В.И.Елкин

Редукция нелинейных управляемых систем

Дифференциально-геометрический подход

МОСКВА
НАУКА • ФИЗМАТЛИТ
1 9 9 7

Оглавление

Введение

Развитие науки и техники имеет естественную тенденцию к тому, что приходится иметь дело со все более сложными управляемыми динамическими процессами. При этом, разумеется, создаются и все более сложные математические модели для этих процессов. В частности, на смену линейным управляемым динамическим системам

$$\dot{y} = Ay + Bu, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \tag{1}$$

где A, B — постоянные матрицы, все чаще приходят нелинейные управляемые динамические системы

$$\dot{y} = f_0(y) + f(y)u, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \tag{2}$$

притом состоящие из большого числа уравнений.

Решение задач для многомерных нелинейных управляемых систем сопряжено с большими трудностями, которые носят как математический, так и эксплуатационный характер, ибо часто требуются неприемлемые затраты машинного времени. Поэтому актуальной является разработка методов редукции нелинейных систем, т.е. приведения систем (2) к более простому виду, например, к декомпозиции на системы меньшей размерности. Подходы к проблеме редукции могут быть разные, в частности, использующие приближенные методы. В данной книге развивается наиболее естественный и очевидный (по мнению автора) подход, который присутствует по существу в любой теории математических объектов, скажем, в теории линейных пространств, в теории групп и т.д. Редукция, о которой здесь идет речь, — это редукция, основанная на сопоставлении исходному объекту изоморфного объекта, факторобъекта и подобъекта. Например, в теории линейных пространств это редукция к изоморфному линейному пространству, факторпространству и подпространству. Собственно, изложение элементов любой теории начинается с введения этих редуцированных объектов и определения основных их свойств по отношению к исходному объекту.

Поэтому можно сказать, что теория редукции нелинейных управляемых систем вида (2), описанная в этой книге, представляет собой элементы общей теории таких систем. Данная теория, как будет видно в дальнейшем, имеет чисто дифференциально-геометрический характер.

Формальное определение указанных редуцированных объектов, которое подходит для любой математической теории, можно сделать в рамках теории категорий или теории структур Бурбаки. На описательном уровне та или иная категория (например, категория линейных пространств или категория групп) представляет собой класс объектов, причем каждый объект S является множеством M с заданной на нем некоторой структурой одного и того же рода. Эту структуру можно трактовать как совокупность связей определенного вида между элементами множества M. Кроме объектов в категорию входят морфизмы, осуществляющие взаимосвязи между объектами. Если объекты S_1, S_2 заданы на множествах M_1, M_2, то морфизмом ψ объекта S_1 в объект S_2 является отображение $\psi\colon M_1 \to M_2$, сохраняющее структуру данного рода (т.е. сохраняющее соответствующие связи между элементами множеств). Например, в категории линейных пространств морфизмами являются линейные отображения, а в категории групп — гомоморфизмы.

Для нелинейных управляемых систем (2) можно построить категорию следующим образом. Объектами этой категории, которую обозначим через $\mathcal{AS}$, являются системы вида (2), называемые часто аффинными системами. Морфизмы определяются так. Рассмотрим наряду с некоторой системой S, описываемой соотношениями (2), управляемую систему S', описываемую соотношениями

$$\dot{x} = g_0(x) + g(x)v, \quad x \in L \subset \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R}^s. \tag{3}$$

Морфизмом системы S в систему S' называется (гладкое) отображение ψ фазового пространства M системы S в фазовое пространство L системы S', переводящее решения (фазовые траектории) системы S в решения системы S'. (Напомним, что решением или фазовой траекторией системы (2) называется достаточно гладкая функция $y(t)$, для которой существует такое допустимое управление $u(t)$, что функции $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют (2).)

Изоморфизм в той или иной категории — это морфизм ψ, представляющий собой взаимно однозначное отображение, причем обратное отображение ψ^{-1} также является морфизмом. Если для объектов S_1 и S_2 существует изоморфизм S_1 в S_2, то объекты S_1 и S_2 называются изоморфными. Изоморфные объекты имеют одинаковые свойства в рамках данной категории. Например, в категории линейных пространств изоморфизмы — это линейные изоморфизмы.

Редукция управляемой системы (2) к изоморфной или, как еще говорят, эквивалентной системе (3) (где $m = n$) целесообразен, если последняя имеет более простой вид. Например, сложная нелинейная система (2) может быть эквивалентна линейной системе (1). В этом случае нелинейность является «случайной чертой», которая стирается при переходе к эквивалентной системе. Существенные свойства управляемых систем, такие, как управляемость, устойчивость, оптимальность решений, сохраняются при переходе к эквивалентной системе. Поэтому естественно попытаться решить ту или иную задачу управления для эквивалентной системы более простого вида, а затем «перенести» полученное решение на исходную систему с помощью изоморфизма.

Понятие подобъекта возникает в связи с желанием корректно построить сужение (ограничение) данного объекта S, заданного на множестве M, на подмножество $N \subset M$. Вообще говоря, объект S сузить на произвольное множество нельзя. Объект $\overline{S}$, заданный на подмножестве $N \subset M$, называется подобъектом, если каноническое вложение $i\colon N \to M$ является морфизмом. Например, в категории линейных пространств подобъекты — это линейные подпространства.

Потребность в сужении управляемой системы S, т.е. в переходе к подсистеме $\overline{S}$, заданной на подмножестве $N \subset M$, возникает, если из практических соображений на элементы множества M наложены некоторые ограничения (начальные условия, граничные условия и т.д.). В этом случае естественно попытаться сузить систему S на некоторое подмножество $N \subset M$, для которого эти ограничения удовлетворяются. Подсистема $\overline{S}$, заданная на N, определяет часть решений исходной системы S, лежащих в N и, в частности, удовлетворяющих заданным ограничениям. Поэтому решение задачи управления, поставленной для системы S, может быть сведено к решению аналогичной задачи для подсистемы $\overline{S}$ с фазовым пространством меньшей размерности.

В то время как при сужении упрощение достигается за счет перехода на подмножество $N \subset M$, при факторизации упрощение достигается за счет «сжатия» множества M, т.е. перехода на фактормножество M/R по некоторому отношению эквивалентности R. При этом переходе точки, принадлежащие одному классу эквивалентности, «склеиваются» в одну точку фактормножества M/R. Объект $\tilde{S}$, заданный на M/R, называется факторобъектом объекта S, заданного на M, если каноническая проекция $\varphi\colon M \to M/R$ является морфизмом. Например, в категории линейных пространств факторобъекты — это факторпространства.

Значение факторизации для редукции управляемых систем (2) заключается прежде всего в том, что она порождает определенную декомпозицию исходной системы. Точнее, если у системы (2) существует факторсистема (3), заданная на некотором фактормножестве $L = M/R$, то система (2) эквивалентна системе вида

$$\dot{z} = g_0(z) + g(z)v, \tag{4}$$

$$\dot{x} = h_0(x, z) + h(x, z)v, \tag{5}$$

$$z \in L \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in P \subset \mathbb{R}^{n-m}, \quad v \in \mathbb{R}^s.$$

Из вида системы (4), (5) следует, что любое решение $z(t)$, $x(t)$ этой системы может быть получено следующим образом. Сначала нужно найти решение факторсистемы (4) (соответствующее некоторому управлению $v(t)$), а затем, после подстановки $z(t)$ в (5), найти $x(t)$. На этом факте основана декомпозиция алгоритмов решения задач управления. Заметим также, что многие свойства управляемой системы (наблюдаемость, автономность и др.) определяются существованием факторсистем специального вида.

Понятия изоморфного объекта, факторобъекта и подобъекта могут применяться для редукции исходного объекта совместно и в различной последовательности. Отметим, что ведутся исследования по разработке общих универсальных способов расслоения на факторобъекты и подобъекты, пригодных для редукции математических объектов произвольной природы [4, 5].

Один и тот же математический объект можно погружать в разные категории. Разумеется, желательно вводить как можно более общие категории, ибо возможности для редукции при этом расширяются. Однако здесь имеются ограничения, обусловленные тем, что слишком общие морфизмы могут перестать отражать существенные связи между объектами. Следует иметь в виду, что каждой категории соответствует, вообще говоря, свой математический аппарат.

Первые результаты по редукции управляемых систем, полученные в основном в 70-е годы, можно трактовать как редукцию в категории $\mathcal{ASP}$, которая является подкатегорией введенной ранее категории $\mathcal{AS}$ и морфизмы которой определяются следующим образом. Рассмотрим наряду с системой (2) систему (3). Отображение ψ (являющееся достаточно гладким) фазового пространства M системы (2) в фазовое пространство L системы (3) называется морфизмом системы (2) в систему (3), если $r = s$, и как только $y(t)$ — решение системы (2), соответствующее управлению $u(t)$, то $x(t) = \psi(y(t))$ — решение системы (2), соответствующее управлению $v(t) = u(t)$. Изоморфизмами являются по существу замены фазовых переменных.

Вскоре выяснилось, что возможности для редукции в этой категории довольно ограничены. В связи с этим стали рассматриваться более общие морфизмы, включающие определенные законы изменения управлений, которым соответствуют более общие категории, чем $\mathcal{ASP}$.

Естественным обобщением всех таких категорий является категория $\mathcal{AS}$, морфизмы в которой определяются как гладкие отображения фазовых пространств, переводящие решения в решения без априорного задания закона изменения управлений. Возможности для редукции в этой категории являются наиболее широкими и многообещающими.

Главным в проблеме редукции является построение математического аппарата для нахождения редуцированных объектов. Математический аппарат составляют понятия, которые имеют инвариантный характер относительно морфизмов. Как уже отмечалось, каждой категории соответствует свой математический аппарат. Общим для любой категории нелинейных управляемых систем является дифференциально-геометрический характер аппарата.

Для изучения вопросов редукции в категории $\mathcal{ASP}$ (и некоторых других категориях) эффективным инструментом исследования являются ассоциированная группа преобразований и ассоциированная алгебра Ли векторных полей, которые порождаются правыми частями системы (2). Так, подмножества $N \subset M$, на которых могут существовать подсистемы системы (2) в категории $\mathcal{ASP}$, должны быть (локально) инвариантными многообразиями ассоциированной группы. Следовательно, для существования подсистем (с фазовым пространством размерности, меньшей, чем n) эта группа должна быть (локально) интранзитивной. Для существования факторсистем (с фазовым пространством размерности, меньшей, чем n) ассоциированная группа должна быть импримитивной. Этим, кстати, объясняется ограниченность возможностей для редукции в категории $\mathcal{ASP}$. Дело в том, что в определенном смысле почти все группы, порождаемые семействами векторных полей, являются транзитивными, а транзитивные группы, как правило, примитивны. Таким образом, редукция к подсистеме или к факторсистеме в категории $\mathcal{ASP}$ возможна в вырожденных случаях.

При морфизмах категории $\mathcal{AS}$ структура ассоциированной группы и ассоциированной алгебры Ли не сохраняется. Поэтому для исследования вопросов редукции в категории $\mathcal{AS}$ требуется другой математический аппарат. Подходящим инструментом исследования здесь являются дифференциально-геометрическое понятие аффинного распределения и двойственное понятие t-кораспределения. Объекты такого рода можно связать с каждой аффинной управляемой системой, причем структура этих объектов сохраняется при морфизмах категории $\mathcal{AS}$. Следует однако сказать, что (насколько автору известно) теория аффинных распределений и t-кораспределений в дифференциальной геометрии практически не разрабатывалась (возможно из-за отсутствия приложений).

***

Сделаем несколько замечаний относительно содержания и структуры книги. Она является расширенным изложением курса лекций по редукции нелинейных управляемых систем, которые автор читал в течение ряда лет для студентов Московского физико-технического института. Кроме того, при работе над рукописью автор позволил себе использовать свою серию учебных пособий по данному курсу [1–3]. Это обстоятельство отразилось, разумеется, на изложении, которое в значительной мере является замкнутым. Необходимый запас сведений сведен к минимуму: достаточную подготовку обеспечивают стандартные курсы математического анализа и линейной алгебры. К сожалению, стандартные курсы по дифференциальной геометрии пока не обеспечивают необходимого запаса знаний для изучения дифференциально-геометрической теории нелинейных управляемых систем, поэтому по крайней мере часть сведений, нужных для понимания основного материала книги, включена в нее. Таким образом, книга может быть использована практически всеми, кто начинает знакомство с современной дифференциально-геометрической теорией нелинейных управляемых динамических систем.

Весь вспомогательный материал собран в первой главе. Достаточно большой объем этой главы вызван указанным выше стремлением к замкнутости изложения. Сюда входят элементы теории категорий, некоторые разделы дифференциальной геометрии, а также одно применение дифференциальной геометрии в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Что касается теории категорий, то следует сказать, что в книге используются только некоторые основные определения этой теории, которые, собственно, и приведены в первой главе. (Подробнее о теории категорий см., например, в [6].) Материал из дифференциальной геометрии содержит, главным образом, ряд аспектов теории распределений и кораспределений (систем Пфаффа), а также теории локальных групп диффеоморфизмов, порождаемых семействами векторных полей. Приведенные результаты (за исключением, возможно, теории аффинных распределений и двойственных объектов — t-кораспределений) давно получены, причем некоторые попросту забыты. Однако современная теория управления сделала эти результаты удивительно актуальными. Подробности о затронутых дифференциально-геометрических вопросах можно почерпнуть в [7–10, 45, 54, 56, 57, 65–67]. В конце первой главы рассмотрена теория дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковой главной частью. Эту теорию можно трактовать как приложение теории распределений. Дифференциальные уравнения данного типа часто встречаются в задачах редукции нелинейных управляемых систем.

Вторая, третья, четвертая и пятая главы посвящены разработке методов редукции нелинейных управляемых систем. В основном приводятся результаты, которые касаются редукции в категории $\mathcal{AS}$ и которые принадлежат автору [17–25]. С помощью этих результатов для данной нелинейной управляемой системы можно строить редуцированные системы различных видов — эквивалентные системы, факторсистемы и подсистемы.

В последней шестой главе в качестве приложения показано, как с помощью построения редуцированных систем решаются некоторые задачи теории управления.

В заключение хочу выразить благодарность прежде всего руководителю семинара «Декомпозиция математических моделей» Вычислительного центра Российской академии наук Ю.Н.Павловскому, а также постоянным участникам семинара Крищенко А.П., Яковенко Г.Н., Смирновой Т.Г., Коноваловой Л.Б., Ивашко Д.Г. и другим за многочисленные и полезные обсуждения вопросов, затронутых в этой книге.

Глава 1

Вспомогательные сведения

1.1. Множества и отображения

Для удобства читателя приведем здесь используемые обозначения и напомним некоторые определения:

$\emptyset$ — пустое множество;

$y \in M$ — элемент y принадлежит множеству M;

$y \notin M$ — элемент y не принадлежит множеству M;

$N \subset M$ — множество N содержится в множестве M (и, быть может, совпадает с ним);

$N \not\subset M$ — множество N не содержится в множестве M;

$\bigcup_{j \in J} M_j$ — объединение семейства множеств M_j, занумерованных элементами множества J; если J конечно, то употребляется также обозначение вида $M_1 \cup \ldots \cup M_n$;

$\bigcap_{j \in J} M_j$ — пересечение семейства множеств;

$M \setminus N$ — дополнение к множеству N в множестве M;

$N \times M$ —декартово произведение множеств N и M, т.е. множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in N, y \in M$;

$f\colon M \to N$ — отображение f множества M в множество N;

$f\colon x \mapsto y$ — отображение f переводит элемент x в элемент y;

$\{y\colon A\}$ — совокупность тех y, для которых выполняется условие A.

Для сокращения формулировок часто используются некоторые логические символы. Знак импликации $\Longrightarrow$ в записи $A \Longrightarrow B$ означает, что «A влечет B» или «из A следует B», в то время как $A \Longleftrightarrow B$ означает эквивалентность высказываний A и B (…тогда и только тогда, когда…). Квантор всеобщности $\forall$ служит заменой выражения «для всех».

Образом множества M при отображении $f: M \to N$ называется множество

$$f(M) = \{f(y): y \in M\}.$$

Отображение $f: M \to N$ называется сюръективным или отображением на, если $f(M) = N$; оно называется инъективным, если

$$y \neq y' \Longrightarrow f(y) \neq f(y').$$

Отображение $f: M \to N$ — биективное или взаимно однозначное, когда оно одновременно сюръективно и инъективно.

Единичным (или тождественным) отображением $e_M: M \to M$ называется отображение, переводящее каждый элемент $y \in M$ в себя. Если $V \subset M$, то отображение $f_V: V \to N$ называется сужением отображения $f: M \to N$, если $f_V(y) = f(y), \forall y \in V$.

Произведением (суперпозицией или композицией) отображений

$$g: U \to V, \quad f: V \to W$$

называется отображение $f \circ g: U \to W$, определяемое условием

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)), \quad \forall u \in U.$$

Часто вместо $f \circ g$ пишут просто fg. Композиция отображений подчиняется закону ассоциативности, т.е.

$$f(gh) = (fg)h.$$

Если $f: M \to N$ — биекция, т.е. биективное отображение, то определено обратное отображение f^{-1}, которое также биективно и удовлетворяет условию

$$f^{-1}f = e_M, \quad ff^{-1} = e_N.$$

Отношением эквивалентности R, заданным на множестве M, называется бинарное отношение, т.е. множество $R \subset M \times M$, обладающее следующими свойствами:

1) $(a, a) \in R, \forall a \in M$,
2) $(a, b) \in R \Longrightarrow (b, a) \in R$,
3) $(a, b), (b, c) \in R \Longrightarrow (a, c) \in R$.

Если $(a, b) \in R$, то говорят, что точки $a, b \in M$ эквивалентны (по отношению эквивалентности R), и пишут также aRb. Из этих трех свойств вытекает, что M разбивается на непересекающиеся подмножества эквивалентных точек, которые называются классами эквивалентности (отношения эквивалентности R). Точка, принадлежащая некоторому классу эквивалентности, называется представителем этого класса. Множество классов эквивалентности называется фактор-множеством и обозначается через M/R. Отображение $\varphi\colon M \to M/R$, ставящее в соответствие каждой точке множества M тот класс эквивалентности, в котором находится эта точка, называется канонической проекцией.

Примерами отношений эквивалентности являются так называемые тривиальные отношения эквивалентности π_0 и π_1: каждый класс π_0 состоит только из одного элемента множества M, а в случае π_1 имеется лишь один класс эквивалентности, состоящий из всего множества M.

1.2. Категории и функторы

Говорят, что задана категория K, если:

1) задан класс объектов категории K, который будем обозначать через $\operatorname{Ob} K$;

2) для каждой пары A, B объектов K задано множество морфизмов $\operatorname{Mor}_K(A, B)$ объекта A в объект B (если $f \in \operatorname{Mor}_K(A, B)$, то применяется также обозначение $f\colon A \to B$);

3) для каждой тройки A, B, C объектов K определен закон композиции, т.е. отображение

$$\operatorname{Mor}_K(A, B) \times \operatorname{Mor}_K(B, C) \to \operatorname{Mor}_K(A, C).$$

Совокупность всех морфизмов категории K будем обозначать через $\operatorname{Mor} K$.

Композиция морфизмов $f \in \operatorname{Mor}_K(A, B)$ и $g \in \operatorname{Mor}_K(B, C)$ обозначается через $g \circ f$ и обладает свойствами:

а) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, $\forall f \in \operatorname{Mor}_K(C, D)$, $\forall g \in \operatorname{Mor}_K(B, C)$, $\forall h \in \operatorname{Mor}_K(A, B)$, т.е. композиция морфизмов ассоциативна;

б) для каждого объекта A существует тождественный морфизм $1_A \in \operatorname{Mor}_K(A, A)$, такой, что $1_A \circ f = f \circ 1_A = f$ всякий раз, когда эти композиции определены. Тождественный морфизм единственен.

Если морфизм $f\colon A \to B$ допускает обратный морфизм f^{-1} (т.е. такой, что $f \circ f^{-1} = 1_B$, $f^{-1} \circ f = 1_A$), то он называется изоморфизмом, а объекты A и B — изоморфными.

Для каждой категории K определена двойственная (или, иначе, дуальная) категория K^0. Объекты категории K^0 — те же, что и у категории K, а за множество морфизмов $\operatorname{Mor}_{K^0}(A, B)$ по определению принимается $\mathrm{Mor}_K(B, A)$. Композиция f и g в K^0 определяется как композиция g и f в K.

Подкатегорией категории K называется категория K', объекты и морфизмы которой одновременно являются объектами и морфизмами в K. При этом композиция морфизмов в K' индуцируется их композицией в K. Подкатегория K' категории K называется полной, если $\mathrm{Mor}_{K'}(A, B) = \mathrm{Mor}_K(A, B)$ для каждой пары $A, B \in \mathrm{Ob}\, K'$.

Пусть K_1 и K_2 — две категории. Если каждому объекту A из K_1 поставлен в соответствие объект $F(A)$ из K_2, а каждому морфизму $f \in \mathrm{Mor}_{K_1}(A, B)$ — морфизм $F(f) \in \mathrm{Mor}_{K_2}(F(A), F(B))$, так что справедливы равенства

$$F(1_A) = 1_{F(A)}, \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g),$$

то говорят, что задан функтор из K_1 в K_2.

Говорят, что функтор $F\colon K_1 \to K_1$ определяет изоморфизм между категорией K_1 и категорией K_2, если:

1) для каждого объекта B из K_2 существует единственный объект A из K_1, такой, что $F(A) = B$;

2) для каждой пары объектов A, B из K_1 отображение

$$\mathrm{Mor}_{K_1}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{K_2}(F(A), F(B)),$$

сопоставляющее морфизму $f\colon A \to B$ морфизм $F(f)\colon F(A) \to F(B)$, биективно.

Расширением понятия изоморфизма является понятие эквивалентности категорий. Говорят,что функтор $F\colon K_1 \to K_2$ определяет эквивалентность между K_1 и K_2, если:

1) для каждого объекта B из K_2 существует объект A из K_1, такой, что объект $F(A)$ изоморфен B;

2) для каждой пары объектов A, B из K_1 отображение

$$\mathrm{Mor}_{K_1}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{K_2}(F(A), F(B))$$

биективно.

Можно сказать, что эквивалентные категории различаются только «количеством» объектов, содержащихся в классах изоморфных объектов.

В дальнейшем рассматриваются только так называемые конкретные категории, т.е. такие категории, объектами которых являются множества с некоторой заданной на них структурой, морфизмами — отображения множеств, а композициями морфизмов — суперпозиции отображений. В качестве тождественных морфизмов фигурируют тождественные отображения. (Например, конкретной является категория линейных пространств, объектами которой являются линейные пространства, а морфизмами — линейные отображения.)

Морфизм f будем называть мономорфизмом (эпиморфизмом), если f — инъективное (сюръективное) отображение. (Общее определение этих понятий в теории категории несколько шире.)

Пусть A — объект категории K. Пара (U, u), где U — объект категории K, а u — мономорфизм U в A, называется подобъектом объекта A.

На множестве подобъектов объекта A вводится следующее отношение эквивалентности: подобъект (V, v) эквивалентен подобъекту (U, u), если существует такой изоморфизм $w: V \to U$, что $uw = v$. Нетрудно убедиться в том, что этот изоморфизм определен однозначно (при условии существования.) Множество подобъектов разбивается на классы эквивалентных подобъектов. В литературе часто как классы, так и их представители называются одинаково подобъектами.

Введем понятие факторобъекта. Пусть A — объект категории K. Пара (U, u), где U — объект категории K, а u — эпиморфизм A в U, называется факторобъектом объекта A. На множестве факторобъектов объекта A вводится следующее отношение эквивалентности: факторобъект (U, u) эквивалентен факторобъекту (V, v), если существует такой изоморфизм $w: U \to V$, что $wu = v$. Легко видеть, что этот изоморфизм однозначно определен (при условии существования). Множество факторобъектов разбивается на классы эквивалентных факторобъектов. В литературе часто как классы, так и их представители называются одинаково факторобъектами.

Заметим, что при рассмотрении той или иной категории в определения понятий подобъекта и факторобъекта могут вноситься дополнительные условия.

1.3. Векторные поля и распределения

В дальнейшем $\mathbb{R}^n$ означает n-мерное евклидово пространство точек, являющихся наборами n действительных чисел $y = (y^1, \ldots, y^n)$. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ и $U \subset \mathbb{R}^m$ — области (открытые множества). Отображение $f: V \to U$ называется гладким класса C^r или C^r-отображением, если функции $f^i(y)$, $i = 1, \ldots, m$, задающие f, имеют непрерывные частные производные всех порядков $\leqslant r$. При $r = \infty$ это по определению означает существование непрерывных частных производных всех порядков. В дальнейшем, если не оговорено противное, то под гладким отображением понимается отображение класса C^∞. Отображение $f\colon V \to U$ называется диффеоморфизмом, если f — биекция и оба отображения f и f^{-1} — гладкие.

Гладкое отображение $f\colon V \to U$, где $V \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$, называется регулярным, если ранг якобиевой матрицы $\left\|\partial f^k/\partial y^i\right\|_{i=1,\dots,n}^{k=1,\dots,m}$, называемый также рангом отображения f, принимает в каждой точке V максимальное значение (т.е. минимум из n и m). Если ранг регулярного отображения f равен n, то отображение f называется иммерсией, а если ранг равен m, то — субмерсией. Отметим, что функции, определяющие субмерсию, называются функционально независимыми. Иначе говоря, функции $f^k(y), k = 1, \dots, m$, заданные в области $M \subset \mathbb{R}^n$, называются функционально независимыми в M, если

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial f^k}{\partial y^i}\right\|_{i=1,\dots,n}^{k=1,\dots,m} = m, \quad \forall y \in M.$$

Диффеоморфизм $f\colon V \to U$ является регулярным отображением, причем $n = m$. Действительно, пусть $g = f^{-1}$. Из тождества

$$y = g(f(y)), \quad y \in V,$$

после дифференцирования получим

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^k}\frac{\partial f^k}{\partial y^j} = \delta^i_j, \tag{1.1}$$

где δ^i_j — символ Кронекера, т.е.

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

В (1.1) и далее применяется известное правило суммирования по повторяющемуся индексу, т.е.

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^k}\frac{\partial f^k}{\partial y^j} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g^i}{\partial x^k}\frac{\partial f^k}{\partial y^j}.$$

Так как ранг произведения двух матриц не может превосходить рангов сомножителей, то из (1.1) следует, что $n \leqslant m$. Аналогично, используя тождество

$$x = f(g(x)), \quad x \in U,$$

получим неравенство $m \leqslant n$. Следовательно, $n = m$. Из (1.1) и теоремы об определителе произведения матриц следует также, что

$$\left| \frac{\partial f^k}{\partial y^j} \right|_{j=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,n} \neq 0. \tag{1.2}$$

Гладкое отображенние $f: V \to U$ называется локальным диффеоморфизмом в точке $y \in V$, если существует такая окрестность V_0 этой точки, что f является диффеоморфизмом V_0 на $f(V_0)$. Из математического анализа известно следующее утверждение [49].

Теорема 1.1 (теорема об обратном отображении). *Если $V \subset \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ — области, f — гладкое отображение V в U, для которого выполняется* (1.2) *в точке $y_0 \in V$, то f является локальным диффеоморфизмом в точке y_0.* □

Если отображение $f: V \to U$ является диффеоморфизмом, который задается функциями $x^i = f^i(y^1, \ldots, y^n)$, то точки $x = (x^1, \ldots, x^n)$ можно трактовать также как новые координаты в области V. Всегда полезно иметь в виду одновременно оба толкования — отображение и замена координат. (Заметим, что Ф.Клейн называл первое толкование активным, а второе — пассивным [50].)

Переход в диффеоморфную область или, иначе говоря, замена координат является важнейшей операцией, применяемой в данной книге для изучения управляемых систем. При этом возникает необходимость в использовании такого аппарата, содержащего объекты, которые инвариантны в определенном смысле относительно этой операции. Эти объекты могут иметь разный вид в различных системах координат, но существенные основные свойства должны быть одинаковыми, что позволяет переносить результаты, полученные в одной системе координат, в другие. Введение и изучение инвариантных объектов составляет содержание дифференциальной геометрии.

