УДК 519.4

О ШКАЛАХ РОДОВ СТРУКТУР

член-корреспондент РАН Ю.Н. Павловский

1. Пусть B — бурбаковская формальная система, более сильная, чем бурбаковская “Теория множеств” [1]. В конструкциях, вводимых ниже, участвуют термы (множества) и соотношения бурбаковских формальных систем, являющиеся словами в алфавите этих систем. Любая буква в бурбаковских системах является термом. Синтаксис термов и соотношений в бурбаковских системах таков, что замена буквы в терме или соотношении термом дает синтаксически опять терм или соотношение. Пусть $X, Y, \ldots, Z$ — буквы. Если некоторое соотношение (терм) записано в виде $R(X, Y, \ldots, Z)$ ($U(X, Y, \ldots, Z)$), то это будет означать, что в этом соотношении (терме) могут фигурировать буквы $X, Y, \ldots, Z$. Пусть $A, B, \ldots, C$ — термы. Если некоторое соотношение (терм) записано в виде $R(A, B, \ldots, C)$ ($U(A, B, \ldots, C)$), то это означает, что оно получено из соотношения (терма) $R(X, Y, \ldots, Z)$ ($U(X, Y, \ldots, Z)$) одновременной заменой букв $X, Y, \ldots, Z$ термами $A, B, \ldots, C$. Для сокращения записи соотношение, которое при его первом появлении в тексте обозначено через $R(X, Y, \ldots, Z)$, далее, как правило, обозначается через R, а через R' всегда обозначается соотношение $R(X', Y', \ldots, Z')$, получающееся из $R(X, Y, \ldots, Z)$ заменой букв $X, Y, \ldots, Z$ термами $X', Y', \ldots, Z'$. То же самое касается и термов. Через T_n обозначается

соотношение "$f_0 : X_0 \to X_0' \wedge f_1 : X_1 \to X_1' \wedge \ldots f_n : X_n \to X_n$ — биекции". Через id_k обозначается тождественное отображение множества A_k на себя.

2. Через Σ_0^0 обозначается последовательность $X_0; \sigma_0; A_0; \sigma_0 \in S_0(X_0, A_0)$ термов и соотношений системы B, являющаяся родом структуры в B, в котором отсутствует аксиома. Это означает [1], что X_0 — буква (здесь и далее, там, где при определении некоторой конструкции речь идет об одной букве, одном терме или одном соотношении, этих букв, термов, соотношений может быть несколько или не быть ни одного; исключения будут оговариваться), не являющаяся константой системы B, называемая базисным множеством рода структуры Σ_0^0 (по крайней мере одно базисное множество должно присутствовать обязательно), σ_0 — буква, не совпадающая с X_0 и не являющаяся константой B, называемая родовой константой рода структуры Σ_0^0; A_0 — терм системы B, не содержащий букв X_0, σ_0, называемый вспомогательным множеством рода структуры Σ_0^0, $S_0(X_0, A_0)$ — множество, построенное из множеств X_0, A_0 с помощью операций прямого произведения двух множеств и взятия множества частей множества. Здесь и далее буквой S с индексами обозначается схема построения такого множества, указывающая с какими по номеру множествами в их списке X_0, A_0 и в какой последовательности выполняются эти операции [1,2]. Соотношение $\sigma_0 \in S_0(X_0, A_0)$ называется соотношением типизации рода структуры Σ_0^0 или ее типизацией. Последовательность Σ_0^0 термов и соотно-

шений назовем уровнем (0,0) шкалы родов структур в B и одновременно шкалой родов структур нулевой длины. Бубаковскую систему, получающуюся из B добавлением к ее явным аксиомам соотношения $\sigma_0 \in S_0(X_0, A_0)$, т.е. в соответствии с терминологией [1] теорию рода структуры Σ_0^0 в B, обозначим через $B\Sigma_0^0$.

Соотношение $R(X_0, \sigma_0)$, переносимое в B относительно типизации $\sigma_0 \in S_0(X_0, A_0)$ здесь будет называться Σ_0^0-инвариантным или инвариантным при Σ_0^0-изоморфизмах. Это означает [1], что соотношение T_0 (см. выше) влечет в $B\Sigma_0^0$ соотношение $R \Leftrightarrow R'$, где $\sigma_0' = S_0(f_0, id_0)(\sigma_0)$, а $S_0(f_0, id_0)$ — распространение отображений f_0 и тождественных отображений вспомогательных множеств по схеме S_0 [1,2].

