УДК 519.711

В.И.ЕЛКИН, д-р физ.-мат. наук, Л.Б.КОНОВАЛОВА, канд. физ.-мат. наук (ВЦ РАН, Москва)

О РЕДУКЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ К ЛИНЕЙНЫМ[1]

Для нелинейной управляемой системы определяется понятие линейной подсистемы, являющейся упрощенной моделью системы, с помощью которой можно находить часть фазовых траекторий. Приводятся условия существования линейных подсистем для некоторых типов нелинейных систем.

1. Введение

Существуют различные подходы к вопросу о приведении нелинейных управляемых систем

$$(1)\qquad \dot{y} = f_0(y) + f(y)u, \qquad y \in M \subset R^n, \quad u \in R^p,$$

к линейным управляемым системам и использовании возможности такого приведения для решения задач управления. Во-первых, это приближенный подход. С помощью линейного приближения в некоторых случаях удается (в малом) исследовать, например, свойства управляемости и наблюдаемости исходной нелинейной системы [1, 2]. Другой подход заключается в использовании замен переменных

$$(2)\qquad u = \lambda_0(y) + \lambda(y)v,$$

$$(3)\qquad y = \psi(x)$$

для приведения системы (1) к линейной системе

$$(4)\qquad \dot{x} = A + Bv, \qquad x \in L \subset R^n, \quad u \in R^v.$$

Если существует невырожденная замена управлений (2) (т.е. $r = s$ и $|\lambda| \neq 0$) и невырожденная замена фазовых переменных (3), то говорят,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 99–01–00947).

что системы (1) и (4) эквивалентны. В этом случае решение любой задачи, поставленной для системы (1), сводится к решению соответствующей задачи для эквивалентной линейной системы (4). Образно говоря, сущность такой нелинейной системы линейна, а нелинейность является только внешностью. Эквивалентность нелинейной системы линейной является, разумеется, исключительным свойством. Соответствующие условия эквивалентности приведены в [3, 4].

В данной работе рассматривается более общий случай, а именно, речь идет о приведении системы (1) к системе (4) с помощью замены переменных (2), (3), причем требуется лишь невырожденность замены фазовых переменных (3). Система, полученная из (1) подобной заменой переменных, называется открытой подсистемой (далее в работе, как правило, просто — подсистемой) системы (1).

По известным фазовым траекториям подсистемы можно находить фазовые траектории исходной системы. (Действительно, если $x(t)$ — фазовая траектория системы (4), соответствующая управлению $v(t)$, то $y(t) = \psi(x(t))$ — фазовая траектория системы (1), соответствующая управлению $u(t) = \lambda_0(y(t)) + \lambda(y(t))u(t)$.) Если подсистема не является эквивалентной системе (1), то таким образом нельзя получить все фазовые траектории системы (1). Однако использование подсистемы может быть весьма полезным. Например, в распространенной задаче терминального управления требуется найти хотя бы одну фазовую траекторию $y(t)$, соединяющую заданные точки $y_0, y_1 \in M$. Для решения этой задачи достаточно решить соответствующую задачу для открытой подсистемы (4). Действительно, найдя фазовую траекторию $x(t)$ системы (4), проходящую через точки $x_0 = \psi^{-1}(y_0)$, $x_1 = \psi^{-1}(y_1)$, получаем искомую фазовую траекторию $y(t) = \psi(x(t))$. Заметим, что решение задачи терминального управления для линейной системы, удовлетворяющей условию управлемости Калмана (а именно такие подсистемы рассматриваются в данной работе), не представляет труда [5].

Название ««подсистема»» обусловлено тем, что при включении систем вида (1) в математическую категорию с естественными морфизмами (переводящими фазовые траектории в фазовые траектории) подсистема (4) становится подобъектом исходного объекта (системы (1)) [6]. Таким образом, понятие подсистемы в теории управления возникает аналогично, скажем, понятию подгруппы в теории групп, ибо подобъект характеризуется тем, что он определяет часть часть структуры исходного объекта. В рассматриваемом здесь случае это обстоятельство выражается в том, что подсистема определяет часть фазовых траекторий исходной системы.

2. Определения и применяемый математический аппарат

Итак рассматриваются нелинейные управляемые системы вида (1), где M — фазовое пространство, являющееся областью, f_0 — гладкое векторное поле, f — $(n\times p)$-матрица, столбцы которой f_α, $\alpha = 1, \ldots, p$, — гладкие векторные поля. Предполагается, что $\operatorname{rank} f = \mathrm{const}$.

Решением (фазовой траекторией) системы (1) называется непрерывная функция $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, для которой существует такое кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, что $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют (1).

Для данной системы (1) произведем замену переменных (2), (3), в результате чего система преобразуется в систему

$$\dot{x} = g_0(x) + g(x)v, \qquad x \in L \subset R^n, \quad v \in R^s. \tag{5}$$

Предполагаем, что вектор-функция $\lambda_0(y)$ и $(r \times s)$-матрица $\lambda(y)$ гладко зависят от y, а (3) — гладкая невырожденная замена фазовых координат, т.е. $\psi\colon L \to M$ — взаимно однозначное отображение, причем ψ и ψ^{-1} — гладкие отображения. Система (5), получающаяся из (1) с помощью такого отображения, называется открытой подсистемой системы (1). Нас будет интересовать существование линейных открытых подсистем.

