УДК 519.4

О HPF- И PF-МОРФИЗМАХ

Член-корреспондент РАН Ю.Н. Павловский

1. Через $\Sigma = (X; \sigma; A; \sigma \subset S(X, A); R(X, \sigma))$ обозначается род структуры (в формальной бурбаковской системе B более сильной, чем бурбаковская "Теория множеств") с базисными множествами X, родовыми константами σ, вспомогательными множествами A, соотношениями типизации $\sigma \subset S(X, A)$ и аксиомой $R(X, \sigma)$ [1]. Через Σ_0 обозначим род структуры $(X; \sigma; A; \sigma \subset S(X, A))$, или, другими словами [4, гл.2,р.2] типизацию рода структуры Σ. Как известно, аксиома $R(X, \sigma)$ должна быть переносимой в B при Σ_0 [1] или, по терминологии [5], инвариантной при Σ_0-изоморфизмах в B. Это означает, что из соотношений "$f : X \to X'$ — биекция" и $\sigma \subset S(X, A)$ в системе B должно вытекать соотношение $R(X, \sigma) \Rightarrow R(X', \sigma')$, где $\sigma' = S(f, id_A)(\sigma)$. Следующие определения, необходимые для дальнейшего анализа, обобщают определение инвариантности соотношения при Σ_0-изоморфизмах.

О п р е д е л е н и е 1. Соотношение $R(X, \sigma)$ называется Σ_0-инвариантным в B при произвольных (инъективных) (сюръективных) (биективных) отображениях, если соотношения "$f : X \to X'$ — отображение (инъекция) (сюръекция) (биекция)" и $\sigma \subset S(X, A)$ влекут в B соотношение $R(X, \sigma) \Rightarrow R(X', \sigma')$, где $\sigma' = S(f, id_A)(\sigma)$.

О п р е д е л е н и е 2. Соотношение $R(X,\sigma)$ называется обратно Σ_0 -инвариантным в B при (произвольных)(инъективных)(сюръективных) отображениях, если соотношения "$f : X \to X'$ — отображение (инъекция) (сюръекция)" и $\sigma' \subset S(X',A)$ влекут в B соотношение $R(X',\sigma') \Rightarrow R(X,\sigma)$, где $\sigma = (S(f,id_A))^{-1}(\sigma')$.

Далее понадобится также следующее определение.

О п р е д е л е н и е 3. Соотношение $R(X,\sigma)$ называется Σ_0-инвариантным в B при пересечениях (объединениях) по σ, если для всякого семейства "$(\sigma_i)_{i\in I}$, такого, что $I \neq \emptyset \wedge (\forall i)(\sigma_i \subset S(X,A))$ в B имеет место $(\forall i)(R(X,\sigma_i)) \Rightarrow R(X,\cap_{i\in I}\sigma_i)$ $((\forall i)(R(X,\sigma_i)) \Rightarrow R(X,\cup_{i\in I}\sigma_i))$.

Совокупность термов (E,τ) бурбаковской системы B' более сильной, чем B, называется Σ-объектом в B', если τ - структура рода Σ на E, т.е. если $\tau \subset S(E,A)$ и имеет место $R(E,\tau)$. Пусть M - терм системы B, снабжающий род структуры Σ в B морфизмами [1, гл.4,р.2,п.1]. С четверкой (B,Σ,M,B') ассоциируется категория являющаяся классом Σ-объектов системы B' с морфизмами, определяемыми термом M. Понятия подобъекта, фактор-объекта, суммы и произведения семейства объектов имеют в бурбаковской языковой системе и в теории категорий различное содержание [4, гл.2.р. 8]. Везде ниже речь будет идти о бурбаковских вариантах этих понятий. При этом бурбаковский подобъект будет называться P-объектом, бурбаковский фактор-объект — Fобъектом. Для того, чтобы подчеркнуть, что в категории (B, Σ, M, B') используются не *категорные*, а бурбаковские конструкции, будем называть её категорией исчисления рода структуры с морфизмами или, для сокращения записи, категорией ИРСМ.

