УДК 517.5

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ В ЗАДАЧЕ КОРРЕКЦИИ НЕСОВМЕСТНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ*

В. А. Горелик, О. В. Муравьева

Рассмотрим следующую задачу минимальной коррекции несовместной системы m линейных уравнений $Ax = b$ с n неизвестными:

$$\Phi(H, h) = \|H\|^2 + \|h\|^2 \to \inf \tag{1}$$

где инфимум берется по совокупности матриц H и векторов h, для которых $M(H, h) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A + H)x = b + h\} \neq \varnothing$, $\|h\|$ – евклидова норма вектора, $\|H\|$ – спектральная норма матрицы (все результаты справедливы и для евклидовой нормы матрицы).

Показано в [1], что задача (1) эквивалентна задаче безусловной минимизации функции $\varphi(x) = \frac{\|Ax-b\|^2}{1+\|x\|^2}$, а именно

$$\inf_{(H,h)\,:\,M(H,h)\neq\varnothing} \Phi(H, h) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x),$$

причем достаточным условием достижимости нижних граней в обеих частях этого равенства является существование у матрицы $B^T B$, где $B = (-b, A)$, собственного вектора, соответствующего минимальному собственному значению $\lambda_{min}(B^T B)$, с ненулевой первой компонентой, при этом $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x) = \lambda_{min}(B^T B)$. Покажем, что это условие является также и необходимым, то есть имеет место

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета Программы поддержки ведущих научных школ (грант 00-15-96137).

Теорема. $\inf\limits_{(H,h):M(H,h)\neq\varnothing} \Phi(H,h) = \lambda_{min}(B^T B)$ *и достигается тогда и только тогда, когда существует* $z^* = (z_0^*, z_1^*, \ldots, z_n^*)$ *— собственный вектор, соответствующий минимальному собственному числу матрицы* $B^T B$*, такой, что* $z_0^* \neq 0$.

Обозначим $S(\lambda_{min}(B^T B))$ – множество собственных векторов матрицы $B^T B$, соответствующих минимальному собственному числу. Осталось доказать, что если $z_0^* = 0$ для любого $z^* \in S(\lambda_{min}(B^T B))$, то $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x) = \lambda_{min}(B^T B)$ и не достигается.

Для доказательства сформулируем несколько вспомогательных свойств.

Лемма 1. [2] *Пусть заданы симметрическая матрица* $\bar{A}$ *размера* $n \times n$*, вектор* $y \in \mathbb{R}^n$ *и число* $a \in \mathbb{R}$*. Рассмотрим симметрическую матрицу* $\tilde{A}$ *размера* $(n+1)\times(n+1)$*, представляющую собой результат окаймления матрицы* $\bar{A}$ *вектором* y *и числом* a*:*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & y^T \\ y & \bar{A} \end{pmatrix}$$

Предположим, что собственные значения $\lambda_i(\bar{A})$ *и* $\lambda_i(\tilde{A})$ *матриц* $\bar{A}$ *и* $\tilde{A}$ *соответственно упорядочены по возрастанию:* $\lambda_1(\bar{A}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(\bar{A})$, $\lambda_1(\tilde{A}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n+1}(\tilde{A})$*. Тогда*

$\lambda_1(\tilde{A}) \leqslant \lambda_1(\bar{A}) \leqslant \lambda_2(\tilde{A}) \leqslant \lambda_2(\bar{A}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(\bar{A}) \leqslant \lambda_{n+1}(\tilde{A})$.

Доказательство. Для произвольного $k = 1, \ldots, n$ докажем неравенство $\lambda_k(\tilde{A}) \leqslant \lambda_k(\bar{A}) \leqslant \lambda_{k+1}(\tilde{A})$. Пусть $\tilde{x} = (\alpha, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\tilde{y}_i = (\beta, y_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$, $\beta \in \mathbb{R}$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. По теореме Куранта-Фишера о минимаксном представлении собственных чисел