Замечание 1. На самом деле рассматриваемое здесь понятие открытой подсистемы является частным случаем более общего понятия подсистемы. Согласно общему определению, фазовое пространство L подсистемы является m-мерной областью евклидова пространства R^m, $m \leq n$, которая находится во взаимно однозначном соответствии ψ с некоторым m-мерным многообразием $N = \psi(L)$, лежащим в фазовом пространстве M исходной системы (в случае открытой подсистемы $m = n$ и $M = N$), причем отображение ψ переводит фазовые траектории подсистемы в фазовые траектории исходной системы [7, 8]. Таким образом, подсистема определяет часть фазовых траекторий исходной системы, лежащих на некотором многообразии. Отметим кстати, что в работах [7, 8] введены также некоторые специальные виды подсистем, которые наряду с линейными удобно использовать для исследования сложных систем (1).

Для исследования вопросов существования и нахождения линейных подсистем удобно использовать дифференциально-геометрическую теорию распределений и кораспределений. С этой теорией можно подробно познакомиться по книге [6]. Здесь же мы ограничимся перечислением дифференциально-геометрических объектов, в терминах которых формулируются условия существования линейных подсистем.

Как известно, каждой точке y области (и вообще, любого многообразия) $M \subset R^n$ ставятся в соответствии два линейных пространства размерности, равной размерности M. Первое — это касательное пространство TM_y, элементами которого являются векторы, исходящие из точки y. Второе — это кокасательное пространство T^*M_y, которое является сопряженным пространством к TM_y. Элементы T^*M_y называются линейными формами (ковекторами). Распределением D (кораспределением B) в M называется отображение, которое ставит в соответствие каждой точке $y \in M$ линейное подпространство $D(y) \subset TM_y$ ($B(y) \subset T^*M_y$). Для распределения D и кораспределения B величины $\dim D(y)$, $\dim B(y)$ называются рангами в точке $y \in M$. Каждому распределению D, заданному в области M, ставится в соответствие двойственное кораспределение $D^{\perp}$, также заданное в M:

$$y \to D^{\perp}(y) = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in T^*M_y\colon \\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i \xi^i = 0 \; \forall \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in TM_y\}.$$

Кораспределение B обычно задается с помощью семейства форм Пфаффа $\omega^k = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i^k(y) dy^i$, $k = 1, \ldots, q$, где $\omega_i^k(y)$ — гладкие функции. Это означает, что для любой точки $y \in M$ линейное подпространство $B(y)$ является линейной оболочкой ковекторов $\omega^k(y) = (\omega_1^k(y), \ldots, \omega_n^k(y))$, $k = 1, \ldots, q$. Следовательно, $\dim B(y) = \operatorname{rank} \|\omega_i^k(y)\|$. В этом случае часто говорят, что B порождается системой Пфаффа

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^k(y) dy^i = 0, \quad k = 1, \ldots, q.$$

Кораспределения постоянного ранга называются регулярными. Кораспределение B ранга $q > 0$ называется вполне интегрируемым, если (в окрестности каждой точки) в некоторой системе координат B задается системой Пфаффа $dx^1 = 0, \ldots, dx^q = 0$. Кораспределение нулевого ранга считается вполне интегрируемым.

С каждым кораспределением связан набор других кораспределений, свойства которых определяют свойства исходного кораспределения. Эти кораспределения порождаются системами Пфаффа, которые строятся с помощью элементарных алгебраических операций и дифференцирований, используя систему Пфаффа, порождающую исходное кораспределение. Так, кораспределению B ставится в соответствие строго убывающая последовательность кораспределений, называемая двойственным производным рядом

$$B_0 \supset B_1 \supset \ldots \supset B_N. \tag{6}$$

В (6) $B_0 = B$, B_N — максимальное вполне интегрируемое кораспределение, содержащееся в B. Заметим, что если B_i порождается формами Пфаффа ω^k, $k = 1, \ldots, q$, то B_{i+1} порождается формами Пфаффа Ω^l, являющимися линейными комбинациями форм ω^k и удовлетворяющими равенствам $d\Omega^l \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^q = 0$, где $d\Omega^l$ — внешний дифференциал формы Ω^l.

Число $N + 1$ называется длиной двойственного производного ряда. Это число, а также ранги кораспределений B_k, являются инвариантами кораспределения B, т.е. величинами, не меняющимися при замене координат. Другим важным инвариантом является класс кораспределения B, который представляет собой ранг характеристического кораспределения CK. Класс равен минимальному числу координат, через которые может быть выражена система Пфаффа, порождающая B, при использовании всевозможных замен координат.