Перейдем к определению многообразия. Сначала обобщим понятие гладкого отображения. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ и $L \subset \mathbb{R}^m$ — произвольные множества. Отображение $f: K \to L$ называется гладким, если для любой точки $y \in K$ существует такая область $V \subset \mathbb{R}^n$, содержащая y, и гладкое отображение $F: V \to \mathbb{R}^m$, совпадающее с F на $U \cap K$. Отображение $f: K \to L$ называется диффеоморфизмом, если f — биекция и оба отображения f и f^{-1} — гладкие.

Множество $N \subset \mathbb{R}^n$ называется m-мерным многообразием, если для каждой точки $y \in N$ существует такая ее окрестность $W \subset \mathbb{R}^n$, что множество $W \cap N$ диффеоморфно m-мерной области евклидова пространства. Иными словами, в окрестности W многообразие N представляет собой образ области $V \subset \mathbb{R}^m$ при гладком отображении $\chi: V \to \mathbb{R}^n$, которое в координатах записывается так:

$$y^i = \chi^i(x^1, \ldots, x^m), \quad i = 1, \ldots, m, \; x = (x^1, \ldots, x^m) \in V \subset \mathbb{R}^m. \quad (1.3)$$

При этом имеется гладкое отображение $\chi^{-1}: \chi(V) = N \cap W \to V$. Каждый такой диффеоморфизм χ называется параметризацией N в W, пара (V, χ) — картой N, обратный диффеоморфизм χ^{-1} — системой координат на $N \cap W$, а точки $x = (x^1, \ldots, x^m)$ — координатами на $N \cap W$. Если многообразие N диффеоморфно одной области V, т.е. существует такая параметризация χ, что $\chi(V) = N$, то многообразие N называется элементарным. По определению нульмерное многообразие N состоит из изолированных точек $\mathbb{R}^n$.

Если N является m-мерным многообразием, то для каждой параметризации (1.3)

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial \chi^i}{\partial x^r} \right\|_{r=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,n} = m, \quad \forall x \in V.$$

Действительно, пусть $x_0 \in V$ и $y_0 = \chi(x_0)$. Гладкость отображения χ^{-1} означает существование для точки y_0 такой ее окрестности $U \subset \mathbb{R}^n$, что найдется гладкое отображение $\nu: U \to V$, для которого $\chi^{-1}(y) = \nu(y)$, где $y \in N \cap U$. Следовательно, $\nu(\chi(x)) = x$ в некоторой окрестности точки x_0. Поэтому

$$\left(\frac{\partial \nu^k}{\partial y^i}\right)_{y=y_0} \left(\frac{\partial \chi^i}{\partial x^r}\right)_{x=x_0} = \delta_r^k,$$

где δ_r^k — символ Кронекера. (Напомним, что по повторяющемуся индексу производится суммирование.) Так как ранг произведения не может превышать ранга каждого сомножителя, то, следовательно, в точке x_0 $\operatorname{rank} \left\| \partial \chi^i / \partial x^r \right\|_{r=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,n} = m$. Из этих же соображений следует, что $m \leqslant n$. Таким образом, каждая параметризация является иммерсией.

Рассмотрим некоторые частные случаи задания многообразий. Начнем с графика гладкого отображения. Пусть $V \subset \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^q$ — области, $f: V \to U$ — гладкое отображение. Графиком отображения f называется множество $N \subset V \times U \subset \mathbb{R}^n$, $n = m + q$, состоящее из всех точек $(x, f(x))$, $x \in V$. Покажем, что N является m-мерным элементарным многообразием. Действительно, в качестве параметризации здесь фигурирует гладкое отображение $\chi : V \to \mathbb{R}^n$, определяемое следующим образом: $\chi(x) = (x, f(x))$. Обратное отображение является гладким, ибо представляет собой проекцию N на V и может быть расширено до проекции $V \times U$ на V, которая имеет вид $(x, y) \mapsto x$, где $x \in V$, $y \in U$, и, очевидно, является гладким отображением области $V \times U$ в область V.

Как было показано ранее, каждая параметризация многообразия является иммерсией. Оказывается, что и наоборот, если задана иммерсия, то она, по крайней мере локально, является параметризацией некоторого элементарного многообразия. Точнее, справедливо

Предложение 1.1. *Пусть χ является иммерсией области $V \subset \subset \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, $m \leqslant n$. Тогда для каждой точки $x_0 \in V$ существует такая окрестность V_0, что множество $N = \chi(V_0)$ является m-мерным элементарным многообразием.*

Доказательство. Предположим, не ограничивая общности, что в точке x_0
$$\left|\frac{\partial \chi^i}{\partial x^k}\right|_{k=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,m} \neq 0.$$
Рассмотрим отображение $\overline{\chi}$: $V \to \mathbb{R}^m$, определяемое функциями
$$y^i = \chi^i(x), \quad i = 1, \ldots, m.$$
Согласно теореме об обратном отображении, $\overline{\chi}$ является диффеоморфизмом некоторой окрестности V_0 точки x_0 на $U = \overline{\chi}(V_0)$. Теперь достаточно очевидно, что множество $N = \chi(V_0) \subset \mathbb{R}^n$ является графиком отображения $U \to \mathbb{R}^{n-m}$, задаваемого функциями
$$y^j = \chi^j(\overline{\chi}^{-1}(y^1, \ldots, y^m)), \quad j = m+1, \ldots, n. \ \square$$

Теперь рассмотрим неявный способ задания многообразия. (Заметим, что задание многообразий с помощью иммерсий называется параметрическим.) Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — область и $\psi^k(y)$, $k = 1, \ldots, q$, — гладкие функции, определенные в M. Рассмотрим множество точек $N \subset M$, удовлетворяющих системе алгебраических уравнений
$$\psi^k(y) = 0, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{1.4}$$
Пусть выполняется равенство
$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial \psi^k}{\partial y^i} \right\|_{y \in N} = q. \tag{1.5}$$
Для доказательства того, что N является многообразием размерности $m = n \Leftrightarrow q$, воспользуемся еще одной фундаментальной теоремой из математического анализа, а именно теоремой о неявной функции [49], которую можно сформулировать так:

Теорема 1.2 (теорема о неявной функции). *Пусть f — гладкое отображение области $M \subset \mathbb{R}^{m+q}$ в пространство $\mathbb{R}^q$. Допустим, что $(x_0, z_0) \in M$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $z_0 \in \mathbb{R}^q$, $f(x_0, z_0) = 0$ и $\left|\partial f^k/\partial z^i\right|_{i=1,\dots,q}^{k=1,\dots,q} \neq 0$ в точке (x_0, z_0). Тогда существует окрестность $V \subset \mathbb{R}^m$ точки x_0, окрестность $U \subset \mathbb{R}^q$ точки z_0 и гладкое отображение $g\colon V \to U$, такие, что $g(x_0) = z_0$ и $f(x, g(x)) = 0$, $x \in V$.* $\square$

Применение теоремы 1.2 к множеству (1.4) заключается в следующем. Возьмем произвольную точку $y_0 \in N$ и предположим, не ограничивая общности, что в точке y_0

$$\left|\frac{\partial \psi^k}{\partial y^i}\right|_{i=m+1,\dots,n}^{k=1,\dots,q} \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявной функции для точки y_0 существует такая окрестность $W = V \times U$, где V, U — области в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^q$, что множество $N \cap W$ представимо в виде графика отображения $V \to U$, задаваемого функциями

$$y^j = \eta^j(y^1, \dots, y^m), \quad j = m+1, \dots, n. \tag{1.6}$$

Иначе говоря, отображение $\chi\colon V \to W$, где $\chi^i = y^i$, $i = 1, \dots, m$, $\chi^j = \eta^j(y^1, \dots, y^m)$, $j = m+1, \dots, n$, является параметризацией элементарного многообразия $N \cap W$.

Пример 1.1. Рассмотрим окружность радиуса $r > 0$, т.е. множество точек $N \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих равенству

$$\psi = x^2 + y^2 \Leftrightarrow r^2 = 0. \tag{1.7}$$

Из предыдущих рассуждений для множеств общего вида (1.4) следует, что окружность является одномерным многообразием. Эти рассуждения в данном конкретном случае таковы. Рассмотрим, например, произвольную точку окружности, для которой $y > 0$. Якобиева матрица от функции ψ представляет собой одну строку —

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \; \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\|.$$

В данной точке $\partial\psi/\partial y \neq 0$. Следовательно, по теореме о неявной функции уравнение (1.7) можно разрешить относительно y в некоторой окрестности $W = V \times U$ данной точки. В качестве W можно взять область $(\Leftrightarrow r, r) \times (0, \infty)$, в которой окружность является графиком отображения $(\Leftrightarrow r, r) \to (0, \infty)$, задаваемого функцией $y = \sqrt{r^2 \Leftrightarrow x^2}$. Для остальных точек окружности рассуждения аналогичны. Отметим кстати, что окружность не является элементарным многообразием.

Ближайшей целью изложения является введение понятия касательного пространства многообразия $N \subset \mathbb{R}^n$ в произвольной точке $y \in N$. Это будет линейное пространство, которое является подпространством $\mathbb{R}^n$, обозначается через TN_y и имеет размерность $m = \dim N$. Элементы TN_y называются касательными векторами к N в точке y.

Для любой области $V \subset \mathbb{R}^n$ касательное пространство TV_y определяется как все векторное пространство $\mathbb{R}^n$. Для стандартного базиса

$$e_1 = (1, 0, ..., 0),\ ...,\ e_n = (0, ..., 0, 1)$$

в $NV_y = R^n$ используется специальное обозначение —

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_y, \quad i = 1, \dots, n.$$

Это позволяет различать выражения для координат точек

$$y = (y^1, \dots, y^n) = y^i e_i$$

области $V \subset \mathbb{R}^n$ и касательных векторов

$$\xi = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_y$$

касательного пространства TV_y. Символ $|_y$ у каждого $\partial/\partial y^i$, указывающий, в каком касательном пространстве TV_y лежит данный вектор, в дальнейшем будет опускаться, ибо предполагается, что это будет ясно из контекста. Несколько странный на первый взгляд вид обозначений для стандартного базиса в TV_y можно обосновать, в частности, следующим образом. Одной из важных операций, связанных с понятием касательного вектора, является производная от гладкой функции f в точке y_0 по направлению вектора ξ. Эта производная равна числу

$$\xi f = \xi^i \left.\frac{\partial f}{\partial y^i}\right|_{y_0},$$

т.е. действию вектора ξ на f как дифференциального оператора $\xi^i \partial/\partial y^i$. (На самом деле есть более глубокие причины для записи касательного вектора как дифференциального оператора. Некоторые авторы даже определяют касательные векторы как дифференциальные операторы [51].)

Если $V \subset \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^l$ — области, $f\colon V \to U$ — гладкое отображение и $y \in M$, то определим линейное отображение касательных пространств

$f_*|_y$: $TV_y \to TU_{f(y)}$, называемое дифференциалом отображения f в точке y. Это — линейное отображение $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, определяемое матрицей Якоби

$$\left\| \frac{\partial \psi^k}{\partial y^i} \right\|_{j=1,\dots,k}^{i=1,\dots,l},$$

вычисленной в точке y.

Если $V \subset \mathbb{R}^k, U \subset \mathbb{R}^l, W \subset \mathbb{R}^s$ — области, $f: V \to U, g: U \to W$ — гладкие отображения, то

$$g_*\Big|_{f(y)} f_*\Big|_y = (gf)_*\Big|_y, \quad \forall y \in V. \tag{1.8}$$

Формула (1.8), которая часто называется цепным правилом, представляет собой простое следствие формулы для дифференцирования сложной функции.

Пусть теперь $N \subset \mathbb{R}^n$ — m-мерное многообразие. Определим касательное пространство TN_y в произвольной точке $y \in N$. Возьмем карту (V, χ), такую, что $\chi^{-1}(y) \in V$. Если рассматривать χ как отображение из V в $\mathbb{R}^n$, то будет определен дифференциал отображения $\chi_*|_x$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x \in V$. Положим TN_y равным $\chi_*|_x(\mathbb{R}^m)$. Можно доказать, что это определение не зависит от вида карты.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ и $N \subset \mathbb{R}^l$ — многообразия, $f: M \to N$ — гладкое отображение и $f(y) = x$. Определим дифференциал отображения $f_*|_y$: $TM_y \to TN_x$. Так как f — гладкое отображение, то существуют содержащая точку y область W и гладкое отображение F: $W \to \mathbb{R}^l$, совпадающее с f на $W \cap M$. Полагаем $f_*|_y(\xi) = F_*|_y(\xi)$, $\forall \xi \in TM_y$. Если f: $M \to N$ — диффеоморфизм, то $f_*|_y$ — линейный изоморфизм касательных пространств многообразий.

Перейдем к определению понятий векторного поля, распределения и аффинного распределения. Рассмотрим задание этих объектов в области евклидова пространства, а затем (кратко) — некоторые особенности задания их на многообразиях. Такой порядок изложения обусловлен локальностью результатов, приведенных в данной книге. Если в дальнейшем встречается то или иное многообразие, то, по существу, исследование будет вестись в одной карте этого многообразия.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — область. Функция ξ, ставящая в соответствие каждой точке $y \in M$ некоторый вектор $\xi(y) \in TM_y$, называется векторным полем, заданным в области M. Таким образом, векторное поле ξ задается n функциями $\xi^1(y), \dots, \xi^n(y)$, $y \in M$, называемыми компонентами поля ξ. Поле ξ называется гладким, если компоненты являются гладкими функциями. Множество всевозможных гладких полей, заданных в области M, будем обозначать через $\mathcal{T}(M)$.

Обычно в дифференциальной геометрии векторное поле ξ записывается в стандартном базисе $e_i = \partial/\partial y^i$, $i = 1, \dots, n$, в виде дифференциального оператора

$$\xi = \xi^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Таким образом, определено действие поля ξ на гладкую функцию $F(y)$. Это — гладкая функция

$$G(y) = \xi F(y) = \xi^i(y)\frac{\partial F}{\partial y^i}.$$

Векторные поля, заданные в одной области, можно складывать и умножать на гладкие функции. Эти операции определяются очевидным образом:

$$\xi + \eta = \xi^i\frac{\partial}{\partial y^i} + \eta^i\frac{\partial}{\partial y^i} = (\xi^i + \eta^i)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

$$f(y)\xi = f(y)\xi^i\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Таким образом, $\mathcal{T}(M)$ является (бесконечномерным) линейным пространством (и более того, модулем над кольцом гладких вещественных функций).

Более сложная операция на множестве $\mathcal{T}(M)$ — коммутатор $[\xi, \eta]$ двух векторных полей $\xi, \eta \in \mathcal{T}(M)$. Коммутатор имеет компоненты

$$[\xi, \eta]^i = \xi\eta^i \Leftrightarrow \eta\xi^i = \xi^j\frac{\partial \eta^i}{\partial y^j} \Leftrightarrow \eta^j\frac{\partial \xi^i}{\partial y^j}.$$

Отметим следующие свойства коммутатора:

$$[[\xi, \eta), \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = 0, \quad \text{(тождество Якоби)} \tag{1.9}$$

$$[\xi, \eta]f = \xi(\eta f) \Leftrightarrow \eta(\xi f), \tag{1.10}$$

$$[h\xi, g\eta] = h\xi(g)\eta \Leftrightarrow g\eta(h)\xi + hg[\xi, \eta], \tag{1.11}$$

где f, h, g — произвольные гладкие функции.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$ — области, $\xi \in \mathcal{T}(M)$, $\eta \in \mathcal{T}(N)$ и $f\colon M \to N$ — гладкое отображение. Говорят, что поля ξ, η f-связаны, если

$$\eta(f(y)) = f_*|_y\xi(y), \quad \forall y \in M.$$

В компонентной записи это означает следующее:

$$\eta^i(f(y)) = \frac{\partial f^i}{\partial y^k}\xi^k(y) = \xi f^i(y), \tag{1.12}$$

$$i = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Факт f-связанности записывается так: $\eta = f_* \xi$.

Пусть M, N — области, $\xi \in \mathcal{T}(M)$ и $f\colon M \to N$ — гладкое отображение. Если существует такое поле $\eta \in \mathcal{T}(N)$, что $\eta = f_*\xi$, то говорят, что поле ξ f-проектируемо.

Если f не сюръективно (т.е. $f(M) \neq N$), то, вообще говоря, поле ξ неоднозначно определяет поле η. Если ξ является f-проектируемым, то под $f_*\xi$ будем понимать некоторое поле, удовлетворяющее (1.12). Для f-проектируемости необходимо выполнение следующего условия:

$$f(y_1) = f(y_2) \Longrightarrow f_*|_{y_1}\xi(y_1) = f_*|_{y_2}\xi(y_2). \tag{1.13}$$

Это условие означает, что если точки y_1, y_2 области M переводятся отображением f в одну точку области N, то дифференциал отображения f должен переводить векторы $\xi(y_1)$, $\xi(y_2)$ в один вектор, исходящий из этой точки. Если условие (1.13) выполняется и отображение f сюръективно, то в N однозначно определено поле η, удовлетворяющее (1.12). Однако это поле может быть не гладким. Отметим один случай, когда условие (1.13) является достаточным. Это — случай сюръективной субмерсии. Прежде чем доказывать этот факт, покажем, что субмерсия переводит области в области. Иными словами, справедливо

Предложение 1.2. *Субмерсия является открытым отображением.*

Доказательство. Пусть f — субмерсия области $M \subset \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n, n \geqslant m$. Таким образом, f задается гладкими функциями

$$x^k = f^k(y^1, \ldots, y^n), \quad k = 1, \ldots, m,$$

причем в каждой точке $y \in M$

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial f^k}{\partial y^i} \right\|_{i=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,m} = m.$$

Покажем, что $N = f(M)$ является областью. Возьмем произвольную точку $x_0 \in N$ и такую точку $y_0 \in M$, что $f(y_0) = x_0$. Не ограничивая общности, считаем, что в точке y_0

$$\left| \frac{\partial f^k}{\partial y^i} \right|_{i=1,\ldots,m}^{k=1,\ldots,m} \neq 0.$$

Если дополнить набор функций $f^k, k = 1, \ldots, m$, функциями

$$z^{m+1} = f^{m+1}(y) = y^{m+1}, \ldots, z^n = f^n(y) = y^n,$$

то нетрудно убедиться, что ранг якобиевой матрицы для построенного набора из n функций будет равен n в точке y_0. Следовательно, по теореме 1.1 (об обратном отображении) эти функции задают диффеоморфизм в окрестности точки y_0. В новых координатах отображение f принимает вид проекции

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^m).$$

Будем считать очевидным, что проекция является открытым отображением. Итак, для любой точки x_0 существует область, содержащая x_0 и принадлежащая множеству N. Так как объединение любого числа областей является областью, то N — область. □

Предложение 1.3. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^n$ — области, $\xi \in \in \mathcal{T}(M)$, $f\colon M \to N$ — сюръективная субмерсия. Поле ξ является f-проектируемым тогда и только тогда, когда выполняется* (1.13).

Доказательство. Требуется доказать лишь достаточность условия (1.13). При выполнении этого условия в N однозначно определено поле η, удовлетворяющее (1.12). Покажем, что η — гладкое поле. Возьмем произвольную точку $x_0 \in N$. Из сюръективности f следует, что существует такая точка $y_0 \in M$, что $f(y_0) = x_0$. Так же, как и при доказательстве предыдущего предложения, построим диффеоморфизм $x^i = f^i, i = 1, \dots, n$, в окрестности точки y_0. Под действием этого диффеоморфизма (или, иначе говоря, в результате локальной замены координат) левые и правые части равенств (1.12), будучи гладкими функциями от y, преобразуются в гладкие функции от x. Левые части примут вид $\eta^k(x^1, \dots, x^m), k = 1, \dots, m$, т.е. будут равны компонентам поля η, которые, следовательно, являются гладкими функциями от $x^1, \dots, x^m$. □

Предложение 1.4. *Пусть M, N — области, $\xi_l \in \mathcal{T}(M)$, $l = 1, 2$, и $f\colon M \to N$ — гладкое отображение. Если поля ξ_l — f-проектируемы, то поля $a\xi_1 + b\xi_2$, где $a, b = \mathrm{const}$, и $[\xi_1, \xi_2]$ также f-проектируемы, причем*

$$f_*(a\xi_1 + b\xi_2) = af_*\xi_1 + bf_*\xi_2, \tag{1.14}$$

$$f_*[\xi_1, \xi_2] = [f_*\xi_1, f_*\xi_2]. \tag{1.15}$$

Доказательство. Равенство (1.14) доказывается элементарно. Докажем (1.15). Пусть поля $\xi_l = \xi^i(y)\partial/\partial y^i$, $l = 1, 2$, удовлетворяют условию предложения. Введем поля $\eta_l = \eta^k(x)\partial/\partial x^k$, такие, что

$\eta_l = f_*\xi_l$, $l = 1,2$. По определению дифференциала отображения и коммутатора имеем

$$(f_*|_y[\xi_1,\xi_2](y))^k = \frac{\partial f^k}{\partial y^j}\left(\xi_1^i\frac{\partial \xi_2^j}{\partial y^i} \Leftrightarrow \xi_2^i\frac{\partial \xi_1^j}{\partial y^i}\right).$$

Из равенств

$$\frac{\partial f^k}{\partial y^j}\frac{\partial \xi_l^j}{\partial y^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial f^k}{\partial y^j}\xi_l^j\right) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f^k}{\partial y^i\,\partial y^j}\xi_l^j, \quad l = 1,2,$$

учитывая, что

$$\frac{\partial^2 f^k}{\partial y^i\,\partial y^j} = \frac{\partial^2 f^k}{\partial y^j\,\partial y^i},$$

получаем

$$(f_*|_y[\xi_1,\xi_2](y))^k = \xi_1^i\frac{\partial \eta_2^k(f(y))}{\partial y^i} \Leftrightarrow \xi_2^i\frac{\partial \eta_2^k(f(y))}{\partial y^i}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(\eta_l^k(f(y))) = \frac{\partial \eta_l^k}{\partial x^s}\frac{\partial f^s}{\partial y^i}.$$

Следовательно,

$$(f_*|_y[\xi_1,\xi_2](y))^k = \eta_1^s\frac{\partial \eta_2^k}{\partial x^s} \Leftrightarrow \eta_2^s\frac{\partial \eta_1^k}{\partial x^s} = [\eta_1,\eta_2]^k(f(y)). \ \square$$

Если $f\colon M \to N$ — диффеоморфизм, то любое поле $\xi \in \mathcal{T}(M)$ f-проектируемо. Поле $\eta = f_*\xi$ называется диффеоморфным полю ξ. Как уже отмечалось, диффеоморфизм f можно трактовать как замену координат $x = f(y)$ в M. В этом случае поле η трактуется так же, как поле ξ в новой системе координат, а соотношения

$$\eta^i(f(y)) = \frac{\partial f^i}{\partial y^k}\xi^k(y) = \xi f^i(y), \tag{1.16}$$

$$i = 1,\dots,n, \quad k = 1,\dots,n,$$

представляют собой закон преобразования компонент векторного поля при замене координат. Утверждение предложения 1.4 (если f — диффеоморфизм) можно интерпретировать как инвариантность операций линейной комбинации и коммутатора относительно замены координат, т.е. компоненты линейной комбинации и коммутатора преобразуются по закону (1.16), как подобает векторному полю. Можно также сказать, что операция f_* перехода к диффеоморфному полю перестановочна с операциями линейной комбинации и коммутатора. Таким образом, если, например, коммутатор двух полей равен нулю в одной системе координат (поля коммутируют), то коммутатор этих полей будет равен нулю и в любой другой системе координат.

Пусть $\xi \in \mathcal{T}(M)$, $\eta \in \mathcal{T}(N)$, где M, N — области. Будем говорить, что поле ξ локально диффеоморфно в точке y_0 полю η, если существует такая окрестность $V \subset M$ точки y_0 и такой диффеоморфизм $f\colon V \to f(V) \subset N$, что поля ξ, η, будучи ограничены на окрестности V, $f(V)$, диффеоморфны. (Явное указание точки y_0 иногда будет опускаться.)

Оказывается, что любое поле $\xi \in \mathcal{T}(M)$, где M — область в $\mathbb{R}^n$, локально диффеоморфно в каждой неособой точке $y_0 \in M$ (т.е. такой точке, что $\xi(y_0) \neq 0$) некоторому полю, имеющему стандартный вид. Прежде чем доказывать это утверждение, введем понятие интегральной кривой поля.

Пусть $\xi \in \mathcal{T}(M)$, где M — область. Векторное поле ξ определяет систему обыкновенных дифференциальных уравнений в области M:

$$\dot{y}^i = \xi^i(y), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.17}$$

Гладкая кривая $c(t), t \in I \subset \mathbb{R}^1$, т.е. гладкое отображение интервала I в $\mathbb{R}^n$, называется интегральной кривой поля ξ, если она является решением системы (1.17): $\dot{c}^i(t) = \xi^i(c(t))$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть интегральная кривая $c(t), t \in I \subset \mathbb{R}^1$, проходит через точку $y_0 = c(t_0), t_0 \in I$. Если y_0 — особая точка векторного поля, т.е. $\xi(y_0) = 0$, то интегральная кривая является нульмерным многообразием $c(t) = y_0$. Если y_0 — неособая точка, т.е. $\xi(y_0) \neq 0$, то локально интегральная кривая является одномерным многообразием, т.е. существует такой интервал $I' \subset I$, $t_0 \in I$, что $c(I')$ — одномерное многообразие. Это следует из предложения 1.1. Действительно, якобиева матрица отображения $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ в точке t_0 представляет собой вектор $\xi(y_0)$ (записанный как вектор-столбец) и имеет ранг, равный единице. Поэтому (по непрерывности) отображение $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ на некотором интервале, содержащем t_0, является иммерсией.

Замечание 1.1. Говорить о том, что кривая $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ является многообразием, не совсем точно, ибо кривая является отображением, а многообразием (локально) является носитель кривой, т.е. множество $c(I) \subset \mathbb{R}^n$. Тем не менее удобно обращаться с кривыми и как с множествами, предполагая всякий раз, что ясно, о чем идет речь. В частности, для любого t_0 точку $y_0 = c(t_0) \subset \mathbb{R}^n$ называют точкой кривой и говорят, что кривая проходит через точку t_0 при $t = t_0$. Отметим, что носители интегральных кривых в теории дифференциальных уравнений называются фазовыми кривыми системы дифференциальных уравнений (1.17). О различных подходах к определению кривой см. [7].

Теперь докажем, что каждое гладкое векторное поле в неособой точке локально диффеоморфно стандартному постоянному полю, т.е. локальной заменой координат поле можно «выпрямить».

