующее отношение эквивалентности Q_I для системы (4.1) есть отношение, осуществляющее СС-декомпозицию F-группы, говоря проще, отношение, порождаемое группой H на $\tilde{M}$, еще проще - это отношение порождается полным набором независимых интегралов $I^k(y),\ k = 1, 2, ..., m$, полной системы полей (4.11): $(y, y') \in Q_I \to I^k(y) = I^k(y'), k = 1, ..., m$. Дальнейшие утверждения о декомпозиции будут в связи с этим носить локальный характер, аналогичный тому, который имеет предложение 1.

Для практического анализа вопроса о декомпозиции системы (4.1) полезно следующее

<u>Предложение 2.</u> Для того, чтобы система (4.1) допускала декомпозицию порядка p , $0 < p < n$, причем для декомпозирующего морфизма (4.4) имело место

$$rank \parallel \partial I^k / \partial y^l \parallel_{l=p+1,...,n}^{k=1,...,m} \neq 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы была совместна следующая система дифференциальных уравнений относительно искомых функций $b_a^l(y),\ a = 1, ..., p,\ l = p+1, ..., n$,

$$X(b_a^l(y)) - Z_a(f^l) + b_c^l Z_a(f^c) = 0, \tag{4.13}$$

$$Z_a(b_c^l) - Z_c(b_a^l) = 0, \tag{4.14}$$

где X - произвольное поле из алгебры C,

$$Z_a = \partial/\partial y^a + b_a^l(y)\partial/\partial y^l, \tag{4.15}$$

$u \in U,\ a, c, = 1, ..., p,\ l = p+1, ..., n.$

Функции $I^k(y),\ k = 1, ..., m$, образующие декомпозирующий морфизм, являются полным набором независимых интегралов якобиевой в силу (4.14) системы векторных полей (4.15).

Алгоритм исследования совместности и нахождения решения системы (4.13), (4.14) приводится в [34, 44]. Он основан на выписывании и анализе условий совместности, которые продуцирует сильно переопределенная, вообще говоря, система (4.13), (4.14). Совместность системы (4.13), (4.14) проверяется с использованием лишь алгебраических операций, для нахождения решений необходимо несколько раз интегрировать системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот алгоритм особенно упрощается в случае, когда ранг алгебры C в окрестности рассматриваемой точки равен n. В этом случае множество простейших иерархических декомпозиций можно естественным образом снабдить структурой решетки. Подробности см. в [40].

3. Точка $y_1 \in M$ называется достижимой из точки $y_0 \in M$, если существует решение $(y^*(t), u^*(t))$ системы (4.1), такое, что для некоторых $t_0, t_1, t_1 > t_0$, из интервала определения этого решения имеет место $y^*(t_0) = y_0,\ y^*(t_1) = y_1$. Точка y_1 называется слабо достижимой из точки y_0, если существует последовательность $c_0, ..., c_l$ состояний

точек из $M, c_0 = y_0, c_1 = y_1$, такая что либо c_k достижимо из c_{k-1} либо c_{k-1} достижимо из c_k.

Транзитивность группы S влечет слабую управляемость системы (4.1), интранзитивность S влечет неуправляемость системы (4.1) [40].

Предложение 3. Если $(\forall y \in M) dim\ C(y) = n$, то (4.1) слабо управляема и множество достижимости $D(y)$ имеет непустую внутренность в M. [40, 150,151]. Если точка $y_0 \in M$ регулярная и $dim\ C(y_0) < n$, то (4.1) не является слабо управляемой [137].

Если $y_0 \in M$ регулярная и $dim\ C(y_0) = p < n$, то отношение эквивалентности Q_I, продуцируемое определенными в некоторой окрестности $\tilde{M}$ точки y_0 интегралами

$$z^k = I^k(y),\ k = 1, ..., m, \tag{4.16}$$

системы (4.1), независящими от управлений, или, что то же самое, интегралами базисного семейства B алгебры C, является факторизующим, система (4.1) в $\tilde{M}$ допускает представление

$$dz^k/dt = 0,\ k = 1, ..., m, \tag{4.17}$$

$$dx^l/dt = \psi^l(z^1, ...z^m, x^1, ..., x^p),\ l = 1, 2, ..., p, \tag{4.18}$$

получающаяся добавлением к функциям (4.16) независимых функций

$$x^l = J^l(y^1, ...y^n),\ l = 1, 2, ..., p, \tag{4.19}$$

и переходом в (4.1) к переменным (z, x). Это представление можно трактовать как СС-декомпозицию системы (4.1) на совокупность ее подобъектов (4.18), параметризованных значениями интегралов (4.16).

4. Рассматривается система (4.1) с выходами

$$w^j = \Psi^j(y,u), j = 1, 2, ..., q, \tag{4.20}$$

определенными и гладкими в M при каждом фиксированном $u \in U$. Каждая точка $y \in M$ продуцирует отображение вход-выход, которое далее обозначается A_y (см. раздел 2, пункт 2). Система с выходами

$$dz/dt = \phi(z,u), k = 1, 2, ..., m, \tag{4.21}$$

$$\nu_j = \eta^j(z,u), j = 1, ..., q, \tag{4.22}$$

$z \in N \subset \mathcal{R}^m, u \in U$,

называется реализацией системы (4.1), (4.20) на множестве $\tilde{M}$, если для любого $y \in \tilde{M}$ существует такое $z \in N$, что $A_y = B_z$, где B_z - отображение вход-выход системы (4.21), (4.22), соответствующее точке z. Равенство здесь понимается как совпадение для данных входов выходов на пересечении интервалов их определений. Если $\tilde{M}$ сводится к одной точке y_0, то в этом случае систему $(4.1), (4.20)$ называют системой с фиксированным начальным состоянием y_0. Реализация $(4.21), (4.22)$ системы $(4.1), (4.20)$ называется слабо управляемой (управляемой), если слабо управляема (управляема) система (4.21). Употребляемый далее термин "локальная реализация" означает, что имеется в виду реализация не исходной системы (4.1), а некоторого ее открытого подобъекта.

<u>Предложение 4.</u> У системы (4.1), (4.20) с фиксированным начальным состоянием y_0 являющимся регулярной точкой алгебры C системы (4.1), существует локальная слабо управляемая реализация, раз-

мерность которой равна $n-p=m$, где $p = dim\ C(y_0)$ [40]. Эта реализация состоит из системы (4.18), являющейся подобъектом системы (4.1), где $z^1, ..., z^m$ - значения в точке y_0 полного набора независящих от управлений интегралов (4.14) системы (4.1), и выходного отображения $w^j = \Psi^j(K(z,x),u),\ j=1,2,...,q,$, где $K(z,x)$ - обращение (4.16), (4.19).

5. На M вводится бинарное отношение $\gamma : (y,y') \in \gamma \Longleftrightarrow A_y = A_{y'}$. Система (4.1), (4.20) называется наблюдаемой (см. также раздел 4, пункт 2), если $(y,y') \in \gamma \rightarrow y = y'$. Употребляемое далее выражение "локальная наблюдаемость" означает наблюдаемость некоторого открытого подобъекта (4.1), (4.20). С выходами (4.20) ассоциируется отношение эквивалентности $\sigma : (y,y') \in \sigma \Longleftrightarrow (\forall u \in U)(\Psi^j(y,u) = \Psi^j(y',u), j=1,...,q)$.