Вернемся к управляемым системам. Система (1) задает в фазовом пространстве M аффинное распределение F. Понятие аффинного распределения является обобщением понятия распределения. Аффинное распределение F ставит в соответствие каждой точке $y \in M$ аффинное подпространство векторов $F(y) = f_0(y) + \operatorname{span}\{f_\alpha(y), \alpha = 1, \ldots, p\} \subset TM_y$. Аффинному распределению F можно также поставить в соответствие двойственное кораспределение, но уже не в области $M \subset R^n$, а в так называемой расширенной области $M \times R^1 \subset R^{n+1}$ изменения переменных (y, t). Здесь t — дополнительная переменная, которая обозначается одинаково при расширении любой области. Двойственное кораспределение K определяется следующим образом:

$$(y,t) \in M \times R^1 \to K(y,t) = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}) \in T^*(M \times R^1)_{(y,t)}:$$
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \xi^i + \omega_{n+1} = 0 \quad \forall \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in F(y).$$

Система Пфаффа, порождающая K, формально получается из соотношений (1) исключением переменных u и умножением на dt. Она имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^k(y)dy^i + \omega_{n+1}^k(y)dt = 0, \qquad k = 1, \dots, q, \tag{7}$$

где $q = n - \operatorname{rank} f$. Компоненты системы (7) не зависят от t. Кроме того, выполняется равенство

$$\operatorname{rank} \|\omega_i^k\|_{i=1,\dots,n}^{k=1,\dots,q} = \operatorname{rank} \|\omega_i^k\|_{i=1,\dots,n+1}^{k=1,\dots,q}.$$

Кораспределения, порождаемые такими системами Пфаффа, называются t-кораспределениями. t-Кораспределение K, определяемое управляемой системой (1), называется ассоциированным t-кораспределением системы (1). Заметим, что кораспределения K_γ, составляющие двойственный производный ряд, также являются t-кораспределениями. t-Кораспределению K (как и любому t-кораспределению), порождаемому в расширенной области $M \times R^1$ системой Пфаффа (7), можно поставить в соответствие кораспределение $\overline{K}$, порождаемое в области M системой Пфаффа

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^k(y)dy^i = 0, \qquad k = 1, \dots, q.$$

Так как в теории t-кораспределений переменная t имеет ««постоянный»» характер, то здесь вместо характеристического кораспределения CK используется другой объект, а именно t-характеристическое кораспределение C_tK, которое так же, как и $\overline{K}$, определено в M, причем ранг C_tK, называемый классом K, равен минимальному числу переменных (не включая t), через которые может быть выражена система Пфаффа, порождающая K, при использовании всевозможных замен координат (не меняющих t).

3. Условия существования линейных подсистем

Условия существования линейных подсистем, приводимые в этом разделе, выражаются в терминах ассоциированного t-кораспределения K системы (1) и связанных с ним других кораспределений. Предполагается, что все подобные кораспределения регулярны. Для рангов t-кораспределений K_i, составляющих двойственный производный ряд, введем обозначания: $q_i = \dim K_i$.

Подчеркнем, что результаты носят локальный характер, т.е. по существу они выражают условия существования линейных подсистем для системы (1) с фазовым пространством, являющимся некоторой окрестностью в M.

Рассмотрим линейную систему (4), удовлетворяющую условию управляемости Калмана

$$\operatorname{rank} \left\| B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B \right\| = n. \tag{8}$$

Как известно (см. [9]), такая система невырожденной заменой фазовых переменных и невырожденной заменой управлений

$$x = Cz, \quad z \in R^n, \quad v = \Lambda_0 + \Lambda w, \quad w \in R^s,$$

может быть приведена к эквивалентной системе вида

$$\begin{array}{lllll} \dot z_1^1 = z_2^1, & \dot z_2^1 = z_3^1, & \dots, & \dot z_{k_1-1}^1 = z_{k_1}^1, & \dot z_{k_1}^1 = w^1, \\ \dot z_1^2 = z_2^2, & \dot z_2^2 = z_3^2, & \dots, & \dot z_{k_2-1}^2 = z_{k_2}^2, & \dot z_{k_2}^2 = w^2, \\ \dots & & & & \\ \dot z_1^s = z_2^s, & \dot z_2^s = z_3^s, & \dots, & \dot z_{k_s-1}^s = z_{k_s}^s, & \dot z_{k_s}^s = w^s, \end{array} \tag{9}$$

$$z = (z_1^1, z_2^1, \dots, z_{k_1}^1, z_1^2, \dots, z_{k_2}^2, \dots, z_1^s, \dots, z_{k_s}^s) \in L \subset R^n, \quad w \in R^s,$$

$$k_1 \ge k_2 \ge \dots \ge k_s > 0,$$

называемой канонической формой Бруновского. Системе (9) соответствует t-кораспределение K, порождаемое формами Пфаффа

$$\theta_1^i = dz_1^i - z_2^i dt,\ \ \theta_2^i = dz_2^i - z_3^i dt,\ \ \dots,\ \ \theta_{k_i-1}^i = dz_{k_i-1}^i - z_{k_i}^i dt,\ \ i = 1, \dots, s,$$

а t-кораспределения K_γ, образующие двойственный производный ряд, задаются системами Пфаффа $\theta_j^i = dz_j^i - z_{j+1}^i dt = 0$, $i = 1, \dots, l_\gamma$, $j = 1, \dots, k_i - \gamma - 1$, где $l_\gamma = \max\limits_{k_m > \gamma+1} m$. Нетрудно убедиться в том, что $l_\gamma = \dim K_\gamma - \dim K_{\gamma+1}$, а k_1 равен длине двойственного производного ряда системы (9), т.е. соответствующего ассоциированного t-кораспределения. Числа k_j называются индексами Кронекера и являются инвариантами линейной системы. Зная числа $q_\gamma = \dim K_\gamma$ и длину двойственного производного ряда системы (4), можно найти все числа k_j, определяющие канонический вид (9) линейной системы (4).