Теорема 1.3. *Пусть $\xi \in \mathcal{T}(M)$, где $M \subset \mathbb{R}^n$ — область, причем $\xi(y_0) \neq 0$, где $y_0 \in M$. Тогда поле ξ в точке y_0 локально диффеоморфно постоянному полю*
$$\frac{\partial}{\partial x^1} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Можно считать, что $y_0 = 0$. В противном случае этого можно добиться преобразованием координат. Предположим также, не ограничивая общности, что $\xi^1(0) \neq 0$. Искомый диффеоморфизм, «выпрямляющий» векторное поле ξ, строится из следующих наводящих соображений. Рассмотрим в M плоскость $N = \{y\colon y^1 = 0\}$, являющуюся $(n-1)$-мерным многообразием. Координатами на N являются наборы чисел $y^2, \dots, y^n$. Выпустим из точек N интегральные кривые поля ξ, проходящие через N при $t = 0$. Так как $\xi^1(0) \neq 0$, то эти кривые трансверсально пересекают N. Следовательно, наборам чисел $(t, y^2, \dots, y^n)$, определенным в некоторой окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^n$, взаимно однозначно соответствуют точки $(y^1, \dots, y^n)$ из окрестности точки $y_0 = 0 \in M$. Выпрямляющий диффеоморфизм есть переход от координат $y = (y^1, \dots, y^n)$ к координатам $x = (x^1, \dots, x^n) = (t, y^2, \dots, y^n)$. Покажем, что этот переход действительно является диффеоморфизмом. Пусть функции $H^i(t, y)$, $i = 1, \dots, n$, задают общее решение системы дифференциальных уравнений (1.17). Это означает, что для любой точки $\hat{y} \in M$ кривая $y(t) = H(t, \hat{y})$ является (частным) решением системы (1.17), причем $y(0) = H(0, \hat{y}) = \hat{y}$. Введем отображение ϑ, определенное в окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^n$ и задаваемое функциями $y^i = \vartheta^i(x^1, \dots, x^n) = H^i(x^1, 0, x^2, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, n$. Матрица Якоби этого отображения в точке $0 \in \mathbb{R}^n$ имеет вид
$$\begin{Vmatrix} \xi^1(0) & 0 & \dots & 0 \\ \xi^2(0) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^n(0) & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Так как $\xi^1(0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки $0 \in R^n$ матрица Якоби невырождена и, следовательно, по теореме 1.1 (об обратном отображении) ϑ является локальным диффеоморфизмом. Выпрямляющий диффеоморфизм есть диффеоморфизм $\psi = \vartheta^{-1}$. В координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ интегральные кривые суть прямые $t \mapsto (t + x^1, x^2, \ldots, x^n)$, которым очевидно соответствует поле $\partial/\partial x^1$. $\square$

Пусть $\xi \in \mathcal{T}(M) \subset \mathbb{R}^n$. Гладкая функция F, заданная в M, называется интегралом (или первым интегралом) поля ξ и, соответственно, системы дифференциальных уравнений (1.17), если

$$\xi F = \xi^i(y)\frac{\partial F}{\partial y^i} = 0.$$

Понятие интеграла не зависит от системы координат. Иными словами, если $f\colon M \to N$ — диффеоморфизм, задаваемый функциями $x^i = f^i(y^1, \ldots, y^n)$, $i = 1, \ldots, n$, а функция F — интеграл поля ξ в M, то функция $G(x) = F(f^{-1}(x))$ является интегралом поля $\eta = \eta^j(x)\partial/\partial x^j = f_*\xi$, т.е.

$$\eta G = \eta^j(x)\frac{\partial G}{\partial x^j} = 0.$$

Это следует из инвариантности выражения $\xi^i \partial F/\partial y^i$ относительно замены координат. Данное выражение является сверткой поля ξ и градиента

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial F}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial y^n}\right).$$

Компоненты градиента $\partial F/\partial y$ под действием диффеоморфизма f изменяются следующим образом:

$$\frac{\partial G}{\partial x^i} = \frac{F(g(x))}{\partial x^i} = \frac{\partial F}{\partial y^j}\frac{\partial g^j}{\partial x^i}, \tag{1.18}$$

где $g = f^{-1}$. Учитывая закон изменения компонент векторного поля (1.16) и равенство (1.1), получим

$$\eta^j(x)\frac{\partial G(x)}{\partial x^j}\bigg|_{x=f(y)} = \xi^j(y)\frac{\partial F(y)}{\partial y^j}, \quad y \in M. \tag{1.19}$$

Это равенство и означает инвариантность свертки векторного поля и градиента относительно замены координат. Более общо можно сказать, что свертка векторного поля и ковекторного поля в каждой точке является скаляром, ибо объекты типа градиента в дифференциальной геометрии называются ковекторными полями. Ковариантные векторные поля рассматриваются в разделе 1.4.

Информацию о «количестве» интегралов векторного поля дает следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Поле ξ, заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$, имеет в окрестности неособой точки $y_0 \in M$ $n-1$ функционально независимых интегралов*
$$\varphi^k(y), \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{1.20}$$
$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial \varphi^k}{\partial y^i} \right\| = n-1,$$
причем любой другой интеграл $\varphi(y)$ функционально выражается через них, т.е.
$$\varphi(y) = G(\varphi^1(y), \ldots, \varphi^{n-1}(y)),$$
где G — гладкая функция.

Доказательство. Стандартное поле $\partial/\partial x^1$ в $\mathbb{R}^n$ очевидно имеет $n-1$ функционально независимых интегралов, которыми являются координатные функции $x^2, \ldots, x^n$. Любой интеграл является гладкой функцией от $x^2, \ldots, x^n$. Этот факт справедлив и для поля $\partial/\partial x^1$ в любой выпуклой области $U \subset \mathbb{R}^n$ (область U называется выпуклой, если U содержит отрезок, соединяющий любые две точки, принадлежащие U). Согласно теореме 1.3, существует такая окрестность $V \subset M$ точки y_0 и такой диффеоморфизм $f\colon V \to U = f(V)$, что ограничение поля ξ на V диффеоморфно полю $\partial/\partial x^1$, заданному в U. Область U можно считать выпуклой (в противном случае ее можно сузить). Как было показано, свойство функции быть интегралом не зависит от системы координат. Свойство набора функций быть функционально независимыми также не зависит от системы координат. Действительно, матрица Якоби набора функций при изменении системы координат умножается на невырожденную матрицу, ибо строками матрицы Якоби являются градиенты функций, а градиенты меняются по закону (1.18). На этом доказательство теоремы завершено. □

Набор функций (1.20), состоящий из максимального числа функционально независимых интегралов, называется полным набором интегралов поля ξ (в точке y_0).

Замечание 1.2. Диффеоморфизм $x = \psi(y)$, который построен при доказательстве теоремы 1.3 и который приводит произвольное поле ξ к полю $\partial/\partial x^1$, можно интерпретировать теперь следующим образом. Функции $\psi^2(y), \ldots, \psi^n(y)$ составляют полный набор интегралов (в точке y_0), т.е. $\xi\psi^k = 0$, $k = 2, \ldots, n$, а функция ψ^1 удовлетворяет условию $\xi\psi^1 = 1$. Это следует из закона изменения компонент векторного поля под действием диффеоморфизма (1.16) и определения интеграла.

Интегралы φ поля ξ являются решениями линейного однородного уравнения с частными производными

$$\xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial y^i} = 0. \tag{1.21}$$

Классическая теория таких уравнений [52] показывает, что решение уравнения (1.21) можно найти интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается исключением dt из системы (1.17),

$$\frac{dy^1}{\xi^1} = \ldots = \frac{dy^n}{\xi^n}. \tag{1.22}$$

Общее решение системы (1.22) запишем в виде, разрешенном относительно постоянных интегрирования $c^k, k = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1$,

$$\varphi^k(y) = c^k, \quad k = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1. \tag{1.23}$$

Функции $\varphi^k(y), k = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1$, — искомые функционально независимые решения уравнения (1.21) и интегралы поля ξ. Заметим, что при фиксированных $c^k, k = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1$, алгебраические уравнения (1.23) задают одномерное многообразие в неявном виде. Это многообразие представляет собой фазовую кривую системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.17), т.е. образ интегральной кривой поля ξ (см. замечание 1.1). Таким образом, интегралы поля представляют собой функции, принимающие постоянные значения на интегральных кривых поля.

Пример 1.2. Рассмотрим поле

$$\xi = \Leftrightarrow y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{T}(M),$$

где $M = \mathbb{R}^2/(0,0)$. Все точки поля ξ являются неособыми, поэтому в окрестности каждой точки должен существовать один независимый интеграл. Соответствующая система дифференциальных уравнений (1.22) — это уравнение

$$\frac{dx}{\Leftrightarrow y} = \frac{dy}{x}.$$

Общее решение $x^2 + y^2 = c$, где с — произвольная константа. Итак, $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$ — независимый интеграл поля ξ, причем определенный глобально в M. Каждый интеграл ψ имеет вид $\psi(x,y) = \zeta(x^2 + y^2)$, где ζ — гладкая функция от одного (скалярного) аргумента. Заметим, что фазовые траектории поля ξ — окружности, являющиеся одномерными многообразиями (см. пример 1.1).

Пример 1.3. В теореме 1.4 предполагается, что точка y_0 является неособой. Это условие существенно. Рассмотрим поле

$$\xi = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

в $\mathbb{R}^2$. Докажем, что всякий интеграл, определенный в окрестности положения равновесия $(0,0)$, есть постоянная. Действительно, интегральные кривые имеют вид $x = At, y = Bt$ и являются лучами, исходящими из начала координат. Интеграл $\varphi(x,y)$ постоянен вдоль любого такого луча и из непрерывности φ в начале координат следует, что $\varphi \equiv \text{const}$. Этот пример интересен еще тем, что он демонстрирует также локальность существования интегралов (в отличие от примера 1.2, где полученный независимый интеграл определен глобально). Даже если выбросить особую точку $(0,0)$, любой интеграл, определенный глобально в $\mathrm{M} = \mathbb{R}^2/(0,0)$, должен быть постоянной. Локальные независимые интегралы таковы. В любой области, где $x \neq 0$, независимым интегралом является функция $\varphi^1(x,y) = y/x$, а в любой области, где $y \neq 0$, — функция $\varphi^2(x,y) = x/y$. В областях, где эти интегралы существуют, в соответствии с теоремой 1.4 один из них выражается функционально через другой: $\varphi^1 = 1/\varphi^2$.

Пусть $\xi \in \mathcal{T}(M)$, где $M \subset \mathbb{R}^n$ — область, и $N \subset M$ — m-мерное многообразие. Говорят, что векторное поле ξ касается N, если

$$\xi(y) \in TN_y, \quad \forall y \in N.$$

Предложение 1.5. *Поле $\xi \in \mathcal{T}(M)$ касается многообразия $N \subset M$ тогда и только тогда, когда для каждой параметризации $\chi\colon V \to M$ существует такое поле $\overline{\xi} \in \mathcal{T}(V)$, что $\xi = \chi_*\overline{\xi}$.*

Доказательство. Пусть поле ξ касается многообразия N и пусть $\chi\colon V \to M$ — некоторая параметризация. Дифференциал $\chi|_x$ отображения χ в каждой точке $x \in V$ является линейным изоморфизмом $TV|_x$ на $TN|_{y=\chi(x)}$. Поэтому вектору $\xi(y), y \in N$, взаимно однозначно соответствует некоторый вектор $\overline{\xi}(x), x \in V, x = \chi^{-1}(y)$. Векторы $\overline{\xi}(x), x \in V$, порождают в области V векторное поле $\overline{\xi}$. Компоненты полей $\xi, \overline{\xi}$ связаны соотношениями

$$\xi^i(\chi(x)) = \frac{\partial \chi^i}{\partial x^k}\overline{\xi}^k(x), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{1.24}$$

Это означает, что $\xi = \chi_*\overline{\xi}$. Гладкость поля $\overline{\xi}$ также следует из (1.24). Действительно, эти соотношения представляют собой совместную систему линейных алгебраических уравнений относительно компонент поля $\overline{\xi}$. Так как коэффициенты и свободные члены этой системы являются гладкими функциями от x, то и решение системы, которое единственно в силу того, что χ — иммерсия, и которое получается по правилу Крамера, также состоит из m гладких функций от x.

Пусть теперь для каждой параметризации $\chi\colon V \to M$ существует такое поле $\overline{\xi} \in \mathcal{T}(V)$, что $\xi = \chi_*\overline{\xi}$. Возьмем произвольную точку $y_0 \in N$ и покажем, что ξ касается N в точке y_0. Рассмотрим некоторую параметризацию $\chi^0\colon V^0 \to M$, такую, что $x_0 = (\chi^0)^{-1}(y_0) \in V^0$. В области V^0 имеется поле $\overline{\xi}$, такое, что $\xi = \chi_*\overline{\xi}$. Так как $\chi^0_*|_{x_0}(TV^0_{x_0}) = TN_{y_0=\chi^0(x_0)}$, то $\chi^0_*|_{x_0}(\overline{\xi}(x_0)) = \xi(\chi^0(x_0)) = \xi(y_0) \in TN_{y_0}$. □

Каждое поле $\overline{\xi}$, фугурирующее в формулировке предложения 1.5, называется индуцированным полем поля ξ (в соответствующей карте).

Рассмотрим специальный случай задания многообразия в виде (1.6) и найдем вид индуцированного поля. Многообразие N, представимое в виде (1.6), можно трактовать как график отображения $V \to U$, задаваемого функциями η^j, причем координатами на N являются точки $(y^1, \ldots, y^m)$ области V.

Предложение 1.6. *Если поле*

$$\xi = \xi^i(y^1, \ldots, y^n)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$, касается многообразия $N \subset M$, представляющего график отображения $V \to U$, задаваемого функциями (1.6), *то индуцированное поле имеет вид*

$$\overline{\xi} = \overline{\xi}^r(y^1, \ldots, y^m)\frac{\partial}{\partial y^r}, \quad r = 1, \ldots, m, \tag{1.25}$$

где $\overline{\xi}^r(y^1, ..., y^m) = \xi^r(y^1, \ldots, y^m, \eta^{m+1}(y^1, \ldots, y^m), \ldots, \eta^n(y^1, \ldots, y^m))$.

Доказательство. Параметризацией многообразия N является отображение $\chi\colon V \to V \times U$, где

$$\chi^i = y^i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\chi^j = \eta^j(y^1, \ldots, y^m), \quad j = m+1, \ldots, n.$$

Отсюда и из соотношений (1.24) (где $x^1 = y^1, \ldots, x^m = y^m$) непосредственно вытекает данное предложение. □

Предложение 1.7. *Если поля ξ, $\eta \in \mathcal{T}(M)$ касаются многообразия $N \subset M$, то поле $a\xi + b\eta$, где $a, b \in \mathbb{R}^1$, и поле $[\xi, \eta]$ также касаются многообразия N, причем в любой карте*

$$\overline{(a\xi + b\eta)} = a\overline{\xi} + b\overline{\eta}, \tag{1.26}$$

$$\overline{[\xi, \eta]} = [\overline{\xi}, \overline{\eta}]. \tag{1.27}$$

Доказательство непосредственно вытекает из предложений 1.4 и 1.5. □

Выведем условие касания полем многообразия, заданного в неявном виде.

Предложение 1.8. *Поле $\xi \in \mathcal{T}(M)$, где $M \subset \mathbb{R}^n$ — область, касается многообразия $N \subset M$, заданного в неявном виде* (1.4), *тогда и только тогда, когда*

$$\xi\psi^k(y)|_{y\in N} = \xi^i \frac{\partial \psi^k}{\partial y^i}\bigg|_{y\in N} = 0, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{1.28}$$

Доказательство. Так как выражения (1.28) инвариантны относительно замены координат, то достаточно доказать данное утверждение в некоторой системе координат. Оказывается, что для произвольной точки y_0 многообразия существует локальная система координат, в которой многообразие N представляет собой плоскость

$$x^k = 0, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{1.29}$$

Построим соответствующий «выпрямляющий» диффеоморфизм. В силу (1.5) можно предположить, не ограничивая общности, что в точке y_0

$$\left|\frac{\partial \psi^k}{\partial y^i}\right|_{i=1,\ldots,q}^{k=1,\ldots,q} \neq 0.$$

Введем отображение Ψ, задаваемое функциями $x^k = \psi^k(y), k = 1, \ldots, q$, $x^l = y^l, l = q+1, \ldots, n$. Якобиева матрица отображения Ψ имеет в точке y_0 ранг, равный n. Следовательно, по теореме 1.1 (об обратном отображении) отображение Ψ является локальным диффеоморфизмом в точке y_0. В координатах x многообразие N имеет вид (1.29). Параметризацией многообразия N в этих координатах является отображение

$$\chi\colon (x^{q+1}, \ldots, x^n) \mapsto (0, ..., 0, x^{q+1}, \ldots, x^n) \in N.$$

Дифференциал этого отображения в каждой точке $(x^{q+1}, \dots, x^n)$ представляет собой линейное отображение $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, где $m = n \Leftrightarrow q$, и определяется матрицей $n \times (n \Leftrightarrow q)$ вида

$$\begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Как следует из вида матрицы отображения, образ $\mathbb{R}^m$ при этом отображении, т.е. касательное пространство $TN_x \subset \mathbb{R}^n$, состоит из касательных векторов, характеризующихся тем, что первые q компонент равны нулю. Теперь ясно, что касательное пространство TN_x можно определить как линейное пространство векторов, свертки которых с градиентами функций $x^k, k = 1, \dots, q$, задающими многообразие N, равны нулю. Действительно, у градиента от функции x^k все компоненты равны нулю, за исключением k-й компоненты, которая равна единице. $\square$ Введем в рассмотрение семейство векторных полей $\mathfrak{b}$:

$$\xi_j = \xi_j^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad j \in J, \tag{1.30}$$

заданных в области $M \subset \mathbb{R}^n$, т.е. $\xi_j \in \mathcal{T}(M), j \in J$. Здесь J — множество произвольного вида.

Рассмотрим наряду с семейством векторных полей (1.30) семейство векторных полей

$$\eta_p = \eta_p^l(x) \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad p \in P, \tag{1.31}$$

заданных в области $N \subset \mathbb{R}^m$. Гладкое отображение $f\colon M \to N$ называется морфизмом семейства (1.30) в семейство (1.31), если $J = P$ и соответствующие поля f-связаны, т.е. $\eta_j = f_* \xi_j$. Из формулы (1.8) следует, что семейства векторных полей с такими морфизмами образуют категорию, которую обозначим через $\mathcal{VF}$. Полную подкатегорию этой категории, содержащую в качестве объектов семейства, состоящие из конечного числа полей, обозначим через $\mathcal{FVF}$.

Семейство полей $\mathfrak{b} \subset \mathcal{T}(M)$ называется инволютивным, если

$$\xi_l, \xi_k \in \mathfrak{b} \Longrightarrow [\xi_l, \xi_k] \in \mathfrak{b}.$$

Инволютивное семейство $\mathfrak{b}$ называется алгеброй Ли, если $\mathfrak{b}$ — линейное пространство, т.е.

$$a, b \in \mathbb{R}^1,\ \xi_l, \xi_k \in \mathfrak{b} \Longrightarrow a\xi_l + b\xi_k \in \mathfrak{b}.$$

Подмножество $\mathfrak{b}'$ алгебры $\mathfrak{b}$ называется подалгеброй $\mathfrak{b}$, если $\mathfrak{b}'$, рассматриваемое самостоятельно, является алгеброй Ли. Подалгебра $\mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b}$ называется идеалом $\mathfrak{b}$, если $\xi_l \in \mathfrak{b}, \xi_k \in \mathfrak{b}' \Rightarrow [\xi_l, \xi_k] \in \mathfrak{b}'$. Для каждого семейства векторных полей $\mathfrak{b}$ существует минимальная алгебра Ли, содержащая $\mathfrak{b}$, которую обозначим через $\mathfrak{b}^*$. Алгебру $\mathfrak{b}^*$ можно построить следующим образом. Рассмотрим последовательность семейств векторных полей

$$\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{b}_k \subset \ldots, \tag{1.32}$$

где $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_k$ для $k > 0$ состоит из $\mathfrak{b}_{k-1}$ и всевозможных коммутаторов полей из $\mathfrak{b}_{k-1}$. Линейная оболочка множества $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{b}_k$ будет равна $\mathfrak{b}^*$, т.е. $\mathfrak{b}^* = \operatorname{span} \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{b}_k$. Последовательность (1.32) назовем производным рядом для семейства полей $\mathfrak{b}$.

Если семейство состоит из конечного числа полей

$$\xi_a = \xi_a^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad a = 1, \ldots, p, \tag{1.33}$$

то оно называется линейно несвязанным, если

$$\operatorname{rank} \left\| \xi_a^i \right\|_{a=1,\ldots,p}^{i=1,\ldots,n} = p, \quad \forall y \in M.$$

Линейно несвязанное семейство (1.33) называется полным, если

$$[\xi_a, \xi_b] = \mu_{ab}^c(y) \xi_c, \quad a, b, c = 1, \ldots, p, \tag{1.34}$$

где μ_{ab}^c — некоторые функции. Если в (1.34) $\mu_{ab}^c = 0$, то полное семейство называется якобиевым.

Функция $\varphi(y)$ называется интегралом семейства векторных полей (1.30), заданных в области $M \subset \mathbb{R}^n$, если она является интегралом каждого поля, входящего в семейство, т.е. $\xi_j \varphi = 0, \forall j \in J$. Обобщением теоремы 1.4 является

Теорема 1.5. *Полное семейство* (1.33)*, для которого $p < n$, имеет в окрестности каждой точки $y \in M$ $m = n \Leftrightarrow p$ функционально независимых интегралов*

$$\varphi^k(y), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{1.35}$$

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial \varphi^k}{\partial y^i} \right\|_{i=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,n} = m,$$

причем для любого интеграла $\varphi(y)$ справедливо представление

$$\varphi(y) = G(\varphi^1(y), \ldots, \varphi^m(y)), \tag{1.36}$$

где G — гладкая функция.

Доказательство. Перейдем от семейства векторных полей (1.33) к семейству некоторого специального вида

$$\eta_a = \eta_a^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad a = 1, \ldots, p,$$

с помощью линейного невырожденного преобразования

$$\eta_a = \varkappa_a^b(y)\xi_b, \quad a, b = 1, \ldots, p,$$

где $|\varkappa_a^b| \neq 0$. Заметим, что линейное невырожденное преобразование сохраняет свойства линейной несвязанности и полноты (для доказательства этого факта следует использовать формулу (1.11)), а также множество интегралов. Предположим, что в окрестности некоторой произвольной точки y_0 $|\xi_b^a|_{b=1,\ldots,p}^{a=1,\ldots,p} \neq 0$ (при ином расположении базисного минора доказательство аналогично). Тогда, взяв в качестве матрицы $||\varkappa_a^b||_{a=1,\ldots,p}^{b=1,\ldots,p}$, обратную к матрице $||\xi_b^a||_{b=1,\ldots,p}^{a=1,\ldots,p}$, получим семейство следующего вида:

$$\eta_a = \frac{\partial}{\partial y^a} + \eta_a^l(y)\frac{\partial}{\partial y^l}, \quad a = 1, \ldots, p, \quad l = p+1, \ldots, n, \tag{1.37}$$

т.е. $\eta_a^b = \delta_a^b$ (символ Кронекера), $a, b = 1, \ldots, p$. Покажем, что (1.37) — якобиево семейство. Так как оно полное, то

$$[\eta_b, \eta_c] = \mu_{bc}^a(y)\eta_a = \mu_{bc}^a\frac{\partial}{\partial y^a} + \mu_{bc}^a\eta_a^l\frac{\partial}{\partial y^l},$$

где μ_{bc}^a — некоторые функции. С другой стороны, вычисляя непосредственно коммутаторы, имеем

$$[\eta_b, \eta_c] = \omega_{bc}^l\frac{\partial}{\partial y^l}, \quad l = p+1, \ldots, n.$$

Сравнивая, получим, что $\mu_{bc}^a \equiv 0$, т.е. семейство (1.37) является якобиевым. Следующий этап представляет собой переход в другую систему координат. Рассмотрим функции

$$x^i = \psi^i(y), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.38}$$

В (1.38) $x^1 = \psi^1(y) = y^1$, а $\psi^i(y), i = 2, \ldots, n,$ — функционально независимые функции, составляющие полный набор интегралов поля η_1 в точке y_0. Так как rank $||\partial\varphi^i/\partial y^j||_{j=1,\ldots,n}^{i=2,\ldots,n} = n \Leftrightarrow 1$ и

$$\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^1} = \Leftrightarrow \eta_1^l\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^l}, \quad i = 2, \ldots, n,$$

то $|\partial\varphi^i/\partial y^j|^{i=2,\dots,n}_{j=2,\dots,n} \neq 0$. Следовательно,

$$\left|\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j}\right|^{i=1,\dots,n}_{j=1,\dots,n} \neq 0$$

в точке y_0. Таким образом, функции (1.38) являются функционально независимыми и поэтому определяют локальный диффеоморфизм ψ в точке y_0. Можно считать, что $\psi^2 = y^2, \dots, \psi^p = y^p$, так как эти функции — интегралы η^1. Диффеоморфные поля $\zeta^b = \psi_*\eta^b, b = 1, \dots, p$, имеют следующий вид:

$$\zeta_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \tag{1.39}$$

$$\zeta_a = \frac{\partial}{\partial x^a} + \zeta^l_a(x)\frac{\partial}{\partial x^l}, \tag{1.40}$$

$$a = 2, \dots, p, \quad l = p+1, \dots, n.$$

Из предложения 1.4 вытекает, что свойства полноты и якобиевости при переходе к диффеоморфному семейству полей сохраняются. Имеем

$$[\zeta_1, \zeta_a] = \left(\frac{\partial\zeta^l_a}{\partial x^1}\right)\frac{\partial}{\partial x^l} = 0,$$

т.е. функции ζ^l_a не зависят от x^1. С другой стороны, из вида семейства (1.39), (1.40) следует, что его интегралы следует искать в виде $\varphi(x^2, \dots, x^n)$. Поэтому интегралы семейства (1.39), (1.40) совпадают с интегралами семейства (1.40), состоящего из $p \Leftrightarrow 1$ полей, которые зависят от $n \Leftrightarrow 1$ переменных. Продолжая этот процесс, придем к одному полю

$$Z_p = \frac{\partial}{\partial z^p} + g^l_p(z)\frac{\partial}{\partial z^l},$$

зависящему от $n \Leftrightarrow p + 1$ переменных, интегралы которого совпадают с интегралами исходного семейства (1.33) (в другой системе координат). Остается заметить, что, согласно теореме 1.4, данное поле имеет (в некоторой окрестности) $m = n \Leftrightarrow p$ функционально независимых интегралов, причем любой интеграл функционально выражается через них. $\square$

Функции (1.35), составляющие максимальный набор функционально независимых интегралов полного семейства (1.33) в окрестности точки $y_0 \in M$, называются полным набором интегралов семейства (1.33) в точке y_0.

Из доказательства теоремы 1.5 следует алгоритм нахождения полного набора инвариантов полного семейства, который сводится к нахождению интегралов некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 1.4. Рассмотрим в области $M = \{(x, y, z) : z \neq 0\}$ семейство, состоящее из полей

$$\xi_1 = z\frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow x\frac{\partial}{\partial z}, \quad \xi_2 = z\frac{\partial}{\partial y} \Leftrightarrow y\frac{\partial}{\partial z}.$$

Поля ξ_1, ξ_2 являются линейно несвязанными, так как в матрице, составленной из компонент, минор второго порядка, образованный первым и вторым столбцами, отличен от нуля. Вычисляя коммутатор

$$[\xi_1, \xi_2] = y\frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow x\frac{\partial}{\partial y} = \frac{y}{z}\xi_1 \Leftrightarrow \frac{x}{z}\xi_2,$$

приходим к выводу, что поля ξ_1, ξ_2 образуют полное семейство. Согласно теореме 1.5, это семейство имеет один функционально независимый интеграл. Найдем его, применяя алгоритм, приведенный при доказательстве теоремы 1.5. Первый шаг алгоритма заключается в переходе с помощью линейного невырожденного преобразования к якобиевому семейству, которое в данном случае состоит из полей

$$\eta_1 = \frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{x}{z}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \eta_2 = \frac{\partial}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{y}{z}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Теперь следует перейти к диффеоморфным полям (1.39), (1.40) с помощью диффеоморфизма $x' = \psi^1(x, y, z)$, $y' = \psi^2(x, y, z)$, $z' = \psi^3(x, y, z)$, где $\psi^1(x, y, z) = x$, а функции ψ^2, ψ^3 составляют полный набор интегралов поля η_1. Один интеграл получается автоматически — это функция $\psi^2 = y$. Второй интеграл легко находится (см. пример 1.2) и равен $\psi^3 = x^2 + z^2$. Сделав замену координат $x' = x$, $y' = y$, $z' = x^2 + z^2$, получим диффеоморфные поля

$$\zeta_1 = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \zeta_2 = \frac{\partial}{\partial y'} \Leftrightarrow 2y'\frac{\partial}{\partial z'}.$$

Теперь дело сводится к нахождению интеграла поля ζ_2 в области изменения переменных y', z'. Составим соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy'}{1} = \Leftrightarrow\frac{dz'}{2y'}.$$

Имеем $d\left(y'^2 + z'\right) = 0$. Следовательно, интегралом является функция $y'^2 + z'$. Возвращаясь в старую систему координат, получаем искомый интеграл $\varphi = x^2 + y^2 + z^2$ семейства векторных полей ξ_1, ξ_2.

Если для полного семейства (1.33) $p = n$, то это семейство не имеет (непостоянных) интегралов. Действительно, в этом случае из равенств

$$\xi^i_a \frac{\partial \varphi}{\partial y^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad a = 1, \ldots, n,$$

вытекают равенства $\partial\varphi/\partial y^i = 0, i = 1, \ldots, n$.