Предложение 5. Если система (4.1) допускает декомпозицию (4.7), (4.8) такую, что $Q_I \subset \sigma$ где Q_I - отношение эквивалентности, ассоциированное с декомпозирующим морфизмом (4.3), то выходы (4.20) выражаются через функции (4.3): $w^j = \Psi^j(y,u) = \Psi'^j(I(y),u), j=1,...,q)$, и F-система (4.7) вместе с выходами $w^j = \Psi'^j(I(y),u), j=1,...,q)$, являются реализацией в M системы (4.1), (4.20). Доказательство см. в [40].

Предложение 6. В каждой окрестности открытого, всюду плотного в M подмножества $\tilde{M} \subset M$ существует реализация системы (4.1), (4.20), обладающая свойством наблюдаемости. Доказательство см. [40]

Алгоритм построения наблюдаемой реализации системы $(4.1), (4.20)$ становится интуитивно очевидным, если иметь в виду рассмотренную в разделе 3, пункте 5.5 задачу построения содержащегося в заданном отношении эквивалентности, максимального F-отношения группы преобразований, состоящий в построении "нижнего факторизующего ряда". В рассматриваемом случае аналогом нижнего факторизующего ряда является ряд $P_1, P_2, ..., P_k, ..., P_p$, где P_1 состоит из независимых функций $I_l(y), l = 1, ..., l_1$, таких, что через них выражаются все функции (4.20). Если функции $I_l(y), l = 1, ..., l_k$, из множества P_k уже построены, то функции из множества P_{k+1} получаются добавлением к множеству P_k независимых функций вида $X_{0u}g(y)$ $X_{0u} \in C_0, g(y) \in P_k$. При некотором $p \leq n$ окажется, что $P_p = P_{p+1} = P_{p+2} =$, Тогда функции $I_l(y), l = 1, ..., l_p = m$, в окрестности каждой своей регулярной точки определяют декомпозирующий морфизм $z^k = I^k(y), k = 1, ..., m$, функции (4.20) выражаются через $I^1(y), ..., I^m(y) : w^j = \Psi^j(y, u) = \Psi'^j(I(y), u), j = 1, ..., q)$, и F-система (4.7) вместе с выходами $w^j = \Psi'^j(I(y), u), j = 1, ..., q)$, является наблюдаемой реализацией системы $(4.1), (4.20)$. Описанный алгоритм построения наблюдаемой реализации предложен в [35]. Близкий подход к задачам реализации, однако, для частного случая полных систем применялся в [150]. Для полных симметрических и для аналитических систем, обладающих свойством достижимости, в [164] было доказано существование глобальной реализации, обладающей наблюдаемостью.

Предложение 7. В некоторой окрестности $\tilde{M}$ регулярной точки y_0 алгебры C_0 существует локальная минимальная реализация системы (4.1), (4.20), т.е. ее локальная реализация, которая слабо управляема и наблюдаема. Доказательство см. [40]. Для систем, заданных на дифференцируемых многообразиях справедлив глобальный вариант предложения 7 [40]. В [150] доказано, что минимальная реализация имеет минимальную размерность по сравнению с любой реализацией.

Для построения минимальной реализации системы (4.1), (4.20) в заданной точке y_0, являющейся регулярной точкой алгебры C, необходимо сначала "спуститься" на орбиту (подобъект) группы S, проходящую через точку y_0 или, другими словами, перейти к подобъекту (4.18) объекта (4.1), где $z^1, ..., z^m$ - значения интегралов (4.14) в точке y_0, с выходами $w^j = \Psi^j(K(z,x),u),\ j = 1,2,...,q$, где $K(z,x)$ - обращение (4.14), (4.19), а затем построить наблюдаемую реализацию полученной системы в соответствии с описанным выше алгоритмом.

6. Рассматривается система

$$dy^i/dt = f^i(y^1, ...y^n, u^1, ..., u^r, \nu^1, ..., \nu^s),\ i = 1, ..., n, \tag{4.23}$$

$y \in M \subset \mathcal{R}^m,\ u \in U \subset \mathcal{R}^r\ \nu \in V \subset \mathcal{R}^s$, с выходами

$$w^j = \Psi^j(y, u, \nu),\ j = 1, ..., q \tag{4.24}$$

Величины ν в (4.23), (4.24) будут трактоваться как "возмущения" и по отношению к ним для (4.23) справедливы те же предположения, которые справедливы для (4.1) по отношению к u.

Говорят, что система (4.23), (4.24) инвариантна по возмущениям ν в множестве $M' \subset M$, если для любого $y \in M'$ отображение вход-выход A_y системы (4.23), (4.24) не зависит от ν (если множество M' сводится к единственной точке y_0, то говорят про систему с фиксированным начальным состоянием). Функции $\Psi^j(y, u, \nu), \ \ j = 1, ..., q$ в этом случае называются инвариантными по возмущениям в M' функциями системы (4.23). Понятие инвариантной системы впервые появилось в [132]. Первые результаты касались линейных систем и состояли в формулировке условий, при выполнении которых данная система инвариантна по возмущениям [71,100]. На "алгебраическое " содержание проблемы инвариантности впервые обращено внимание в [71]. Для нелинейных систем проблема инвариантности изучалась в [23, 24, 108,120] с помощью средств теории оптимального управления. Методы группового анализа к анализу этой проблемы впервые были применены в [137]. Во всех этих работах рассматривались системы, в которые не входят управления u. Настоящее изложение основано на результатах работ [35,36,37,40].

Для инвариантных в M функций системы (4.23) имеют место следующие утверждения [40]: (а) инвариантная функция не зависит от ν; (б) если $\Psi(y, u)$ - инвариантная функция, то для любого фиксированного $u_0 \in U$ функция $\Psi(y, u_0)$ также инвариантна; (в) если $\Psi(y)$ -

инвариантная функция, то функция $X_{0uv}\Psi(y)$ также инвариантна, где $X_{0uv} = f^i(y, u, \nu)\partial_i$.

В разделе 2, пункте 3 отмечалось, что наличие у системы (4.23) декомпозиции вида

$$dz^k/dt = \phi^k(z, u),\ k = 1, ..., m, \tag{4.25}$$

$$dx^l/dt = \psi^l(z, x, u, \nu), l = 1, 2, ..., n - m, \tag{4.26}$$

означает, что все функции $z^k = I^k(y),\ k = 1, ..., m$, образующие декомпозирующий морфизм, и их произвольные функциональные комбинации вида $\Phi(I(y), u)$ инвариантны (впер- вые на этот факт было указано в [60], см. также [84,86-92]).