Терм $U(X_0, \sigma_0)$ называется [1] термом типа $S_U(X_0, A_0)$ в B относительно Σ_0^0, если в системе $B\Sigma_0^0$ имеет место $U(X_0, \sigma_0) \in S_U(X_0, A_0)$. Терм $U(X_0, \sigma_0)$ типа $S_U(X_0, A_0)$ в B относительно Σ_0^0, переносимый в B относительно типизации $\sigma_0 \in S_0(X_0, A_0)$ [1], здесь будет называться Σ_0^0-инвариантным или инвариантным при Σ_0^0-изоморфизмах. Это означает [1], что соотношение T_0 влечет в $B\Sigma_0^0$ соотношение $U' = S_U(f_0, id_0)(U)$.

3. Пусть соотношение $R_1(X_0, \sigma_0)$ Σ_0^0-инвариантно в B. Через Σ_1^0 обозначается последовательность $X_0; \sigma_0; A_0; \sigma_0 \in S_0(X, A); R_1(X_0, \sigma_0)$ термов и соотношений системы B, являющаяся, поскольку $R_1(X_0, \sigma_0)$ Σ_0^0-инвариантно в B, родом структуры в B [1]. Эта последовательность здесь будет называться уровнем (0,1) шкала родов структур в B, а совокупность (Σ_0^0, Σ_1^0) — шкалой родов структур в B длины 1. Теория

рода структуры Σ_1^0 в B обозначается через $B\Sigma_1^0$.

Соотношение $R(X_0, \sigma_0)$ называется Σ_1^0-инвариантным или инвариантным при Σ_1^0-изоморфизмах, если соотношение T_0 влечет в $B\Sigma_0^1$ соотношение $R \Leftrightarrow R'$.

Терм $U(X_0, \sigma_0)$ называется [1] термом типа $S_U(X_0, A_0)$ в B относительно Σ_1^0, если в системе $B\Sigma_1^0$ имеет место $U(X_0, \sigma_0) \in S_U(X_0, A_0)$. Терм $U(X_0, \sigma_0)$ типа $S_U(X_0, A_0)$ в B относительно Σ_1^0 переносимый в B относительно Σ_1^0 при типизации $\sigma_0 \in S_0(X, A)$ [1], т.е. такой, что соотношение T_0 влечет в $B\Sigma_0^1$ соотношение $U' = S_U(f_0, id_0)(U)$, здесь будет называться Σ_1^0-инвариантным или инвариантным при Σ_1^0-изоморфизмах. Σ_1^0 — инвариантный терм $U(X_0, \sigma_0)$, не содержащий букв, отличных от констант системы $B\Sigma_1^0$ называется внутренним для Σ_1^0 в B [1]. Пусть $B' \geq B$ — бурбаковская система. Совокупность термов (E_0, τ_0) называется Σ_1^0-объектом, если соотношения $\tau_0 \in S_0(E_0, A)$ и $R_1(E_0, \tau_0)$ являются теоремами B'. Σ_1^0-объекты биективно переносимы в B'. Это означает, что если (E_0, τ_0) — Σ_1^0-объект, то из условия "$f_0 : E_0 \to E_0'$ — биекция" следует условие (E_0', τ_0') — Σ_1^0-объект, где τ_0' $= S_0(f_0, id_0)(\tau_0)$.

4. Пусть X_1, σ_1 — буквы системы B, отличные друг от друга и не являющиеся константами системы $B\Sigma_1^0$, A_1 — терм системы B, в котором не встречаются буквы $X_0, X_1, \sigma_0, \sigma_1$. Через Σ_1^1 обозначается последовательность $X_0, X_1;\sigma_0, \sigma_1;A_0, A_1;$ $\sigma_0 \in S_0(X_0, A_0) \wedge \sigma_1 \in S_1(X_0, X_1, A_0, A_1)$; $R_1(X_0, \sigma_0)$ термов и соотношений, являющаяся, оче-