Имеет место обратное утверждение к теореме 1.5.

Предложение 1.9. *Если дано m функционально независимых функций* (1.35) *в области $M \subset \mathbb{R}^n$, то в некоторой окрестности каждой точки $y \in M$ существует полное семейство векторных полей* (1.33), *причем $p = n \Leftrightarrow m$, для которого функции* (1.35) *составляют полный набор интегралов в точке y.*

Доказательство. Рассмотрим систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$\xi^i \frac{\partial \varphi^k}{\partial y^i} = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{1.41}$$

относительно компонент векторного поля $\xi = \xi^i \partial/\partial y^i$. Для любой точки y найдется окрестность, в которой некоторый минор m-го порядка матрицы системы уравнений (1.41) отличен от нуля. Фундаментальная система решений в этой окрестности определяет линейно несвязанное семейство векторных полей (1.33), для которого функции (1.35) являются интегралами. Любое поле $\xi = \xi^i \partial/\partial y^i$, удовлетворяющее (1.41), должно линейно выражаться через поля (1.33). В частности, так как поля $[\xi_a, \xi_b]$ в силу (1.10) удовлетворяют (1.41), то справедливо (1.34). Следовательно, построенное семейство (1.33) является полным. Функции (1.35) составляют максимальный набор независимых интегралов семейства (1.33), ибо в противном случае получилось бы противоречие с теоремой 1.5. □

Установим одно свойство полного набора интегралов.

Предложение 1.10. *Пусть* (1.33) *— полное семейство векторных полей,* (1.35) *— полный набор интегралов этого семейства, а I — некоторое подмножество из p элементов множества индексов $\{1, \ldots, n\}$, $\overline{I} = \{1, \ldots, n\} \setminus I$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

$$\text{a) } |\xi^i_a|^{i \in I}_{a=1,\ldots,p} \neq 0,$$

$$\text{б) } \left| \frac{\partial \varphi^k}{\partial y^i} \right|_{i \in \overline{I}}^{k=1,\ldots,m} \neq 0.$$

Доказательство. Пусть выполняется условие а). Рассмотрим семейство полей $\eta_b, b \in I$, которое получается из исходного семейства линейным невырожденным преобразованием: $\eta_b = \mu_b^a(y)\xi_a$, $b \in I$. Здесь функции μ_b^a составляют матрицу, обратную к матрице $\|\xi_a^i\|_{a=1,\ldots,p}^{i \in I}$. Построенное семейство полей будет иметь следующий вид:

$$\eta_b = \frac{\partial}{\partial y^b} + \eta_b^c(y) \frac{\partial}{\partial y^c}, \quad b \in I, \quad c \in \overline{I}, \tag{1.42}$$

где η_b^c — некоторые функции. Ясно, что функции φ^k являются интегралами и полей η_b, т.е.

$$\frac{\partial \varphi^k}{\partial y^b} = \Leftrightarrow \eta_b^c \frac{\partial \varphi^k}{\partial y^c}.$$

Отсюда вытекает, что выполняется условие б).

Пусть теперь выполняется условие б). Рассмотрим систему линейных однородных уравнений относительно неизвестного векторного поля $\xi = \xi^i(y)\partial/\partial y^i$:

$$\xi^i \frac{\partial \varphi^k}{\partial y^i} = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Очевидно, что поля $\xi_a, a = 1, \ldots, p$, образуют фундаментальную систему решений этой системы уравнений. С другой стороны, нетрудно видеть, что существует фундаментальная система решений вида (1.42). Два семейства (1.33) и (1.42) должны быть связаны линейным невырожденным преобразованием. Отсюда вытекает справедливость условия а). □

Пусть $\mathfrak{b}$ — семейство векторных полей (1.30), заданных в области $M \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $N \subset M$ — многообразие. Пусть $\mathfrak{b}$ касается N, т.е. каждое поле (1.30) касается N. Рассмотрим некоторую карту (V, χ) многообразия N. В области V определено семейство индуцированных полей

$$\overline{\mathfrak{b}} = \left\{ \overline{\xi}_j = \overline{\xi^i}(y) \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}, \quad j \in J,$$

т.е. таких полей, что $\xi_j = \chi_* \overline{\xi}_j$, $j \in J$. Семейство $\overline{\mathfrak{b}} \subset \mathcal{T}(V)$ называется индуцированным семейством семейства $\mathfrak{b}$. Рассмотрим производные ряды для $\mathfrak{b}$ и $\overline{\mathfrak{b}}$. Из предложения 1.7 вытекает, что $\overline{(\mathfrak{b}_k)} = (\overline{\mathfrak{b}})_k, k = 0, 1, \ldots$ Отсюда следует, что

$$\overline{(\mathfrak{b}^*)} = (\overline{\mathfrak{b}})^*. \tag{1.43}$$

Алгебра Ли $\overline{\mathfrak{b}}^*$ (можно записывать без скобок в силу (1.43)), определенная в области V, называется индуцированной алгеброй, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{b}^*$.

Введем теперь понятие распределения, заданного в области $M \subset \subset \mathbb{R}^n$. Распределением D называется отображение, сопоставляющее каждой точке $y \in M$ линейное подпространство $D(y) \subset TM_y$. Под пересечением распределений $D_j, j \in J$, будем понимать распределение

$$\bigcap D_j : y \in M \to \bigcap D_j(y).$$

Под суммой распределений $D_j, j \in J$, понимается распределение

$$\sum D_j : y \in M \to \operatorname{span}\{D_j(y), j \in J\}.$$

Если в каждой точке $y \in M$ $\operatorname{span}\{D_j(y), j \in J\}$ является прямой суммой $D_j(y), j \in J$, т.е. $\sum D_j(y) = \oplus D_j(y)$, то распределение $\sum D_j$ называется прямой суммой распределений D_j и обозначается через $\oplus D_j$. Если D_1, D_2 — распределения в M, причем $D_1(y) \subset D_2(y), \forall y \in \in M$, то говорят, что D_1 принадлежит D_2, при этом используется запись $D_1 \subset D_2$.

Большую роль при изучении распределений и аффинных распределений играют связанные с ними векторные поля. Если D — распределение в $M \subset \mathbb{R}^n$ и $\xi \in \mathcal{T}(M)$, то говорят, что ξ принадлежит D, и пишут $\xi \in D$, если $\xi(x) \in D(y)$, $y \in M$. Распределение D называется инволютивным, если

$$\xi, \eta \in D \Longrightarrow [\xi, \eta] \in D.$$

Пересечение инволютивных распределений является инволютивным распределением. Поэтому для каждого распределения D существует минимальное инволютивное распределение, содержащее D.

Семейство векторных полей $\mathfrak{b} \subset \mathcal{T}(M)$, состоящее из полей (1.30), порождает распределение $y \in M \mapsto \operatorname{span}\{\xi_j(y), j \in J\}$, которое обозначается через $\Delta_{\mathfrak{b}}$.

Пусть D — распределение в области $M \subset \mathbb{R}^n$. Говорят, что D — гладкое распределение, если существует семейство полей $\mathfrak{b} \subset \mathcal{T}(M)$, порождающее D, т.е. $D = \Delta_{\mathfrak{b}}$. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются гладкие распределения. Величина $\dim D(y)$ называется рангом распределения D в точке $y \in M$. Точка y называется регулярной распределения D, если существует такая окрестность этой точки, в которой ранг D постоянен. Точка, не являющаяся регулярной, называется особой.

Предложение 1.11. *Множество регулярных точек распределения D, заданного в области M, является открытым и всюду плотным подмножеством области M.*

Доказательство. а) Покажем, что регулярные точки существуют. Возьмем произвольную область $K \subset M$. Пусть в точке $y_0 \in K$ достигается максимальный в K ранг распределения D, причем $\dim D(y_0) = p$. Если $p = 0$, то y_0, очевидно, является регулярной точкой. Пусть $p > 0$. Тогда имеем p полей

$$\xi_a = \xi_a^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

принадлежащих D, причем в точке y_0 ранг матрицы

$$\left\|\xi_a^i(y)\right\|_{a=1,\dots,p}^{i=1,\dots,n}$$

равен p. По непрерывности ранг этой матрицы равен p и в некоторой окрестности точки $N \subset K$ точки y_0. Следовательно, в окрестности N ранг распределения D постоянен и равен p, т.е. y_0 — регулярная точка распределения D.

б) Покажем, что множество регулярных точек всюду плотно в области M. Пусть y_1 — особая точка. Предположим, что существует такая окрестность K точки y_1, в которой нет регулярных точек. Рассмотрим точку $y_0 \in K$, в которой достигается максимальный в области K ранг распределения D. Так же, как и в пункте а) данного доказательства, показывается, что y_0 — регулярная точка. Следовательно, подобной окрестности K не существует.

в) Покажем, что множество регулярных точек открыто в M. Пусть y_0— регулярная точка. Тогда в некоторой окрестности $N \subset M$ ранг распределения D постоянен. Очевидно, что N состоит из регулярных точек. $\square$

Распределение D, заданное в $M \subset \mathbb{R}^n$, называется регулярным распределением ранга p, если $\dim D(y) = p = \mathrm{const}$, $\forall y \in M$. В этом случае будем писать просто $\dim D = p$.

Предложение 1.12. *Распределение D, которое задано в области $M \subset \mathbb{R}^n$, является регулярным распределением ранга $p > 0$ тогда и только тогда, когда для любой точки $y_0 \in M$ найдется такая окрестность U и такое линейно несвязанное семейство векторных полей*

$$\eta_a = \eta_a^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad a = 1, \dots, p, \tag{1.44}$$

заданных в U, что $D(y) = \mathrm{span}\,\{\eta_a(y),\ a = 1, \dots, p\}$, $\forall y \in U$.

Доказательство. Пусть D — регулярное распределение ранга $p > 0$, y_0 — произвольная точка M. Тогда, если D порождается семейством полей (1.30), то в качестве (1.44) можно взять любое его подсемейство $\eta_a = \xi_{j_a}$, $a = 1, \ldots, p$, для которого $\operatorname{rank} \|\xi^i_{j_a}(y_0)\| = p$. (Точнее, следует взять ограничение этого подсемейства на окрестность, в которой ранг указанной матрицы равен p.) Обратно, пусть D порождается локально заданными линейно несвязанными семействами вида (1.44). Ясно, что $\dim D(y) = p$, $\forall y \in M$. Требуется доказать, что D порождается некоторым семейством гладких векторных полей, определенных глобально в M. Легко убедиться в том, что, используя подходящие функции Урысона (определение см. в замечании 1.3), каждому семейству (1.44), определенному в окрестности U точки y_0, можно поставить в соответствие семейство гладких полей $\tilde{\eta}_a, a = 1, \ldots, p$, которые заданы в M, принадлежат D и совпадают с полями (1.44) в некоторой окрестности W точки y_0. Объединение таких глобально определенных семейств порождает D. Следовательно, D — гладкое распределение. $\square$

Замечание 1.3. Пусть W, U, M являются областями в $\mathbb{R}^n$, причем $\overline{W} \subset U \subset M$. Тогда существует такая гладкая функция $\rho\colon M \to \mathbb{R}^1$, что выполняются следующие свойства: а) $0 \leqslant \rho(y) \leqslant 1, \forall y \in M$; б) $\rho(y) = 1$ тогда и только тогда, когда $y \in \overline{W}$; в) если $y \in M \setminus U$, то $\rho(y) = 0$. Функция ρ называется функцией Урысона пары (U, W) [7].

Семейства полей вида (1.44), удовлетворяющие условиям предложения 1.12, будем называть базисными семействами распределения D. Если $\xi \in D$ — гладкое поле, (1.44) — базисное семейство D, заданное в окрестности U, то $\xi = g^a(y)\eta_a$, где $g^a(y)$ — однозначно определенные гладкие функции в U. (Гладкость функций $g^a(y)$ следует из того, что эти функции составляют единственное решение системы линейных алгебраических уравнений с гладкими коэффициентами.) Базисные семейства определены, естественно, неоднозначно. Два базисных семейства, заданных в одной окрестности, связаны друг с другом линейным невырожденным преобразованием с коэффициентами, являющимися гладкими функциями. Если одно базисное семейство полное, то и любое другое базисное семейство, определенное в той же окрестности, также является полным.

Предложение 1.13. *Регулярное распределение ранга $p > 0$ является инволютивным тогда и только тогда, когда каждое его базисное семейство является полным.*

Доказательство. Пусть регулярное инволютивное распределение D ранга $p > 0$ задано в области $M \subset \mathbb{R}^n$ и пусть (1.44) — базисное семейство, определенное в окрестности $U \subset M$. Возьмем произвольную точку $y_0 \in U$ и покажем, что $[\eta_a, \eta_b](y_0) \in D(y_0)$, $a, b = 1, \ldots, p$, откуда и будет следовать полнота семейства (1.44). Так же, как и при доказательстве предложения 1.12, построим поля $\tilde{\eta}_a$, $a = 1, \ldots, p$, определенные в M и совпадающие с η_a в некоторой окрестности $W \subset U$ точки y_0. Из инволютивности D вытекает, что $[\eta_a, \eta_b](y) = [\tilde{\eta}_a, \tilde{\eta}_b](y) \in \in D(y), \forall y \in W$. Пусть теперь наоборот все базисные семейства распределения D являются полными. Возьмем два поля $\zeta_1, \zeta_2 \in D$, определенные в M, и покажем, что $[\zeta_1, \zeta_2](y_0) \in D(y_0)$ для произвольной точки y_0. Рассмотрим некоторое базисное семейство (1.44) распределения D в окрестности U точки y_0. Имеем в окрестности U представления $\zeta_k = \mu_k^a(y)\eta^a$, $k = 1, 2$, где μ_k^a — гладкие функции. Следовательно,

$$[\zeta_1, \zeta_2] = [\mu_1^a \eta_a, \mu_2^b \eta_b] = \mu_1^a \mu_2^b [\eta_a, \eta_b] + \mu_1^a \eta_a(\mu_2^b)\eta_b \Leftrightarrow \mu_2^b \eta_b(\mu_1^a)\eta_a = \nu^c(y)\nu_c,$$

где ν^c — гладкие функции. Поэтому $[\zeta_1, \zeta_2](y) \in D(y)$, $\forall y \in U$. $\square$

Предложение 1.14. *Если регулярное распределение D порождается инволютивным семейством полей* (1.30), *то D — инволютивное распределение.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $y_0 \in M$. Как уже отмечалось (при доказательстве предложения 1.12), существует семейство полей (1.44), являющееся базисным в окрестности U точки y_0, причем поля (1.44) можно выбрать из семейства (1.30). Из инволютивности семейства (1.30) вытекает, что

$$[\eta_a, \eta_b](y) \in D(y), \quad a, b = 1, \ldots, p, \quad y \in U.$$

Поэтому семейство (1.44) является полным семейством в U. Следовательно, все базисные семейства являются полными. Из предложения 1.13 вытекает инволютивность распределения D. $\square$

Характеристическим распределением $\mathbf{C}D$ распределения D будем называть распределение, порождаемое такими гладкими векторными полями $\xi \in D$, что $[\xi, \eta] \in D$, $\forall \eta \in D$.

Сопоставим теперь распределению D последовательность распределений, которую будем называть производным рядом для распределения D,

$$D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_k \subset \ldots, \tag{1.45}$$

где $D_0 = D$, а $D_k, k > 0$, порождается полями вида $[\xi_1, \xi_2]$, где поля ξ_l принадлежат D_{k-1}. Распределение $y \in M \mapsto \operatorname{span}\{D_k(y), k = 0, 1, \ldots\}$ обозначим через D^*.

Пусть y_0 — регулярная точка $D_k, k = 1, 2, \ldots$ В этом случае будем говорить, что y_0 — регулярная точка производного ряда (1.45). Существует минимальное число N, такое, что $D_N(y_0) = D_{N+1}(y_0)$. Следовательно, $D_N = D_{N+1} = \ldots = D^*$ в некоторой окрестности точки y_0. Конечную последовательность регулярных распределений (определенных в окрестности y_0)

$$D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_N \tag{1.46}$$

назовем производным флагом D. Число $N + 1$ называется длиной производного флага. Заметим, что семейство полей, порождающее D^*, является инволютивным. Из предложения 1.14 вытекает, что D_N является инволютивным распределением (в окрестности y_0), причем D_N $(= D^*)$ — минимальное инволютивное распределение, содержащее D (в окрестности y_0).

Замечание 1.4. Для того чтобы построить базисное семейство распределения D^* в окрестности регулярной точки $D_k, k = 0, 1, \ldots$, нужно рассмотреть последовательность базисных семейств распределений, составляющих производный флаг (1.46):

$$\mathfrak{d}_0 \subset \mathfrak{d}_1 \subset \ \ldots \subset \mathfrak{d}_N \tag{1.47}$$

Здесь $\mathfrak{d}_k$ — базисное семейство распределения D_k. Последовательность (1.47) строится таким образом: если $\mathfrak{d}_k$ построено, то $\mathfrak{d}_{k+1}$ получается добавлением к $\mathfrak{d}_k$ тех коммутаторов полей из $\mathfrak{d}_k$, которые не выражаются линейно (с переменными коэффициентами) через поля из $\mathfrak{d}_k$. Для некоторого $N \leqslant n \Leftrightarrow 1$ все коммутаторы полей из $\mathfrak{d}_N$ линейно выражаются через поля семейства $\mathfrak{d}_N$. Очевидно, что $\mathfrak{d}_N$ является базисным семейством распределения $D^* = D_N$. Итак, базисное семейство распределения D^*(при условии знания базисного семейства распределения D) находится за конечное число алгебраических операций вычисления некоторых определителей и дифференцирований. Указанный алгоритм называется процессом пополнения.

Пусть распределение D порождается семейством полей $\mathfrak{b}$, или, иначе говоря, $D = \Delta_{\mathfrak{b}}$. Построим производный ряд (1.32) для семейства $\mathfrak{b}$. Если распределение $\Delta_{\mathfrak{b}^*}$ регулярно, где $\mathfrak{b}^*$ — минимальная алгебра Ли, содержащая $\mathfrak{b}$, то, согласно предложению 1.14, это распределение инволютивно, причем ясно, что $\Delta_{\mathfrak{b}^*}$ — минимальное инволютивное распределение, содержащее D. В данном случае $\Delta_{\mathfrak{b}^*} = D^*$.

Если точка y_0 является регулярной точкой для распределений $\Delta_{\mathfrak{b}_k}$, $k = 0, 1, \ldots$, то в некоторой окрестности точки y_0 справедливы равенства $\Delta_{\mathfrak{b}_k} = D_k, k = 0, 1, \ldots$, где D_k — распределения из производного ряда (1.45). Таким образом, y_0 — регулярная точка производного ряда (1.45). Действительно, семейства векторных полей $\mathfrak{d}_k$ из последовательности (1.47), где $\mathfrak{d}_0 \subset \mathfrak{b}$ — базисное семейство распределения $\Delta_{\mathfrak{b}}$, являются базисными как для распределений $\Delta_{\mathfrak{b}_k}$, так и для распределений D_k. Обратное утверждение тоже справедливо: если y_0 — регулярная точка производного ряда (1.45) и $\mathfrak{b}$ — некоторое семейство векторных полей, порождающее D, то y_0 — регулярная точка распределений $\Delta_{\mathfrak{b}_k}, k = 0, 1, \ldots$ Это следует из того, что в окрестности регулярной точки произвольного распределения любые два базисных семейства выражаются друг через друга линейно с гладкими коэффициентами. Итак, в некоторой окрестности регулярной точки производного ряда

$$D_N = D^* = \Delta_{\mathfrak{b}_N} = \Delta_{\mathfrak{b}^*}.$$

Если существуют нерегулярные точки производного ряда (1.45), то можно утверждать лишь, что $\Delta_{\mathfrak{b}_k} \subset D_k, k = 0, 1, \ldots$

Отметим, что для настоящей книги, в которой преобладает локальный подход, характерно рассмотрение в окрестности точки, являющейся регулярной в том или ином смысле, в частности, регулярной для соответствующего производного ряда.

Гладкая функция называется интегралом распределения, если она является интегралом семейства векторных полей, которое порождает распределение. Регулярное инволютивное распределение ранга $p < n$, заданное в открытом множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, имеет в окрестности каждой точки $y \in M$ $m = n \Leftrightarrow p$ функционально независимых интегралов, ибо в данном случае базисные семейства являются полными. Вопрос о существовании интегралов произвольного распределения D решается следующим образом. Заметим, что в силу формулы

$$[\xi, \eta]\varphi = \xi(\eta\varphi) \Leftrightarrow \eta(\xi\varphi),$$

где ξ, η — векторные поля, φ — функция, интегралы D и D^* совпадают. Отсюда, а также из теоремы 1.5 и предложения 1.13 вытекает

Теорема 1.6. *Пусть D — распределение, которое задано в области $M \subset \mathbb{R}^n$, и пусть D^* — регулярное распределение ранга p. Тогда, если $p < n$, то D имеет в окрестности каждой точки $m = n \Leftrightarrow p$ фукционально независимых интегралов* (1.35)*, причем для любого интеграла φ справедливо представление* (1.36)*. Если $p = n$, то D не имеет интегралов, отличных от постоянных функций.*

Естественно, аналогичное утверждение формулируется и для семейства векторных полей $\mathfrak{b} \subset \mathcal{T}(M)$: если $(\Delta_{\mathfrak{b}})^*$ — регулярное распределение ранга p и $p < n$, то $\mathfrak{b}$ имеет в окрестности каждой точки $m = n \Leftrightarrow p$

фукционально независимых интегралов (1.35), причем для любого интеграла φ справедливо представление (1.36). Если $p = n$, то $\mathfrak{b}$ не имеет интегралов, отличных от постоянных функций.

Максимальный набор функционально независимых интегралов распределения (семейства векторных полей), которые определены в окрестности точки y_0, называется полным набором интегралов распределения (семейства векторных полей) в точке y_0.

Для нахождения полного набора интегралов распределения D достаточно найти базисное семейство распределения D^* с помощью процесса пополнения (см. замечание 1.4) и определить полный набор интегралов этого семейства (что, согласно доказательству теоремы 1.5, сводится к решению некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений).

С понятием распределения связаны два важных типа многообразий. Это многообразия, которых касаются распределения, и интегральные многообразия распределений. Дадим их определения.

Пусть D — распределение, заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $N \subset M$ — многообразие. Говорят, что распределение D касается N, если $D(y) \subset TN_y, \forall y \in N$. Очевидно, что D касается N тогда и только тогда, когда поля (1.30), порождающие D, касаются N, т.е.

$$\xi_j(y) \in TN_y, \quad \forall y \in N, \quad j \in J.$$

Пусть D — распределение, порождаемое в области $M \subset \mathbb{R}^n$ семейством полей $\mathfrak{b}$, состоящим из полей (1.30). Пусть в области M задано многообразие N, которого касается D. Рассмотрим некоторую карту (V, χ) многообразия N. В области V определено распределение $\overline{D}\colon x \in V \mapsto \overline{D}(x) = \chi_*^{-1}(D(\chi^{-1}(x)))$, которое называется индуцированным распределением распределения D. Тогда, очевидно, что $\overline{D}$ является гладким распределением и порождается семейством индуцированных полей

$$\overline{\mathfrak{b}} = \left\{ \overline{\xi}_j = \xi^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}, \quad j \in J,$$

т.е. таких полей, что $\xi_j = \chi_* \overline{\xi}_j$, $j \in J$.

Если распределение D касается многообразия N, то, как следует из предложения 1.7, распределения D_k, $k = 0, 1, \ldots$, составляющие производный ряд (1.45), также касаются N. Следовательно, и распределение D^* касается N. Из равенств (1.26), (1.27) вытекает, что для каждой карты (V, χ) $\overline{(D^*)} = (\overline{D})^*$, поэтому данное индуцированное распределение, определенное в V, можно обозначать без скобок — $\overline{D}^*$. Так как $\chi_*|_x$ в каждой точке $x \in V$ является линейным изоморфизмом, то

$$\dim D(\chi(x)) = \dim \overline{D}(x), \quad \forall x \in V, \tag{1.48}$$

$$\dim D^*(\chi(x)) = \dim \overline{D}^*(x), \quad \forall x \in V. \tag{1.49}$$

Если распределение D порождается семейством полей $\mathfrak{b}$, то, учитывая (1.43), получим

$$\dim \Delta_{\mathfrak{b}^*}(\chi(x)) = \dim \Delta_{\overline{\mathfrak{b}}^*}(x), \quad \forall x \in V. \tag{1.50}$$

Напомним, что $D^* = \Delta_{\mathfrak{b}^*}$ в случае регулярности распределения $\Delta_{\mathfrak{b}^*}$.

Из (1.49) следует, что размерность многообразия, которое проходит через точку y_0 и которого касается распределение D, не может быть меньше, чем $\dim D^*(y_0)$. (Учитывая формулу (1.50), можно сделать следующее уточнение: размерность многообразия, которое проходит через точку y_0 и которого касается распределение D, не может быть меньше, чем $\dim \Delta_{\mathfrak{b}^*}(y_0)$, где $\mathfrak{b}$ — произвольное семейство полей, порождающее D.) Если y_0 — регулярная точка D^*, то через эту точку проходит многообразие, которого касается распределение D и которое имеет размерность, равную рангу D^* в точке y_0. Действительно, если $\dim D^*(y_0) = p < n$, то, согласно теореме 1.6, имеется $m = n \Leftrightarrow p$ функционально независимых интегралов (1.35), определяющих в окрестности y_0 семейство p-мерных многообразий вида

$$\varphi^k(y) = c^k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{1.51}$$

где $c^k = \mathrm{const}$. (Очевидно, что через точку y_0 проходит многообразие из семейства (1.51), соответствующее $c^k = \varphi^k(y_0)$.) Из предложения 1.8 и определения интеграла следует, что D касается каждого многообразия семейства 1.51. Если составить равенства

$$G^l(\varphi^1(x), \ldots, \varphi^m(x)) = 0, \quad l = 1, \ldots, q, \tag{1.52}$$

где G^l — функционально независимые функции, то очевидно, что они определяют некоторое многообразие размерности $n \Leftrightarrow q$, которого касается D. Оказывается, что многообразиями такого вида исчерпываются все многообразия, которых касается D и которые определены в окрестности регулярной точки распределения D^*. Точнее, справедливо следующее утверждение, принадлежащее по существу Л.В.Овсянникову [13].