Сформулируем в терминах t-кораспределений критерии эквивалентности системы (1) линейной системе (4), удовлетворяющей (8).

Теорема 1. Аффинная система (1) *с ассоциированным t-кораспределением K (локально) эквивалентна линейной системе, удовлетворяющей условию Калмана, тогда и только тогда, когда:*

1) *K_N имеет нулевой ранг;*

2) *$\overline{K_i}$, $i = 0, \dots, N-1$, являются вполне интегрируемыми кораспределениями.*

Необходимость условий теоремы следует из их справедливости для двойственного производного ряда системы (9) и их инвариантности относительно невырожденных замен переменных. Доказательство достаточности изложено в работе [10]. Заметим, что, согласно этому доказательству, условие 2 достаточно проверить только для тех K_γ, для которых $\dim K_\gamma - \dim K_{\gamma+1} > \dim K_{\gamma+1} - \dim K_{\gamma+2}$.

Воспользуемся теоремой 1 для изучения вопроса о линейных подсистемах системы (1). Пусть системе (1) соответствует t-кораспределение K, порождаемое системой Пфаффа (7). Заметим, что вырожденная замена управлений приводит к управляемой системе, ассоциированное t-кораспределение которой S содержит K. Возникающая система должна быть линеаризуемой, т.е. эквивалентной линейной системе. Следовательно, для существования линейной подсистемы необходимо и достаточно, чтобы существовало t-кораспределение S, содержащее K и удовлетворяющее условиям теоремы 1. Очевидно, что система Пфаффа, порождающая такое t-кораспределение S, состоит из уравнений (7) и еще некоторого числа уравнений Пфаффа. Поэтому задача сводится к определению неизвестных уравнений Пфаффа с тем расчетом, чтобы для двойственного производного ряда t-кораспределения S выполнялись условия теоремы 1. Естественно искать максимальные линейные подсистемы системы (1), т.е. подсистемы с ассоциированным t-кораспределением наименьшего ранга.

Применим изложенный подход к построению линейных подсистем аффинной системы (1), характеризующейся равенством

$$\operatorname{rank} \left\| f^i_\alpha(y) \right\|^{i=1,\dots,n}_{\alpha=1,\dots,p} = n - 2.$$

В этом случае ассоциированное t-кораспределение K имеет ранг 2. В зависимости от значений инвариантов $q_i = \dim K_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, аффинную систему (1) можно отнести к одному из нескольких типов, которые рассмотрим по отдельности.

Если $q_1 = q_0 = 2$, т.е. t-кораспределение K вполне интегрируемо, то у системы (1) нет линейных подсистем, удовлетворяющих условию Калмана. Действительно, в этом случае для любого t-кораспределения S, содержащего K, $S_N \supset K$, и, следовательно, S_N имеет ненулевой ранг. Условию 1) теоремы 1 нельзя удовлетворить и в том случае, когда для системы (1) $q_1 = q_2 = 1$, т.е. вполне интегрируемым является K_1.

Пусть для системы (1) $q_1 = 1$, $q_2 = 0$. Если кораспределение $\overline{K_1}$ вполне интегрируемо, то согласно теореме система (1) эквивалентна линейной системе, удовлетворяющей условию Калмана, и в поиске линейных подсистем нет необходимости. Поэтому рассмотрим случай, когда $\overline{K_1}$ не является вполне интегрируемым кораспределением.

Предложение 1. Если аффинная система (1)*, для которой* $q_0 = 2$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $n \geq 4$, $\overline{K_1}$ *не вполне интегрируемо, имеет линейную подсистему с ассоциированным* t*-кораспределением ранга* 3*, то эта подсистема приводится к каноническому виду*

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1^1 = z_2^1, \quad \dot{z}_2^1 = z_3^1, \quad \dot{z}_3^1 = z_4^1, \quad \dot{z}_4^1 = w^1, \\ &\dot{z}_1^2 = w^2, \quad \ldots, \quad \dot{z}_1^{n-3} = w^{n-3}. \end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 2. Аффинная система (1)*, для которой не выполняются условия теоремы 1 и* $q_0 = 2$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $n \geq 4$, *(локально) имеет линейную подсистему, удовлетворяющую условию Калмана, тогда и только тогда, когда* $\dim C\overline{K} = 4$.

Заметим, что линейная подсистема системы (1), если она существует, не является единственной. У системы, для которой $q_0 = 2$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $\dim C\overline{K} = 4$, все линейные подсистемы с ассоциированным t-кораспределением ранга 3 эквивалентны и приводятся к каноническому виду (10).