видно, родом структуры в системе B, у которой X_0, X_1— базисные множества, σ_0, σ_1 — родовые константы, A_0, A_1 — вспомогательные множества, $\sigma_0 \in S_0(X_0, A_0)$, $\sigma_1 \in S_1(X_0, X_1, A_0, A_1)$ — соотношения типизации, $R_1(X_0, \sigma_0)$ — аксиома. Эта последовательность будет называться уровнем (1,1) шкалы родов структур в B, а совокупность $(\Sigma_0^0, \Sigma_1^0, \Sigma_1^1)$ — шкалой родов структур в B длины 2. Теория рода структуры Σ_1^1 в B обозначается через $B\Sigma_1^1$. Соотношение $R(X_0, X_1, \sigma_0, \sigma_1)$, переносимое в B относительно Σ_1^1 при типизации $\sigma_0 \in S_0(X_0, A_0)$, $\sigma_1 \in S_1(X_0, X_1, A_0, A_1)$, т.е. такое, что соотношение T_1 влечет в $B\Sigma_0^1$ соотношение $R \Leftrightarrow R'$, здесь будет называться Σ_1^1-инвариантным или инвариантным при Σ_1^1-изоморфизмах.

Терм $U(X_0, X_1, \sigma_0, \sigma_1)$ называется термом типа $S_U(X_0, X_1, A_0, A_1)$ в B относительно Σ_1^1, если в системе $B\Sigma_1^1$ имеет место $U(X_0, X_1, \sigma_0, \sigma_1) \in S_U(X_0, X_1, A_0, A_1)$ [1]. Терм $U(X_0, X_1, \sigma_0, \sigma_1)$ типа $S(X_0, X_1, A_0, A_1)$ в B относительно Σ_1^1, переносимый в B относительно Σ_1^1 при типизации $\sigma_0 \in S_0(X_0, A_0)$, $\sigma_1 \in S_1(X_0, X_1, A_0, A_1)$, т.е. такой, что соотношение T_1 влечет в $B\Sigma_1^1$ соотношение $U' = S_U(f_0, f_1, id_0, id_1)(U)$, здесь будет называться Σ_1^1-инвариантным или инвариантным при Σ_1^1-изоморфизмах. Σ_1^1 — инвариантный терм $U(X_0, X_1, \sigma_0, \sigma_1)$, не содержащий букв, отличных от констант системы $B\Sigma_1^1$ называется внутренним для Σ_1^1 в B [1]. Совокупность термов $(E_0, E_1, \tau_0, \tau_1)$ называется Σ_1^1-объектом, если соотношения $\tau_0 \in S_0(E_0, A)$, $\tau_1 \in S_1(E_0, E_1, A_0, A_1)$ и $R_1(E_0, \tau_0)$ являются теоремами B'. Σ_1^1-объекты биективно переносимы в B': . Это означает, что если $"f_0 : E_0 \to E'_0 \wedge f_1 : E_1 \to E'_1$ — биекции, то $(E'_0, E'_1, \tau'_0, \tau'_1)$ — Σ^1_1-объект.

5. Пусть соотношение $R_2(X_0, X_1, \sigma_0, \sigma_1)$ Σ^1_1 - инвариантно в B. Через Σ^1_2 обозначается последовательность $X_0, X_1;\sigma_0, \sigma_1;A_0, A_1;$ $\sigma_0 \in S_0(X_0, A_0) \wedge \sigma_1 \in S_1(X_0, X_1, A_0, A_1);$ $R_1(X_0, \sigma_0), R_2(X_0, X1, \sigma_0, \sigma_1)$ термов и соотношений. Эта последовательность называется уровнем (1,2) шкалы родов структур в B, а совокупность $(\Sigma^0_0, \Sigma^0_1, \Sigma^1_1, \Sigma^1_2)$ — шкалой родов структур в B длины 3. Через $B\Sigma^1_2$ обозначается бурбаковская система, получающаяся из системы Σ^1_1 добавлением к ее явным аксиомам соотношения $R_2(X_0, X_1, \sigma_0, \sigma_1)$. Соотношение $R(X_0, X_1, \sigma_0, \sigma_1)$ называется Σ^1_2-инвариантным или инвариантным при Σ^1_2-изоморфизмах, если соотношение T_1 влечет в $B\Sigma^2_1$ соотношение $R \Leftrightarrow R'$.