Теорема 1.7. *Пусть* $\dim D^*(y_0) = p < n$, *где* D — *распределение, заданное в области* $M \subset \mathbb{R}^n$, y_0 — *регулярная точка распределения* D^*. *Тогда любое многообразие размерности* $n \Leftrightarrow q$, $p \leqslant n \Leftrightarrow q < n$, *которого касается распределение* D *и которое проходит через точку* y_0, *можно (локально) задать в виде* (1.52), *где функции* $\varphi^k, k = 1, \ldots, m = n \Leftrightarrow p$, *составляют полный набор интегралов распределения* D *в точке* y_0, *а* G^l — *функционально независимые функции.*

Доказательство. Пусть N — многообразие размерности $n \Leftrightarrow q$, которое проходит через точку y_0 и которого касается D. Предположим, не ограничивая общности, что в точке y_0

$$\left| \frac{\partial \varphi^k}{\partial y^i} \right|_{i=1,\ldots,m}^{k=1,\ldots,m} \neq 0.$$

Функции $x^k = \varphi^k, 1, \ldots, m$, $x^i = y^i, i = m+1, \ldots, n$, согласно теореме 1.1, определяют замену координат в окрестности точки y_0. Многообразие N в новых координатах примет некоторый вид

$$F^l(x) = 0, \quad l = 1, \ldots, q.$$

Рассмотрим произвольное базисное семейство полей

$$\eta_a = \eta_a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a = 1, \ldots, p,$$

распределения D^*. Так как функции $x^1, \ldots, x^m$ являются интегралами полей η_a, то $\eta_a^i = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Из условия касания полями η_a многообразия N (см. предложение 1.8) имеем в точках N равенства

$\eta_a^s \partial F^l/\partial y^s = 0$, $s = m+1, \ldots, n$. Так как $|\eta_a^s| \neq 0$, то $\partial F^l/\partial y^s|_{y\in N} = 0$. Поэтому на N

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial F^l}{\partial y^i} \right\|_{i=1,\ldots,m}^{l=1,\ldots,q} = q.$$

Отсюда следует, что $q \leqslant m$ и что многообразие N (локально) можно представить в разрешенном виде относительно некоторых q переменных из $(x^1, \ldots, x^m)$:

$$x^i = \theta^i(x^{q+1}, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, q, \tag{1.53}$$

где переменные $(x^{q+1}, \ldots, x^n)$ принимают значения в некоторой области евклидова пространства $\mathbb{R}^{n-q}$. Условие касания полями η_a многообразия (1.53) дает равенства $\partial\theta^i/\partial x^r = 0$, $r = m+1, \ldots, n$, в этой области. Следовательно, функции θ^i не зависят от $x^{m+1}, \ldots, x^n$. Возвращаясь к старым переменным в (1.53), получим соотношения вида (1.52). $\square$

Интегральные многообразия распределения D — это многообразия N, для которых

$$TN_y \subset D(y), \quad \forall y \in N.$$

Любое гладкое распределение (за исключением тривиального $y \mapsto \{0\} \subset TM_y$) имеет одномерные интегральные многообразия. Действительно, через неособую точку каждого поля, принадлежащего D, проходит интегральная кривая, которая (локально) является одномерным инвариантным многообразием поля и одновременно, очевидно, интегральным многообразием распределения D. Интегральные многообразия большей размерности существуют не всегда. Вопрос об их существовании составляет так называемую проблему Пфаффа, которая обычно формулируется в терминах систем Пфаффа (которые рассматриваются в следующем разделе). Как показал Э.Картан, существование интегральных многообразий (для аналитических распределений, т.е. распределений, порождаемых аналитическими векторными полями) может быть установлено с помощью выполнения алгебраических операций, а нахождение их осуществляется решением некоторых дифференциальных уравнений [10, 37].

Распределение D называется вполне интегрируемым, если через каждую точку $y \in M$ проходит интегральное многообразие максимальной размерности, равной $\dim D(y)$. Справедлива

Теорема 1.8 (Фробениуса). *Регулярное распределение вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда оно инволютивно.*

Доказательство. Пусть регулярное распределение D является инволютивным и, следовательно, $D = D^*$. Тогда, как отмечалось, через каждую точку области M, в которой задано распределение D, проходит многообразие из семейства (1.51), которого касается распределение D. Размерность такого многообразия равна $\dim D = \dim D^*$, т.е. оно является интегральным многообразием. Пусть теперь, наоборот, распределение D является вполне интегрируемым. Для доказательства инволютивности D нужно показать, что для двух произвольных полей $\zeta_1, \zeta_2 \in D$ и произвольной точки $y_0 \in M$ выполняется свойство — $[\zeta_1.\zeta_2](y_0) \in D(y_0)$. Через точку y_0 проходит интегральное многообразие размерности, равной $\dim D$. Таким образом, $D(y) = TN_y, \forall y \in N$. Следовательно, поля ζ_1, ζ_2 касаются N. Отсюда вытекает, что коммутатор $[\zeta_1.\zeta_2]$ также касается N, т.е. $[\zeta_1.\zeta_2](y) \in D(y), \forall y \in N$. $\square$

Из предложения 1.13 следует, что теорему Фробениуса в терминах базисных семейств можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1.9. *Регулярное распределение тогда и только тогда является вполне интегрируемым, когда каждое его базисное семейство векторных полей является полным.*

Перейдем к рассмотрению обобщения понятия распределения, а именно к рассмотрению понятия аффинного распределения.

Прежде чем определить понятие аффинного распределения, напомним некоторые факты из линейной алгебры. Пусть P — линейное пространство. Множество векторов $A \subset P$ называется аффинным подпространством P, если $l_1, l_2 \in A \Rightarrow al_1 + b_2 \in A$, где $a, b \in \mathbb{R}^1$, причем $a + b = 1$. Множество векторов $l \in P$ вида $l = l_1 \Leftrightarrow l_2$, где $l_i \in A$, образуют линейное пространство, которое называется направляющим подпространством аффинного подпространства A и обозначается через $\mathbf{L}_A$. Легко видеть, что $A = l_0 + \mathbf{L}_A = \{l_0 + l : l \in \mathbf{L}_A\}$, где l_0 — произвольный вектор, принадлежащий A. Величина $\dim \mathbf{L}_A$ называется размерностью A и обозначается также через $\dim A$. Если K — произвольное множество векторов из P, то существует наименьшее аффинное подпространство A, содержащее K. Аффинное подпространство A является аффинной оболочкой K, т.е. состоит из всевозможных барицентрических комбинаций вида $\lambda^i l_i$, где $l_i \in K, \lambda^i \in \mathbb{R}^1, \sum \lambda^i = 1$. Будем обозначать A через $\operatorname{affspan} K$.

Введем теперь понятие аффинного распределения, заданного в области $M \subset \mathbb{R}^n$. Аффинным распределением F называется отображение, ставящее в соответствие каждой точке $y \in M$ аффинное подпространство $F(y) \subset TM_y$. Распределение, ставящее в соответствие каждой точке $y \in M$ направляющее пространство $\mathbf{L}_{F(y)}$ аффинного подпространства $F(y)$, называется направляющим распределением аффинного распределения F и обозначается через $\mathbf{L}_F$. Распределение $y \to \operatorname{span} F(y)$ будем обозначать через $\operatorname{Span} F$.

Пусть $F_j, j \in J$, — аффинные распределения в области $M \subset \mathbb{R}^n$. Если $\bigcap F_j(y) \neq \emptyset$, $\forall y \in M$, то определено аффинное распределение $y \in M \to \bigcap F_j(y) \subset TM_y$, которое будем называть пересечением аффинных распределений $F_j, j \in J$.

Если F — аффинное распределение в M и ξ — такое векторное поле в M, что $\xi(y) \in F(y), \forall y \in M$, то будем говорить, что поле ξ принадлежит F, и писать $\xi \in F$. Аффинное распределение F будем называть инволютивным, если

$$\xi_1, \xi_2 \in F \Longrightarrow [\xi_1, \xi_2] \in \mathbf{L}_F.$$

Очевидно, что если F является распределением, то данное определение инволютивности совпадает с приведенным ранее. Для каждого аффинного распределения F существует минимальное инволютивное аффинное распределение, содержащее F. Это аффинное распределение является пересечением всех инволютивных аффинных распределений, содержащих F.

Аффинное распределение F будем называть гладким, если существует семейство гладких векторных полей (1.30), аффинно порождающее F, т.е. $F(y) = \operatorname{affspan}\{\xi_j(y), j \in J\}, y \in M$. Аффинное распределение F является гладким тогда и только тогда, когда направляющее распределение $\mathbf{L}_F$ является гладким и существует гладкое векторное поле $\eta \in F$. Действительно, если F — гладкое аффинное распределение, то распределение $\mathbf{L}_F$ порождается гладкими векторными полями вида $\xi \Leftrightarrow \zeta$, где $\xi, \zeta \in F$. Обратно, если $\mathbf{L}_F$ — гладкое распределение и существует гладкое векторное поле $\eta \in F$, то очевидно, что F аффинно порождается векторными полями вида $\eta + \xi$, где $\xi \in \mathbf{L}_F$. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются только гладкие аффинные распределения.

Предложение 1.15. *Пусть F — аффинное распределение. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *F — инволютивное аффинное распределение;*

б) *$\eta \in F, \xi \in \mathbf{L}_F \Longrightarrow [\eta, \xi] \in \mathbf{L}_F$;*

в) *$\mathbf{L}_F$ — инволютивное распределение и для некоторого $\eta_0 \in F$*

$$\xi \in \mathbf{L}_F \Longrightarrow [\eta_0, \xi] \in \mathbf{L}_F.$$

Доказательство. а)$\Longrightarrow$б). Пусть $\eta \in F, \xi \in \mathbf{L}_F$. Тогда $\eta + \xi \in F$. Имеем $[\eta, \eta + \xi] = [\eta, \xi] \in \mathbf{L}_F$.

б)$\Longrightarrow$а). Пусть $\eta_1, \eta_2 \in F$. Тогда $\eta_2 \ominus \eta_1 \in \mathbf{L}_F$. Имеем $[\eta_1, \eta_2 \ominus \eta_1] = [\eta_1, \eta_2] \in \mathbf{L}_F$.

б)$\Longrightarrow$в). Пусть $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{L}_F$. Тогда $\xi_1 + \eta, \xi_2 + \eta \in F$ для любого $\eta \in F$. Согласно б) и а), имеем $[\xi_1 + \eta, \xi_2 + \eta] = [\xi_1, \xi_2] + [\xi_1, \eta] + [\eta, \xi_2] \in \mathbf{L}_F$. Следовательно, $[\xi_1, \xi_2] \in \mathbf{L}_F$.

в)$\Longrightarrow$б). Пусть $\eta \in F, \xi \in \mathbf{L}_F$. Имеем $[\eta \ominus \eta_0, \xi] = [\eta, \xi] \ominus [\eta_0, \xi] \in \mathbf{L}_F$. Так как $[\eta_0, \xi] \in \mathbf{L}_F$, то $[\eta, \xi] \in \mathbf{L}_F$. $\square$

Пусть аффинное распределение F задано в $M \subset \mathbb{R}^n$. Величина $\dim F(y)$ называется рангом F в точке $y \in M$. Аффинное рапределение F называется регулярным ранга р, если $\dim F(y) = p = \mathrm{const}\,, \forall y \in M$, или, иначе говоря, если направляющее распределение $\mathbf{L}_F$ является регулярным ранга p. В этом случае будем писать просто $\dim F = p$. Если р=0, то регулярное аффинное распределение F является векторным полем.

Пусть F — аффинное распределение на $M \subset \mathbb{R}^n$. Точка $y_0 \in M$ называется регулярной точкой F, если существует такая окрестность U этой точки, что $\dim F(y) = \mathrm{const}\,, y \in U$. Иначе говоря, аффинное распределение $F|_U$, являющееся ограничением F на U, регулярно в U. Из предложения 1.11 следует, что множество регулярных точек F является открытым и всюду плотным в M.

Предложение 1.16. *Аффинное распределение F, заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$, является регулярным ранга $p > 0$ тогда и только тогда, когда для любой точки $y_0 \in M$ существует такая ее окрестность $U \subset M$ и такое семейство полей в U:*

$$\eta_a = \eta_a^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad a = 0, \ldots, p, \tag{1.54}$$

что подсемейство $\eta_a, a = 1, \ldots, p$, семейства (1.54) является линейно несвязанным и

$$F(y) = \eta_0(y) + \mathrm{span}\,\{\eta_a(y), a = 1, \ldots, p\}, \quad \forall y \in U. \tag{1.55}$$

Доказательство. Пусть F — регулярное аффинное распределение ранга p, y_0 — произвольная точка M и $\eta_a, a = 1, \ldots, p,$ — базисное семейство полей $\mathbf{L}_F$, заданное в окрестности U точки y_0 . Добавим к нему гладкое векторное поле η_0, которое является ограничением на U некоторого гладкого поля, принадлежащего F. Для полученного семейства (1.54) выполняется (1.55). Обратно, пусть для каждой точки y_0 существует семейство (1.54), удовлетворяющее (1.55). Согласно предложению 1.12, $\mathbf{L}_F$ — регулярное распределение ранга p. Для доказательства гладкости F нужно построить гладкое поле ξ, определенное (глобально) в M и принадлежащее F. Имеем открытое покрытие области M окрестностями $U_i, i \in I$, в каждой из которых определено гладкое поле $(\eta_0)_i$, принадлежащее F (в U). Возьмем локально конечное семейство гладких функций $\lambda^i(y), i \in I$, представляющее собой разбиение единицы, подчиненное данному открытому покрытию (определение см. в замечании 1.5). Гладкое поле $\xi = \lambda^i(y)(\eta_0)_i$ определено в M и принадлежит F. □

Замечание 1.5. Семейство $\lambda^i, i \in I$, гладких неотрицательных функций $\lambda^i\colon M \to \mathbb{R}^1$ называется локально конечным, если для любой точки области M существует ее окрестность, в которой только конечное число функций λ^i отлично от нуля. Локально конечное семейство функций называется разбиением единицы, если $\sum_{i\in I} \lambda^i = 1$ (в силу локальной конечности эта сумма имеет смысл). Разбиение единицы называется подчиненным покрытию $U_i, i \in I$, если $\lambda^i = 0$ вне U_i для всех $i \in I$ [7].

Каждое семейство векторных полей вида (1.54), удовлетворяющее (1.55), будем называть базисным семейством регулярного аффинного распределения F.

Семейство векторных полей (1.54), в котором подсемейство полей $\eta_a, a = 1, \ldots, p$, является линейно несвязанным, называется аффинно полным, если

$$[\eta_a, \eta_b] = \mu^c_{ab}(y)\eta_c, \quad a, b = 0, \ldots, p, \quad 1, \ldots, p. \tag{1.56}$$

Предложение 1.17. *Регулярное аффинное распределение ранга $p >$ > 0 является инволютивным тогда и только тогда, когда каждое его базисное семейство является аффинно полным.*

Доказательство. Пусть регулярное инволютивное аффинное распределение F ранга $p > 0$ задано в области $M \subset \mathbb{R}^n$ и пусть семейство (1.54) является базисным семейством, определенным в окрестности U. Возьмем произвольную точку $y_0 \in U$. Из предложения 1.15 следует, что $\mathbf{L}_F$ — инволютивное распределение. Подсемейство $\eta_a, a =$ $= 1, \ldots, p$, семейства (1.54) является базисным смейством распределения $\mathbf{L}_F$. Согласно предложению 1.13, это подсемейство является полным. Возьмем произвольную точку $y_0 \in U$ и покажем, что

$$[\eta_0, \eta_b](y_0) \in \mathbf{L}_F(y_0),$$

откуда и будет следовать аффинная полнота семейства (1.54). Так же, как и при доказательстве предложения 1.12, построим векторные поля $\tilde\eta^a, a = 1, \ldots, p$, определенные в M и совпадающие с $\eta^a, 1, \ldots, p$, в некоторой окрестности $W \subset U$ точки y_0. Из предложения 1.15 вытекает, что $[\zeta, \tilde{\eta}_a] \in \mathbf{L}_F$ для некоторого $\zeta \in F$. Поэтому $[\zeta, \eta_a] \in \mathbf{L}_F$ в окрестности W. С другой стороны, в W имеем

$$\zeta = \eta_0 + \lambda^a(y)\eta_a, \quad a = 1, \ldots, p.$$

Следовательно, в W

$$[\eta_0, \eta_b](y) = [\zeta \Leftrightarrow \lambda^a \eta_a, \eta_b] = [\zeta, \eta_b] \Leftrightarrow \lambda^a [\eta_a, \eta_b] + \eta_b(\lambda^a)\eta_a,$$

т.е. $[\eta_0, \eta_b](y_0) \in \mathbf{L}_F(y), \forall y \in W$. Пусть теперь, наоборот, все базисные поля аффинного распределения являются аффинно полными. Возьмем два поля $\xi_1, \xi_2 \in F$, определенные в M, и покажем, что $[\xi_1, \xi_2] \in$ $\in \mathbf{L}_F$. Рассмотрим некоторое базисное семейство (1.54), определенное в окрестности U точки y_0. Имеем в окрестности U представления $\xi_k = \eta_0 + \lambda_k^a(y)\eta_a$, где $\lambda_k^a(y)$ — гладкие функции. Следовательно, $[\xi_1, \xi_2] = [\eta_0 + \lambda_k^a(y)\eta_a, \eta_0 + \lambda_k^b(y)\eta_b]$. Используя аффинную полноту семейства (1.54), получаем, что

$$[\xi_1, \xi_2] = \nu^c(y)\eta_c, \quad c = 1, \ldots, p,$$

где ν^c — гладкие функции. Поэтому $[\xi_1, \xi_2](y) \in \mathbf{L}_F(y), \forall y \in U$. □

Предложение 1.18. *Пусть F — регулярное аффинное распределение, причем $\mathbf{L}_F$ порождается инволютивным семейством полей (1.30), $[\eta_0, \xi_j] \in \mathbf{L}_F$ для любого $j \in J$ и для некоторого поля $\eta_0 \in F$. Тогда F является инволютивным аффинным распределением.*

Доказательство. Из предложения 1.14 следует, что $\mathbf{L}_F$ является инволютивным распределением. Теперь, согласно предложению 1.15, достаточно доказать, что $[\eta_0, \xi] \in \mathbf{L}_F$ для произвольного поля $\xi \in \mathbf{L}_F$. Возьмем произвольную точку $y_0 \in M$. В семействе (1.30) существует подсемейство полей $\eta_a = \xi_{j_a}$, которое является базисным семейством $\mathbf{L}_F$ в окрестности U точки y_0. В U для любого поля $\xi \in \mathbf{L}_F$ справедливо представление $\xi = \lambda^a(y)\eta_a$, где λ^a — гладкие функции. Имеем в U

$$[\xi, \eta_0] = [\lambda^a \eta_a, \eta_0] = \lambda^a [\eta_a, \eta_0] \Leftrightarrow \eta_0(\lambda^a)\eta_a.$$

Так как $\eta_a \in \mathbf{L}_F, [\eta_a, \eta_0] \in \mathbf{L}_F$, то и $[\xi, \eta_0] \in \mathbf{L}_F$ в U. □

Пусть F — аффинное распределение, заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$. Наряду с распределениями $\mathbf{L}_F$ и $\operatorname{Span} F$ введем в рассмотрение еще ряд распределений и аффинных распределений, связанных с F.

Характеристическим распределением $\mathbf{C}F$ аффинного распределения F будем называть распределение, порождаемое такими векторными полями $\xi \in \mathbf{L}_F$, что

$$[\xi, \eta] \in \mathbf{L}_F, \quad \forall \eta \in F. \tag{1.57}$$

Если F является распределением, то данное определение характеристического распределения совпадает с приведенным ранее.

Эквивалентное определение $\mathbf{C}F$ заключается в следующем: $\mathbf{C}F$ порождается такими полями $\xi \in \mathbf{L}_F$, что

$$[\xi, \eta_0] \in \mathbf{L}_F \tag{1.58}$$

для некоторого фиксированного поля $\eta_0 \in \mathbf{L}_F$ и

$$[\xi, \zeta] \in \mathbf{L}_F, \quad \forall \zeta \in \mathbf{L}_F. \tag{1.59}$$

Действительно, пусть векторное поле $\xi \in \mathbf{L}_F$ удовлетворяет (1.57) и пусть $\zeta \in \mathbf{L}_F$. Тогда $\zeta = \eta_1 \Leftrightarrow \eta_2$, где η_l — некоторые поля, принадлежащие F. Имеем $[\xi, \zeta] = [\xi, \eta_1 \Leftrightarrow \eta_2] = [\xi, \eta_1] \Leftrightarrow [\xi, \eta_2]$. Следовательно, $[\xi, \zeta] \in \mathbf{L}_F$. Наоборот, пусть поле $\xi \in \mathbf{L}_F$ удовлетворяет (1.58), (1.59) и пусть $\eta \in F$. Тогда $\eta = \eta_0 + \zeta$, где ζ — некоторое поле, принадлежащее $\mathbf{L}_F$. Имеем $[\xi, \eta] = [\xi, \eta_0 + \zeta] = [\xi, \eta_0] + [\xi, \zeta]$. Следовательно, $[\xi, \eta] \in \mathbf{L}_F$.

Заметим, что из второго определения $\mathbf{C}F$ следует, что $\mathbf{C}F \subset \mathbf{C}\mathbf{L}_F$.

Предложение 1.19. *Регулярное характеристическое распределение $\mathbf{C}F$ аффинного распределения F является инволютивным распределением.*

Доказательство. Согласно предложению 1.14, достаточно доказать, что множество полей $\xi \in \mathbf{L}_F$, удовлетворяющих условию (1.57), является инволютивным. Пусть поля $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{L}_F$ удовлетворяют (1.57), т.е. $[\xi_l, \eta]$, $\forall \eta \in F$. Имеем, согласно тождеству Якоби,

$$[[\xi_1, \xi_2], \eta] = [[\xi_1, \eta], \xi_2] \Leftrightarrow [[\xi_2, \eta], \xi_1].$$

Так как $\mathbf{C}F \subset C\mathbf{L}_F$, то отсюда следует, что $[[\xi_1, \xi_2], \eta] \in \mathbf{L}_F$. $\square$

Сопоставим теперь аффинному распределению F последовательность аффинных распределений, которую будем называть производным рядом для аффинного распределения F,

$$F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_k \subset \ldots, \tag{1.60}$$

где $F_0 = F$, а F_k, $k > 0$, аффинно порождается полями вида $\xi_1 + [\xi_2, \xi_3]$, где поля ξ_l принадлежат F_{k-1}. Аффинное распределение

$$y \in M \mapsto \operatorname{affspan}\{F_k(y), k = 0, 1, \ldots\}$$

обозначим через F^*.

Последовательности аффинных распределений (1.60) соответствует последовательность направляющих распределений

$$\mathbf{L}_{F_0} \subset \mathbf{L}_{F_1} \subset \ldots \subset \mathbf{L}_{F_k} \subset \ldots \tag{1.61}$$

Распределение $\mathbf{L}_{F_k}, k > 1$, порождается полями вида $[\xi_1, \xi_2]$, где $\xi_l \in F_{k-1}$. Эквивалентным образом $\mathbf{L}_{F_k}, k > 1$, можно определить как распределение, порождаемое семейством векторных полей $\mathfrak{s}_k$, состоящим из полей вида $[\xi_1, \xi_2], [\xi_3, \eta_0]$, где $\xi_l \in \mathbf{L}_{F_{k-1}}$, η_0 — некоторое поле, принадлежащее F. Семейство полей $\mathfrak{s} = \cup \mathfrak{s}_k$ порождает распределение $\mathbf{L}_{F^*}$.

Пусть y_0 — регулярная точка $F_k, k = 1, 2, \ldots$ В этом случае будем говорить, что y_0 — регулярная точка производного ряда (1.60). Существует минимальное число N и некоторая окрестность точки y_0, в которой $F_N = F_{N+1} = \ldots = F^*$. Конечную последовательность регулярных аффинных распределений (определенных в окрестности y_0)

$$F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_N \tag{1.62}$$

назовем производным флагом F. Число $N + 1$ называется длиной производного флага. Заметим, что семейство полей $\mathfrak{s}$, порождающее $\mathbf{L}_{F^*}$, является инволютивным, причем $[\xi, \eta_0] \in \mathbf{L}_{F^*}$ для любого поля $\xi \in \mathfrak{s}$ и некоторого поля $\eta_0 \in F \in F^*$. Из предложения 1.18 вытекает, что $F_N = F^*$ является инволютивным аффинным распределением (в окрестности y_0), причем $F_N = F^*$ — минимальное инволютивное аффинное распределение, содержащее F (в окрестности y_0). Заметим, что если F является распределением, то указанный алгоритм сводится к алгоритму нахождения минимального инволютивного распределения, содержащего F.

Если для распределения $\mathbf{L}_{F_0}$ построить производный ряд

$$(\mathbf{L}_{F_0})_0 \subset (\mathbf{L}_{F_0})_1 \subset \ldots \subset (\mathbf{L}_{F_0})_k \subset \ldots, \tag{1.63}$$

то очевидно, что $(\mathbf{L}_{F_0})_k \subset \mathbf{L}_{F_k}$. Если для распределения $\operatorname{Span} F$ построить производный ряд

$$(\operatorname{Span} F)_0 \subset (\operatorname{Span} F)_1 \subset \ldots \subset (\operatorname{Span} F)_k \subset \ldots, \tag{1.64}$$

то очевидно, что $(\operatorname{Span} F)_k = \operatorname{Span} F_k$.

Замечание 1.6. Для того чтобы построить базисное семейство аффинного распределения F в окрестности регулярной точки аффинных распределений F_k, $k = 0, 1, \ldots$, возьмем произвольное поле $\eta_0 \in F$ и рассмотрим последовательность базисных семейств распределений $\mathbf{L}_{F_k}$

$$\mathfrak{d}_0 \subset \mathfrak{d}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{d}_N, \tag{1.65}$$

где $\mathfrak{d}_k$ — базисное семейство распределения $\mathbf{L}_{F_k}$. Последовательность (1.65) строится таким образом: если $\mathfrak{d}_k$ построено, то $\mathfrak{d}_{k+1}$ получается добавлением коммутаторов вида $[\xi, \zeta], [\eta, \eta_0]$, где $\xi, \zeta, \eta \in \mathfrak{d}_k$, которые не выражаются линейно (с переменными коэффициентами) через поля из $\mathfrak{d}_k$. Для некоторого $N \leqslant n \Leftrightarrow 1$ все коммутаторы такого вида для $\mathfrak{d}_N$ будут линейно выражаться через поля семейства $\mathfrak{d}_N$. Очевидно, что $\mathfrak{d}_N$ вместе с η_0 является базисным семейством аффинного распределения $F^* = F_N$. Итак, базисное семейство аффинного распределения F^* (при условии знания базисного семейства распределения $\mathbf{L}_F$, поля $\eta_0 \in F$ и регулярности F_k, $k = 0, 1, \ldots$) находится за конечное число элементарных алгебраических операций и дифференцирований. Указанный алгоритм будем называть процессом пополнения. (Если F — распределение, то можно положить $\eta_0 = 0$ и данный алгоритм по существу совпадает с процессом пополнения, описанным в замечании 1.4.)

Рассмотрим одну полезную в теоретическом плане конструкцию, согласно которой каждому аффинному распределению F ставится в соответствие некоторое распределение $\tilde{F}$, заданное в области большей размерности, причем определенным свойствам F как аффинного распределения соответствуют свойства $\tilde{F}$ как распределения. Расширенной областью, соответствующей области $M \subset \mathbb{R}^n$, будем называть область $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}^1$. Дополнительная координата для точек в $\tilde{M}$ всегда будет обозначаться одной буквой t. При преобразованиях расширенных областей координата t не меняется. Отображение $\tilde{f}\colon M \times \mathbb{R}^1 \to N \times \mathbb{R}^1$ назовем t-отображением, соответствующим отображению $f\colon M \to N$, если $\tilde{f}\colon (y, t) \mapsto (f(y), t), \forall y \in M, t \in \mathbb{R}^1$. В случае, когда f — диффеоморфизм, отображение $\tilde{f}$ называется t-диффеоморфизмом. Для векторного поля $\xi \in \mathcal{T}(M)$ через $\tilde{\xi}, \hat{\xi}$ обозначаются векторные поля $\tilde{\xi} = (\xi, 1), \hat{\xi} = (\xi, 0) \in \mathcal{T}(M \times \mathbb{R}^1)$.

Пусть аффинное распределение F аффинно порождается в области M семейством векторных полей (1.30), т.е.

$$F(y) = \operatorname{affspan}\{\xi_j(y), j \in J\}, \quad \forall y \in M.$$

По определению распределение $\tilde{F}$ порождается в расширенной области $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}^1$ семейством векторных полей

$$\tilde{\xi}_j = \xi_j + \frac{\partial}{\partial t} = \xi_j^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i} + \frac{\partial}{\partial t} \in \mathcal{T}(M \times \mathbb{R}^1), \quad j \in J,$$

т.е.
$$\tilde{F}(y,t) = \operatorname{span}\{\tilde{\xi}_j(y,t), j \in J\}, \quad \forall (y,t) \in \tilde{M} = M \times \mathbb{R}^1.$$
Если фиксировать некоторое поле $\eta_0 = \xi_{j_0}$ из семейства (1.30), то поля $\eta_j = \xi_j \Leftrightarrow \xi_{j_0}$ порождают направляющее распределение $\mathbf{L}_F$. Ясно, что семейство полей $\tilde{\eta}_0, \hat{\eta}_j, j \in J$, также порождает распределение $\tilde{F}$.

