УДК 519.4

О P- И F-ДЕКОМПОЗИЦИЯХ Σ-ОБЪЕКТОВ

Ю.Н. ПАВЛОВСКИЙ

1. Пусть $G \subset E$, Q - отношение эквивалентности на E, $(E_i)_{i\in I}$ - семейство множеств, $(f_i\colon E \to E_i)_{i\in I}$ $((f_i : E_i \to E)_{i\in I})$ - семейство отображений. Вводятся следующие обозначения: ω_{GE}:$G \to E$ - каноническая инъекция ($\omega_{GE}(g)$=g), $E_Q = E/Q$, x_Q - содержащий x класс эквивалентности по Q, π_{QX}:$E \to E_Q$ -каноническая проекция ($\pi_{QE}(x)$=x_Q), $\prod^d_{i\in I} E_i$ - декартово произведение, pr_i:$\prod^d_{i\in I} E_i \to E_i$ - i-ая каноническая проекция, $\sum^c_{i\in I} E_i$ — свободная сумма (т.е.$\bigcup_{i\in I}(E\times_i\{i\})$, j_i: $E_i \to \sum^c_{i\in I} E_i$ - i-ая каноническая инъекция, Q_f отношение эквивалентности, ассоциированное с отображением f , $\times_{i\in I} f_i$ $(+_{i\in I} f_i)$ - отображение из E в $\prod^p_{i\in I} E_i$ (из $\sum^c_{i\in I} E_i$ в E), определенное формулой $\times_{i\in I} f_i(x) = (i, f_i(x))_{i\in I}$ $(+_{i\in I} f_i(x,i) = f_i(x))$.

Пусть Σ - род структуры в бурбаковской формальной системе B, более сильной, чем бурбаковская "теория множеств" [1] - M терм в B, задающий M-морфизмы, B' - бурбаковская формальная система более сильная, чем B. Пара термов (E,τ) системы B' называется Σ-объектом в B', если τ - структура рода Σ на E. Здесь, как и в [2], теория категорий не используется, однако, совокупность (B,Σ,M,B') именуется категорией.

Исходным пунктом выполняемых построений является следующая перефразировка определений начальной и финальной структур на E относительно семейства $((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I}$ [1].

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ - семейство Σ-объектов, (E,τ)

- Σ-объект, $(f_i : E_i \to E)_{i\in I}$ $\big((f_i : E \to E_i)_{i\in I}\big)$ - семейство отображений. Если имеет место $(\ \forall i)(f_i$ есть морфизм) и для любого Σ-объекта (E',τ') и любого отображения $g{:}E \ \to\ E'$ $(g : E' \to E)$, соотношение $(\ \forall i)(i\ \in\ I\ \Rightarrow$ "$g \circ f_i$ $(f_i \circ g)$ есть морфизм") влечет соотношение "g есть морфизм", то говорят, что семейство $((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I}$ является P - декомпозицией (F - декомпозицией) объекта (для) (E,τ), или что объект (E,τ) допускает P - декомпозицию F - декомпозицию $((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I}$. Если множество I конечно, то декомпозиция называется конечной. Декомпозиция $((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I}$ для (E,τ) называется тривиальной, если существует такое i, что f_i есть изоморфизм.

З а м е ч а н и е . Здесь и далее, если в формулировке определения и утверждения не указывается вид декомпозиции (P- или F-), то это определение и утверждение в равной мере касается декомпозиций обоих видов.