Справедливо также в некотором смысле обратное утверждение [40]:

Предложение 8. Система (4.23), (4.24) инвариантна по возмущениям ν в области $\tilde{M} \subset M$ тогда и только тогда, когда в $\tilde{M}$ существует наблюдаемая, независящая от ν реализация, т.е. реализация вида

$$dz/dt = \phi(z, u), k = 1, ..., m, \tag{4.27}$$

$$\nu^j = \eta^j(z, u), j = 1, ..., q, \tag{4.28}$$

$z \in N \subset R^m, u \in U$.

Предложение 8 означает, что наличие у системы (4.23) инвариантных функций влечет существование у нее декомпозиции вида $(4.25), (4.26)$

Предложение 9. Система (4.23), (4.24) с фиксированным начальным состоянием y_0 является инвариантной по возмущениям в области, в которой существует ее минимальная реализация, тогда, а в случае симметричности системы (4.23) и только тогда, когда минимальная реализация не зависит от ν.

Рассмотрим для системы (4.23) задачу, состоящую в выяснении существования у нее инвариантных по возмущениям ν функций и определения этих функций в случае их существования. Для ее анализа строится последовательность семейств полей

$$B_1 \subset B_2 \subset ...B_k \subset ..., \tag{4.29}$$

, где B_1 есть семейство

$$B = \{X_{0uv} - X_{0uv'}\}_{u \in U, \nu \in V, \nu' \in V'} \tag{4.30}$$

B_k состоит из полей семейства B_{k-1} и всевозможных полей (X_{0uv}, Z), где $X_{0uv} \in C_0,\ Z \in B_{k-1})$. Через C_1 обозначается минимальная алгебра, содержащая все поля из множества $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Алгебра C_1 является идеалом алгебры C.

Предложение 10. Инвариантная по возмущениям ν функция системы (4.23) является интегралом идеала C_1 алгебры C_0. Обратно, в некоторой окрестности регулярной точки идеала C_1 его интегралы являются инвариантными функциями системы (4.23) [40].

Практический алгоритм выяснения у системы (4.23) существования инвариантных функций и их определения в случае существования состоит в построении вместо последовательности (4.29) соответствующей последовательности $B'_1 \subset B'_2 \subset ...B'_k \subset ...$ базисных семейств. Подробности см. в [40]. Сформулированный алгоритм становится интуитивно очевидным, если иметь в виду рассмотренную в разделе 3, пункте 5.5 задачу построения содержащего заданное отношение эквивалентности, минимального F-отношения группы преобразований, состоящий в построении "верхнего факторизующего ряда", аналогом которого в рассматриваемом случае является ряд (4.29).

Если система (4.23), (4.24) не является инвариантной, то возникает задача изменения ее структуры с помощью синтезирующих управлений (см. раздел 2, пункт 5) так, чтобы она стала инвариантной. Разные варианты этой задачи рассмотрены в [152, 153]. Естественными категориями при изучении этой задачи являются категории, в рамках которых выполняется классификация линейных по управлениям систем в работе В.И.Елкина настоящего сборника.

7. Коротко охарактеризуем другие аспекты обозреваемого здесь подхода при изучении декомпозиций управляемых систем. В пунктах 1 - 7 настоящего раздела изучение декомпозиций выполнялось в категории CDS(U), где множество значений управлений U (а также множество значений возмущений V в задачах инвариантности) было вспомогательным, т.е. одним и тем же для всех объектов изучаемой категории

и изменение только одного этого множества означало, что рассмотрение выполняется уже в другой категории. В категории CDS, охарактеризованной в разделе 4, пункте 5, где множество U было основными и, значит, подвергалось, также как и M, преобразованиям определенного класса с помощью морфизмов, изучение декомпозиций выполнялось в [85-97]. В [98] изучались группы автоморфизмов управляемых динамических систем.

Изучение управляемых динамических систем в категориях CDS(U) и CDS началось сравнительно недавно. В то же время декомпозиции в категории линейных управляемых систем, где эквивалентностями являются линейные преобразования фазовых переменных и управлений, посвящена весьма обширная литература, которая в настоящем обзоре не освещается (см. обзоры [82,83]).

Отметим связь обозреваемого здесь подхода декомпозиции управляемых систем с методами группового анализа дифференциальных уравнений [51-55,79,80], состоящих в их изучении с помощью локальных групп их автоморфизмов.

Наиболее общий результат, касающийся декомпозиции систем уравнений в частных производных, связан с теорией группового расслоения [79]: любую систему дифференциальных уравнений D в частных производных можно с помощью произвольной подгруппы H ее группы автоморфизмов подвергнуть декомпозиции (т.е. эквивалентно представить) вертикального типа. Верхний уровень этой декомпозиции, называемый разрешающей системой, содержит только дифференциальные инварианты группы H и описывает в определенном смысле фактор-множество решений относительно действия H (преобразования из H переводят любое решение D снова в решение D). Нижний уровень, называемый автоморфной системой, описывает множества решений внутри классов. Декомпозиция а категориях $\mathrm{CDS}(U)$ и CDS является некоторой тривиальной иллюстрацией группового расслоения.

С другой стороны, с точки зрения развиваемой здесь теории декомпозиции инвариантно-групповые решения систем дифференциальных уравнений в частных производных, отыскание которых является одной из главных задач методов группового анализа, трактуются как случаи факторизации некоторых подобъектов исходной системы дифференциальных уравнений.

В [3,4], в рамках принятого здесь подхода изучаются декомпозиции распределенных эволюционных управляемых систем вида

$$z_t = f(x, z, z_1, ..., z_s, u),$$

где $z = (z^1(t,x), ..., z^n(t,x)),\ t \in \mathcal{R}^1,\ x \in \mathcal{R}^1,\ z_i = \partial^i z/\partial x^i,\ u \in \mathcal{R}^r$. Интересно отметить, что имеются декомпозиции таких систем, не являющиеся их групповыми расслоениями.

Кратко охарактеризуем работы, касающиеся выявления приближенных декомпозиций. Весьма общий подход к этой проблеме предложен в [15,16]. Он основан на применении методов нестандартного анализа [50,63] и с интуитивной точки зрения базируется на том, что любое приближенное свойство объекта можно трактовать как точное свойство некоторого близкого, аппроксимирующего объекта. Нестандартный анализ доставляет эффективные средства описания широкого набора таких аппроксимаций. Хотя понятие близких объектов, конечно, каждый раз требует уточнения, нестандартный анализ доставляет ту общую схему, которая позволяет все такие уточнения трактовать как частные случаи объектов в специальных родах структур, которые строятся как ультрастепени исходных структур по некоторому нетривиальному свободному ультрафильтру. Общая техника этого приведена в [50], ее применение к структурам теории множеств Н.Бурбаки имеется в [15]. Продолжение понятия морфизма на построенные таким образом нестандартные структуры позволяет на категорном языке описывать приближенные морфизмы как точные морфизмы в нестандартных родах структур. Конечно, для любого утверждения такой общей нестандартной теории структур возможен эквивалентный "перевод" на язык стандартного анализа.