Пусть F является регулярным аффинным распределением ранга p в области $M \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $\tilde{F}$ является регулярным распределением ранга $p+1$ в области $M \times \mathbb{R}^1$. Каждому базисному семейству полей (1.54) аффинного распределения F, определенному в окрестности $U \subset M$, соответствует базисное семейство $\tilde{\eta}_0, \hat{\eta}_a, a = 1,\ldots,p$, распределения $\tilde{F}$, определенное в окрестности $U \times \mathbb{R}^1$. Семейство полей (1.54) является аффинно полным тогда и только тогда, когда семейство $\tilde{\eta}_0, \hat{\eta}_a, a = 1,\ldots,p$, является полным. Действительно, рассмотрим условие полноты семейства $\tilde{\eta}_0, \hat{\eta}_a, a = 1,\ldots,p$:
$$[\tilde{\eta}_0, \hat{\eta}_a] = \lambda^0_{0a}\tilde{\eta}_0 + \lambda^c_{0a}\hat{\eta}_c, \quad a,c = 1,\ldots,p,$$
$$[\hat{\eta}_b, \hat{\eta}_a] = \lambda^0_{ba}\tilde{\eta}_0 + \lambda^c_{ba}\hat{\eta}_c, \quad a,b,c = 1,\ldots,p.$$
Так как $(n+1)$-я компонента полей $[\tilde{\eta}_0, \hat{\eta}_a], \hat{\eta}_a, a = 1,\ldots,p$, равна нулю, то $\lambda^0_{ba} = 0, a = 1,\ldots,p, b = 0,1,\ldots,p$. Следовательно, выписанные соотношения и соотношения (1.56) эквивалентны. Таким образом, с учетом предложений 1.13 и 1.17 доказано

Предложение 1.20. *Аффинное распределение F регулярно тогда и только тогда, когда распределение $\tilde{F}$ регулярно. Регулярное аффинное распределение F инволютивно тогда и только тогда, когда распределение $\tilde{F}$ инволютивно.* $\square$

Если регулярное аффинное распределение F не является инволютивным и для него построен производный флаг (1.62), то последовательность распределений
$$\widetilde{(F_0)} \subset \widetilde{(F_1)} \subset \ldots \subset \widetilde{(F_N)} \tag{1.66}$$
представляет собой производный флаг для распределения $\tilde{F}$. (Этот факт можно записать так : $(\tilde{F})_k = \widetilde{(F_k)}$.) Распределение $\widetilde{(F_N)}$ является минимальным инволютивным распределением, содержащим распределение $\tilde{F}$. Процесс пополнения, приводящий к построению базисного семейства распределения $\widetilde{(F_N)}$, по существу совпадает с процессом пополнения, который описан в замечании 1.6 и приводит к построению базисного семейства аффинного распределения F_N, являющегося минимальным инволютивным аффинным распределением, содержа-

щим F. Действительно, нужно взять семейство $\mathfrak{d}_N$ из последовательности (1.65) и добавить к нему поле $\tilde{\eta}_0$.

Гладкая функция называется интегралом аффинного распределения F, если она является интегралом семейства векторных полей, которое аффинно порождает F. Интегралы F и распределения $\operatorname{Span} F$ совпадают, поэтому вопрос о существовании интегралов у F можно исследовать с помощью теоремы 1.6 в терминах распределения $(\operatorname{Span} F)^*$.

Говорят, что аффинное распределение F, которое задано в области $M \subset \mathbb{R}^n$, касается многообразия $N \subset M$, если $F(y) \subset TN_y, \forall y \in N$. Очевидно, что F касается многообразия N тогда и только тогда, когда распределение $\operatorname{Span} F$ касается N. Пусть F касается N и $(V, \varkappa)$ является картой N. Так же, как и в случае распределения, в области V определено индуцированное аффинное распределение $\overline{F}$, т.е. такое аффинное распределение, что $F(\varkappa(x)) = \varkappa_*|_x \overline{F}(x), \forall x \in V$. Если F порождается векторными полями $\xi_j \in \mathcal{T}(M)$, то $\overline{F}$ порождается индуцированными векторными полями $\overline{\xi}_j \mathcal{T}(V)$.

Многообразие $N \subset M$ называется интегральным многообразием аффинного распределения F, заданного в M, если $TN_y \subset F(y), \forall y \in N$. Ясно, что интегральные многообразия аффинного распределения F совпадают с интегральными многообразиями распределения $\mathbf{L}_F$, проходящими через точки M, в которых $F(y) = \mathbf{L}_F(y)$.

Пусть F, A — аффинные распределения, заданные в областях $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$, а $f\colon M \to N$ — гладкое отображение. Будем говорить, что f — морфизм F в A, и писать $A = f_* F$, если $f_*|_y F(y) \subset \subset A(f(y)), \forall y \in M$, где $f_*|_y$ — дифференциал отображения f в точке y, т.е. линейное отображение касательных векторов, определяемое матрицей Якоби $\left\| \partial f^k / \partial y^i \right\|$, вычисленной в точке y. Заметим, что если F, A — векторные поля и $A = f_* F$, то это равносильно известному понятию f-связанности полей.

Легко доказывается

Предложение 1.21. *Гладкое отображение $f\colon M \to N$ тогда и только тогда является морфизмом аффинного распределения F в аффинное распределение A, когда выполняются следующие условия*:

а)$f_*|_y\, \eta_0(y) \in A(f(y))$ *для некоторого поля* $\eta_0 \in F$, $\forall y \in M$;

б)$f_*|_y\, \mathbf{L}_F(y) \subset \mathbf{L}_A(f(y))$, $\forall y \in M$ (*т.е.* f — *морфизм* $\mathbf{L}_F$ *в* $\mathbf{L}_A$).

Если $A = f_* F$, где f — диффеоморфизм M на N, то аффинные распределения F и A называются диффеоморфными (относительно диффеоморфизма f). Используя предложение 1.4, легко получить следующий факт: если F и A — диффеоморфны, то будут диффеоморфными и соответствующие аффинные распределения и распределения, составляющие последовательности вида (1.60), (1.61), (1.62), (1.63), (1.64), а также характеристические распределения, т.е. $A_k = f_* F_k, \mathbf{L}_{A_k} = f_* \mathbf{L}_{F_k}$, $\mathbf{C}A_k = f_*(\mathbf{C}F_k)$ и т.д.

Всевозможные аффинные распределения, не обязательно являющиеся гладкими, с введенными морфизмами образуют категорию, которую обозначим через $\mathcal{AD}$. Это вытекает из того, что суперпозиция морфизмов является морфизмом. Последнее утверждение есть простое следствие формулы (1.8). Тождественными морфизмами в этой категории являются тождественные отображения, а изоморфизмами — диффеоморфизмы. Через $\mathcal{D}$ обозначим полную подкатегорию категории $\mathcal{AD}$, объектами которой являются распределения (также не обязательно гладкие). Введем также категорию регулярных аффинных распределений $\mathcal{RAD}$ и категорию регулярных распределений $\mathcal{RD}$, которые также являются полными подкатегориями категории $\mathcal{AD}$.

Векторные поля, распределения и аффинные распределения можно задавать не только в областях евклидовых пространств, но и на многообразиях. Например, если $N \subset \mathbb{R}^n$ — многообразие, то аффинным распределением F на N называется отображение, которое каждой точке $y \in N$ ставит в соответствие аффинное подпространство $F(y)$ касательного пространства многообразия TN_y.

Гладкость дифференциально-геометрических объектов на многообразиях основывается на понятии гладкого отображения, заданного на произвольном подмножестве евклидова пространства. Определение этого понятия дано в начале этого раздела. Таким образом, векторное поле $\xi = (\xi^1(y), \ldots, \xi^n(y))$, которое задано на N (т.е. представляет собой отображение $y \in N \mapsto TN_y$), является гладким, если компоненты поля $\xi^i(y)$ являются гладкими функциями на N в смысле данного определения.

С помощью введенного ранее понятия дифференциала отображения многообразий определяются морфизмы (и, в частности, диффеоморфизмы) аффинных распределений, заданных на многообразиях. Это делается так же, как и для аффинных распределений, заданных в областях евклидова пространства.

Обобщим понятия индуцированного расределения и индуцированного аффинного распределения, которые были ранее введены. Соответствующие определения дадим для аффинных распределений. Пусть $N \subset \mathbb{R}^n$ — m-мерное многообразие, а (V, χ) — некоторая его карта. Напомним, это означает, что пересечение N с некоторой областью W в $\mathbb{R}^n$ диффеоморфно области V в $\mathbb{R}^m$ относительно диффеоморфизма $\chi\colon V \to N \cap W$. Дифференциал отображения $\chi_*|_x$ для любой точки $x \in V$ является линейным изоморфизмом $TV_x (= \mathbb{R}^m)$ на TN_y, где $y = \chi(x)$. Поэтому если на N задано аффинное распределение F, то в V однозначно определено аффинное распределение $\overline{F} = \chi_*^{-1} F$, т.е.

$\overline{F}(x) = \chi_*^{-1}|_{\chi(x)} F(\chi(x))$, причем $\dim \overline{F}(x) = \dim F(\chi(x))$. Аффинное распределение $\overline{F}$ называется индуцированным для F (в карте (V, χ)). Пусть F аффинно порождается семейством гладких полей $\xi_j, j \in J$. Тогда в области V однозначно определены такие гладкие поля $\overline{\xi}_j, j \in J$, что $\xi = \chi_* \overline{\xi}$. Очевидно, что $\overline{F}$ аффинно порождается семейством полей $\overline{\xi}_j, j \in J$, которые называются индуцированными для $\xi_j, j \in J$.

Пусть теперь F — аффинное распределение, заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$, а $N \subset M$ — многообразие. Рассмотрим ограничение F на N, т.е. отображение $F|_N: y \in N \mapsto F(y) \cap TN_y$. Если F — распределение, то $F|_N$ является распределением на многообразии N. Пусть $\chi: V \to N$ — параметризация N. Тогда в открытом множестве V однозначно определено распределение $\overline{F}$, диффеоморфное распределению F, т.е. $\overline{F} = \chi_*^{-1} F|_N$. Если F не является распределением, то множества $F(y) \cap TN_y$ могут быть пустыми. Например, для аффинного распределения F, которое представляет собой векторное поле $\partial/\partial x \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$, и многообразия $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ имеем $F(y) \cap TN_{(x,y)} = \emptyset, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Если $F(y) \cap TN_y \neq \emptyset, \forall y \in N$, то $F|_N$ является аффинным распределением на N. В этом случае в V однозначно определено аффинное распределение $\overline{F}$, диффеоморфное аффинному распределению F, т.е. $\overline{F} = \chi_*^{-1} F|_N$. Аффинное распределение $\overline{F}$ будем называть индуцированным аффинным распределением аффинного распределения F. Иначе говоря, индуцированным аффинным распределением аффинного распределения F является индуцированное аффинное распределение аффинного распределения $F|_N$, т.е. $\overline{F} = \overline{F|_N}$.

Если F является гладким аффинным распределением, то $F|_N$ и $\overline{F}$ не обязательно будут таковыми (даже если они существуют). В том случае, когда F касается N, а также в случае, когда N является интегральным многообразием аффинного распределения F, аффинные распределения $F|_N$ и $\overline{F}$ будут гладкими, при условии гладкости F. Рассмотрим эти два случая.

Если аффинное распределеие F, порождаемое полями (1.30), касается многообразия N, то данное определение индуцированного аффинного распределения $\overline{F}$ совпадает с данным ранее определением. В этом случае $F|_N$ является гладким аффинным распределением, порождаемым гладкими полями $\xi|_N, j \in J$, которые представляют собой ограничения полей (1.30) на N. Индуцированные поля для полей $\xi|_N, j \in J$, совпадают с индуцированными полями для полей (1.30) и являются гладкими.

Пусть теперь m-мерное многообразие $N \subset M \subset \mathbb{R}^n$ является интегральным многообразием аффинного распределения F. В данном случае $F|_N$ — это касательное расслоение TN многообразия N, которое является регулярным распределением ранга m: $y \in N \mapsto TN_y$. Для доказательства регулярности TN можно воспользоваться предложением 1.12, которое, как легко убедиться, справедливо и для распределений, заданных на многообразиях. Построение линейно несвязанных семейств, локально порождающих TN, осуществляется следующим образом. Для произвольной точки $y_0 \in N$ нужно взять какую-нибудь карту (V, χ), для которой $y_0 \in \chi(V)$. Затем следует взять любые линейно несвязанные поля $\eta_a, a = 1, \ldots, m$, определенные в V (например, поля $\eta_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\eta_m = (0, 0, \ldots, 1)$). Очевидно, что поля $\chi_* \eta_a$, $a = 1, \ldots, m$, локально порождают TN.

1.4. Дифференциальные формы и кораспределения

Пусть M — область в $\mathbb{R}^n$. Как известно, каждой точке $y \in M$ сопоставляется касательное пространство касательных векторов TM_y, которое является экземпляром $\mathbb{R}^n$. Введем в рассмотрение внешние формы на TM_y. По определению внешними формами степени 0 или 0-формами являются вещественные числа. Внешние формы степени 1 (1-формы или ковекторы) — это линейные функционалы на TM_y. Напомним, что отображение $\omega\colon TM_y \to \mathbb{R}^1$ называется линейным функционалом, если

$$\omega(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) = \lambda_1 \omega(\xi_1) + \lambda_2(\xi_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^1, \quad \xi_1, \xi_2 \in TM_y.$$

Множество всех 1-форм превращается в линейное пространство, если определить сумму форм формулой

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi) = \omega_1(\xi) + \omega_2(\xi),$$

а умножение на число — формулой

$$(\lambda\omega)(\xi) = \lambda\omega(\xi).$$

Линейное пространство 1-форм на TM_y называется кокасательным пространством M в точке y и обозначается через T^*M_y.

Пусть $b^1, \ldots, b^n$ — произвольный базис касательного пространства TM_y.

Предложение 1.22. *Значение $\omega(\xi)$ произвольной 1-формы ω на векторе $\xi = \xi^i b_i \in TM_y$ выражается формулой*

$$\omega(\xi) = \omega_i \xi^i, \tag{1.67}$$

где

$$\omega_i = \omega(b_i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.68}$$

Для любых чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}^1$ *формула* (1.67) *однозначно задает некоторую* 1*-форму* $\omega \in T^*M_y$*, для которой выполняется* (1.68).

Доказательство. Формула (1.67) непосредственно вытекает из свойства линейности

$$\omega(\xi) = \omega(\xi^i b_i) = \xi^i \omega(b_i) = \omega_i \xi^i.$$

Обратно, если 1-форма ω задается формулой (1.67), то

$$\omega(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) = \omega_i(\lambda_1 \xi_1^i + \lambda_2 \xi_2^i) = \lambda_1 \omega_i \xi_1^i + \lambda_2 \omega_i \xi_2^i = \lambda_1 \omega(\xi_1) + \lambda_2 \omega(\xi_2)$$

для любых векторов $\xi_1, \xi_2 \in TM_y$ и любых чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^1$. Кроме того,

$$\omega(b_i) = \omega_1 \cdot 0 + \ldots + \omega_i \cdot 1 + \ldots + \omega_n \cdot 0 = \omega_i. \ \Box$$

Из предложения 1.22 следует, что соотношения

$$\theta^i(b_j) = \delta^i_j, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

где δ^i_j — символ Кронекера, однозначно определяют n 1-форм

$$\theta^1, \ldots, \theta^n. \tag{1.69}$$

Очевидно, что $\theta^i(\xi) = \xi^i, i = 1, \ldots, n$, для любого вектора $\xi \in TM_y$.

Легко убедиться в том, что 1-формы (1.69) составляют базис в T^*M_y, причем коэффициенты разложения произвольной 1-формы ω по этому базису, называемые компонентами формы, представляют собой коэффициенты (1.68) ее представления (1.67): $\omega = \omega_i \theta^i$. Таким образом, размерность кокасательного пространства T^*M_y равна n.

Базис 1-форм $\theta^1, \ldots, \theta^n \in T^*M_y$ называется двойственным к базису векторов $b_1, \ldots, b_n \in TM_y$.

Стандартному базису $\partial/\partial y^1 = (1, ..., 0), \ldots, \partial/\partial y^n = (0, ..., 1)$ в TM_y соответствует стандартный двойственный базис в T^*M_y, 1-формы которого обозначаются через $dy^1, \ldots, dy^n$. (Вид этих обозначений прояснится далее.) Здесь следовало бы писать $dy^i|_y$, указывая на кокасательное пространство T^*M_y, которому принадлежат 1-формы базиса, однако для простоты записи мы этого делать не будем, считая, что в каждом случае ясно, какая точка y имеется в виду. Таким образом, для любого вектора $\xi = \xi^i \partial/\partial y^i \in TM_y$ $dy^k(\xi) = \xi^k, k = 1, \ldots, n$. Отметим также, что $\omega(\xi) = \omega_i \xi^i$ для вектора $\xi = \xi^i \partial/\partial y^i \in TM_y$ и формы $\omega = \omega_i dy^i \in T^*M_y$.

Введем в рассмотрение 2-формы на TM_y. 2-Форма — это функция от пары векторов $\omega\colon TM_y \times TM_y \to \mathbb{R}^1$, которая билинейна и кососимметрична:

$$\omega(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2, \xi_3) = \lambda_1\omega(\xi_1, \xi_3) + \lambda_2\omega(\xi_2, \xi_3),$$

$$\omega(\xi_1, \xi_2) = -\omega(\xi_2, \xi_1),$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^1, \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in TM_y.$$

Примером 2-формы является внешнее произведение $\omega^1 \wedge \omega^2$ 1-форм $\omega^1, \omega^2 \in T^*M_y$

$$(\omega^1 \wedge \omega^2)(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \omega^1(\xi_1) & \omega^2(\xi_1) \\ \omega^1(\xi_2) & \omega^2(\xi_2) \end{vmatrix}.$$

Множество 2-форм на TM_y, которое обозначается через $\bigwedge_2 T^*M_y$, является линейным пространством, если определить сложение форм формулой

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \omega_1(\xi_1, \xi_2) + \omega_2(\xi_1, \xi_2),$$

а умножение на число — формулой

$$(\lambda\omega)(\xi_1, \xi_2) = \lambda\omega(\xi_1, \xi_2).$$

Размерность этого пространства равна $C_n^2 = n(n-1)/2$, причем в качестве базиса можно взять формы $dy^i \wedge dy^j$, $i < j$.

Внешней формой степени k, где $k > 0$, или k-формой, называется функция ω от k касательных векторов, принадлежащих TM_y, которая k-линейна и кососимметрична:

$$\omega(\lambda_1\xi_1' + \lambda_2\xi_1'', \xi_2, \ldots, \xi_k) = \lambda_1\omega(\xi_1', \xi_2, \ldots, \xi_k) + \lambda_2\omega(\xi_1'', \xi_2, \ldots, \xi_k),$$

$$\omega(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}) = (-1)^\nu\omega(\xi_1, \ldots, \xi_k), \quad \text{где}$$

$$\nu = \begin{cases} 0, & \text{если перестановка } i_1, \ldots, i_k \text{ четная}, \\ 1, & \text{если перестановка } i_1, \ldots, i_k \text{ нечетная}. \end{cases}$$

Примером k-формы является внешнее произведение $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k$ 1-форм $\omega^1, \ldots, \omega^k \in T^*M_y$:

$$(\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k)(\xi_1, \ldots \xi_k) = \begin{vmatrix} \omega^1(\xi_1) & \ldots & \omega^k(\xi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^1(\xi_k) & \ldots & \omega^k(\xi_k) \end{vmatrix}.$$

Множество k-форм на TM_y, которое обозначается через $\bigwedge_k T^*M_y$, является линейным пространством (операции сложения и умножения на число определяются так же, как и для $\bigwedge_1 T^*M_y = T^*M_y$ и $\bigwedge_2 T^*M_y$). Формы

$$dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_k}, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n, \tag{1.70}$$

линейно независимы и составляют базис в $\bigwedge_k T^*M_y$. Таким образом, размерность $\bigwedge_k T^*M_y$ равна C_n^k. Заметим, что все формы степени k, $k > n$, равны нулю.

Если формы $\omega^i \in T^*M_y$, $i = 1, \ldots, n$, линейно независимы, то формы

$$\omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_k}, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n,$$

так же, как и стандартные формы (1.70), составляют базис в $\bigwedge_k T^*M_y$. Любая k-форма Ω однозначно представляется в этом базисе в виде линейной комбинации

$$\Omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \Omega_{i_1, \ldots, i_k} \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_k}. \tag{1.71}$$

Легко проверить, что $\Omega_{i_1, \ldots, i_k} = \Omega(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k})$, где ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, — двойственный базис в TM_y.

Введем теперь операцию внешнего умножения для форм произвольных степеней. Сделаем это на основе операции внешнего умножения 1-форм, рассмотренной ранее. Если ω, θ — разложимые формы, т.е.

$$\omega = \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k, \quad \theta = \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^l,$$

то их внешнее произведение — это форма степени $k + l$

$$\omega \wedge \theta = \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k \wedge \theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^l.$$

Свойство билинейности позволяет расширить это определение на формы более общего вида:

$$(\lambda_1 \omega^1 + \lambda_2 \omega^2) \wedge \theta = \lambda_1(\omega^1 \wedge \theta) + \lambda_2(\omega^2 \wedge \theta), \tag{1.72}$$

$$\omega \wedge (\lambda_1 \theta^1 + \lambda_2 \theta^2) = \lambda_1(\omega \wedge \theta^1) + \lambda_2(\omega \wedge \theta^2), \tag{1.73}$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^1$. Если учесть, что любую форму можно разложить по некоторому базису, который состоит из разложимых форм, то ясно, что представляет собой внешнее произведение произвольных форм.

Внешнее умножение наряду с дистрибутивностью, характеризуемой формулами (1.72), (1.73), ассоциативно:

$$\omega \wedge (\theta \wedge \zeta) = (\omega \wedge \theta) \wedge \zeta,$$

и антикоммутативно:

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{kl} \theta \wedge \omega,$$

если ω есть k-форма, а θ есть l-форма.

Пример 1.5. Вычислим внешнее произведение 2-формы

$$\omega = \alpha dy \wedge dz + \beta dz \wedge dx + \gamma dx \wedge dy$$

и 1-формы

$$\theta = \lambda dx + \mu dy + \nu dz,$$

определенных в трехмерном пространстве. Имеем

$$\begin{aligned} \omega \wedge \theta \quad = \quad & \alpha\lambda dy \wedge dz \wedge dx + \beta\lambda dz \wedge dx \wedge dx + \gamma\lambda dx \wedge dy \wedge dz + \\ & + \alpha\mu dy \wedge dz \wedge dy + \beta\mu dz \wedge dx \wedge dy + \gamma\mu dx \wedge dy \wedge dy + \\ & + \alpha\nu dy \wedge dz \wedge dz + \beta\nu dz \wedge dx \wedge dz + \gamma\nu dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = 0, \quad dz \wedge dz = 0,$$

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dx \wedge dz = -dz \wedge dx, \quad dy \wedge dz = -dz \wedge dy,$$

получим

$$\omega \wedge \theta = (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Докажем несколько утверждений, касающихся понятий линейной зависимости и линейной независимости форм.

Предложение 1.23. *Равенство*

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m = 0,$$

где $\omega^i, i = 1, \ldots, m,$ *— 1-формы, выполняется тогда и только тогда, когда эти формы линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть формы $\omega^i, i = 1, \ldots, m$, линейно зависимы. В силу антикоммутативности внешнего умножения произведение $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m$ меняет знак при перестановке любых множителей. Если заменить одну форму на линейную комбинацию других, то из ассоциативности и дистрибутивности внешнего умножения следует, что $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m = 0$.

Пусть формы $\omega^i, i = 1, \ldots, m$, линейно независимы. Дополним их до базиса $\omega^i, i = 1, \ldots, n$, всего кокасательного пространства T^*M_y. Пусть $b_i, i = 1, \ldots, n,$ — двойственный базис касательного пространства TM_y. Имеем

$$(\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m)(b_1, \ldots, b_m) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m \neq 0$. $\square$

Предложение 1.24. *Пусть даны k-форма Ω и m линейно независимых 1-форм $\omega^1, \ldots, \omega^m$. Для того чтобы форма могла быть представлена в виде*

$$\Omega = \theta^1 \wedge \omega^1 + \ldots + \theta^m \wedge \omega^m, \tag{1.74}$$

где $\theta^1, \ldots, \theta^m$ — некоторые $(k \Leftrightarrow 1)$-формы, необходимо и достаточно, чтобы Ω удовлетворяла условию

$$\Omega \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m = 0. \tag{1.75}$$

Доказательство. Необходимость условия предложения проверяется подстановкой (1.74) в (1.75). После этой подстановки во внешних произведениях оказываются одинаковые множители, и результат обращается в нуль.

Докажем достаточность. Дополним формы $\omega^1, \ldots, \omega^m$ до базиса $\omega^1, \ldots, \omega^n$ в TM_y. Разложение (1.71) подставим в (1.75). Получим

$$\Omega = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots < i_k \leqslant n} \Omega_{i_1 < \ldots, i_k} \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_k} \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m = 0.$$

Отбросим те члены, которые заведомо равны нулю, т.е. для которых среди $i_1, \ldots, i_k$ имеется хотя бы один индекс, равный одному из $1, \ldots, m$. Тогда оставшиеся члены можно рассматривать как разложение 0. Коэффициенты разложения должны быть все равны нулю: $\Omega_{i_1, \ldots, i_k} = 0$, если среди $i_1, \ldots, i_k$ нет ни одного индекса $1, \ldots, m$. В случае $m + k > n$ таких коэффициентов не окажется вовсе. Итак, в разложении 1.71 сохранятся лишь члены, в которых присутствует по крайней мере одна из форм $\omega^1, \ldots, \omega^m$. Это означает, что разложение можно переписать в виде (1.74), сгруппировав его члены, содержащие ω^1, и вынося ω^1 за скобку, и проделав то же самое последовательно для $\omega^2, \ldots, \omega^m$ над оставшимися членами. □

Предложение 1.25. *Пусть Ω — 2-форма, а ω^1, ..., ω^m — 1-формы, причем $\Omega \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m \neq 0$. Тогда если*

$$\Omega^{p+1} \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m = 0, \tag{1.76}$$

то найдется такая 1-форма β, линейно независимая от ω^1, ..., ω^m, что

$$\Omega^p \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m \wedge \beta = 0.$$

Доказательство. Дополним формы ω^k, $k = 1, \ldots, m$, до базиса ω^1, ..., ω^n в пространстве T^*M_y. Разложим 2-форму Ω по формам ω^k, $k = 1, \ldots, n$:

$$\Omega = \sum_{i<j} \Omega_{ij} \omega^i \wedge \omega^j. \tag{1.77}$$

Так как $\Omega\wedge\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^m \neq 0$, то в (1.77) найдется коэффициент $\Omega_{qs} \neq 0$, $m < s \leqslant n$, $m < q < s$. В противном случае, согласно предложению 1.24, условие $\Omega \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m \neq 0$ невыполнимо. Перепишем разложение (1.77) в виде $\Omega = \alpha + \beta \wedge \omega^s$, где

$$\alpha = \sum_{i<j,\, i\neq s\, j\neq s} \Omega_{ij}\omega^i \wedge \omega^j, \quad \beta = \left(\sum_{i=1}^{s-1} \Omega_{is} \Leftrightarrow \sum_{i=s+1}^{n} \Omega_{si}\right) \omega^i. \tag{1.78}$$

Так как $\Omega_{qs} \neq 0$, то формы β, ω^1, ..., ω^m линейно независимы, т.е.

$$\beta \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m \neq 0.$$

Имеем

$$\Omega^{p+1} = \alpha^{p+1} + (p+1)\alpha^p \wedge \beta \wedge \omega^s.$$

Пусть выполняется (1.76), т.е.

$$\begin{aligned}\Omega^{p+1} \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m \;=\;& \alpha^{p+1} \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m + \\ &+(p+1)\alpha^p \wedge \beta \wedge \omega^s \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m = 0.\end{aligned}$$

Тогда поскольку ω^s не входит в разложения (1.78) для α и β, то

$$\alpha^p \wedge \beta \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m = 0. \tag{1.79}$$

Из равенства (1.79) вытекает, что

$$\begin{aligned}&\Omega^p \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m \wedge \beta = \\ &\quad = (\alpha^p + p\alpha^{p-1} \wedge \beta \wedge \omega^s) \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m \wedge \beta = \\ &\quad\quad = \alpha^p \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m \wedge \beta = 0. \ \square\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение дифференциальные формы. Дифференциальной формой степени k или дифференциальной k-формой ω, заданной в области M, называют отображение, которое каждой точке $y \in M$ ставит в соответствие k-форму $\omega(y) \in \bigwedge_k T^*M_y$. Ясно, что над дифференциальными формами можно производить операции сложения, умножения на функции и внешнего умножения. Отметим также, что естественным образом определяется действие дифференциальных форм на векторные поля. Результатом действия будут являться функции.

