Ю. Н. Павловский, Смирнова Т.Г.

Проблема декомпозиции в математическом моделировании

© М.: ФАЗИС, 1998. VI+266

Телефон издательства ФАЗИС: (095)253-08-20, (095)938-39-48

Аннотация

В книге развивается языковая среда, предлагаемая авторами в качестве инструменты для изучения декомпозиции математических моделей, трактуемых как множества, снабженные структурой в смысле Н. Бурбаки.

Эта среда носит универсальный характер, ее можно использовать для изучения математических объектов произвольной природы.

В основе этой среды лежат лишь два понятия, двойственные друг другу, — понятие о P-декомпозиции математического объекта и понятие о его F-декомпозиции. В простейших случаях P-декомпозиция математического объекта — это такое семейство его подобъектов, по которому исходный объект восстанавливается единственным образом, F-декомпозиция математического объекта — это его семейство фактор-объектов, обладающих аналогичным свойством.

Книга основана на курсе лекций, читаемых профессором Ю.Н. Павловским студентам факультета управления и прикладной математики Московского физико-технического института.

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 96-01-14082).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Смысл слова "декомпозиция" в применении как к математическим моделям вообще, так и к моделям управляемых процессов в современной научной литературе остается достаточно расплывчатым. Настоящая книга связана с "геометрическим" подходом к проблеме декомпозиции. Его суть состоит в погружении изучаемого объекта (модели) в класс "родственных", "однотипных" объектов, введении в этом классе эквивалентных преобразований (изоморфизмов) объектов друг в друга и поиске среди объектов, эквивалентных (изоморфных) данному, такого, который "составлен" из некоторого количества более простых в определенном смысле объектов.

При таком подходе один и тот же объект может быть погружен в разные классы с разными понятиями об изоморфизме и иметь поэтому в этих классах разные декомпозиционные представления (другими словами, исходный объект может быть представлен в виде некоторого количества более простых объектов различными способами). Ясно также, что декомпозиционные свойства объектов при таком подходе должны выражаться в терминах инвариантов преобразований эквивалентности (изоморфизмов), поскольку если некоторый объект обладает декомпозиционным представлением, то таким же представлением обладает всякий эквивалентный (изоморфный) ему объект. Поэтому проблема декомпозиции тесно связана с соответствующими проблемами классификации , состоящими в получении "простейших" представителей или, как принято говорить, "канонических форм", среди эквивалентных (изоморфных) друг другу объектов в рамках некоторого класса "однотипных" объектов относительно зафиксированного для этого класса понятия об эквивалентности (изоморфизме). В ряде случаев, как будет ясно из рассмотренных в книге примеров, канонической формой объекта является как раз его максимальная декомпозиция (т.е. такое представление исходного объекта, которое не допускает дальнейшей декомпозиции).

Для линейных математических моделей с линейными отображениями в качестве преобразований эквивалентности проблема декомпозиции в том ее понимании, которое здесь охарактеризовано, изучена к настоящему времени достаточно полно с помощью средств, естественным образом возникающих в линейной теории. Настоящая книга практически не касается линейных моделей с линейными эквивалентностями, а посвящена общему случаю, где средства линейной теории неприменимы.

В современной математике имеются две языковые системы, ориентированные на изучение свойств объектов, инвариантных относительно изоморфизмов: теория категорий и исчисления родов структур в формальных системах Н.Бурбаки. В обеих языковых системах математические объекты изучаются с помощью множеств морфизмов, сопоставляемых с каждой упорядоченной парой объектов. Интуитивно морфизм одного объекта в другой характеризует некоторые отношения "похожести", "родственности" между объектами. Примерами морфизмов являются гомоморфизмы групп, линейные отображения линейных векторных пространств, непрерывные отображения топологических пространств. Для многих типов объектов морфизм одного объекта в другой можно трактовать как способ представления некоторой части второго объекта с помощью первого объекта, представленного при этом в некотором ”агрегированном” виде. Множество морфизмов, сопоставляемых с данной парой объектов есть множество способов такого представления.

Оказывается, что многие свойства объектов можно выразить на языке взаимоотношений между объектами, т.е. в терминах свойств множеств морфизмов и что ряд свойств объектов разного типа, между которыми на первый взгляд нет ничего общего, имеют на языке свойств множеств морфизмов одну и ту же формулировку. Более того, для решения ряда математических проблем достаточно знать именно взаимоотношения между объектами, а не то, как эти объекты устроены. (Позволим себе следующую рискованную аналогию: при общении людей друг с другом во многих случаях несущественно то, каковы у данного человека сердце, печень, почки, а существенно насколько человек общителен, как он воспитан, хороши ли его манеры и т.д., другими словами, существенны свойства, характеризующие его взаимоотношения с другими людьми.)

Задача декомпозиции математического объекта, так как она здесь понимается, состоит в эквивалентном представлении данного объекта с помощью некоторого количества других объектов. Ясно поэтому, что языковая система, в рамках которой изучаются взаимоотношения между объектами, наиболее естественна для анализа проблемы декомпозиции.