В качестве примера такого подхода может служить приближенная факторизация задач линейно-квадратичного оптимального управления [16]. Точная категория для этих задач построена в [16,128]. Под близкой системой понимается однопараметрическое семейство возмущенных оптимальных систем. От решений возмущенных систем требуется, чтобы они равномерно приближали решение порождающей системы. Приближенной факторизацией порождающей системы называется точная факторизация систем из возмущенного однопараметрического семейства. Оказалось, что всегда можно указать факторизуемую систему сколь угодно близкую к порождающей.

Аналогичные построения возможны и для теории ε-факторизации в категории CDS(U) и CDS, развитой в [110,111] и использованной для анализа ряда практических задач в [57-59]. В этой теории изучается возможность эквивалентного представления системы (4.1) в виде

$$\dot{z}_t^k = \phi_0^k(t, z, u) + \varepsilon\phi_1^k(t, z, y, u),\ k = 1, 2, ..., m, \tag{4.31}$$

$$\dot{y}^j = \psi^j(t, z, y, u)\ j = 1, 2, ..., n - m, \tag{4.32}$$

где ε таково, что обеспечивает в заданных областях изменения фазовых переменных и управлений отличие решений системы (4.31), (4.32) от решений (с теми же начальными условиями и управлениями) этой же системы с $\varepsilon = 0$ в заранее заданных пределах. Выявление приближенных декомпозиций вида (4.31), (4.32) является весьма трудной задачей. Ситуация существенно меняется, если заранее известны некоторые из новых фазовых переменных $z^l = I^l(t, x), l = 1, 2, ..., q < m$, которые должны участвовать в замкнутой модели (4.17) (т.е. фактор-системе). В этом случае конструктивно решается задача выявления минимальной приближенной факторизации (4.32) системы (4.1), содержащей все величины z^l и обеспечивающей заданную точность их прогноза [58,59], а значит, конструктивно решается и задача приближенной декомпозиции.

К приближенной декомпозиции также относится теория частичной факторизации и декомпозиции в категориях CDS(U) и CDS развитая в [109]. В этой теории решается задача выявления эквивалентных представлений системы (4.1), имеющих вид

$$\dot{z}_t^k = \phi^k(t, z^1, ..., z^m, y^1, ..., y^p, u) \ k = 1, 2, ..., m,$$

$$\dot{y}_t^j = \psi^j(t, z^1, ..., z^m, y^1, ..., y^p, y^{p+1}, ..., y^{n-m}, u), \ j = 1, 2, ..., n-m,$$

характерный наличием в системе верхнего уровня этой декомпозиции не всех "чужих" фазовых переменных, а лишь их части, дается категорная интерпретация частичных декомпозиций, анализируется множество таких декомпозиций.

Л и т е р а т у р а

[1] *Агладзе В.А., Пономарев Ю.П.* Групповой подход к анализу управляемых динамических систем// Кибернетика(Киев). 1984. N 25. С.8-11 (РЖМат, 1985, 4Б858)

[2] *Андреев Ю.Н.* Дифференциально-геометрические методы в теории управления// Автомат. и телемех. 1982. N 10. С.5-46 (РЖМат, 1983, 2Б706)

[3] *Алавидзе Т.Г.* Точечная факторизация систем эволюционных уравнений. В кн.: Моделирование и оптимизация сложных динамических процессов. - М.: ВЦ АН СССР, 1989.- С.22-30

[4] *Алавидзе Т.Г.* Факторизация распределенных эволюционных управляемых систем. Дис.... ... канд. физ.-мат. наук.-М., МФТИ, 1990

[5] *Арбиб М.А., Мейнс Э.Дж.* Основания теории систем. Разложимые системы. В кн. Математические методы в теории систем. М.:Мир. 1979. С. 7-48 (РЖМат, 1979, 11Б541)

[6] *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. 3 изд. М.: Наука, 1984. 272 с. (РЖМат, 1985, 10Б247 К)

[7] *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1989. 447 с.

[8] *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 5 изд. М.: Наука, 1984. 320 с.

[9] *Белозеров В.Е., Можаев Г.В.* О минимально возможном числе управлений в линейной стационарной системе // Дифференциальные уравнения. - 1981. - Т. 17, N 4. - С.589-597 (РЖМат, 1981, 8Б772)

[10] *Бербюк В.Е.* Использование первых интегралов в задачах синтеза оптимальных систем управления//Прикладная математика и механика. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 17-23 (РЖМат, 1986, 5Б856)

[11] *Богатырева Н.А., Пятницкий Е.С.* Минимаксный принцып механики и его применение к задачам оптимального управления. В кн.: Кибернетика и вычислительная техника. Изд. ИПО АН СССР. - М.: 1988.-Вып. 55.-С.71-78

[12] *Богоявленский А.А., Емельянова И.С., Мархашов Л.М., Павловский Ю.Н., Яковенко Г.Н.* Методы теории групп непрерывных преобразований в механике систем с конечным числом степеней свободы// Устойчивость движения, аналитическая механика, управление движением/ М: Наука, 1981. С.69-93

[13] *Борецкий И.Ф. Павлов В.Г.* О некоторых свойствах динамических систем, связанных с их симметрией// Кибернет. и вычисл. техн./ Киев, 1980. Вып.47. С.25-34 (РЖМат, 1980, 10Б869)

[14] *Борисов В.Г., Дилигенский С.Н., Ефремов А.Ю.* Синтез инвариантных систем управления// Автомат. и телемех. 1990. N7. С.3- 16

[15] *Боровиков И.А.* Выбор декомпозиционной структуры оптимальных процессов. Дис.... ... канд. физ.-мат. наук.-М., МФТИ, 1990.

[16] *Боровиков И.А.* Приближенная факторизация в линейно-квадратичном оптимальном управлении // Математические методы обработки информации и управления: Междувед. сб. - М.: МФТИ. - 1988. - С.88-93.

[17] *Боровиков И.А.* Об одном применении нелинейной почти управляемости. // Моделирование процессов управления и обработки информации: Междувед. сб. - М.: МФТИ. - 1989. - С.52-57.

[18] *Боровиков И.А.* Факторизация в одном классе оптимальных процессов // Методы математического моделирования и обработки информации: Междувед. сб. - М.: МФТИ. - 1987. - С.121-126 (РЖМат, 1987, 1Б796)

[19] *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир,1973.-259 с.

[20] *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.: Мир, 1966. - 425 с.

[21] *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия. М.: Мир, 1975. - 222 с.

[22] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир,1976.-496 с.

[23] *Величенко В.В.* К проблеме инвариантности динамических систем // ДАН СССР, т. 184, N. 2, 1969. С. 263-266.

[24] *Величенко В.В.* О вариационном подходе в проблеме инвариантности управляемых систем // Автомат. и телемех. 1972, N 4. С. 22-35 (РЖМат, 1972, 8Б542)

[25] *Визгин В.П.* Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике. М.: Наука, 1972. 238 с.

[26] *Вишневский В.Э.* Аппроксимация Паде преобразований Ли нелинейных задач быстродействия // Автоматика / Киев, 1989. N 6. С. 23-31.

[27] *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука. 1991, 432 с.

[28] *Габасов Р.,Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.

[29] *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механики. М.: Наука, 1966. 300 с.