Рассмотрим подробнее дифференциальные формы степени 1 и 2.

Функция ω, ставящая в соответствие каждой точке $y \in M$ 1-форму $\omega(y) \in T^*M_y$, называется дифференциальной 1-формой или формой Пфаффа. Дифференциальную 1-форму можно задать в виде

$$\omega = \omega_i(y)\, dy^i.$$

Дифференциальная форма называется гладкой, если $\omega_i(y)$ — гладкие функции. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются только гладкие формы Пфаффа.

Примером дифференциальной 1-формы является дифференциал гладкой функции f

$$df = \frac{\partial f}{\partial y^i} dy^i.$$

Если $f = y^i$, то дифференциал f порождает в каждой точке $y \in M$ форму dy^i. (Отсюда, в частности, вытекает выбор обозначений для стандартного базиса в T^*M_y.)

Семейство гладких дифференциальных форм

$$\omega^k = \omega_i^k(y)\, dy^i, \quad k = 1, \ldots, q, \tag{1.80}$$

называется линейно несвязанным, если $\operatorname{rank} \|\omega_i^k\| = q$. В силу предложения 1.23 факт линейной несвязанности можно записать так:

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^q \neq 0.$$

Замечание 1.7. Отметим, кстати, что факт функциональной независимости функций $\varphi^k(y), k = 1, \ldots, q$, можно записать следующим образом:

$$d\varphi^1 \wedge \ldots \wedge d\varphi^q \neq 0.$$

Если для линейно несвязанного семейства (1.80) $q = n$, то в каждой фиксированной точке $y \in M$ формы $\omega^k(y) \in T^*M_y, k = 1, \ldots, n$, образуют базис в T^*M_y. В этом случае однозначно определено линейно несвязанное семейство гладких векторных полей

$$\xi_a = \xi_a^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad a = 1, \ldots, n, \tag{1.81}$$

такое, что

$$\omega^k(\xi_a) = \delta_a^k, \quad k = 1, \ldots, n, \quad a = 1, \ldots, n, \tag{1.82}$$

т.е. для базиса $\xi_a(y) \in TM_y, a = 1, \ldots, n$, 1-формы $\omega^k(y) \in T^*M_y$, $k = 1, \ldots, n$, определяют двойственный базис. Семейства (1.80) и (1.81), удовлетворяющие (1.82), будем называть двойственными. Любую дифференциальную k-форму Ω можно представить в виде (1.71), где $\Omega_{i_1,\ldots,i_k}$ — функции от y, причем

$$\Omega_{i_1,\ldots,i_k}(y) = \Omega(y)(\xi_{i_1}(y), \ldots, \xi_{i_k}(y)).$$

Функция ω, ставящая в соответствие каждой точке $y \in M$ 2-форму $\omega(y) \in \bigwedge_2 T^*M_y$, называется дифференциальной 2-формой. Дифференциальную 2-форму можно записать в стандартном базисе

$$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij}(y)\, dy^i \wedge dy^j . \tag{1.83}$$

Дифференциальная 2-форма называется гладкой, если функции ω_{ij} являются гладкими. Аналогичным образом определяется гладкость дифференциальной формы произвольной степени. В дальнейшем рассматриваются только гладкие дифференциальные формы.

Если семейство форм Пфаффа (1.80), для которого $p = n$, является линейно несвязанным, то 2-формы $\omega^i(y) \wedge \omega^j(y)$, $i < j$, определяют базис в $\bigwedge_2 T^*M_y$, $\forall y \in M$. Поэтому любую дифференциальную 2-форму можно записать также в виде

$$\omega = \sum_{i<j} \Omega_{ij}(y) \omega^i \wedge \omega^j . \tag{1.84}$$

Как уже отмечалось, если (1.81) — двойственное семейство, то

$$\Omega_{ij}(y) = \omega(y)\big(\xi_i(y), \xi_j(y)\big). \tag{1.85}$$

В частности, в (1.83)

$$\omega_{ij}(y) = \omega(y)\,(\partial/\partial y^i\,, \partial/\partial y^j\,).$$

Примером дифференциальной 2-формы является внешний дифференциал формы Пфаффа $\omega = \omega_j(y)\, dy^j$

$$d\omega = d\omega_j \wedge dy^j .$$

В стандартном базисе

$$d\omega = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial y^i} \Leftrightarrow \frac{\partial \omega_i}{\partial y^j} \right) dy^i \wedge dy^j . \tag{1.86}$$

Пусть $\xi = \xi^i(y)\partial/\partial y^i$, $\eta = \eta^i(y)\partial/\partial y^i$ — гладкие векторные поля, а $\omega = \omega_k(y)\, dy^k$ — гладкая форма Пфаффа в области M. Из (1.86) легко можно вывести, что

$$d\omega(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial y^i} \Leftrightarrow \frac{\partial \omega_i}{\partial y^j} \right) \xi^i \eta^j . \tag{1.87}$$

Заметим, что, в отличие от (1.86), здесь производится суммирование по всем $i, j = 1, \ldots, n$.

Справедливо равенство, характеризующее связь между коммутатором и внешним дифференциалом

$$d\omega(\xi, \eta) = \xi\omega(\eta) \Leftrightarrow \eta\omega(\xi) \Leftrightarrow \omega([\xi, \eta]). \tag{1.88}$$

Рассмотрим теперь поведение форм при отображениях. Пусть $M \subset \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$ — области, а $f\colon M \to N$ — гладкое отображение. Для каждой точки $y \in M$, согласно разделу 1.3, определено линейное отображение $f_*|_y\colon TM_y \to TN_{f(y)}$, характеризуемое матрицей Якоби $\|\partial f/\partial y\|$. Сопряженное отображение, характеризуемое транспонированной матрицей, обозначим через $f^*|_y\colon T^*N_{f(y)} \to T^*M_y$. Таким образом, каждой форме $\omega \in T^*N_{f(y)}$ ставится в соответствие форма $f^*|_y\omega \in T^*M_y$, которую можно определить также следующим образом: $f^*|_y\omega(\xi) = \omega(f_*|_y\xi)$, $\forall \xi \in TN_y$. Если ω — дифференциальная 1-форма в области N, то через $f^*\omega$ обозначим дифференциальную 1-форму в области M, которая каждой точке $y \in M$ ставит в соответствие форму $f^*|_y\omega(f(y))$. Говорят, что форма $f^*\omega$ получается из формы ω переносом посредством отображения f.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$ — области, а $f\colon M \to N$ — диффеоморфизм. В этом случае отображение $f^*|_y\colon T^*N_{f(y)} \to T^*M_y$ является линейным изоморфизмом для любой точки $y \in M$. Поэтому любой дифференциальной форме ω в M однозначно соответствует дифференциальная форма Ω в N, такая, что $\omega = f^*\Omega$, $\Omega = (f^{-1})^*\omega$. Про форму Ω будем говорить, что она диффеоморфна форме ω. Если f трактовать как замену координат $x = f(y)$, то говорят, что Ω является формой ω в новой системе координат. Если $\omega = \omega_i(y)\, dy^i$, $\Omega = \Omega_j(x) dx^j$, то

$$\Omega_j(f(y)) = \left(\frac{\partial g^i}{\partial x^j} \right)_{x=f(y)} \omega_i(y),$$

где $g = f^{-1}$.

Здесь уместно сравнить данную формулу для изменения компонент ковекторного векторного поля (это другое название для форм Пфаффа) при диффеоморфизмах с формулой (1.16) для изменения компонент векторного поля. Матрица преобразования в первой формуле является обратной и транспонированной к матрице преобразования во второй формуле. Отсюда легко следует, что свертка $\omega_i \xi^i$ ковекторного поля (или, как еще говорят, ковариантного поля) ω и векторного поля (или, иначе, контравариантного поля) ξ есть (скалярная) функция, значение которой в каждой точке области не зависит от системы координат. Кстати, в этом мы убедились в разделе 1.3 для случая ковариантного векторного поля, являющегося градиентом (см. формулу (1.19)).

Введем понятие кораспределения, аналогичное понятию распределения. Кораспределением B называется функция, ставящая в соответствие каждой точке y области $M \subset \mathbb{R}^n$ подпространство $B(y) \subset T^*M_y$. Для кораспределения $y \mapsto \{0\} \subset T^*M_y$ будем использовать специальное обозначение $\mathcal{O}$. Так же, как и для распределений, определяется понятие пересечения, суммы и прямой суммы семейства кораспределений. Если B — кораспределение в M и ω — форма Пфаффа в M, то говорят, что ω принадлежит B, и пишут $\omega \in B$, если $\omega(y) \in B(y)$, $\forall y \in M$. Произвольное семейство форм Пфаффа ω^j, $j \in J$, порождает кораспределение $B \colon y \mapsto B(y) = \operatorname{span}\{\omega^j(y), j \in J\}$. По традиции в этом случае говорят также, что кораспределение B порождается системой уравнений Пфаффа

$$\omega^j = \omega_i^j(y)\, dy^i = 0, \quad j \in J. \tag{1.89}$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются только такие кораспределения, которые называются гладкими кораспределениями.

Так же, как и для распределений, определяются понятия ранга кораспределения, регулярной точки, особой точки и регулярного кораспределения. Справедливо следующее утверждение, аналогичное предложению 1.12.

Предложение 1.26. *Кораспределение B, которое задано в области $M \subset \mathbb{R}^n$, является регулярным кораспределением ранга $q > 0$ тогда и только тогда, когда для любой точки $y \in M$ найдется такая окрестность U и такая линейно несвязанная система Пфаффа*

$$\omega^k = \omega_i^k(y)\, dy^i = 0, \quad k = 1, \dots, q, \tag{1.90}$$

заданная в U, что $B(y) = \operatorname{span}\{\omega^k(y), k = 1, \dots, q\}, \forall y \in U$. □

Каждая система Пфаффа (1.90), удовлетворяющая условию предложения 1.26, называется базисной системой Пфаффа кораспределения B. Семейство форм $\omega^k, k = 1, \ldots, q$, определяющих базисную систему Пфаффа, называется также базисным.

Гладкая функция Φ называется интегралом кораспределения B, заданного в области M, если

$$d\Phi = (\partial\Phi/\partial y^i)dy^i \in B.$$

Говорят также, что Φ — интеграл системы Пфаффа (1.89), если Φ — интеграл кораспределения, порождаемого этой системой. Многообразие $N \subset M$ называется интегральным многообразием кораспределения B, если

$$\omega(\xi) = 0, \quad \forall\omega \in B(y), \quad \forall\xi \in TN_y, \quad \forall y \in N.$$

Максимальная размерность интегрального многообразия, проходящего через точку y_0, для которой $\dim B(y_0) = q$, равна $n \Leftrightarrow q$. Если через каждую точку области M проходит интегральное многообразие максимальной размерности, то кораспределение называется вполне интегрируемым.

Введем понятие характеристического кораспределения для регулярного кораспределения B, заданного в области $M \subset \mathbb{R}^n$. Пусть (1.90) — некоторая базисная система Пфаффа B. Построим уравнения Пфаффа вида

$$\omega^k_{i[j}\omega^1_{j_1} \ldots \omega^q_{j_q]}\, dy^i = 0, \tag{1.91}$$

$$k = 1, \ldots, q, \quad 1 \leqslant j < j_1 < \ldots < j_q \leqslant n.$$

Здесь

$$\omega^k_{ij} = \frac{\partial\omega^k_j}{\partial y^i} \Leftrightarrow \frac{\partial\omega^k_i}{\partial y^j},$$

а квадратные скобки означают, что произведено альтернирование по заключенным в них индексам, т.е. над индексами $j, j_1, \ldots, j_q$ в произведении $\omega^k_{ij}\omega^1_{j_1} \ldots \omega^q_{j_q}$ сделано $(q+1)!$ перестановок и взята сумма полученных выражений, причем выражения, полученные при помощи нечетных перестановок, взяты с обратным знаком. Эту операцию можно записать в виде формулы

$$\omega^k_{i[j}\omega^1_{j_1} \ldots \omega^q_{j_q]} = \begin{vmatrix} \omega^k_{ij} & \omega^k_{ij_1} & \ldots & \omega^k_{ij_q} \\ \omega^1_j & \omega^1_{j_1} & \ldots & \omega^1_{j_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^q_j & \omega^q_{j_1} & \ldots & \omega^q_{j_q} \end{vmatrix}.$$

Система уравнений Пфаффа (1.90), (1.91) называется характеристической для кораспределения B, а также для системы (1.90). Можно показать, что на пересечении областей определения характеристические системы порождают одно и то же кораспределение, которое и называется характеристическим кораспределением $\mathbf{C}B$. Кораспределение $\mathbf{C}B$ является гладким, ибо так же, как и при доказательстве предложения 1.12, используя функции Урысона, характеристическим системам можно поставить в соответствие системы Пфаффа, определенные глобально в M, причем полученные системы будут также порождать кораспределение $\mathbf{C}B$. Ранг $\mathbf{C}B$ в точке $y \in M$ называется классом B в точке $y \in M$ и обозначается через $\operatorname{class} B(y)$. Отметим, что регулярное кораспределение $\mathbf{C}B$ является вполне интегрируемым (см. далее следствие к теореме 1.12).

Наряду с понятием характеристической системы Пфаффа, определяемой для системы Пфаффа (1.90), вводят еще понятие характеристической системы Пфаффа для семейства форм Пфаффа $\omega^k, 1, \ldots, q$, которая состоит из уравнений (1.90) и уравнений

$$\omega^k_{ji}\, dy^i = 0, \tag{1.92}$$

$$k = 1, \ldots, q, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Кораспределение, порождаемое этими уравнениями, называется характеристическим кораспределением семейства форм $\omega^k, 1, \ldots, q$. Если характеристическое кораспределение регулярно, то оно вполне интегрируемо [10]. Ранг характеристического кораспределения семейства форм называется классом семейства форм.

Значение этих двух типов характеристических распределений прояснится в разделе 1.5 (см. теоремы 1.15, 1.18 и замечания 1.9, 1.11).

Пусть B_1, B_2 — произвольные кораспределения (не обязательно гладкие), заданные в областях $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$. Гладкое отображение $f\colon M \to N$ называется морфизмом из B_2 в B_1, если

$$f^*|_y B_2(f(y)) \subset B_1(y), \quad \forall y \in M.$$

Если $f^*|_y B_2(f(y)) = B_1(y), \forall y \in M$, и f является диффеоморфизмом областей M и N, то говорят, что кораспределения B_1 и B_2 диффеоморфны.

Совокупность всех кораспределений (не обязательно являющихся гладкими) с данными морфизмами образуют категорию, которую обозначим через $\mathcal{CD}$. Тождественными морфизмами являются тождественные отображения, а изоморфизмами — диффеоморфизмы. Регулярные кораспределения образуют полную подкатегорию категории $\mathcal{CD}$, которую обозначим через $\mathcal{RCD}$.

Пусть D — произвольное распределение (не обязательно гладкое), заданное в некоторой области $M \subset \mathbb{R}^n$. Поставим распределению D в соответствие двойственное кораспределение $D^\perp : y \in M \mapsto D^\perp(y) \subset \subset T^*M_y$, где $D^\perp$ состоит из таких форм $\omega \in T^*M_y$, что $\omega(\xi) = 0$, $\forall \xi \in D(y)$. Аналогично каждому кораспределению B, заданному в области $M \subset \mathbb{R}^n$, ставится в соответствие двойственное распределение $B^\perp : y \in M \mapsto B^\perp(y) \subset TM_y$, где $B^\perp(y)$ состоит из таких векторов $\xi \in TM_y$, что $\omega(\xi) = 0$, $\forall \omega \in T^*M_y$. Справедливы утверждения

$$(D^\perp)^\perp = D, \quad (B^\perp)^\perp = B,$$

$$D_1 \subset D_2 \Leftrightarrow {D_2}^\perp \subset {D_1}^\perp,$$

$$\Big(\sum D_j\Big)^\perp = \bigcap {D_j}^\perp.$$

Пусть B_1, B_2 — кораспределения, заданные в областях $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$. Легко доказать, что отображение $f : M \to N$ тогда и только тогда является морфизмом B_2 в B_1, когда f — морфизм ${B_1}^\perp$ в ${B_2}^\perp$. В частности, B_1, B_2 диффеоморфны тогда и только тогда, когда ${B_1}^\perp$ и ${B_2}^\perp$ диффеоморфны.

Из этих рассуждений следует, что по существу категории $\mathcal{D}$ и $\mathcal{CD}$ являются дуальными. (Точнее, категория $\mathcal{D}$ изоморфна дуальной к $\mathcal{CD}$.)

Заметим, что если кораспределение B является гладким, то распределение $B^\perp$, вообще говоря, не является гладким. Тем не менее справедливо

Предложение 1.27. *Кораспределение B тогда и только тогда является регулярным, когда распределение $B^\perp$ является регулярным.*

Доказательство. Пусть B — регулярное кораспределение, заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$, и (1.90) — базисная система Пфаффа, определенная в некоторой окрестности. Для каждой точки y этой окрестности пространство $B^\perp(y) \subset TM_y$ состоит из векторов, удовлетворяющих системе однородных линейных уравнений

$$\omega_i^k(y)\xi^i = 0, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{1.93}$$

Из линейной несвязанности (1.90) следует, что существует такое линейно несвязанное семейство гладких векторных полей (определенное, возможно, в более узкой окрестности)

$$\xi_l = \xi_l^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad l = 1, \ldots, n \Leftrightarrow q, \tag{1.94}$$

что векторы $\xi_l(y), l = 1, \dots, n \Leftrightarrow q$, образуют фундаментальную систему решений системы (1.93). Очевидно, что семейство (1.94) локально порождает $B^\perp$. Согласно предложению 1.12, распределение $B^\perp$ является регулярным. Обратное утверждение доказывается аналогично. □

Следствие 1.1. *Категории $\mathcal{RCD}$ и $\mathcal{RD}$ являются по существу дуальными.*

Отметим, что для кораспределения B и распределения $B^\perp$ интегралы и интегральные многообразия совпадают. В частности, B вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда $B^\perp$ вполне интегрируемо. Используя этот факт, докажем двойственный вариант теоремы Фробениуса в терминах базисных систем Пфаффа (т.е. вариант, аналогичный теореме 1.9).

Теорема 1.10. *Регулярное кораспределение тогда и только тогда вполне интегрируемо, когда для любой базисной системы Пфаффа* (1.90) *выполняются соотношения*

$$d\omega^k = \sum_{l=1}^{q} \lambda^{lk} \wedge \omega^l, \quad k = 1, \dots, q, \tag{1.95}$$

где λ^{lk} — некоторые формы Пфаффа.

Доказательство. Пусть регулярное кораспределение B вполне интегрируемо. Рассмотрим некоторую базисную систему Пфаффа (1.90), определенную в области U. Покажем, что в окрестности произвольной точки $y_0 \in U$ выполняется (1.95). Дополним формы (1.90) до n линейно несвязанных форм $\omega^k, k = 1, \dots, q$ (что локально всегда можно сделать). Введем в рассмотрение дуальное семейство полей (1.81). Из (1.82) следует, что поля $\xi_a, a = q+1, \dots, n$, составляют базисное семейство распределения $B_\perp$ в окрестности y_0. Имеем разложения вида (1.84)

$$d\omega^k = \sum_{i<j} \Omega^k_{ij} \omega^i(y) \wedge \omega^j(y), \quad k = 1, \dots, q.$$

Используя формулу (1.85) для коэффициентов разложения и формулу (1.88), получим, что $\Omega^k_{ij} = 0, i, j = q+1, \dots, n$. Отсюда следует (1.95). Обратно, пусть теперь для каждой базисной системы Пфаффа (1.90) регулярного кораспределения B выполняется (1.95). Для доказательства полной интегрируемости B достаточно показать, что $B_\perp$ является инволютивным распределением. Возьмем два произвольных векторных поля $\zeta_1, \zeta_2 \in B_\perp$ и произвольную точку $y_0 \in M$. Рассмотрим некоторую базисную систему Пфаффа (1.90) кораспределения B, определенную в окрестности y_0. Используя (1.95) и (1.88), получим, что $\omega^k([\zeta_1, \zeta_2]) = 0, k = 1, \ldots, q$, в окрестности y_0. Следовательно, в этой окрестности $[\zeta_1, \zeta_2] \in B_\perp$. □

Из предложения 1.24 вытекает другая формулировка теоремы Фробениуса:

Теорема 1.11. *Регулярное кораспределение тогда и только тогда вполне интегрируемо, когда для любой базисной системы Пфаффа* (1.90) *выполняются соотношения*

$$d\omega^k \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^q = 0, \quad k = 1, \ldots, q. \ \square \tag{1.96}$$

Заметим, что систему Пфаффа (1.90), удовлетворяющую условиям (1.95) и (1.96), называют вполне интегрируемой (так же, как и кораспределение, которое она порождает). Вместо (1.95) часто пишут

$$dw^k \equiv 0 \mod \omega^1, \ldots, \omega^q,$$

или

$$dw^k \equiv 0 \mod B,$$

где B — кораспределение, которое порождается системой Пфаффа (1.90). Аналогичные записи применяются и в общем случае, когда дифференциальная p-форма Ω допускает представление в виде

$$\Omega = \lambda^1 \wedge \omega^1 + \ldots \lambda^q \wedge \omega^q,$$

где $\lambda^k, k = 1, \ldots, q$, — некоторые дифференциальные $(p \Leftrightarrow 1)$-формы.

Пусть B — (гладкое) кораспределение, заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$. Последовательности (1.45) для распределения $D = B^\perp$ соответствует убывающая последовательность кораспределений

$$B_0 \supset B_1 \supset \ \ldots \supset B_k \supset \ \ldots, \tag{1.97}$$

где $B_k = (D_k)^\perp$. Если $D_k, k = 0, 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1$, — регулярные распределения, то B_k — регулярные кораспределения. В этом случае последовательность (1.97) является конечной и называется производным кофлагом для B:

$$B_0 \supset B_1 \supset \ \ldots \supset B_N. \tag{1.98}$$

Число $N + 1$ называется длиной производного кофлага. Заметим, что B_N является наибольшим вполне интегрируемым кораспределением, которое содержится в B.

Перейдем теперь к определению двойственного объекта для аффинного распределения. Так же, как и для распределения, двойственный объект будет кораспределением, но уже некоторого специального вида. Такие кораспределения будут называться t-кораспределениями.

Если аффинное распределение задано в области M, то двойственное t-кораспределение определено в расширенной области $M \times \mathbb{R}^1$. Под t-кораспределением K, заданным в $M \times \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, понимается кораспределение

$$K\colon (y,t) \in M \times \mathbb{R}^1 \mapsto K(y,t) \subset T^*(M \times \mathbb{R}^1)_{(y,t)}, \tag{1.99}$$

которое обладает двумя свойствами. Первое заключается в следующем:

$$K(y,t_1) = K(y,t_2), \quad \forall y \in M, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^1. \tag{1.100}$$

Напомним, что мы условились в предыдущем разделе для расширенных областей рассматривать только t-преобразования, т.е. преобразования, не меняющие координату t. Таким образом, равенства (1.100) инвариантны относительно замен координат, которые в данном случае задаются t-диффеоморфизмами.

Прежде чем определить второе свойство, условимся об одном обозначении. Если $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}) \in T^*(M \times \mathbb{R}^1)_{(y,t)}$, то через $\overline{\omega}$ обозначается ковектор $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in T^*M_y$. Если K — кораспределение, обладающее свойством (1.100), то корректно определено кораспределение $\overline{K}$ в M:

$$y \in M \mapsto \{\overline{\omega} \in T^*M_y \colon \omega \in K(y,t'), t' \text{ — любое число}\}. \tag{1.101}$$

Второе свойство, которому должно удовлетворять K, заключается в следующем:

$$\dim K(y,t) = \dim \overline{K}(y), \quad \forall y \in M, \quad \forall t \in \mathbb{R}^1. \tag{1.102}$$

Если t-кораспределение K является гладким, то из (1.100) следует, что K порождается системой Пфаффа вида

$$\omega^j = \omega_i^j(y)\, dy^i + \omega_{n+1}^j(y)\, dt = 0, \quad j \in J, \tag{1.103}$$

в которой компоненты не зависят от t. Кроме того, из (1.102) следует, что

$$\operatorname{rank} \left\|\omega_i^j(y)\right\|_{i=1,\ldots,n}^{j\in J} = \operatorname{rank} \left\|\omega_i^j(y)\right\|_{i=1,\ldots,n+1}^{j\in J}.$$

Системы Пфаффа такого вида будем называть t-системами Пфаффа. Если K — гладкое t-кораспределение, порождаемое t-системой Пфаффа (1.103), то $\overline{K}$ — гладкое кораспределение, порождаемое системой Пфаффа $\overline{\omega^j} = \omega_i^j(y)\, dy^i = 0, j \in J$.

Запись $\omega \in K$, где K — t-кораспределение в $M \times \mathbb{R}^1$, ω — форма Пфаффа, будет означать, что $\omega(y,t) \in K(y,t), \forall (y,t) \in M \times \mathbb{R}^1$, причем компоненты формы Пфаффа не зависят от t.

Предложение 1.28. *Если t-кораспределение K является регулярным, то каждому гладкому кораспределению $S \subset \overline{K}$ взаимно однозначно соответствует гладкое t-кораспределение $S' \subset K$, такое, что $S = \overline{S'}$.*

Доказательство. Для каждой формы $\lambda \in \overline{K}(y)$ найдется одна и только одна форма $\lambda' \in K(y,t)$, такая, что $\overline{\lambda'} = \lambda$. Действительно, если $\overline{\lambda'} = \lambda$ и $\overline{\lambda''} = \lambda$, причем $\lambda' \neq \lambda''$, то $\lambda' \Leftrightarrow \lambda'' = (0,\ldots,0,l) \in K(y,t), l \neq 0$. Согласно (1.102), это невозможно. Отсюда вытекает, что каждому (не обязательно гладкому) кораспределению $S \subset \overline{K}$ однозначно соответствует такое t-кораспределение S' в $M \times \mathbb{R}^1$, что $S = \overline{S'}$. Покажем теперь, что для гладкого кораспределения S, порождаемого гладкими дифференциальными формами $\theta^j = \theta^j_i(y)\,dy^i, j \in J$, t-кораспределение S' является гладким. Формам θ^j однозначно соответствуют формы $\theta'^j = \theta^j_i(y)\,dy^i + \theta^j_{n+1}(y)\,dt, j \in J$, порождающие S'. Дакажем, что θ'^j являются гладкими дифференциальными формами, т.е. функции $\theta^j_{n+1}(y)$ гладкие. Пусть $\dim K = q$. Возьмем некоторую базисную систему Пфаффа t-кораспределения K

$$\omega^k = \omega^k_i(y)\,dy^i + \omega^k_{n+1}(y)\,dt = 0, \quad k = 1,\ldots,q. \tag{1.104}$$

Согласно (1.102), система Пфаффа $\overline{\omega^k} = \omega^k_i(y)\,dy^i = 0, k = 1,\ldots,q$, является базисной для $\overline{K}$. Следовательно, $\theta^j = \mu^j_k(y)\overline{\omega^k}$, где $\mu^j_k(y)$ — гладкие функции (как коэффициенты разложения гладких дифференциальных форм по базисной системе Пфаффа). Очевидно, что также $\theta'^j = \mu^j_k(y)\omega^k$. Отсюда вытекает, что θ'^j — гладкие дифференциальные формы. Поэтому S' — гладкое кораспределение. $\square$

Каждому кораспределению B, заданному в $M \subset \mathbb{R}^n$, канонически ставится в соответствие t-кораспределение $\tilde{B}$, заданное в $M \times \mathbb{R}^1$. Именно, $\tilde{B}(y,t) = B(y) \times \{0\}$. Ясно, что $\overline{(\tilde{B})} = B$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются только гладкие t-кораспределения.