$$\lambda_{k+1}(\tilde{A}) = \min_{\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_{n-k}\in\mathbb{R}^{n+1}} \max_{\tilde{x}\neq 0, \tilde{x}\in\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{x}\perp\tilde{y}_j, j=1,\ldots,n-k} \frac{\tilde{x}^T \tilde{A}\tilde{x}}{\tilde{x}^T\tilde{x}} \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\tilde y_1,\ldots,\tilde y_{n-k}\in\mathbb{R}^{n+1}} \max_{\tilde x\neq 0,\tilde x\in\mathbb{R}^{n+1},\tilde x\perp\tilde y_1,\ldots,\tilde y_{n-k},\tilde x\perp e_1} \frac{\tilde x^T\tilde A\tilde x}{\tilde x^T\tilde x} =$$

$$= \min_{y_1,\ldots,y_{n-k}\in\mathbb{R}^{n}} \max_{x\neq 0,x\in\mathbb{R}^{n},x\perp y_j,j=1,\ldots,n-k} \frac{x^T\bar A x}{x^T x} = \lambda_k(\bar A).$$

Используем максиминное представление:

$$\lambda_k(\tilde A) = \max_{\tilde y_1,\ldots,\tilde y_{k-1}\in\mathbb{R}^{n+1}} \min_{\tilde x\neq 0,\tilde x\in\mathbb{R}^{n+1},\tilde x\perp\tilde y_j,j=1,\ldots,k-1} \frac{\tilde x^T\tilde A\tilde x}{\tilde x^T\tilde x} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\tilde y_1,\ldots,\tilde y_{k-1}\in\mathbb{R}^{n+1}} \min_{\tilde x\neq 0,\tilde x\in\mathbb{R}^{n+1},\tilde x\perp\tilde y_j,j=1,\ldots,k-1,\tilde x\perp e_1} \frac{\tilde x^T\tilde A\tilde x}{\tilde x^T\tilde x} =$$

$$= \max_{y_1,\ldots,y_{k-1}\in\mathbb{R}^{n}} \min_{x\neq 0,x\in\mathbb{R}^{n},x\perp y_j,j=1,\ldots,k-1} \frac{x^T\bar A x}{x^T x} = \lambda_k(\bar A).$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. *Если для любого* $z^*\in S(\lambda_{min}(B^TB))$, $z_0^*=0$, *то* $\lambda_{min}(B^TB)=\lambda_{min}(A^TA)$ *и* $\|b\|^2>\lambda_{min}(B^TB)$.

Доказательство. Заметим, что из равенств $B^TBz^* = \lambda_{min}(B^TB)z^*$ и $z_0^*=0$ следует, что $x^*=(z_1^*,z_2^*,\ldots,z_n^*)\in\mathbb{R}^n$ – собственный вектор A^TA и $\lambda=\lambda_{min}(B^TB)$ является также и собственным числом A^TA той же кратности, значит $\lambda_{min}(B^TB)\geqslant\lambda_{min}(A^TA)$. Но по лемме 1, $\lambda_{min}(B^TB)\leqslant\lambda_{min}(A^TA)$, значит здесь имеет место равенство.

Используем связь между собственными числами матрицы и ее следом: $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(A^TA)=\mathrm{tr}(A^TA)$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1}\lambda_i(B^TB)=\mathrm{tr}(B^TB)=\mathrm{tr}(A^TA)+\|b\|^2$. Тогда

$$\|b\|^2=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i(B^TB)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A^TA)=$$

$$= \sum_{i=3}^{n+1} \left(\lambda_i(B^TB) - \lambda_{i-1}(A^TA)\right) + \lambda_2(B^TB) \quad (2)$$

Так как по лемме 1, $\lambda_i(B^TB) - \lambda_{i-1}(A^TA) \geqslant 0,\ i = 3, \ldots, n+1$, то $\|b\|^2 \geqslant \lambda_2(B^TB)$, а значит и $\|b\|^2 \geqslant \lambda_{min}(B^TB)$.