Терм $U(X_0, X_1, \sigma_0, \sigma_1)$ называется термом типа $S_U(X_0, X_1, A_0, A_1)$ в B относительно Σ^1_2, если в системе $B\Sigma^1_2$ имеет место $U(X_0, X_1, \sigma_0, \sigma_1) \in S_U(X_0, X_1, A_0, A_1)$. Терм $U(X_0, X_1, \sigma_0, \sigma_1)$ типа $S(X_0, X_1, A_0, A_1)$ в B относительно Σ^1_2, такой, что соотношение T_1 влечет в $B\Sigma^2_1$ соотношение $U' = S_U(f_0, f_1, id_0, id_1)(U)$, называется Σ^1_2-инвариантным или инвариантным при Σ^1_2-изоморфизмах. Σ^1_2 — инвариантный терм $U(X_0, X_1, \sigma_0, \sigma_1)$, не содержащий букв, отличных от констант системы $B\Sigma^1_2$ называется внутренним для Σ^1_2 в B. Совокупность термов $(E_0, E_1, \tau_0, \tau_1)$ называется Σ^1_2-объектом, если соотношения $\tau_0 \in S_0(E_0, A)$, $\tau_1 \in S_1(E_0, E_1, A_0, A_1)$, $R_1(E_0, \tau_0)$ и $R_2(E_0, E_1, \tau_0, \tau_1)$ являются теоремами B'. Σ^1_2-объекты биективно переносимы в B': . Это означает, что если $"f_0 : E_0 \to E'_0 \wedge f_1 :$

$E_1 \to E'_1$ — биекции, то $(E'_0, E'_1, \tau'_0, \tau'_1)$ — Σ^1_2-объект.

6. Аналогично строятся следующие уровни шкалы родов структур в исходной системе B и определяются Σ^k_j-инвариантные в B термы и соотношения (здесь и далее $k = j - 1 \vee k = j$). Шкале $(\Sigma^0_0, \Sigma^0_1, ..., \Sigma^k_j)$ родов структур соответствует шкала $(B\Sigma^0_0, B\Sigma^0_1, ..., B\Sigma^k_j)$ бурбаковских систем. Бурбаковская система $B\Sigma^1_2$ может не являться теорией некоторого рода структуры в системе B, поскольку одна из ее явных аксиом $R_2(X_0, X_1, \sigma_0, \sigma_1)$ может быть непереносима в B относительно типизации $\sigma_0 \in S_0(X_0, A_0) \wedge \sigma_1 \in S_1(X_0, X_1, A_0, A_1)$, как это требуется от аксиомы рода структуры [1]. В самом деле, условие $T_1 \Rightarrow (R_2 \iff R'_2)$ выполняется в системе $B\Sigma^1_1$, а не в системе, которая получается из системы B добавлением к ее явным аксиомам соотношений $\sigma_0 \in S_0(X_0, A_0)$, $\sigma_1 \in S_1(X_0, X_1, A_0, A_1)$. То же самое касается бурбаковских систем, соответствующих уровню выше чем (1,2) любой шкалы родов структур. Тем не менее, в произвольной бурбаковской системе из шкалы $(B\Sigma^0_0, B\Sigma^0_1, ..., B\Sigma^k_j)$ можно вводить морфизмы точно также, как это делается в “обычной” теории рода структуры. Можно вводить также все конструкции теории декомпозиции [2,3] и все утверждения этой теории будут иметь место. Этот факт основан на том, что Σ^k_j-объекты в системе $B' \geq B$ биективно переносимы, также как это имеет место для обычных Σ^0_1-объектов.

В заключение заметим, что для любого уровня шкалы родов структур имеют место аналоги установленных в [1] критериев переносимости термов и соотношений, если в этих критериях заменить словосочетания "переносимый терм" и "переносимое соотношение" на "Σ_j^k — инвариантный терм" и "Σ_j^k — инвариантное соотношение".

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00556).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б у р б а к и Н. Теория множеств. М.: Мир, 1966. 425 с.

2. П а в л о в с к и й Ю.Н., С м и р н о в а Т.Г. Проблема декомпозиции в математическом моделировании. М. Фазис, 1998. 272 с.

3. П а в л о в с к и й Ю.Н. О P- и F- декомпозициях Σ-объектов // Доклады РАН, 1996. - Т.351, N 5. С.603-605.