[30] *Гараев К.Г.* Теория инвариантных вариационных задач в проблеме оптимизации динамических систем с управлением // Автоматика и телемеханика. 1992. N 9. с. 49-56.

[31] *Голдблатт Р. Топосы.* Категорный анализ логики. М.: Мир. 1983, 486 с.

[32] *Девис М.* Нестандартный анализ.-М.:Мир,1980.-247 с.

[33] *Дубровин В.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1979. 760 с.

[34] *Елкин В.И.* Об условиях агрегирования управляемых динамических систем // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1978. Т. 18. N 4. С. 928-934 (РЖМат, 1978, 12Б1459)

[35] *Елкин В.И.* Инвариантность управляемых систем // Тр. XX111 научн. конф. МФТИ, 1977 г. Сер. Аэрофиз. и прикл. мат. / МФТИ. М., 1978. С.155-157

[36] *Елкин В.И.* Алгебраический подход к теории инвариантности управляемых систем // Сложные системы упр. / Киев, 1979. С.21- 32 (РЖМат, 1980, 4Б672)

[37] *Елкин В.И.* Реализация, инвариантность и автономность нелинейных управляемых систем // Автомат. и телемех. 1981. N 7. С.36-44 (РЖМат, 1981, 11Б756)

[38] *Елкин В.И.* Синтез инвариантных по возмущениям нелинейных управляемых динамических систем // Кибернет. и вы-

числ. техн. / Киев, 1981. Вып.51. С. 11-17 (РЖМат, 1981, 11Б753)

[39] *Елкин В.И.* Методы алгебры и геометрии в теории управления. Векторные поля и группы диффеомморыизмов. М.: ВЦ АН СССР, 1982. 64 с. (РЖМат, 1983, 3А567 К)

[40] *Елкин В.И.* Методы алгебры и геометрии в теории управления. Управляемые динамические системы. М.: ВЦ АН СССР, 1984. 66 с. (РЖМат, 1984, 7Б625 К)

[41] *Елкин В.И.* К вопросу о классификации и канонических формах нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика.- 1985. N 9. С. 31-41 (РЖМат, 1986, 2Б932)

[42] *Елкин В.И.* О декомпозиции управляемых систем, линейных по управлениям. В кн. Декомпозиция и оптимизация в сложных системах.- М.:ВЦ АН СССР. 1988. С. 66-75

[43] *Елкин В.И.* Подсистемы афинных управляемых систем. В кн. Моделирование и оптимизация сложных динамических процессов.- М.:ВЦ АН СССР. 1989. С. 3-10

[44] *Елкин В.И.* Общее решение систем уравнений в частных производных с одинаковой главной частью // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. XX1. N 8. С. 1389-1398 (РЖМат, 1986, 1Б494)

[45] *Елкин В.И., Павловский Ю.Н., Черноплеков А.Н., Яковенко Г.Н.* Задачи факторизации управляемых динамических систем и некоторые их приложения // Теор. групп. методы в мех. Тр. междунар. симпоз., Новосибирск, 1978 / Новосибирск, 1978. С. 108- 117 (РЖМат, 1979, 8Б713)

[46] *Елкин В.И.* Сужение афинных управляемых систем и его приложения // ДАН. 1994. Т.339. N 6. С. 754-756.

[47] *Емельянов С.В., Живоглядов П.В., Коровин С.К., Никитин С.В.* Полугрупповой подход к задачам описания класса допустимых возмущений // Докл. АН СССР. 1990. 312 N 5. С. 1057-1061.

[48] *Емельянов С.В., Коровин С.К., Никитин С.В.* ВНИИ систем. исслед. АН СССР. М., 1991. 425 с.: ил. Библиогр. 141 назв. Деп. в ВИНИТИ 17. 01.91, N 186-В91.

[49] *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.

[50] *Звонкин А.К., Шубин М.А.* Нестандартный анализ и сингулярные возмущения дифференциальных уравнений // УМН. - 1984. - Т. 39, Вып.2.- С. 57-76.

[51] *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в матеметической физике. М.: Наука, 1983. 280 с. (РЖМат, 1983, 11А813 К)

[52] *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. М.: Знание, 1989. 48 с. (Новое в науке и технике. Сер. "Математика и кибернетика"; N 8).

[53] *Ибрагимов Н.Х.* Опыт группового анализа обыкновенных диффе- ренциальных уравнений. М.: Знание, 1991. 48 с. (Новое в науке и технике. Сер. "Математика и кибернетика"; N 7).

[54] *Ибрагимов Н.Х.* Групповой анализ обыкновенных дифференциаль- ных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // УМН РАН. 1992. Т. 47, вып. 4 (286). С. 83-144

[55] *Ибрагимов Н.Х.* Алгебра Вессио-Гулдберга-Ли и ее использование при интегрировании нелинейных уравнений // Современный групповой анализ: Межвед. сб. науч. тр. / МФТИ. М., 1993. С. 23-28

[56] *Иванков П.Р., Иванов Н.М.* Теоретико-групповой метод понижения размерности в задачах оптимального управления //Автомат. и телемех. 1990. N 8. С.183- 184.

[57] *Ионова И.В., Смирнова Т.Г.* Некоторые задачи приближенного агрегирования. - М.: ВЦ АН СССР.- 1988. - 35 с. (РЖ-Мат, 1988, 8Б751 К)

[58] *Ионова И.В.* Методы приближенного агрегирования нелинейных моделей с линейными агрегатами. В кн.: Декомпозиция и оптимизация в сложных системах. -М.: ВЦ АН СССР. - 1988.- С. 76-88

[59] *Ионова И.В.* Приближенное агрегирование одного класса математических моделей. В кн.: Моделирование и оптимизация сложных динамических процессов. - М.: ВЦ АН СССР. - 1989 - С. 11-22

[60] *Ишлинский А.Ю.* Вступительное слово при открытии совещания. В кн. Труды I-ого Всесоюзного совещания по теории инвариантности. Киев, АН УССР, 1959, с. 5-9

[61] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1961. 704 с.

[62] *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966. 260 с. (РЖМат, 1985, 11Б213 К)

[63] *Картье П.* Сингулярные возмущения дифференциальных уравнений и нестандартный анализ // УМН. - 1984. - Т.39, Вып. 2. - С. 57-76 (РЖМат, 1984, 8Б324)

[64] *Кириллов А.А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972. 336 с. (РЖМат, 1973, 7Б684 К)

[65] *Крищенко А.П.* Синтез алгоритмов терминального управления для нелинейных систем // Известия АН. Техническкая кибернетика. 1994, N 1. - С.48-57

[66] *Крищенко А.П.* Аппроксимация выхода многомерной аффинной системы в сингулярном случае // Дифференциальные уравнения. - 1993. - Т.29, N 11.- С. 1921-1927.

[67] *Курант Р.* Уравнения с частными производными/Пер. с нем. М.: ИЛ, 1964. 830 с. (РЖМат, 1965, 2Б348 К)

[68] *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.:Наука. 1988, 320 с.