Заметим, что условия леммы исключают равенство. Действительно, если $\|b\|^2 = \lambda_1(B^TB) = \lambda$, то из (2) получаем $\lambda_i(B^TB) = \lambda_{i-1}(A^TA),\ \ i = 3, \ldots, (n+1),\ \lambda_2(B^TB) = \|b\|^2 = \lambda$. Тогда $\lambda_2(A^TA) = \lambda$, что влечет $\lambda_3(B^TB) = \lambda$, а отсюда $\lambda_3(A^TA) = \lambda$ и так далее. Имеем $\lambda_k(B^TB) = \lambda,\ k = 1, 2, \ldots, n+1$, то есть все собственные числа матрицы B^TB равны λ_{min} и все собственные векторы имеют по предположению первую нулевую компоненту. Значит у матрицы B^TB нет $(n+1)$ линейно независимых собственных векторов, что неверно, так как B^TB симметрическая матрица. Поэтому $\|b\|^2 > \lambda_{min}(B^TB)$. □

Лемма 3. *Пусть $x = \alpha e$, где α — скаляр (любого знака), e — единичный вектор, $\varphi(x) = f(\alpha, e) = \frac{\|b-\alpha Ae\|^2}{1+\alpha^2}$. Тогда*

1. *Если $\langle b, Ae\rangle \neq 0$, то $\inf\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} f(\alpha, e)$ достигается (на конечном $\alpha \neq 0$).*
2. *Если $\langle b, Ae\rangle = 0$, то*
   (a) *если $\|Ae\| < \|b\|$, то $\inf\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} f(\alpha, e) = \|Ae\|^2$ и не достигается, $f(\alpha, e) \to \|Ae\|^2$ при $\alpha \to \pm\infty$;*
   (b) *если $\|Ae\| > \|b\|$, то $\inf\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} f(\alpha, e) = f(0, e) = \|b\|^2 \quad \forall e$;*
   (c) *если $\|Ae\| = \|b\|$, то $f(\alpha, e) \equiv \|b\|^2$ для любых $\alpha,\ e$.*

Доказательство. Зафиксируем e.

$$f(\alpha, e) = \frac{\|b\|^2 + \alpha^2\|Ae\|^2 - 2\alpha\langle b, Ae\rangle}{1+\alpha^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 2\frac{\alpha^2\langle b, Ae\rangle + \alpha\left(\|Ae\|^2 - \|b\|^2\right) - \langle b, Ae\rangle}{(1+\alpha^2)^2} = \frac{2r(\alpha)}{(1+\alpha^2)^2}.$$

1. $\langle b, Ae\rangle \neq 0$. Пусть α_1, α_2 — корни уравнения $r(\alpha) = 0$ (они, очевидно, действительны и различны) и $\alpha_1 < \alpha_2$. Тогда, если $\langle b, Ae\rangle > 0$, то $\frac{\partial f}{\partial \alpha} > 0$ при $\alpha \in (-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, \infty)$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha} < 0$ при $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Значит α_2 — локальный минимум, а так как при $\alpha \to -\infty$, $f(\alpha, e)$ стремится к $\|Ae\|^2$ сверху, а при $\alpha \to \infty$ $f(\alpha, e)$ стремится к $\|Ae\|^2$ снизу, следовательно α_2 — глобальный минимум. Аналогично, если $\langle b, Ae\rangle < 0$, то α_1 — глобальный минимум.

2. $\langle b, Ae\rangle = 0$. Тогда $f(\alpha, e) = \frac{\|b\|^2 + \alpha^2\|Ae\|^2}{1+\alpha^2}$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 2\frac{\alpha\left(\|Ae\|^2 - \|b\|^2\right)}{(1+\alpha^2)^2}$.

   (a) Если $\|Ae\| < \|b\|$, то $\frac{\partial f}{\partial \alpha} < 0$, при $\alpha > 0$ и $\frac{\partial f}{\partial \alpha} > 0$, при $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ – глобальный максимум со значением $\|b\|^2$. Точки глобального минимума у функции $f(\alpha, e)$ нет, нижняя грань равна $\|Ae\|^2$, $f(\alpha, e) \to \|Ae\|^2$ при $\alpha \to \pm\infty$.

   (b) Если $\|Ae\| > \|b\|$, то $\frac{\partial f}{\partial \alpha} > 0$, при $\alpha > 0$ и $\frac{\partial f}{\partial \alpha} < 0$, при $\alpha < 0$. $\alpha = 0$ – локальный и глобальный минимум, $f(0, e) \equiv \|b\|^2$.

   (c) Если $\|Ae\| = \|b\|$, то $f(\alpha, e) \equiv \|b\|^2$.