Основанием для "декомпозиционной" трактовки начальной и финальной структур является то, что Σ-объект (E,τ) восстанавливается по своей декомпозиции $((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I}$ единственным образом [1], а также установленное в [1] следующее

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть (E,τ) - Σ-объект, $(G_j,\omega_j)_{j\in J}$, $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ семейства Σ-объектов, J - фактор-множество множества I, $\pi{:}I \to J$ - каноническая проекция, $(h_j{:}G_j \to E)_{j\in J}$, $(g_{ji}{:}E_i \to G_j)_{j\in J, i\in j}$, $(f_i{:}\ E_i \to E)_{i\in I}$, $(h_j{:}E \to G_j)_{j\in J}$, $(g_{ji}{:}G_j \to E_i)_{j\in J, i\in j}$, $(f_i{:}\ E \to E_i)_{i\in I}$- семейства отображений, такие, что семейство $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ "пропускается" через семейство $(G_j,\omega_j)_{j\in J}$, т.е. $(\ \forall i)(f_i = h_{\pi(i)} \circ g_{\pi(i),i})$. $\big((\ \forall i)\ f_i = g_{\pi(i),i} \circ h_{pi(i)})\big)$. Пусть для всякого j $((E_i,\tau_i),g_{ij})_{i\in j}$ есть P-декомпозиция (F - декомпозиция) объекта (G_j,ω_j). Тогда эквивалентны условия: "$((G_j,\omega_j),h_j)_{j\in J}$ есть декомпозиция для (E,τ)" и "$((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I}$ есть декомпозиция для (E,τ)".

Кроме того, основанием для декомпозиционной трактовки начальной и финальной структур являются также следующие факты, выражаемые предложениями 2 - 7.

П р е д л о ж е н и е 2. Если $((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I}$ - P - декомпозиция (F - декомпозиция) для (E,τ), и a: $E \to E'$ ($a : E' \to E$) - изоморфизм (E,τ) на (E',τ') ((E',τ')на(E,τ)), то $((E_i,\tau_i),(a \circ f_i))_{i\in I}$ ($(((E_i,\tau_i),(f_i \circ a))_{i\in I}$) - P - декомпозиция (F - декомпозиция) для (E',τ').

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть (E,τ) - Σ-объект, $(G_j,\omega_j)_{j\in J}$, $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ семейства Σ-объектов, J - фактор-множество множества I, π:$I \to J$ - каноническая проекция, $(h_j$:$G_j \to E)_{j\in J}$, $(g_{ji}$:$E_i \to G_j)_{j\in J,i\in j}$, $(f_i$: $E_i \to E)_{i\in I}, h_j$:$E \to G_j)_{j\in J}$, $(g_{ji}$:$G_j \to E_i)_{j\in J,i\in j}$, $(f_i$: $E \to E_i)_{i\in I}$- семейства отображений, такие, что семейство $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ "пропускается" через семейство $(G_j,\omega_j)_{j\in J}$. Пусть h_j,g_{ji},f_i - морфизмы и $((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I}$ является P - декомпозицией (F - декомпозицией) для (E,τ). Тогда $((G_j,\omega_j)_{j\in J},h_j)$ является P - декомпозицией (F - декомпозицией) для (E,τ).

Определения P- и F-объектов, декартова произведения и свободной суммы [1,2] связанны с частными случаями F- и P-декомпозиций.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ - семейство Σ-объектов, (E,τ) - Σ-объект. Если $\sum^c_{i\in I} E_i(\prod^d_{i\in I} E_i)$ можно снабдить структурой $\tau^c(\tau^d)$ так, что $((E_i,\tau_i),j_i))_{i\in I}$ $(((E_i,\tau_i),pr_i))$ есть P-декомпозиция (F - декомпозиция) для $(\sum^c_{i\in I} E_i,\tau^c)$ $((\prod^d_{i\in I} E_i,\tau^d))$, то $(\sum^c_{i\in I} E_i,\tau^c)$ $((\prod^d_{i\in I} E_i,\tau^d))$

называется свободной суммой (декартовым произведением) семейства $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$. Объект (E,τ), изоморфный объекту $(\prod_{i\in I}^d E_i,\tau^d)$ $(\sum_{i\in I}^c E_i,\tau^c))$ называться допускающим декомпозицию на декартово произведение (свободную сумму). Объект, который не допускает нетривиальной декомпозиции (см. определение 1) на декартово произведение (свободную сумму), называется DP-простым (CC-простым). Если $G\subset E$ (Q - отношение эквивалентности на E) и $((E,\tau),\omega_{GE})$ - F-декомпозиция объекта (G,σ) $(((E,\tau),\pi_{QE})$ — P - декомпозиция объекта $(E_Q,\tau_Q))$, то (G,σ) $((E_Q,\tau_Q))$ называется P-объектом (F - объектом). Объект, не имеющий нетривиальных P-объектов (F-объектов), называется P-простым (F-простым).