Теория категорий и бурбаковская языковая система в большой мере "пересекаются". Но это — разные системы. Бурбаковская система менее абстрактна, чем теория категорий, где от математических объектов "ничего не остается", кроме связывающих их морфизмов. В бурбаковской же системе математический объект — это множество (или несколько множеств), снабженное структурой. Структура — это некоторое количество отношений между элементами данного множества (или между элементами множества его частей или между его элементами и элементами множества его частей и т.д.). Все понятия и факты теории категорий тривиальным образом доступны из бурбаковской языковой системы. В то же время интерпретация ряда понятий бурбаковской языковой системы на языке теории категорий вызывает определенные трудности. Заметим, что в настоящее время в доступной авторам математической литературе для изучения свойств объектов, инвариантных относительно изоморфизмов, достаточно широко используется теория категорий и практически не используется бурбаковская система.

В данной книге для анализа проблемы декомпозиции в качестве основной используется бурбаковская система. Однако оказалось удобным иногда использовать понятия и представления теории категорий. Изучение взаимоотношений бурбаковской системы и теории категорий, которые в настоящее время не вполне ясны, не являлось целью книги. Тем не менее этому вопросу посвящен специальный раздел.

Использование бурбаковской языковой системы для изучения проблемы декомпозиции наложило определенный отпечаток на характер и структуру книги. Для того, чтобы были ясны требования синтаксического характера, которыми сопровождаются вводимые и используемые в бурбаковской системе конструкции, т.е. для того, чтобы книга носила в определенной мере "замкнутый" характер, оказалось необходимым изложить формальную бурбаковскую систему — "Теорию множеств". Это изложение выполняется в книге на двух уровнях подробности. Краткое изложение бурбаковской "Теории множеств" содержится в первом разделе второй главы, более подробное изложение — в пятой главе. Краткое изложение является в то же время введением в более подробное изложение. Такая структура изложения, по мнению авторов, позволяет "практически ориентированным" читателям, понять характер выполняемого в книге анализа проблемы декомпозиции и результаты этого анализа, не обременяя себя подробным изучением бурбаковской формальной системы.

Охарактеризуем кратко содержание книги. Первая глава посвящена содержательным аспектам проблемы декомпозиции математических моделей. Она начинается с демонстрации на простейших примерах существа геометрического подхода к проблеме декомпозиции и "инвариантного" (т.е. с помощью понятий, инвариантных относительно выбранного класса преобразований эквивалентности) описания декомпозиционных свойств систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее устанавливается связь между проблемой декомпозиции математической модели и проблемой ее идентификации, анализируется проблема составления (разработки) математических моделей и выявляется ее "декомпозиционное" содержание. Специальный раздел посвящен моделям управляемых процессов, проблема декомпозиции которых наиболее богата.

Во второй главе кратко излагается бурбаковская "Теория множеств" и приводятся понятия бурбаковской системы, ориентированные на изучение свойств объектов, инвариантных относительно изоморфизмов. Эти понятия модернизируются и приспосабливаются к потребностям изучения декомпозиций математических объектов. В результате возникает языковая среда, которую авторы предлагают в качестве инструмента анализа декомпозиций математических моделей. Ее центральными понятиями являются понятия о P- и F-декомпозициях математических объектов, об их декомпозициях на свободную сумму и декартово произведение, о декомпозиционных структурах объектов.

В третьей главе с использованием понятий и фактов общей теории декомпозиции, разработанной во второй главе, выполняется анализ декомпозиции математических объектов конкретных типов. Основное внимание уделяется анализу декомпозиций семейств отображений, так как со всякой математической моделью ассоциируется некоторое семейство отображений и декомпозиция модели тесно связана с декомпозицией этого семейства. Выявляется связь между группой автоморфизмов семейства отображений и декомпозициями этого семейства. Излагаются результаты, касающиеся декомпозиций моделей, представимых системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Приводится интерпретация некоторых фактов, относящихся к декомпозиции математических моделей, представленных уравнениями в частных производных.

Четвертая глава посвящена изложению результатов, касающихся декомпозиции управляемых динамических систем. Управляемость, реализация, наблюдаемость, инвариантность управляемых динамических систем, анализируется с позиций теории декомпозиции и приводятся некоторые результаты этого анализа.

Пятая глава, как говорилось выше, носящая вспомогательный характер, включена в книгу для того, чтобы сделать изложение "замкнутым", и содержит описание бурбаковской формальной системы "Теории множеств".

Каждая глава разбита на несколько разделов. Нумерация определений и предложений независимая в каждом разделе. Для краткости при ссылках на другие разделы книги используются сокращения. Например, ссылка г. 2, р. 2.3, п. 2.3.5 (или г. 2, р. 3, п. 5) означает: глава 2, раздел 2.3, пункт 2.3.5. В случае, если возможны недоразумения, окончания формулировок теорем, доказательств, сокращающих правил, примечаний будут обозначаться символом ■. Текст доказательства теоремы, если не оговорено противное, будет идти непосредственно после ее формулировки без какого-либо поясняющего слова.