Пусть теперь аффинная управляемая система такова, что $q_1 = 0$ (как и прежде, $\dim K = 2$). Сопоставим системе (1) производный ряд (6), построенный для кораспределения $\overline{K}$. Для каждого B_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, однозначно определено t-кораспределение $Q_i \subset K$ такое, что $B_i = \overline{Q_i}$. Если кораспределение $B_0 = \overline{K}$ вполне интегрируемо, то K удовлетворяет условиям теоремы 1, и система (1) эквивалентна линейной системе. Пусть $\overline{K}$

не является вполне интегрируемым. Рассмотрим сначала случай, когда для аффинной системы выполняется равенство $\dim B_1 = \dim B_2 = 1$.

Теорема 3. Если аффинная система (1), *для которой* $q_0 = 2$, $q_1 = 0$, $\dim B_1 = \dim B_2 = 1$, $\dim C\overline{K} = r = \mathrm{const}$, $n \geq 4$, *имеет линейную подсистему с ассоциированным* t-*кораспределением ранга* l, *то* $l \geq (r+$ $+2)/2$.

Теорема 4. У аффинной системы (1), *для которой* $q_0 = 2$, $q_1 = 0$, $\dim B_1 = \dim B_2 = 1$, $n \geq 4$, *существует линейная подсистема с ассоциированным* t-*кораспределением ранга* $l = (r+2)/2$, *где* $r = \dim C\overline{K}$.

Таким образом, аффинная система, для которой $q_0 = 2$, $q_1 = 0$, $\dim B_1 = \dim B_2 = 1$, всегда имеет линейные подсистемы, удовлетворяющие условию Калмана, причем ее инвариант $(r+2)/2$, где $r = \dim C\overline{K}$, характеризует максимальную в некотором смысле линейную подсистему (не являющуюся единственной).

Рассмотрим еще аффинные системы, которые характеризуются равенствами $q_0 = 2$, $q_1 = 0$, $\dim B_1 = 1$, $\dim B_2 = 0$.

Теорема 5. Пусть для управляемой системы (1) $q_0 = 2$, $q_1 = 0$, $\dim B_1 = 1$, $\dim B_2 = 0$. *Если* $\dim C_t Q_1 = 3$, *то у системы* (1) *(локально) существует линейная подсистема, удовлетворяющая условию Калмана и имеющая ассоциированное* t-*кораспределение ранга* 3.

Итак, для рассмотренных типов аффинных систем вопрос о существовании линейных подсистем, удовлетворяющих условию Калмана, может быть решен путем вычисления некоторых инвариантов системы (1), которые находятся с помощью алгебраических операций. Для построения какой-либо линейной подсистемы системы (1) необходимо решить некоторые системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной работе не рассмотрен вопрос о существовании и построении линейных подсистем аффинных систем с $q_0 = 2$, $q_1 = 0$, $\dim B_1 = 0$. Однако, если размерность фазового пространства системы (1) равна 4, то обязательно $\dim B_1 > 0$, т.е. случай $n = 4$ является полностью охваченным.

4. Пример

Рассмотрим в области $M = \{y \in R^5 : y^4 \neq 0\}$ аффинную систему

$$
\begin{aligned}
&\dot{y}^1 = -y^2 y^4 + y^2 u^3, \quad \dot{y}^2 = -y^1 y^3 y^4 - y^2 u^2 + y^3 u^3, \\
&\dot{y}^3 = 2y^2 y^3 y^4 + y^4 u^1 - 2y^3 u^2, \quad \dot{y}^4 = -y^2 (y^4)^2 + y^4 u^2, \\
&\dot{y}^5 = -y^2 y^4 + u^2 + e^{-y^5} u^3.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Поставим задачу терминального управления для этой системы по переводу точки $a = (2, 0, 0, 1, 0)$ в точку $b = (6, 1, 1, 2, \ln 10)$.

Сначала выясним вопрос о существовании линейных подсистем. Ассоциированное t-кораспределение K системы (11) порождается системой Пфаффа

$$\omega^1 = dy^1 + \frac{y^2 e^{y^5}}{y^4} dy^4 - y^2 e^{y^5} dy^5 + y^2 y^4 dt = 0, \tag{12}$$
$$\omega^2 = dy^2 + \frac{y^2 + y^3 e^{y^5}}{y^4} dy^4 - y^3 e^{y^5} dy^5 + y^4 (y^1 y^3 + (y^2)^2) dt = 0.$$

Вычислим инварианты системы (11), определяющие ее тип. Поскольку $\dim K_1 = 0$, то следует построить производный ряд для кораспределения $B = \overline{K}$. Так как $d\overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^2} = 0$, $d\overline{\omega^2} \wedge \overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^2} \neq 0$, $d\overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^1} \neq 0$, то B_1 порождается уравнением $\overline{\omega^1} = 0$, а $B_2 = \{0\}$. Итак, $\dim K = 2$, $\dim K_1 = 0$, $\dim B_1 = 1$, $\dim B_2 = 0$. Для выяснения вопроса о возможности построения линейной подсистемы системы (11) нужно найти класс t-кораспределения Q_1, порождаемого уравнением $\omega^1 = 0$. Система Пфаффа, задающая кораспределение $C_t Q_1$, строится добавлением к уравнению

$$\overline{\omega^1} = dy^1 + \frac{y^2 e^{y^5}}{y^4} dy^4 - y^2 e^{y^5} dy^5 = 0 \tag{13}$$