П р е д л о ж е н и е 4. Если (E,τ) допускает F - декомпозицию (P - декомпозицию) $((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I}$ и существует декартово произведение $(\prod_{i\in I}^d E_i,\tau^d)$ (свободная сумма $(\sum_{i\in I}^c E_i,\tau^c)$), то (E,τ) допускает F - декомпозицию $((\prod_{i\in I}^d E_i,\tau^d),\times_{i\in I}f_i)$ (P - декомпозицию $(\sum_{i\in I}^c E_i,\tau^c),+_{i\in I} f_i)$. Если $\times_{i\in I}f_i$ инъективно ($+_{i\in I} f_i$ сюръективно), то (E,τ) изоморфен P - объекту объекта $(\prod_{i\in I}^d E_i,\tau^d)$ (F - объекту объекта $(\sum_{i\in I}^c E_i,\tau^c)$).

О п р е д е л е н и е 3. Декомпозиция $((G_j,\omega_j),h_j)_{j\in J}$ объекта (E,τ) называется более простой, чем декомпозиция $((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I}$, если для всякого j из J существует i из I, такое, что $((G_j,\omega_j),h_j)=((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I}$.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть (E,τ), (E',τ') - Σ-объекты, f: $E\to E'$ - морфизм, $f=\omega_f\circ b_f\circ\pi_f$ - каноническая декомпозиция f на проекцию, биекцию и инъекцию. Если на E_{Qf} существует фактор-структура τ_Q структуры τ, а на $f(E)$ существует подструктура $\widetilde{\tau}'$ структуры τ', то

f называется PF - морфизмом. Категория, все морфизмы которой суть PF-морфизмы, называется PF-категорией. Если f - PF-морфизм и b_f является изоморфизмом (E_{Qf},τ_{Qf}) на $(f(E),\widetilde{\tau}')$, то f называется HPF - морфизмом. Категория, все морфизмы которой суть HPF-морфизмы, называется HPF-категорией.

П р е д л о ж е н и е 5. Пусть P - декомпозиция (F - декомпозиция) $((E_i,\tau_i),f_i)_{i\in I}$ для (E,τ) такова, что все f_i являются PF - морфизмами. Тогда (E,τ) допускает P - декомпозицию $((f_i(E_i),\tau_{Pi}),\omega_i)_{i\in I}$, где $(f_i(E_i),\tau_{Pi})$ - P - объекты объекта (E,τ), ω_i - канонические инъекции (F - декомпозицию $((E_{Qi},\tau_{Qi}),\pi_i)_{i\in I}$, где (E_{Qi},τ_{Qi}) - фактор-объекты объекта (E,τ), Qi - отношения эквивалентности, ассоциированные с f_i, π_i - канонические проекции.