2. Пусть (B, Σ, M, B') есть категория ИРСМ, $f : E \to E'$— морфизм Σ-объекта (E, τ),в Σ-объект (E', τ'), $f = \omega \circ b \circ \pi$ — каноническое разложение отображения f на проекцию, биекцию и инъекцию. Морфизм f называется PF-морфизмом [4, раздел 2.7], если на множестве $\overline{E} = E/Q_f$, где Q_f — отношение эквивалентности, ассоциированное с f, существует F-объект объекта (E, τ), на множестве $f(E)$ существует P-объект объекта (E', τ'). В этом случае биекция $b : \overline{E} \to f(E)$ — является морфизм, который, однако, не обязательно изоморфизм [1, гл.4,р.2,п.6] . Если же биекция b — изоморфизм, то морфизм f называется HPF-морфизмом [4, гл. 2,р.7]. Категория ИРСМ (B, Σ, M, B') называется PF-категорией, если все её морфизмы суть PF-морфизмы, HPF-категорией, если все её морфизмы суть HPF-морфизмы [4, гл. 2,р.7]. Свойство морфизма $f : (E, \tau) \to (E', \tau')$ быть PF- (HPF-)морфизмом инвариантно при изоморфизмах, т.е., если $a : (E, \tau) \to (H, \omega)$ и $a' : (E', \tau') \to (H', \omega')$ изоморфизмы, то $a' \circ f \circ a^{-1}$ — PF-(HPF-) морфизм.

Везде далее будет считаться, что терм M задает множество естественных канонических морфизмов, т.е. [4, гл.2,р.5] отображение $f : E \to E'$ тогда и только тогда принадлежит множеству $M(E, \tau, E', \tau')$, когда $S(f, id_A)(\tau) \subset \tau'$. Для сокращения речи там, где это удобно, естественные канонические морфизмы будут обозначаться ЕКМ. Род структуры Σ в системе B, более сильной, чем "Теория множеств", называется HPF-родом [6, стр. 20, определение 5.2], (PF-родом) если какова бы ни была система B', более сильная, чем B, категория ИРСМ (B, Σ, M, B'), где M определяет ЕКМ [4, гл.2, р.5], является HPF-категорией (PF-категорией).

Полезность PF - и HPF-свойств категории ИРСМ состоит, в частности, в том, что, говоря образно, с декомпозициями Σ-объектов на свободную сумму (в категориях со свободной суммой), а также с декомпозициями Σ-объектов на декартово произведение (в категориях с декартовым произведением) в PF-категориях дело обстоит "почти" также [4, гл.2, р.7, предложения 9 и 9'] как у абстрактных множеств, а в HPF-категориях точно также [4, гл.2, р.7, предложения 11 и 11'] как у абстрактных множеств.

Примеры 1. Все известные автору всюду определенные алгебраические рода структур, естественными каноническими морфизмы для которых являются гомоморфизмы, — группы (HPF-свойство рода структуры группы устанавливается классической теоремой о гомоморфизмах), кольца, тела, поля, модули, линейные векторные пространства, алгебры, являются HPF-родами .

2. PF-родом структуры является структура рода предпорядка, частичного порядка, линейного порядка (естественные канонические морфизмы — неубывающие отображения), структура рода отношения эквивалентности (естественные канонические морфизмы — отображения, переводящие эквивалентные пары в эквивалентные).

3. Непрерывные отображения топологических пространств являются естествен-

ными каноническими морфизмами, если топология на множестве X задается путем указания части σ множества $\beta(X) \times X$, причем соотношение $(U, a) \in \sigma$ означает, что элемент a множества X является точкой прикосновения части U этого множества. Открытые (замкнутые) отображения топологических пространств являются естественными каноническими морфизмами, если топология на множестве X задается путем указания тех частей U множества X, которые являются открытыми (замкнутыми). Все эти топологические рода структур (которые, естественно, эквивалентны [1, гл.4,р.1,п.7]) являются PF-родами. Отображения одновременно непрерывные и замкнутые являются естественными каноническими морфизмами, если топология на множестве X задается путем указания для каждой части U множества X его замыкания $\overline{U}$ [2, стр.75, предложение 9]. Относительно этих морфизмов таким образом определенный топологический род структуры является HPF-родом. Категория топологических пространств с морфизмами, которые являются одновременно открытыми и непрерывными, является HPF-категорией.