уравнений $\omega^1_{ij}(y) dy^i = 0$, $j = 1, \ldots, 6$, где $\omega^1_{ij}(y) = \partial\omega^1_j/\partial y^i - \partial\omega^1_i/\partial y^j$. Легко убедиться, что ранг получаемой системы Пфаффа равен 3. В соответствии с теоремой 5 у системы (11) существует линейная подсистема. Чтобы ее построить, приведем уравнение Пфаффа (13) к каноническому виду. Сначала нужно записать это уравнение через минимальное число переменных, которые находятся с помощью интегралов его характеристической системы. Характеристическая система уравнения (13) имеет вид

$$dy^1 + \frac{y^2 e^{y^5}}{y^4} dy^4 - y^2 e^{y^5} dy^5 = 0, \quad dy^2 + \frac{y^2}{y^4} dy^4 = 0, \quad \frac{1}{y^4} dy^4 - dy^5 = 0. \tag{14}$$

Интегралами системы (14) являются функции $\Phi^1 = y^1$, $\Phi^2 = y^2 y^4$, $\Phi^3 = e^{y^5}/y^4$. Заменой переменных $x^1 = y^1$, $x^2 = y^2 y^4$, $x^3 = e^{y^5}/y^4$, $x^4 = y^4$,

$x^5 = y^5$ уравнение Пфаффа (13) сразу приводится к своему каноническому виду $dx^1 - x^2 dx^3 = 0$. Перепишем систему Пфаффа (12) в переменных x:

$$dx^1 - x^2 dx^3 + x^2 dt = 0, \tag{15}$$

$$dx^2 - \frac{x^4 e^{2x^5}}{(x^3)^3} dx^3 + \left(\frac{x^1 x^4 e^{2x^5}}{(x^3)^3} + (x^2)^2 \right) dt = 0. \tag{16}$$

Примем $x^4 e^{2x^5}/(x^3)^3$ за новую переменную x^4. Тогда уравнение (16) преобразуется к виду $dx^2 - x^4 dx^3 + \left(x^1 x^4 + (x^2)^2 \right) dt = 0$. Из доказательства теоремы 5, приводимого в Приложении, следует, что t-кораспределение, соответствующее линеаризуемой подсистеме аффинной системы (11), можно получить, добавив к (12) уравнение Пфаффа

$$\Omega = dx^3 - (x^1 + 1)dt = -\frac{e^{y^5}}{(y^4)^2} dy^4 + \frac{e^{y^5}}{y^4} dy^5 - (y^1 + 1)dt = 0.$$

Получаем следующую линеаризуемую подсистему системы (11)

$$\begin{gathered} \dot y^1 = y^1 y^2 y^4, \quad \dot y^2 = (y^3 - (y^2)^2) y^4 - y^2 v^2, \\ \dot y^3 = v^1, \quad \dot y^4 = y^4 v^2, \quad \dot y^5 = (y^1 + 1) y^4 e^{-y^5} + v^2, \\ y \in L = \{ y \in R^5 : y^1 \neq 0,\, y^4 \neq 0 \}, \quad v \in R^2. \end{gathered} \tag{17}$$

Можно убедиться, что переход от (11) к (17) осуществляется вырожденной заменой управлений

$$u^1 = \frac{1}{y^4} v^1 + \frac{2y^3}{y^4} v^2, \quad u^2 = y^2 y^4 + v^2, \quad u^3 = (y^1 + 1) y^4. \tag{18}$$

Система (17) приводится к следующему каноническому виду:

$$\dot z_1^1 = z_2^1, \quad \dot z_2^1 = z_3^1, \quad \dot z_3^1 = z_4^1, \quad \dot z_4^1 = w^1, \quad \dot z_1^2 = w^2. \tag{19}$$

Действуя по алгоритму, описанному в [10], находим линеаризующую замену координат

$$z_1^1 = e^{y^5}/y^4,\ \ z_2^1 = y^1 + 1,\ \ z_3^1 = y^1 y^2 y^4,\ \ z_4^1 = y^1 y^3 (y^4)^2,\ \ z_1^2 = y^5 \tag{20}$$

и управлений

$$
\begin{aligned}
w^1 &= y^1y^2y^3\left(y^4\right)^3 + y^1\left(y^4\right)^2v^1 + 2y^1y^3\left(y^4\right)^2v^2,\\
w^2 &= (y^1+1)y^4e^{-y^5} + v^2.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Обратимся теперь непосредственно к построению требуемой фазовой траектории системы (11). Задача терминального управления для системы (11) преобразуется в задачу терминального управления для системы (19) по переводу точки $\overline{a} = (1,3,0,0,0)$ в точку $\overline{b} = (5,7,12,24,\ln 10)$. Пусть $t_0 = 0$, $t_1 = 1$. В качестве $z_1^2(t)$ сразу можно взять функцию $z_1^2 = t\ln 10$. Функцию $z_1^1(t)$ ищем в виде

$$
z_1^1(t) = 1 + 3t + C_1t^4 + C_2t^5 + C_3t^6 + C_4t^7, \quad C_i = \mathrm{const}\,.
$$