[69] *Кутепов С.А., Яковенко Г.Н.* О структуре множества достижимости (тезисы) // Механика твердого тела. 1981. N 6. С. 165-165

[70] *Кутепов С.А., Яковенко Г.Н.* Теоретико-групповые аспекты оптимального управления // Кибернет. и вычисл. техн. / Киев, 1983. Вып.58. С. 28-35

[71] *Кухтенко А.И.* Проблема инвариантности в автоматике.- Киев:Техника,1963. -376 с.

[72] *Кухтенко А.И.* Теория алгебраических инвариантов в задачах автоматического управления.- В кн.: Кибернетика и вы-

числительная техника. - Киев: Наукова думка, 1978.- Вып. 39. - С. 3-16 (РЖМат, 1978, 12Б605)

[73] *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления/ перев с англ. М.: Наука, 1972. 576 с. (РЖМат, 1973, 2Б590 К)

[74] *Лобри К.* Динамические системы и теория управления. В кн. Математические методы в теории систем. М.: Мир. 1979. С. 134-173 (РЖМат, 1979, 10Б641)

[75] *Льюинг Л.* Идентификация систем. М.: Наука. 1991, 432 с.

[76] *Менский Б.М.* Принцип инвариантности в автоматическом регулировании. -М.: Машиностроение, 1972, 235 с.

[77] *Можаев Г.В.* Об использовании симметрии в линейных задачах оптимального управления с квадратичным критерием качества // Автоматика и телемеханика. N 7. 1975. С. 23-31 (РЖМат, 1975, 12Б730)

[78] *Набивач В.Е.* Методы декомпозиции для исследования многомерных линейных динамических систем с особенностями низкой коразмерности // Тезисы докладов Всесоюзной научной конференции "Декомпозиция и координация в сложных системах".- Челябинск: ЧПИ, 1986.-Ч.1.-С. 26-27

[79] *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с. (РЖМат, 1978, 11Б883 К)

[80] *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям/ Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 639 с.

[81] *Осетинский Н.И., Фараджев Р.Г.* Абсолютная инвариантность и проблема классификации линейных стационарных динамических систем // Кибернет. и вычисл. техн. / Киев, 1990. Вып. 85. С. 23-25

[82] *Осетинский Н.И.* Обзор некоторых результатов по современной теории линейных систем. - В кн.: Математические методы в теории систем. - М.: Мир, 1979. - С. 271-327 (РЖМат, 1979, 11Б542)

[83] *Осетинский Н.И.* Обзор некоторых результатов и методов в современной теории линейных стационарных систем. - В кн.: Теория систем. Математические методы и моделирование. - М.: Мир, 1989. - С. 328-379

[84] *Павлов В.Г.* Системы, инвариантные относительно групп преобразований // Кибернет и вычисл. техн. / Киев, 1983. Вып. 58. С. 17-22 (РЖМат, 1984, 1Б804)

[85] *Павловский Ю.Н.* Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры //

Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1974. - Т. 14. -N 4. -С. 862-872 (РЖМат, 1974, 11Б759); N5. -С. 1093-1193 (РЖМат, 1975, 6Б804)

[86] *Павловский Ю.Н.* Агрегирование, декомпозиция, групповые свойства, декомпозиционные структуры динамических систем - В кн.: Кибернетика и вычислительная техника. - Киев: Наукова думка, 1978.- Вып. 39. - С. 53-63 (РЖМат, 1978, 12Б606)

[87] *Павловский Ю.Н.* Методы факторизации и декомпозиции в теории систем - В кн.: Кибернетика и вычислительная техника. - Киев:Наукова думка, 1982. - Вып. 54. - С. 9-15 (РЖМат, 1983, 6Б584)

[88] *Павловский Ю.Н.* Управление декомпозиционными структурами. В кн.: Кибернетика и вычислительная техника. - Киев: Наукова думка, 1983. - Вып. 58. - С. 11-16 (РЖМат, 1984, 1Б802)

[89] *Павловский Ю.Н.* О проблеме агрегирования. - В кн.: Теория и практика использования методов агрегирования в планировании и управлениии. - Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1983. - С. 6-11

[90] *Павловский Ю.Н.* Теория факторизации и декомпозиции управляемых динамических систем и ее приложения// Из-

вестия АН СССР. Техническая кибернетика. - 1984, N4.- С. 45-57 (РЖМат, 1984, 8Б758)

[91] *Павловский Ю.Н.* Декомпозиция моделей управляемых систем. - М.: Знание, 1985. - 32 с.

[92] *Павловский Ю.Н.* Приближенная декомпозиция моделей управляемых процессов. - В кн.: Математическое моделирование: процессы в сложных экономических и экологических системах. - М.: Наука, 1986. - С. 265-280 (РЖМат, 1986, 8Г262)

[93] *Павловский Ю.Н.* О двойственности в теории декомпозиции // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. - 1990, N6. - С. 3-13

[94] *Павловский Ю.Н.* Проблема декомпозиции в математическом моделированиии // Математическое моделирование. - 1991. - Т. 3, N4.- С. 93-122.

[95] *Павловский Ю.Н.* Декомпозиция снабженных структурой множеств на свободную сумму и прямое произведение // ДАН. 1995. Т. 130, N 3. С. 314-316.

[96] *Павловский Ю.Н.* К теории распространения отображений. В кн.: Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 1995. С. 3-9

[97] *Павловский Ю.Н.* Декомпозиция сигма-объектов в HPF-категориях. В кн. Межведомственный сборник научных трудов. М.: МФТИ, 1995. С. 130-144

[98] *Павловский Ю.Н., Яковенко Г.Н.* Группы, допускаемые динамическими системами. В кн. Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск: Наука, 1982. С. 155-189 (РЖМат, 1983, 4Б671)

[99] *Пельцвергер Б.В.* Приближенная декомпозиция и вопросы взаимодействия в сложных технических системах // Известия АН СССР. Техническая кибернетика.- 1990, N 6.- С. 83-94

[100] *Петров Б.Н.* Принцип инвариантности и условия его применения при расчете линейных и нелинейных систем. В кн. Труды 1 Международного симпозиума ИФАК по автоматическому управлению. М.: Наука, 1961. С. 259-271

[101] *Пинский М.А.* Об эквивалентности управляемых систем с непрерывной группой симметрии // Дифференц. уравнения. 1982. 187 N6. С. 1089-1091 (РЖМат, 1982, 10Б554)

[102] *Пинский М.А.* О групповом критерии эквивалентности управляемых динамических систем // Исслед. по теории многосвязн. систем / М., 1982. С. 55-60 (РЖМат, 1982, 10Б555)

[103] *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. 4-е изд. М.: Наука, 1978. 296 с.

[104] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 394 с. (РЖМат, 1963, 8В280 К)

[105] *Пятницкий Е.С.* Синтез управления манипуляцинными роботами на принципе декомпозиции // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. - 1987, N3. С. 25-33.

[106] *Пятницкий Е.С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // ДАН СССР. - 1988, Т. 300, N 2. С. 300-303 (РЖМат, 1988, 10Б822)

[107] *Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М.* Чувствительность систем управления. М.: Наука. 1981, 464 с.