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы. Пусть $z_0^* = 0$ для любого $z^* \in S(\lambda_{min}(B^T B))$. Предположим, что задача минимизации $\varphi(x)$ имеет решение $\tilde{x}$, то есть $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) = \varphi(\tilde{x}) = \frac{\|A\tilde{x} - b\|^2}{1 + \|\tilde{x}\|^2}$. Обозначим $F(z) = \frac{\|Bz\|^2}{\|z\|^2}$ (отношение Релея) и заметим, что для любого z: $z_0 \neq 0$, $F(z) > \lambda_{min}(B^T B) = F(z^*)$. Обозначим $\tilde{z} = (1, \tilde{x})$,

$\varphi(\tilde{x}) = F(\tilde{z}) > \lambda_{min}(B^TB)$. Положим $x^* = (z_1^*, \ldots, z_n^*) \in \mathbb{R}^n$. Из равенства $B^TBz^* = \lambda_{min}(B^TB)z^*$ следует, что $\langle b, Ax^* \rangle = 0$. Пусть $e^* = x^*/\|x^*\|$, $\{\alpha_k\} \to \infty$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Тогда по лемме 2 $\lambda_{min}(B^TB) = \lambda_{min}(A^TA) = \|Ae^*\|^2 < \|b\|^2$, следовательно, по лемме 3 $f(\alpha_k, e^*) \to \lambda_{min}(B^TB) < \varphi(\tilde{x})$ при $\alpha_k \to \infty$. Это противоречит предположению, что в точке $\tilde{x}$ реализуется минимум $\varphi(x)$. Значит, $\inf\limits_{(H,h):M(H,h)\neq\varnothing} \Phi(H, h)$ не достигается. Осталось доказать, что он равен $\lambda_{min}(B^TB)$ и в этом случае. Действительно, с одной стороны $\varphi(x) = F((1, x)) \geqslant \lambda_{min}(B^TB)$, следовательно, всегда имеет место $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x) \geqslant \lambda_{min}(B^TB)$. С другой стороны, пусть x^* – единичный собственный вектор матрицы A^TA, соответствующий $\lambda_{min}(A^TA)$, тогда $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \varphi(\alpha x) = \|Ax^*\|^2 = \lambda_{min}(A^TA)$, значит всегда выполняется $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \varphi(x) \leqslant \lambda_{min}(A^TA)$. Так как в условиях теоремы $\lambda_{min}(A^TA) = \lambda_{min}(B^TB)$, то $\inf\limits_{(H,h):M(H,h)\neq\varnothing} \Phi(H, h) = \lambda_{min}(B^TB)$. $\square$

Следствие 1. *Если $\|b\|^2 \leqslant \lambda_{min}(A^TA)$, то решение задачи (1) существует.*

Доказательство. Предположим, что решения задачи (1) не существует. Тогда по теореме для любого $z^* \in S(\lambda_{min}(B^TB))$, $z_0^* = 0$. По лемме 2 $\|b\|^2 > \lambda_{min}(A^TA)$, пришли к противоречию. $\square$

Следствие 2. *Если $\|b\|^2 > \lambda_{min}(A^TA)$ и $A^Tb = 0$, то решения задачи (1) не существует.*

Доказательство. Заметим, что в этом случае для любых λ_i, x_i – собственного числа и соответствующего собственного вектора матрицы A^TA, λ_i, $(0, x_i)$ – собственное число и соответствующий собственный вектор матрицы B^TB. Вместе с

$\lambda = \|b\|^2$ и $z = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ они образуют весь спектр матрицы $B^T B$. Так как $\|b\|^2 > \lambda_{min}(A^T A)$,то выполняется условие теоремы: для любого $z^* \in S(\lambda_{min}(B^T B))$ $z_0^* = 0$ и решение задачи (1) не существует. $\square$

Замечание. В работе [3] содержится результат о равенстве $\min\limits_{(H,h):M(H,h)\neq\varnothing} \Phi(H, h) = \lambda_{min}(B^T B)$ (в неявном предположении о достижимости нижней грани), однако необходимых и достаточных условий достижимости нет.

Литература

1. *Горелик В. А., Кондратьева В. А.* Параметрическое программирование и несобственные задачи линейной оптимизации. // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 1999. С. 57–82.

2. *Хорн Р, Джонсон У.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

3. *Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука. Физматлит., 1983. 336 с.