4. Расслоения [3, стр.70] являются HPF-морфизмами гладких многообразий.

3. Пусть (B, Σ, M, B') есть категория ИРСМ с естественными каноническими морфизмами.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть аксиома $R(X, \sigma)$ рода структуры Σ такова, что $R(X, \sigma) = R_1(X, \sigma) \bigwedge R_2(X, \sigma)$ и $R_1(X, \sigma)$ Σ_0-инвариантно при сюръекциях, $R_2(X, \sigma)$ обратно Σ_0-инвариантно при инъекциях (случай, когда $R(X, \sigma) = R_1(X, \sigma)$, т.е., когда $R(X, \sigma)$ Σ_0-инвариантна при сюръекциях, а также случай, когда $R(X, \sigma) = R_2(X, \sigma)$ т.е., когда $R(X, \sigma)$ обратно Σ_0-инвариантна при инъекциях, считаются частными случаями сформулированного условия). Тогда всякий естественный канонический морфизм $f : E \to E'$ Σ-объекта*

(E,τ),в Σ-объект (E',τ'), такой, что $S(f,id_A)(\tau)=S(f(E),A)\cap\tau'$, есть HPF-морфизм.

Примеры 5. Условию $S(f,id_A)(\tau)=S(f(E),A)\cap\tau'$ предложения 1 удовлетворяет любой естественный канонический морфизм отображения прямого произведения конечного количества произвольных множеств в некоторое множество. В частности, этому условию удовлетворяет любой естественный канонический морфизм (всюду определенных) алгебраических объектов произвольной сигнатуры. В настоящее время автору неизвестны алгебраические рода структур, аксиомы которых не удовлетворяли бы условиям предложения 1. Можно сказать, таким образом, что предложение 1 выясняет "механизм" HPF-свойства родов структур отображений и алгебраических родов структур.

6. Предложение 1 "объясняет" HPF-свойство топологического рода структуры, когда топология на множестве задается указанием для каждой части этого множества его замыкания, поскольку условиям предложения 1 удовлетворяет как аксиома этого рода структуры, так и каждый ЕКМ, т.е. отображение одного топологического пространства в другое одновременно непрерывное и замкнутое (см. выше пример 3).

Предложение 2. *Если аксиома $R(X,\sigma)$ рода структуры Σ является Σ_0-инвариантной при объединениях (пересечениях) по σ и Σ_0-инвариантной (обратно Σ_0-инвариантной) при произвольных отображениях, то род структуры Σ является PF-родом.*

Примеры 6. Условиям предложения 2 удовлетворяет аксиома рода структуры отношения эквивалентности и аксиома рода предпорядка. Однако, род структуры частичного порядка является PF-родом, но его аксиома не удовлетворяет условиям предложения 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00018).

Литература

[1] *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.: Мир. 1965. 456 с.

[2] *Бурбаки Н.* Общая топология. М.: Наука. 1968. 272 с.

[3] *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия. М.: Мир. 1975. 220 с.

[4] *Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г.* Проблема декомпозиции в математическом моделировании. М.: Фазис. 1998. 266 с.

[5] *Павловский Ю.Н.* О шкалах родов структур. // Доклады РАН, 1998. - Т.363, N 2. С.163-165.

[6] *Павловский Ю.Н.* Агрегирование и факторизация. В кн. Теория и практика исполдьзования методов агрегирования в планировании и управлении. Изд-во АН Армянской ССР. Ереван 1986 г. С. 8-27.