[108] *Розоноэр Л.И.* Вариационный подход к проблеме инвариантности систем автоматического управления // Автоматика и телемеханика, 1963. N 6. С. 744-755. N 7. С. 861-870 (РЖМат, 1963, 12Б468)

[109] *Смирнова Т.Г.* О частичном агрегировании и частично допускаемых группах // Кибернетика и вычислительная техника. - 1982. Вып. 54. - С. 31-35 (РЖМат, 1983, 6Б588)

[110] *Смирнова Т.Г.* О приближенном решении одной задачи агрегировании. - Известия АН СССР. Техническая кибернетика. - 1984. N 6.- С. 25-30.

[111] *Смирнова Т.Г.* Приближенная декомпозиция динамических систем // М.: ВЦ АН СССР, - 1987. - 23 с.

[112] *Соколов В.И.* Синтез декомпозирующего управления в нелинейных динамических системах // Дифференц. уравнения. 1988. Т.24, N 4. С. 600-613 (РЖМат, 1988, 9Б699)

[113] *Солнечный Э.М.* Исследование задачи синтеза инвариантной си- стемы управления синхронным электрогенератором // Автоматика и телемеханика. 1991. N 2. С. 62-75

[114] *Танаев В.С.* Декомпозиция и агрегирование в задачах математического программирования.-М.: Наука и техника, 1987. - 183 с.

[115] *Удилов В.В.* Теоретико-групповой подход к задачам автономности, инвариантности, чувствительности в управляемых динамических системах. В кн. Кибернетика и вычислительная техника.-Киев: Наукова думка, 1978. - Вып. 39. С. 72-83 (РЖМат, 1978, 12Б607)

[116] *Удилов В.В.* Метод инвариантных многообразий в задачах управления динамическими системами. В кн. Кибернетика и

вычислительная техника.- Киев: Наукова думка.- 1980. Вып. 47. С. 10-25

[117] *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории I. М.: Мир. 1977, 688 с. (РЖМат, 1978, 6А178 К)

[118] *Флеров А.А.* Техника инвариантного синтеза. - В кн.: Труды 27-й конференции МФТИ. Аэрофизика и прикладная математика. - Долгопрудный: МФТИ, 1980. - С. 118-120 (РЖМат, 1982, 4Б699)

[119] *Флеров А.А.* Задача инвариантного синтеза и ее применения. В кн. Кибернетика и вычислительная техника. - Киев: Наукова думка.- 1983. Вып. 58. С. 50-56 (РЖМат, 1984, 1Б787)

[120] *Хрусталев М.М.* Необходимые и достаточные условия слабой инвариантности // Автоматика и телемеханика, 1968, N 4. С. 17-22 (РЖМат, 1968, 12Б514)

[121] *Хрусталев М.М., Плотников Ю.П., Белов В.А.* Применение теории инвариантностик к задачам управления спуском в атмосфере // Труды V1 Международного симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в пространстве. М.: Наука, 1976.

[122] *Хрусталев М.М., Дементьева В.В.* Простой алгоритм управления спуском в атмосфере, инвариантный к возмущениям

// В сб. "Интегрированные системы активного управления летательными аппаратами. Применение методов адаптации и идентификации" / М., 1982. С. 76-82.

[123] *Цурков В.И.* Декомпозиция в задачах большой размерности. - М.: Наука, 1981. - 351 с.

[124] *Цурков В.И.* Динамические задачи большой размерности. - М.: Наука, 1988. - 351 с. (РЖМат, 1982, 2Б872 К)

[125] *Черноплеков А.Н.* Динамические группы в категории динамических систем. -В кн. Труды МФТИ. Аэродинамика и прикладная математика. - Долгопрудный: МФТИ, 1979. - С. 197-200 (РЖМат, 1980, 6А637)

[126] *Черноплеков А.Н.* Динамические группы и системы Лагранжа. -В кн. Труды МФТИ. Аэрофизика и прикладная математика. - Долгопрудный: МФТИ, 1980. - С. 150-152 (РЖМат, 1981, 3А582)

[127] *Черноплеков А.Н.* Алгебраические аспекты факторизации динамических систем. - В кн. Кибернетика и вычислительная техника. - Киев: Наукова думка, 1981. - Вып.51. - С. 29-36 (РЖМат, 1981, 11Б751)

[128] *Черноплеков А.Н.* Факторизация вариационных систем. - В кн. Кибернетика и вычислительная техника. - Киев: Наукова думка, 1982. -Вып.55. - С. 45-51 (РЖМат, 1983, 6Б585)

[129] *Черноусько Ф.Л.* Декомпозиция и синтез управления в динамических системах // Известия АН СССР. Техническая кибернетика.- 1990. - N6. -С. 64-82

[130] *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазоваго состояния динамических систем. М.: Наука. 1988. 320 с. (РЖМат, 1988, 7Б713 К)

[131] *Штессель Ю.Б., Эвнин А.Ю.* Инвариантное управление выходом нелинейных систем // Автомат. и телемех. 1990. N3. С. 46-52.

[132] *Щипанов Г.В.* Теория и методы проектирования автоматических регуляторов // Автоматика и телемеханика, 1939, N 1, с. 49-66.

[133] *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований / Пер. с англ. М.: ИЛ, 1947. 360 с.

[134] *Яковенко Г.Н.* L-системы их исследование: Дис...канд.физ.-мат. наук. М., 1973. 119 с.

[135] *Яковенко Г.Н.* Необходимое условие управляемости//Вопр. прикл. мат. / Иркутск, 1975. С. 108-119 (РЖМат, 1976, 12Б488)

[136] *Яковенко Г.Н.* Критерий инвариантности управляемых систем// Методы оптимизации и исслед. операций. Прикл. математика / Иркутск, 1976, С.71-78 (РЖМат, 1977, 3Б304)

[137] *Яковенко Г.Н.* Групповой подход к управляемости и инвариантности динамических систем // Кибернет. и вычисл. техн. / Киев, 1978. Вып. 39. С. 26-39 (РЖМат, 1978, 11Б652)

[138] *Яковенко Г.Н.* О групповом подходе к проблеме инвариантности систем с управлением // Динамика управляем. систем / Новосибирск: Наука, 1979. С.329-335 (РЖМат, 1980, 5Б620)

[139] *Яковенко Г.Н.* Декомпозиция нелинейных управляемых систем с группой симметрии // Механика гироскопических систем / Киев: Вища школа, 1986. Вып. 5. С. 131-137.

[140] *Яковенко Г.Н.* Симметрии по состоянию в системах с управлением // Прикладная механика и математика: Межвед. сб. науч. тр. / МФТИ. М., 1992. С. 155-176.

[141] *Яковенко Г.Н.* Групповые свойства динамических систем. Конечномерный случай. М.: Изд. МФТИ, 1994. 140 с.

[142] *Яковенко Г.Н.* Инвариантный синтез регулярных систем // Проблемы математики в физических и технических задачах: Межвед. сб. науч. тр. / МФТИ. М., 1994. С. 186-210.