Для остальных искомых функций имеем формулы

$$
z_i^1(t) = \left(z_1^1\right)^{(i-1)} = \left(1 + 3t + C_1t^4 + C_2t^5 + C_3t^6 + C_4t^7\right)^{(i-1)}, \ \ i = 2,3,4.
$$

Условие прохождения фазовой траектории при $t = 1$ через точку $\overline{b}$ приводит к системе линейных уравнений относительно констант C_i, которой удовлетворяют $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Итак, решение, соединяющее $\overline{a}$ и $\overline{b}$, имеет вид

$$
z_1^1 = 1 + 3t + t^4, \ \ z_2^1 = 3 + 4t^3, \ \ z_3^1 = 12t^2, \ \ z_4^1 = 24t, \ \ z_1^2 = t\ln 10.
$$

Это решение соответствует управлениям $w^1 = 24$, $w^2 = \ln 10$. Преобразованием, обратным к (20), полученное решение системы (19) переводится в решение системы (11), соединяющее точки a и b:

$$
\begin{aligned}
&y^1(t) = 2 + 4t^3, \quad y^2(t) = \frac{12t^2(1+3t+t^4)}{10^t(2+4t^3)},\\
&y^3(t) = \frac{24t\left(1+3t+t^4\right)^2}{10^{2t}(2+4t^3)}, \quad y^4(t) = \frac{10^t}{1+3t+t^4},\\
&y^5(t) = t\ln 10, \quad t\in[0,1].
\end{aligned} \tag{22}
$$

Из (21), (18) следует, что решению (22) соответствуют управления

$$
\begin{aligned}
&u^1 = \frac{48(1-4t)\left(1+3t+t^4\right)^3}{10^{3t}\left(2+4t^3\right)^2}, \quad u^2 = \ln 10 - \frac{3+4t^3}{1+3t+t^4},\\
&u^3 = \frac{10^t(3+4t^3)}{1+3t+t^4}, \quad t\in[0,1].
\end{aligned}
$$

Доказательство предложения 1. Пусть ω^1 порождает t-кораспределение K_1, а формы Пфаффа ω^1 и ω^2 порождают t-кораспределение K. Предположим, что найдется содержащее K t-кораспределение S ранга 3, которое соответствует системе, эквивалентной линейной. Поскольку $\omega^1 \in K_1$, то $\omega^1 \in S_1$, а так как $\overline{K_1}$ не удовлетворяет условию полной интегрируемости, то $S_{N-1} \neq K_1$. Следовательно, найдется такая форма Пфаффа Ω, что уравнение $\Omega = 0$ задает S_2, система Пфаффа $\{\Omega = 0, \omega^1 = 0\}$ задает S_1, а система $\{\Omega = 0, \omega^1 = 0, \omega^2 = 0\}$ задает S. Поэтому соответствующая t-кораспределению S линейная система имеет индексы Кронекера $k_1 = 4$, $k_i = 1$, $i = 2, \ldots, n-4$.

Доказательство теоремы 2. Воспользовавшись теорией систем Пфаффа [11, 12], получим, что система Пфаффа, порождающая t-кораспределение K, приводится заменой координат и, быть может, линейным преобразованием уравнений к виду

$$\{\omega^1 = dx^1 - x^2dx^3 - f(x^1, x^2, x^3)dt = 0,\ \omega^2 = dx^2 - \varphi dx^3 - \chi dt = 0\}, \tag{П.1}$$

где $\chi = -\left(x^2\partial f/\partial x^1 + \varphi\partial f/\partial x^2 + \partial f/\partial x^3\right)$. Построив с помощью известного алгоритма [11] систему Пфаффа, задающую кораспределение $C\overline{K}$, увидим, что $\dim C\overline{K} = 2$ при $\partial\varphi/\partial x^i = 0$, $i = 4, \ldots, n$, и $\dim C\overline{K} = 4$ в противном случае. Пусть $\dim C\overline{K} = 2$. Тогда функции φ, χ зависят только от переменных x^1, x^2, x^3. В этом случае у системы (1) нет линейных подсистем. Действительно, предположим противное: существует t-кораспределение S, содержащее формы Пфаффа ω^1, ω^2 и удовлетворяющее условиям теоремы 1. Тогда найдется такое число j, что $\omega^2 \in S_{j-1}$, $\omega^2 \notin S_j$. Так как $\omega^1 \in K_1$, то $d\omega^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0$ и $\omega^1 \in S_j$. Пусть формы Пфаффа ω^1, Ω^1, ..., Ω^k порождают t-кораспределение S_j. Поскольку кораспределение $\overline{S_j}$ является вполне интегрируемым, то

$$d\overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^1} \wedge \overline{\Omega^1} \wedge \ldots \wedge \overline{\Omega^k} = dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^1 \wedge \overline{\Omega^1} \wedge \ldots \wedge \overline{\Omega^k} = 0. \tag{П.2}$$

Нетрудно видеть, что $d\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = H(x^1, x^2, x^3)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dt$, где H — некоторая функция, поэтому

$$d\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \Omega^1 \wedge \ldots \wedge \Omega^k = H(x^1, x^2, x^3)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dt \wedge \overline{\Omega^1} \wedge \ldots \wedge \overline{\Omega^k}.$$