П р е д л о ж е н и е 6. В HPF-категориях со свободной суммой если у объекта (E,τ) существует такое семейство $(E_{Pi},\tau_{Pi})_{i\in I}$ его P-объектов, что отображение $+_{i\in I}\,\omega_i$, где ω_i - канонические инъекции, сюръективно, то (E,τ) допускает P-декомпозицию $((E_{Pi},\tau_{Pi}),\omega_i)_{i\in I}$, а также P-декомпозицию $((\sum^c_{i\in I}E_{Pi},\tau^c),+_{i\in I}\,\omega_i)$. Объект (E,τ) тогда изоморфен фактор-объекту (E_Q,τ_Q) объекта $(\sum^c_{i\in I}E_{Pi},\tau^c)$ по отношению Q, ассоциированному с $+_{i\in I}\,\omega_i$ и для всякого i имеет место $+_{i\in I}\,\omega_i\circ j_i(E_{Pi})=E_{Pi}$. В HPF-категориях с декартовым произведением если у объекта (E,τ) существует такое семейство $(E_{Qi},\tau_{Qi})_{i\in I}$ его F-объектов, что отображение $\times_{i\in I}\pi_i$, где π_i - канонические проекции, инъективно, то этот объект допускает F-декомпозицию $((E_{Qi},\tau_{Qi}),\pi_i)_{i\in I}$, а также F-декомпозицию $((\prod^d_{i\in I}E_{Qi},\tau^d_Q),\times_{i\in I}\pi_i)$. Объект (E,τ) тогда изоморфен подобъекту $(\times_{i\in I}\pi_i(E),\tau_P)$ декартова произведения $(\prod^d_{i\in I}E_{Qi},\tau^d_Q)$ и

$pr_i(\times_{i\in I}\pi_i(E)= E_{Qi}$.

П р е д л о ж е н и е 7. В HPF-категориях с декартовым произведением с любым семейством F-объектов $(E_{Qi},\tau_{Qi})_{i\in I}$ объекта (E,τ) можно ассоциировать такой его F-объект (E_Q,τ_Q), что семейство $(E_{Qi},\tau_{Qi})_{i\in I}$ является также семейством F-объектов объекта (E_Q,τ_Q) и (E_Q,τ_Q) допускает F-декомпозицию $((E_{Qi},\tau_{Qi}),\pi_i)_{i\in I}$, где $\pi_i{:}E_Q \to E_{Qi}$.

Двойственное утверждение имеет место для HPF-категорий со свободной суммой.

П р м е р ы 1). Категория T топологических пространств, где структура τ на множестве E определяется как множество открытых множеств, с непрерывными отображениями в качестве морфизмов, является PF-категорией, но не HPF-категорией. Пусть (E,τ) - топологическое пространство. В категории T со всяким семейством $(G_i)_{i\in I}$ открытых множеств, покрывающих E, ассоциируется P-декомпозиция $((G_i,\tau_{Gi}),\omega_{GiE})_{i\in I}$, называемая далее "открытой P-декомпозицией". Отделимое топологическое пространство, такое, что для всякой его открытой P-декомпозиции существует более простая конечная P-декомпозиция, принято называть компактным. Топологическое пространство, которое не имеет нетривиальных открытых декомпозиций на свободную сумму, принято называть связным.

2). В HPF-категории MAP, объекты которой - отображения $f{:}X \to Y$ абстрактных множеств, а морфизмом отображения f в f' считается пара отображений (m_X,m_Y), такая, что $m_Y \circ f = f'{\circ}m_X$, для того, чтобы отображение $f{:}X \to Y$ допускало P-декомпозицию, необходимо и достаточно, чтобы существовало семейство $(f_{Pi} :X_{Pi} \to Y_{Pi})_{i\in I}$ его подобъектов, такое, что отображение $+_{i\in I}\omega_{Xi}$ было сюръективно, где $(\omega_{Xi}{:}X_{Pi} \to X)_{i\in I}$ - семейство соответствующих канонических инъекций. Для того, чтобы отображение f допускало F-декомпозицию, необходимо и достаточно, чтобы существовало семейство $(f_{Qi} : X_{Qi} \to Y_{Qi})_{i\in I}$ его фактор-объектов, такое, что отображение $\times_{i\in I}\pi_{Yi}$ было инъективно, где $(\pi_{Yi}{:}Y \to Y_{Qi})_{i\in I}$ - семейство соответствующих канонических проекций.

3). В теории групп предложение 7 трансформируется для в теорему Ремака [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований(код проекта 96-01-00556).

- 8 -

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1966. 425 с.

2. Павловский Ю.Н. Декомпозиция снабженных структурой множеств на свободную сумму и прямое произведение // ДАН. - Т.340, N 3. С.314-316.

3. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.:Наука. 1972. 240 с.