УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ C-СИСТЕМ

Д. Г. Ивашко

В этой работе исследуются аффинные управляемые системы с трехмерным фазовым пространством. Для аффинной управляемой системы

$$\dot{y} = f_0(y) + \sum_{j=1}^{s} f_j(y)u^j, \qquad y \in N \subset \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

где N — фазовое пространство, являющееся областью, а f_0 и f_j — гладкие векторные поля, задача терминального управления заключается в следующем. Заданы точки $y_0,\, y_1 \in N$. Требуется определить такое управление $u(t)$, $t \in [t_0,\, t_1]$, и соответствующее решение $y(t)$, $t \in [t_0,\, t_1]$, что $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1$. При решении задачи терминального управления представляется целесообразным от исходной системы перейти к эквивалентной системе наиболее простого вида. Для нее решить задачу терминального управления и затем с помощью обратного преобразования перенести решение в исходную систему. В качестве систем простого вида можно использовать канонические формы существующей классификации управляемых систем.

1. Среди трехмерных управляемых систем рассмотрим управляемые системы с трехмерной допускаемой алгеброй. Такие системы называются C-системами [1; 2; 3, с. 176]. В работе [1] получена классификация C-систем и найдены канонические формы. Рассмотрим одну

из таких канонических форм

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \qquad\qquad\qquad a > 0. \\ \dot{z} = az^2 \operatorname{tg}(ax)u, \end{cases} \tag{2}$$

Чтобы решить поставленную задачу для этой системы, предварительно декомпозируем эту систему на независимые уравнения. В работе [4] было показано, что если сделать замену переменных

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = yz(1 + \sin(ax)) + \cos(ax)/a, \\ z' = z(1 + \sin(ax)) \end{cases}$$

и замену управлений $v = \frac{a\cos(ax)}{1+\sin(ax)} + \frac{az}{\cos(ax)}\, u$, то система (2) преобразуется к декомпозированному виду

$$\begin{cases} \dot{x}' = \sin(ax') + \dfrac{\cos(ax')}{a}\, v, \\ \dot{y}' = -1 + y'v, \\ \dot{z}' = z'v. \end{cases} \tag{3}$$

Первое уравнение системы (3) можно свести к уравнению Риккати с помощью замены переменных: $p = \operatorname{tg}(ax'/2)$. Если заменить y' на q, а z' на r, то система (3) примет вид

$$\begin{cases} \dot{p} = ap + ((1 - p^2)/2)v, \\ \dot{q} = -1 + qv, \\ \dot{r} = rv. \end{cases} \tag{4}$$

2. Для каждого уравнения системы (4) найдем такое управление, при котором эти уравнения имеют стационарные решения. Уравнение $\dot{p} = ap + ((1 - p^2)/2)v$ имеет стационарное решение $p = p_0$, если

Рис. 1. Точки покоя для координаты p

применить управление

$$v = -\frac{2ap}{1-p^2}, \tag{5}$$

где $p = p_0$. Такие управления будем называть управлениями покоя. Точки (p, v), где v — управление покоя для p, назовем точками покоя. Множество точек покоя для первого уравнения системы (4) изображено на рис. 1.

Стационарное решение $q = q_0$ уравнения $\dot{q} = -1 + qv$ будет получено при управлении

$$v = \frac{1}{q}, \tag{6}$$

где $q = q_0$. Точки покоя для этого уравнения изображены на рис. 2.

Для уравнения $\dot{r} = rv$ стационарное решение $r = r_0$, будет получено при $r_0 = 0$ или при $v = 0$. Точки покоя для этого уравнения изображены на рис. 3.

Рис. 2. Точки покоя для координаты q

Рис. 3. Точки покоя для координаты r

Рассмотрим решения системы (4) при постоянных управлениях $v = v_0$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2+v_0^2}} \ln\left(\dfrac{(p-\lambda_2)(p_0-\lambda_1)}{(p_0-\lambda_2)(p-\lambda_1)}\right) = t, \\ \dfrac{1}{v_0} \ln\left(\dfrac{qv_0-1}{q_0v_0-1}\right) = t, \\ \dfrac{1}{v_0} \ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right) = t, \end{cases} \tag{7}$$

где $\lambda_1 = (a + \sqrt{a^2+v_0^2})/v_0$, $\lambda_2 = (a - \sqrt{a^2+v_0^2})/v_0$. На рис. 1, 2, 3 стрелками будут изображены направления движения в областях достижимости между точками покоя при постоянных управлениях.

Анализируя рис. 1, укажем области достижимости для первого уравнения системы (4) при кусочно-постоянном управлении. Для начальной точки $p_0 \in]-1, 1[$ областью достижимости является вся прямая $p \in]-\infty, +\infty[$. А если $p_0 \in]-\infty, -1[$, то в этом случае областью достижимости будет этот же интервал. Аналогично, если $p_0 \in]1, +\infty[$, то областью достижимости будет интервал $]1, +\infty[$.

Соответственно для второго уравнения системы (4) области достижимости при кусочно-постоянном управлении будут следующие интервалы (рис. 2): при $q_0 \in]0, +\infty[$ областью достижимости является вся прямая $q \in]-\infty, +\infty[$; если $q_0 \in]-\infty, 0[$, то область достижимости совпадает с этим же интервалом.

Для третьего уравнения системы (4) если начальная точка $r_0 < 0$, то и конечная точка $r < 0$, а если же $r_0 > 0$, то $r > 0$.

Таким образом, в трехмерном фазовом пространстве управляемой системы (4) мы можем отсечь области, для которых задача терминального управления решена быть не может.