[143] *Agrachev A.A., Gamkrelidze R.V.* Local controllability and semigroups of diffeomorphisms // Acta appl. math. - 1993, vol.32, N 1, pp. 1-57.

[144] *Aoki M.* Control of large scale dynamic system by aggregation // IEEE transaction on automatic control. - 1968. - V.AC-13, N 3. - P.246-253 (РЖМат, 1969 6Б497)

[145] *Brockett R.W.* Conttrol theory and analitical mechanics. - In: Geometric Control Theory (Hermann B., Martin C., essd.). - Math. Sci. Press, Brookline, Massachusetts, 1977, pp. 1-46

[146] *Di Benedetto M.D., Lucibello P.* // . Inversion of nonlinear time varying systems // IEEE Trans. Autom. Contr. - 1993, vol. 38, N 8, pp. 1259-1264 (РЖ Матем. 1994, 7, 7Б502)

[147] *Dion J.M., Commault C.* Feedback decoupling of structured systems // IEEE Trans. Autom. Contr. - 1993, vol. 38, N 7, pp. 1132-1135 (РЖ Матем. 1994, 6, 6Б539)

[148] *Dorison H.T.* A method for bilinear system identification // Automatic Control: Proc. 11th Trienn World Congr. Automatic

Control, Tallin, 11-17 Aug. 1990, vol. 2. - Oxford etc. 1991, pp. 143-148

[149] *Fliess Michel, Levine Jean, Martin Philippe, Rouchon Pierre.* Flatness and deffect of nonlinear systems // Int. Geom. Colloq., Moscow, 10-14 May, 1993, Abstr.- Moscow, 1993, pp. 33-34.

[150] *Hermann R.* On the accessibility problem in control theory. - International Symposium Nonlinear Differential Equvations and Nonlinear Mechanics. New-York. 1963. P.325-332.

[151] *Hermann R., Krener A.J.* Nonlinear controllability and observability // IEEE transaction on automatic control. - 1977. - V.AC-22. -P. 728-740 (РЖМат, 1978, 6Б505)

[152] *Hirshhorn R.M.* (A.B) - invariant distributionsand and the disturbance decoupling of nonlinear systems // SIAM jornal on control and optimization. - 1981.- V.19, N 1. - P.1-19 (РЖМат, 1981, 8Б764)

[153] *Isidory A., Krener A.J., Gori-Giorgi C. ,Monaco S.* Nonlinear decopling via feedback: a differential geometric approach // IEEE transaction on automatic control. - 1981. - V.26. -P. 331-345 (РЖМат, 1982, 2Б671)

[154] *Ikeda M., Sakamoto K.* On the concept of simmetry in Pontryagins maximum principal//SIAM J. contr. 1975, 14, N 4, p. 700-711 (РЖМат, 1975, 9Б525)

[155] *Krener A.J.* A decomposition theory for differential system // disturbance decoupling of nonlinear systems // SIAM jornal on control and optimization. -1977. - V.15, N 5. - P.813-829 (РЖМат, 1978, 7Б356)

[156] *Muller P.S., Popp K.* Zur Theorie der ersten Integrale bie gesteurte mechanichen Systemen// Ztschr. angew. Math. und Mech., 1974, Bd. 54, N 11. S. 695-702 (РЖМат, 1974, 11Б343)

[157] *Negoita K.* Management Applications of Systems Theory. Birkhauser Verlag, Bazel und Stuttgart. 1981.

[158] *Nymeijer H.* Feedback decomposition of nonlinear control systems // IEEE transaction on automatic control. - 1983. - V.AC-28, N 8. -P.861-862 (РЖМат, 1984, 2Б878)

[159] *Nymeijer H.*, Van der Schaft A.I. Controlled invariance for nolinear systems // IEEE transaction on automatic control. - 1982. - V.-27, N 8. -P.904-914 (РЖМат, 1983, 1Б651)

[160] *Nymeijer H.*, Van der Schaft A.I. Partial symmetries for nolinear systems // Mathematical Systems Theory. - 1985. - V.-18. -P.79-96 (РЖМат, 1986, 1Б785)

[161] *Rodellar J., Leitman G., Ryan E.P.* Output feedback control of uncertain coupled system // Int. J. Contr. - 1993, vol.58, N 2, pp.445-457. (РЖ Матем. 1994, 8, 8Б390)

[162] *Sussman H.J.* Existence and uniqueness of minimal realization of nonlinear systems // Mathematical Systems Theory. - 1976-1977.- V.10 - N.3. P. 263-284 (РЖМат, 1977, 12Б684)

[163] *Sussman H.J.* Differential-geometric methods: a powerfull set of new tools for optimal control // Lect. Notes Comput. Sci. - 1992, N.653, pp. 301-314

[164] *Sussman H.J.* Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. Transaction of American Mathematical Society.-1973.-V.180.- P. 171-188 (РЖМат, 1974, 5 А596)

[165] *Tarn T.J., Zhan W.* Input-output decoupling and linearization via restricted static-state feedbback // Automatic Control: Proc. 11th Trienn World Congr. Automatic Control, Tallin, 11-17 Aug. 1990, vol. 3. - Oxford etc. 1991, pp. 287-292

[166] *Tchou K., Nijmeijer H.* On output linearization of observable dynamics // Theor. and Adv. Technol. - 1993, vol. 9, N 4, pp.819-857. (РЖ Матем. 1994, 7, 7Б495)

[167] *Van der Shaft A.J.* On Realization of Nonlinear Systems Described by Higher-Order Differetial Equations. Mathematical

Systems Theory, 1987.- V.19. - P. 239-275. [Имеется перевод: ван дер Шафт А. К теории реализации систем, описываемых дифференциальными уравнениями высшего порядка. В кн. Теория систем. М.: Мир, 1989. С. 192-237.]

[168] *Willems J.C.* System theoretic models for analysis of phisical systems. - Ric. Aut. 10 (1979), 71-106.

[169] *Willems J.C.* Input-output and state-space representations of finite-dimentional linear time-invariant systems.- Linear Algebra Applications. - 50 (1983), 581-608 (РЖМат, 1984, 4Б261)

[170] *Willems J.C.* From Time Series to Linear System. Automatica,1986, vol.22, N 5,pp.561-580 (РЖМат, 1987, 5Б677); N 6, pp. 675-694; 1987, vol. 23, N 1, pp. 87-115 (РЖМат, 1987, 11Б461)

[171] *Zhou Hong.* A very simple method for constructing the smallest realization // Kongzhi lilum yu jingyong = Control Theory and Application.-1993, vol.10, N 4, pp.118-119. Кит.,рез. англ. (РЖ Матем. 1994, 8, 8Б391)

[172] *Xia Xiao hua.* Parametrization of decoupling control laws for Affine nonlinear systems // IEEE Trans. Autom. Contr. - 1993, vol. 38, N 6, pp. 916-928.

[173] *Xia Xiao hua.* On the solution and its uniqueness of nonlinear decoupling problems // Xitong Kexue yu shuxue = J. Syst. SSci. and Math. Sci. - 1993, vol. 13, N 4, pp. 289-296.