Из (П.2) следует, что последнее выражение равно 0, а это противоречит тому, что $\omega^2 \notin S_j$. Пусть теперь $\dim C\overline{K} = 4$, т.е. найдется такое

$i \geq 4$, что $\partial\varphi/\partial x^i \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\partial\varphi/\partial x^4 \neq 0$. Тогда φ можно принять за новую переменную x^4, после чего форма ω^2 примет вид $\omega^2 = dx^2 - x^4 dx^3 - \chi dt$, причем $\chi = \chi(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Положим $\Omega = dx^3 - (x^1 + C)dt$, где C – некоторая константа, (локально) удовлетворяющая неравенствам

$$\partial f/\partial x^2 + x^1 + C \neq 0, \quad \partial\chi/\partial x^4 + x^1 + C \neq 0.$$

Нетрудно проверить, что t-кораспределение S, порождаемое формами Пфаффа ω^1, ω^2, Ω, удовлетворяет условиям теоремы 1.

Доказательство теоремы 3. Предположим противное: пусть существует t-кораспределение S, содержащее K и удовлетворяющее условиям теоремы 1, причем

$$\dim S = l < (r+2)/2. \tag{П.3}$$

Тогда кораспределение $\overline{S}$ вполне интегрируемо и содержит кораспределение $\overline{K}$. Так как $\dim B_1 = \dim B_2$, то система Пфаффа, порождающая $\overline{K}$, в некоторых координатах $x = \psi(y)$ содержит уравнение вида $dx^1 = 0$. Поскольку $dx^1 \in \overline{S}$, то, согласно теории систем Пфаффа, существует такая замена координат $z^1 = x^1$, $z^i = z^i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, что $\overline{S}$ в координатах z задается системой $dz^i = 0$, $i = 1, \ldots, l$. Так как $\overline{K} \subset \overline{S}$, то найдутся такие гладкие функции $\lambda_i(z)$, $i = 2, \ldots, l$, не обращающиеся одновременно в 0, что $\overline{K}$ задается системой Пфаффа $\{dz^1 = 0, \lambda_2 dz^2 + \lambda_3 dz^3 + \ldots + \lambda_l dz^l = 0\}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\lambda_2 \neq 0$. Тогда можно положить $\lambda_2 = 1$. Построив систему Пфаффа, порождающую в координатах z характеристическое кораспределение $C\overline{K}$, убеждаемся, что ранг матрицы этой системы меньше или равен $2l - 2$ и в силу (П.3) строго меньше, чем r. Таким образом, мы получили, что $\dim C\overline{K} < r$, а это противоречит условиям теоремы.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 5. Систему Пфаффа, задающую t-кораспределение K, можно преобразовать к системе Пфаффа вида (см. [13]):

$$\{\omega^1 = dx^1 - x^2 dx^3 - f(x^1, x^2, x^3)dt = 0,\ \omega^2 = dx^2 - x^4 dx^3 - \chi dt = 0\}. \tag{П.4}$$

Добавим к уравнениям (П.4) уравнение Пфаффа $\Omega = dx^3 - (x^1 + C)dt$, где C – некоторая константа, (локально) удовлетворяющая неравенствам

$$\partial f/\partial x^2 + x^1 + C \neq 0, \quad \partial\chi/\partial x^4 + x^1 + C \neq 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что получающаяся система Пфаффа задает t-кораспределение, для которого справедливы условия теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.

2. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

3. *Жевнин А.А., Крищенко А.П.* Управляемость нелинейных систем и синтез управления //ДАН СССР. 1981. Т. 258. N 4, С. 805–809.

4. *Su R.* On the linear equivalents of nonlinear systems //Syst. Control Lett. 1982. V. 2. P. 48–50.

5. *Жевнин А.А., Колесников К.С., Крищенко А.П., Толокнов В.И.* Синтез алгоритмов терминального управления на основе концепций задач обратной динамики (обзор) //Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. N 4. С. 180–188.

6. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем: Дифференциально-геометрический подход. М.: Наука, 1997.

7. *Елкин В.И.* Подсистемы управляемых систем и задачи управления с ограничениями на фазовые переменные типа равенств //ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34. N 11. С. 1585–1596.

8. *Елкин В.И.* Подсистемы управляемых систем и задача терминального управления //А и Т. 1995. N 1. С. 21–29.

9. *Brunovsky P.* A classification of linear controllable systems // Kibernetika. 1970. V. 3. P. 173–187.

10. *Коновалова Л.Б.* О приведении аффинных управляемых систем к линейному виду //Проблемы математики в физико-технических и экономических задачах: Междувед. сб. М.: МФТИ, 1993. С. 75–89.

11. *Рашевский П.К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.–Л.: Гостехиздат, 1947.

12. *Bryant R.L. et al.* Exterior differential systems. N.Y.: Math. Sci. Res. Inst. Publ-s, Vol. 19, 1991.

13. *Коновалова Л.Б.* О построении линейных подсистем аффинных управляемых систем // Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 1996. С. 20-36.