3. Если ограничиться только постоянными управлениями, то задача терминального управления для системы (4) сводится к решению следующей системы уравнений

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+v_0^2}}\ln\left(\frac{(p_f-\lambda_2)(p_0-\lambda_1)}{(p_0-\lambda_2)(p_f-\lambda_1)}\right)=\frac{1}{v_0}\ln\left(\frac{q_f v_0-1}{q_0 v_0-1}\right)=\frac{1}{v_0}\ln\left(\frac{r_f}{r_0}\right)=T, \tag{8}$$

где p_0, q_0, r_0 — координаты начальной точки, а p_f, q_f, r_f — координаты конечной точки и T — время движения из начальной точки в конечную.

Из второго равенства системы (8), найдя управление $v_0 = \frac{r_f - r_0}{q_0 r_{f-q_f r_0}}$ и подставляя его в первое уравнение системы, проверяем, удовлетворяет ли управление этому уравнению. Если удовлетворяет, то задача терминального управления решена. В противном случае следует рассмотреть кусочно-постоянное управление.

Рассмотрим случай, когда управление является ступенчатой функцией. Пусть эта функция имеет вид

$$v=\begin{cases} v_1 & 0\leqslant t<t_1,\\ v_2 & t_1<t. \end{cases}$$

При таком управлении для решения задачи терминального управления следует решить систему уравнений

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+v_1^2}}\ln\left(\frac{(p_1-\lambda_2^1)(p_0-\lambda_1^1)}{(p_0-\lambda_2^1)(p_1-\lambda_1^1)}\right)=\frac{1}{v_1}\ln\left(\frac{q_1 v_1-1}{q_0 v_1-1}\right)=\frac{1}{v_1}\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)=t_1,$$
$$\frac{1}{\sqrt{a^2+v_2^2}}\ln\left(\frac{(p_f-\lambda_2^2)(p_1-\lambda_1^2)}{(p_1-\lambda_2^2)(p_f-\lambda_1^2)}\right)=\frac{1}{v_2}\ln\left(\frac{q_f v_2-1}{q_1 v_2-1}\right)=\frac{1}{v_2}\ln\left(\frac{r_f}{r_1}\right)=t_2,$$

где $t_2 = T - t_1$; λ_1^1, λ_2^1 — корни уравнения $a\lambda + ((1-\lambda^2)/2)v_1 = 0$; а λ_1^2, λ_2^2 — корни уравнения $a\lambda + ((1-\lambda^2)/2)v_2 = 0$. В этой системе имеется четыре уравнения с пятью неизвестными $(v_1, v_2, p_1, q_1, r_1)$, что дает некоторый простор для решения. Решая систему и найдя v_1, v_2, получим управление $v(t)$, которое решает задачу терминального управления.

4. В системе (4) уравнение Риккати с произвольной функцией $v(t)$ не интегрируется в квадратурах. Поэтому рассмотрим систему, состоящую только из двух последних уравнений системы (4)

$$\begin{cases} \dot{q} = -1 + qv, \\ \dot{r} = rv, \end{cases} \tag{9}$$

и найдем решения этой системы при произвольных управлениях. Эти решения имеют вид

$$\begin{cases} q(t) = q_0 \exp(V(t)) - \exp(V(t)) \int\limits_0^t \exp(-V(\tau))d\tau, \\ r(t) = r_0 \exp(V(t)), \end{cases} \tag{10}$$

где $V(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau$. Если ввести функцию $S(t) = \int_0^t \exp(-V(\tau))d\tau$, тогда решения (10) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} q(t) = \dfrac{q_0 - S(t)}{\dot{S}(t)}, \\ r(t) = \dfrac{r_0}{\dot{S}(t)}. \end{cases} \tag{11}$$

По определению функции $S(t)$ является произвольной монотонно возрастающей функцией, которая удовлетворяет условиям $S(0) = 0$ и $\dot{S}(0) = 1$.

Для системы (9) задача терминального управления сводится к следующей постановке. Необходимо найти дважды кусочно дифференцируемую, монотонную функцию $S(t)$, удовлетворяющую краевым усло-

Рис. 4. Область достижимости для точки (q_0, r_0), $r_0 > 0$

виям

$$S(0) = 0, \qquad \dot{S}(0) = 1,$$
$$S(T) = q_0 - r_0 q_f / r_f, \qquad \dot{S}(T) = r_0 / r_f.$$

Соответствующее управление находится по формуле $v(t) = -\ddot{S}(t)/\dot{S}(t)$.

Так как функция $S(t)$ монотонно возрастающая, то должны выполняться следующие неравенства: $r_0/r_f > 0$, $q_0 > r_0 q_f / r_f$. Эти неравенства для любой начальной произвольной точки (q_0, r_0) задают область достижимости системы (9). Для случая $r_0 > 0$ область достижимости показана на рис. 4.

Рис. 5 иллюстрирует область достижимости при $r_0 < 0$.

Рис. 5. Область достижимости для точки (q_0, r_0), $r_0 < 0$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00947).

Литература

1. Ивашко Д. Г. *О классификации трехмерных управляемых систем.* // Моделирование процессов управления и обработки информации. Междувед. сб. / МФТИ. М. Изд-во МФТИ. 1996. С. 142–153.

2. Ёлкин В. И., Ивашко Д. Г. *О связи понятий C-систем и L-систем в теории аффинных управляемых систем.* // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. 11. С. 1471–1477.

3. Ёлкин В. И. *Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход.* М.: Наука. Физматлит. 1997. 320 с.

4. Ёлкин В. И., Ивашко Д. Г. *О декомпозиции трехмерных нелинейных управляемых систем.* // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 34. 11. (в печати)