Введем понятие t-характеристического кораспределения $\mathbf{C}_t K$ для регулярного t-кораспределения K, заданного в области $M \times \mathbb{R}^1$. Кораспределение $\mathbf{C}_t K$ определяется в M следующим образом. Заметим, что $\overline{K}$ — регулярное кораспределение в M. Пусть y_0 — произвольная точка M и $\dim K = q$. Тогда существует такая окрестность U точки y_0, что кораспределение $\overline{K}$ в U порождается базисной системой Пфаффа вида

$$\overline{\omega^k} = \omega^k_i(y)\,dy^i = 0, \quad k = 1,\ldots,q, \tag{1.105}$$

а t-кораспределение K в $U \times \mathbb{R}^1$ порождается базисной системой Пфаффа вида (1.104).

Кораспределение $\mathbf{C}_t$K порождается в U системой Пфаффа, состоящей из уравнений (1.105) и следующих уравнений:

$$\omega^k_{i[j}\omega^1_{j_1}\ldots\omega^q_{j_q]}\,dy^i = 0, \tag{1.106}$$

$$k = 1,\ldots,q, \quad i = 1,\ldots,n, \quad 1\leqslant j < j_1 < \ldots < j_q \leqslant n+1.$$

Здесь

$$\omega^k_{ij} = \frac{\partial\omega^k_j}{\partial y^i} \Leftrightarrow \frac{\partial\omega^k_i}{\partial y^j}, \quad \omega^k_{i,n+1} = \frac{\partial\omega^k_{n+1}}{\partial y^i}, \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

а квадратные скобки означают, что произведено альтернирование по заключенным в них индексам. Данное определение $\mathbf{C}_t K$ не зависит от выбора системы Пфаффа, порождающей K в $U\times\mathbb{R}^1$. Система уравнений Пфаффа (1.105), (1.106) называется t-характеристической для t-кораспределения K, а также для системы (1.104). Кораспределение $\mathbf{C}_t K$ является гладким, ибо так же, как и при доказательстве предложения 1.12, используя функции Урысона, характеристическим системам можно поставить в соответствие системы Пфаффа, определенные глобально в M, причем полученные системы будут также порождать кораспределение $\mathbf{C}_t K$. Величина $\dim\mathbf{C}_t K(y)$ называется классом K в точке y и обозначается через $\operatorname{class} K(y)$.

Если B — кораспределение, заданное в $M\subset\mathbb{R}^n$, то, построив для $K = \tilde{B}$ кораспределение $\mathbf{C}_t K$, легко убедиться в том, что t-характеристическое кораспределение $\mathbf{C}_t K$ совпадает с характеристическим кораспределением $\mathbf{C}B$ кораспределения B (в смысле данного ранее определения).

Введем категорию t-кораспределений $\mathcal{TCD}$. Морфизмы определим следующим образом. Пусть K, P — t-кораспределения, заданные в областях $M\times\mathbb{R}^1$, $N\times\mathbb{R}^1$. Напомним, что гладкое отображение $\tilde{f}\colon M\times\mathbb{R}^1 \to N\times\mathbb{R}^1$ называется t-отображением, соответствующим отображению $f\colon M\to N$, если $\tilde{f}(y,t) = (f(y),t)$. Морфизмом P в K будем называть такое t-отображение $\tilde{f}$, что

$$\tilde{f}^*|_{(y,t)}P(\tilde{f}(y,t)) \subset K(y,t), \quad \forall (y,t)\in M\times\mathbb{R}^1,$$

где $\tilde{f}^*|_{(y,t)}$ — сопряженное отображение по отношению к дифференциалу $\tilde{f}_*|_{(y,t)}$ t-отображения $\tilde{f}$. Если $\tilde{f}$ — t-диффеоморфизм и

$$\tilde{f}^*|_{(y,t)}P(\tilde{f}(y,t)) = K(y,t), \quad \forall (y,t)\in M\times\mathbb{R}^1,$$

то K и P называются t-диффеоморфными t-кораспределениями (относительно t-диффеоморфизма $\tilde{f}$).

Изоморфные объекты в категории $\mathcal{TCD}$ — это t-диффеоморфные t-кораспределения. Полную подкатегорию регулярных t-кораспределений обозначим через $\mathcal{RTCD}$.

Теперь рассмотрим вопрос о связи аффинных распределений и t-кораспределений. Пусть F — аффинное распределение, заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$. Сопоставим ему кораспределение в $M \times \mathbb{R}^1$, имеющее следующий вид:

$$F_\perp : (y,t) \in M \times \mathbb{R}^1 \mapsto \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}) \in T^*(M \times \mathbb{R}^1)_{(y,t)}:$$

$$\omega_i \xi^i + \omega_{n+1} = 0, \quad \forall \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in F(y)\}.$$

Легко убедиться в том, что $F_\perp$ обладает свойствами (1.100), (1.102), т.е. является t-кораспределением, которое будем называть двойственным к F. Заметим, что кораспределение $\overline{F}_\perp$, заданное в M, является двойственным к $\mathbf{L}_F$, т.е.$\mathbf{L}_F^\perp = \overline{F_\perp}$. Если F является распределением, то линейные формы $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}) \in F_\perp(y,t)$ характеризуются тем, что $\omega_{n+1} = 0$. Отсюда следует, что $F_\perp(y,t) = F^\perp(y) \times \{0\}$, т.е. в данном случае понятие двойственного объекта совпадает по существу с введенным ранее понятием двойственного объекта для распределений.

Пусть теперь задано t-кораспределение K в области $M \times \mathbb{R}^1$. Сопоставим ему аффинное распределение в M

$$K_\perp : y \in M \mapsto \{\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in TM_y:$$

$$\omega_i \xi^i + \omega_{n+1} = 0, \quad \forall \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}) \in K(y,t)\}.$$

Аффинное распределение $K_\perp$ будем называть двойственным к K. Справедливы соотношения $(F_\perp)_\perp = F, (K_\perp)_\perp = K$.

Категория $\mathcal{TCD}$ является по существу дуальной категорией категории $\mathcal{AD}$ (точнее, категория $\mathcal{TCD}$ изоморфна дуальной категории). Действительно, легко показать, что гладкое отображение $f: M \to N$ является морфизмом аффинного распределения F, заданного в области M, в аффинное распределение A, заданное в области N, тогда и только тогда, когда соответствующее t-отображение $\tilde{f}: M \times \mathbb{R}^1 \to N \times \mathbb{R}^1$ является морфизмом $A_\perp$ в $F_\perp$.

Заметим, что при переходе к двойственному объекту свойство гладкости может быть нарушено. Тем не менее справедливо

Предложение 1.29. *Аффинное распределение F является регулярным тогда и только тогда, когда двойственное t-кораспределение $F_\perp$ является регулярным кораспределением.*

Доказательство. Пусть F регулярно и $\dim F = p$. Рассмотрим семейство полей (1.54), которое является базисным для F в окрестности некоторой произвольной точки $y_0 \in M$. Формы

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}) \in F_\perp(y,t)$$

должны удовлетворять системе линейных однородных уравнений

$$\omega_i \eta_0^i(y) + \omega_{n+1} = 0, \tag{1.107}$$

$$\omega_i \eta_a^i(y) = 0, \quad a = 1, \ldots, p. \tag{1.108}$$

Очевидно, что существует линейно несвязанная система Пфаффа вида (1.104), где $q = n \Leftrightarrow p$, заданная в окрестности точки y_0, формы которой ω^k удовлетворяют (1.107), (1.108) и составляют фундаментальную систему решений этой системы уравнений. Из построения следует, что (локально) $F_\perp(y,t) = \operatorname{span}\{\omega^k(y,t), k = 1, \ldots q\}$ и $\dim F_\perp(y,t) = q = \mathrm{const}$. Согласно предложению 1.26, $F_\perp$ — регулярно. Обратно, пусть $K = F_\perp$ — регулярное t-кораспределение ранга q. Рассмотрим систему Пфаффа (1.104), которая является базисной для K (в некоторой окрестности). Векторы $\eta \in F(y)$ должны удовлетворять следующей системе линейных неоднородных уравнений:

$$\omega_i^k(y)\eta^i = \Leftrightarrow \omega_{n+1}^k(y), \quad k = 1, \ldots, q. \tag{1.109}$$

Свойство (1.102) равносильно совместности (1.109). Из линейной алгебры известно, что в этом случае множество решений этой системы (для каждой фиксированной точки y) представляет собой аффинное подпространство, которое, очевидно, совпадает с $F(y)$. Для того чтобы описать F, рассмотрим соответствующую систему однородных уравнений

$$\omega_i^k(y)\eta^i = 0, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{1.110}$$

Существует семейство векторных полей $\eta_a, a = 1, \ldots, p = n \Leftrightarrow q$, которое определено локально, является линейно несвязанным и образует фундаментальную систему решений системы уравнений (1.110). Ясно также, что существует локально определенное гладкое поле η_0, удовлетворяющее системе (1.109). Следовательно, в некоторой окрестности $F(y) = \eta_0(y) + \operatorname{span}\{\eta_a(y), a = 1, \ldots, p\}$, и $\dim F(y) = p = \mathrm{const}$. Согласно предложению 1.16, F — регулярно. $\Box$

Следствие 1.2. *Категория $\mathcal{RTCD}$ является по существу дуальной категорией категории $\mathcal{RAD}$ (точнее, $\mathcal{RTCD}$ изоморфна дуальной категории).* $\Box$

Покажем теперь, что инволютивность регулярного аффинного распределения F эквивалентна полной интегрируемости двойственного t-кораспределения $F_\perp$ (в обычном смысле, как кораспределения). В разделе 1.3 приведена конструкция, согласно которой аффинному распределению F, заданному в области $M \subset \mathbb{R}^n$, ставится в соответствие распределение $\tilde{F}$, заданное в расширенной области $M \times \mathbb{R}^1$. Нетрудно видеть, что $F_\perp = \tilde{F}^\perp$, т.е. двойственное t-кораспределение к F совпадает с двойственным кораспределением к $\tilde{F}$. Согласно предложению 1.20 и теореме 1.8, инволютивность F эквивалентна полной интегрируемости $\tilde{F}$, а следовательно, и полной интегрируемости кораспределения $F_\perp$. Итак, доказано

Предложение 1.30. *Регулярное аффинное распределение F является инволютивным тогда и только тогда, когда двойственное t-кораспределение $F_\perp$ является вполне интегрируемым кораспределением.* □

Пусть K — t-кораспределение, заданное в области $M \times \mathbb{R}^1$. Возрастающим последовательностям аффинных распределений и распределений (1.60), (1.61), (1.62), (1.63), (1.64) и т.п., которые определяются аффинным распределением $F = K_\perp$, соответствуют убывающие последовательности двойственных t-кораспределений и кораспределений. В частности, производному ряду (1.60) соответствует двойственный производный ряд

$$K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_k \supset \ldots \tag{1.111}$$

Регулярная точка производного ряда (1.60) называется также регулярной точкой соответствующего двойственного ряда (1.111). Согласно предложению 1.29, в окрестности такой точки производному флагу (1.62) соответствует конечная последовательность двойственных регулярных t-кораспределений

$$K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_N, \tag{1.112}$$

где $K_i = (F_i)_\perp$, которую будем называть производным кофлагом t-кораспределения K. Число $N + 1$ называется длиной производного кофлага (1.112).

Напомним, что производному флагу (1.62) аффинного распределения F соответствует также производный флаг (1.66) распределения $\tilde{F}$, причем $K_i = \widetilde{(F_i)}^\perp$. Так как $\widetilde{(F_N)}$ является минимальным инволютивным (и вполне интегрируемым) распределением, содержащим распределение $\tilde{F}$, то K_N является максимальным вполне интегрируемым кораспределением, которое содержится в K.

Производный кофлаг (1.112) можно построить без использования двойственного производного флага (1.62). Действительно, из доказанной в следующем разделе теоремы 1.23 вытекает, что t-кораспределение K_{i+1} порождается такими формами Пфаффа $\omega \in K_i$, что

$$d\omega \equiv 0 \operatorname{mod} K_i.$$

Для нахождения базисных t-систем Пфаффа t-кораспределений (1.112) можно предложить следующий алгоритм. Пусть (1.104) — базисная t-система Пфаффа t-кораспределения K_i. Будем искать формы

$$\omega = \omega_i(y)\, dy^i + \omega_{n+1}(y)\, dt,$$

порождающие K_{i+1}, в виде $\omega = \mu_k(y)\omega^k, k = 1, \ldots, q$, где $\mu^k(y)$ — неизвестные функции. Условие $d\omega \equiv 0 \operatorname{mod} K_i$, согласно предложению 1.24, равносильно условию

$$dw \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^q = \mu_k d\omega^k \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^q = 0.$$

После соответствующих вычислений дифференциальная $(q+2)$-форма $\mu_k d\omega^k \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^q$ предстанет в виде линейной комбинации базисных форм

$$dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_{(q+2)}}, \quad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{(q+2)} \leqslant n+1,$$

где $y^{n+1} = t$, с некоторыми коэффициентами, в которые неизвестные функции μ_k входят линейно и однородно. Приравнивая нулю эти коэффициенты, получим систему линейных однородных уравнений относительно μ_k. Если эта система уравнений имеет только нулевое решение, то $K_{i+1} = K_N = \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ — тривиальное кораспределение $\mathcal{O}\colon (y,t) \mapsto \{0\} \in T^*(M \times \mathbb{R}^1)$. В противном случае каждая фундаментальная система решений определяет базисную t-систему Пфаффа t-кораспределения K_{k+1}. Если ранг матрицы системы уравнений равен $n \Leftrightarrow q$, то базисные t-системы Пфаффа K_i и K_{i+1} совпадают. В этом случае $K_i = K_{i+1} = K_N$.

Если последовательности направляющих распределений (1.61) поставить в соответствие последовательность двойственных кораспределений, то получится последовательность

$$\overline{K_0} \supset \overline{K_1} \supset \ldots \overline{K_k} \supset \ldots \tag{1.113}$$

Пусть B — кораспределение, заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$, а $K = \tilde{B}$, т.е. K — t-кораспределение, канонически сопоставленное кораспределению B. Тогда двойственный ряд (1.97), построенный для B обычным образом, будет совпадать с последовательностью (1.113).

Следующее утверждение устанавливает соотношение двойственности между понятиями t-характеристического кораспределения и характеристического распределения.

Теорема 1.12. *Пусть K — регулярное t-кораспределение, $\mathbf{C}_t K$ — регулярное кораспределение. Тогда $\mathbf{C}(K_\perp)$ — регулярное распределение, причем $\mathbf{C}(K_\perp) = (\mathbf{C}_t K)^\perp$.*

Доказательство. Пусть K задано в области $M \times \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и пусть $F = K_\perp$. Возьмем произвольную точку $y_0 \in M$ и соответствующую ей базисную систему Пфаффа (1.104) t-кораспределения K. Введем следующие обозначения. Если η — векторное поле в M, то через $\tilde{\eta}, \hat{\eta}$ будем обозначать поля $(\eta, 1), (\eta, 0)$, заданные в $M \times \mathbb{R}^1$. Покажем, что вектор $\xi \in TM_{y_0}$ принадлежит $(\mathbf{C}_t K)^\perp(y_0)$ тогда и только тогда, когда для любого касательного вектора $\eta \in F(y_0)$

$$\overline{\omega^k}(\xi) = 0, \quad d\omega^k(\hat{\xi}, \tilde{\eta}) = 0, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{1.114}$$

Действительно, выполнение условия (1.114) для любого касательного вектора $\eta \in F(y_0)$ равносильно условию выполнения равенств

$$\omega_i^k \xi^i = 0, \quad k = 1, \ldots, q, \tag{1.115}$$

$$\omega_{ij}^k \xi^i \eta^j + \omega_{i,n+1}^k \xi^i = 0, \quad k = 1, \ldots, q, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{1.116}$$

для любого касательного вектора $\eta \in TM_{y_0}$, удовлетворяющего равенствам

$$\omega_j^k \eta^j + \omega_{n+1}^k = 0, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{1.117}$$

Последнее условие равносильно тому, что должны выполняться равенства (1.115), а уравнения (1.116), рассматриваемые относительно η, должны быть следствием уравнений (1.117), т.е. все миноры порядка $q + 1$ следующих матриц размера $(q + 1) \times (n + 1)$:

$$\left\| \begin{matrix} \omega_{i1}^k \xi^i & \ldots & \omega_{i,n+1}^k \xi^i \\ \omega_1^1 & \ldots & \omega_{n+1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^q & \ldots & \omega_{n+1}^q \end{matrix} \right\|, \quad k = 1, \ldots, q, \tag{1.118}$$

должны равняться нулю. Отсюда вытекает, что $\xi \in TM_{y_0}$ удовлетворяет условию (1.114) для любого $\eta \in F(y_0)$ тогда и только тогда, когда (в точке y_0) $\omega(\xi) = 0$ для всех форм Пфаффа ω характеристической системы Пфаффа (1.105), (1.106), порождающей $\mathbf{C}_t K$. Так как $\mathbf{C}_t K$

регулярно, то, согласно предложению 1.27, и $(\mathbf{C}_t K)^\perp$ регулярно. Покажем, что $(\mathbf{C}_t K)^\perp = \mathbf{C}F$. Применяя формулу (1.88), получим, что для любых полей $\eta \in F, \xi \in \mathbf{L}_F$ справедливы следующие равенства (в окрестности y_0):

$$d\omega^k(\hat{\xi}, \tilde{\eta}) = \hat{\xi}\omega^k(\tilde{\eta}) \Leftrightarrow \tilde{\eta}\omega^k(\hat{\xi}) \Leftrightarrow \omega^k([\hat{\xi}, \tilde{\eta}]) = \Leftrightarrow \overline{\omega^k}([\xi, \eta]), \quad k = 1, \ldots, q.$$

Отсюда и из того факта, что $\overline{K} = \mathbf{L}_F^\perp$, вытекает, что если поле η принадлежит F, то поле ξ удовлетворяет условию

$$\xi \in L_F, \quad [\xi, \eta] \in L_F \tag{1.119}$$

тогда и только тогда, когда поле ξ удовлетворяет условию (1.114). Таким образом, $\xi \in \mathbf{C}F$ тогда и только тогда, когда $\xi \in (\mathbf{C}_t K)^\perp$. $\square$

Следствие 1.3. *Регулярное t-характеристическое кораспределение является вполне интегрируемым.*

Доказательство. Из доказанной теоремы и предложения 1.19 вытекает, что $\mathbf{C}(K_\perp)$ является инволютивным распределением. Из теоремы 1.8 (Фробениуса) следует, что $\mathbf{C}(K_\perp)$ вполне интегрируемо. Так как интегральные многообразия распределения и двойственного кораспределения совпадают, то $\mathbf{C}_t K$ является вполне интегрируемым кораспределением. $\square$

Замечание 1.8. Если $\mathbf{C}_t K$ не является регулярным кораспределением, то, вообще говоря, $\mathbf{C}F \neq (\mathbf{C}_t K)^\perp$, точнее, $\mathbf{C}F \subset (\mathbf{C}_t K)^\perp$.

Пример 1.6. Рассмотрим подробнее соотношение между характеристическим кораспределением и характеристическим распределением в случае кораспределения K ранга 1, заданного в области $M \subset \mathbb{R}^n$, и, соответственно, двойственного распределения $K_\perp$ ранга $n \Leftrightarrow 1$. Пусть K порождается уравнением Пфаффа

$$\omega = \omega_1(y)\, dy^1 + \ldots + \omega_n(y)\, dy^n = 0. \tag{1.120}$$

Множество матриц (1.118) в данном случае составляет одна матрица, которая имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} \omega_{i1}\xi^i & \ldots & \omega_{in}\xi^i & 0 \\ \omega_1 & \ldots & \omega_n & 0 \end{array} \right\|.$$

Условие равенства нулю миноров второго порядка в этой матрице равносильно пропорциональности строк, т.е.

$$\omega_{ji}\xi^i = \lambda\omega_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где λ — некоторые функции от y. Отсюда следует, что касательный вектор $\xi \in TM_{y_0}$ принадлежит $\mathbf{C}(K_\perp)(y_0)$ тогда и только тогда, когда в данной точке y_0 совместна система $n+1$ линейных однородных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_{11}\xi^1 + \ldots + \omega_{1n}\xi^n - \omega_1\lambda = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_{n1}\xi^1 + \ldots + \omega_{nn}\xi^n - \omega_n\lambda = 0 \\ \omega_1\xi^1 + \ldots + \omega_n\xi^n = 0 \end{array}\right. \tag{1.121}$$

относительно $n+1$ неизвестных $\xi^1, \ldots, \xi^n, \lambda$. Заметим, что $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ (в частности, $\omega_{ii} = 0$). Таким образом, матрица коэффициентов системы

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 0 & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1n} & -\omega_1 \\ \omega_{21} & 0 & \ldots & \omega_{2n} & -\omega_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \ldots & 0 & -\omega_n \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_n & 0 \end{array} \right\| \tag{1.122}$$

является кососимметрической. Как известно из линейной алгебры, ранг кососимметрической матрицы является четным числом [53]. Обозначим его через $2l$. Итак, среди уравнений (1.121) имеется $2l$ линейно независимых. После исключения λ их останется только $2l-1$, так как λ существенно входит в систему: хотя бы одна из компонент $\omega_1, \ldots, \omega_n$, отлична от нуля. Уравнения, оставшиеся после исключения λ, определяют характеристическую систему Пфаффа кораспределения K. Отсюда можно сделать вывод: ранг характеристического кораспределения $\mathbf{C}K$, т.е. $\operatorname{class} K$, всегда нечетный в случае кораспределения K ранга 1. Для нахождения класса кораспределения K следует найти ранг матрицы (1.122) и вычесть из него единицу.

Итак, в рассмотренном примере приведен конструктивный способ определения класса кораспределения K ранга 1. Дадим еще один способ, удобный в теоретических рассуждениях.

Предложение 1.31. *Пусть регулярное кораспределение K ранга 1 задается в области $M \subset \mathbb{R}^n$ уравнением Пфаффа (1.120). Если для некоторого натурального числа p в точке $y_0 \in M$ выполняются соотношения*

$$(d\omega)^p \wedge \omega \neq 0, \tag{1.123}$$

$$(d\omega)^{p+1} \wedge \omega = 0, \tag{1.124}$$

то $\operatorname{class} K(y_0) = 2p+1$.

Доказательство. Пусть в точке $y_0 \in M$ выполняются соотношения (1.123), (1.124). Из предложения 1.25 следует, что найдется такая 1-форма β^1, линейно независимая с $\omega(y_0)$, что

$$(d\omega)^p \wedge \omega \wedge \beta^1 = 0.$$

Если $d\omega \wedge \omega \wedge \beta^1 \neq 0$, то, снова применяя предложение 1.25, получим

$$(d\omega)^{p-1} \wedge \omega \wedge \beta^1 \wedge \beta^2 = 0,$$

где β^2 — 1-форма в точке y_0, которая линейно не выражается через формы $\omega(y_0)$, β^1. Продолжая этот процесс, придем к равенству

$$d\omega \wedge \omega \wedge \beta^1 \wedge \ldots \wedge \beta^q = 0, \tag{1.125}$$

где $q \leqslant p$ и формы $\omega(y_0)$, β^i, $i = 1, \ldots, q$, линейно независимы. Из равенства (1.125) вытекает, что найдутся такие 1-формы $\beta^{q+1}, \ldots, \beta^{2q}$, α, что

$$d\omega = \sum_{i=1}^{q} \beta^i \wedge \beta^{q+i} + \alpha \wedge \omega. \tag{1.126}$$

Так как в силу (1.124)

$$\begin{aligned}(d\omega)^p \wedge \omega &= \left(\sum_{i=1}^{q} \beta^i \wedge \beta^{q+i}\right)^p \wedge \omega = \\ &= q!(\beta^1 \wedge \beta^{q+1} \wedge \ldots \wedge \beta^q \wedge \beta^{2q}) \left(\sum_{i=1}^{q} \beta^i \wedge \beta^{q+i}\right)^{(p-q)} \wedge \omega \neq 0,\end{aligned}$$

то $q = p$ и формы $\omega(y_0)$, β^i, $i = 1, \ldots, 2p$, линейно независимы.

Из доказательства теоремы 1.12 следует, что ранг кораспределения $\mathbf{C}K$ в точке y_0 равен рангу системы линейных уравнений относительно $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$

$$\begin{aligned}&\omega(\xi) = 0, \\ &d\omega(\eta_j, \xi) = 0, \quad j = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1,\end{aligned} \tag{1.127}$$

где векторы $\eta_j \in TM_{y_0}$, $j = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1$ составляют базис $K^\perp(y_0)$. (Действительно, в данном случае условия (1.114) и (1.127) эквивалентны.) Выберем базис $K^\perp(y_0)$ специальным образом, а именно как набор линейно независимых векторов $\eta_j \in TM_{y_0}$, $j = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1$, удовлетворяющих равенствам

$$\omega(\eta_j) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1, \tag{1.128}$$

$$\beta^i(\eta_k) = \delta^i_k, \quad i, k = 1, \ldots, 2p. \tag{1.129}$$

В силу (1.126) и (1.128)

$$d\omega(\eta_j,\xi)=\sum_{i=1}^{p}\left(\beta^i(\eta_j)\beta^{p+i}(\xi)-\beta^{p+i}(\eta_j)\beta^i(\xi)\right)+\alpha(\eta_j)\omega(\xi),\qquad j=1,\dots,n-1. \tag{1.130}$$

Следовательно, уравнения системы (1.127) являются линейными комбинациями уравнений

$$\omega(\xi)=0,\quad \beta^i(\xi)=0,\quad i=1,\dots,2p,$$

и ранг системы (1.127) не превышает $2p+1$. С другой стороны, (1.130), (1.129) дают

$$\begin{gathered} d\omega(\eta_k,\xi)=\beta^{p+k}(\xi)+\alpha(\eta_k)\omega(\xi),\\ d\omega(\eta_{p+k},\xi)=-\beta^k(\xi)+\alpha(\eta_{p+k})\omega(\xi),\\ k=1,\dots,p, \end{gathered} \tag{1.131}$$

т.е. в системе (1.127) уравнения

$$\omega(\xi)=0,\quad d\omega(\eta_j,\xi)=0,\quad j=1,\dots,2p,$$

линейно независимы и $\dim \mathbf{C}K(y_0)=2p+1$. □

1.5. Эквивалентность семейств векторных полей и эквивалентность систем Пфаффа

Алгоритмы, используемые при решении тех или иных задач, связанных с распределениями и кораспределениями, оперируют, как правило, с базисными семействами векторных полей и базисными системами Пфаффа. Например, при исследовании вопроса о существовании и нахождении интегралов распределения нужно, как указывалось в разделе 1.3, построить, используя базисное семейство распределения D, с помощью процесса пополнения базисное семейство распределения D^*, а затем по определенному алгоритму определить его интегралы. В связи с этим естественно возникает задача о выборе подходящего базисного семейства полей (или базисной системы Пфаффа) или в более общем плане проблема эквивалентности и классификации семейств полей и систем Пфаффа. Сформулируем понятие эквивалентности семейств векторных полей. Линейно несвязанные семейства

$$\xi_a=\xi_a^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i},\quad a=1,\dots,p,\quad y\in M\subset\mathbb{R}^n, \tag{1.132}$$

$$\eta_a = \eta_a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a = 1, \ldots, p, \quad x \in N \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.133}$$

заданные в областях M и N, называются эквивалентными, если одно может быть получено из другого с помощью следующих операций (выполняемых в любом порядке): 1) диффеоморфизма (или, иначе говоря, замены координат), 2) линейного невырожденного преобразования (с коэффициентами, гладко зависящими от координат). Аналогично определяется эквивалентность линейно несвязанных систем Пфаффа

$$\omega^k = \omega_i^k(y)dy^i = 0, \quad k = 1, \ldots, q, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.134}$$

$$\theta^k = \theta_i^k(x)dx^i = 0, \quad k = 1, \ldots, q, \quad x \in N \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.135}$$

Вся совокупность линейно несвязанных семейств векторных полей разбивается на непересекающиеся подмножества эквивалентных семейств — классы эквивалентности. Проблема классификации заключается в описании классов эквивалентности, т.е. в описании семейств с точностью до эквивалентности. Эта проблема включает в себя, например, следующие задачи: нахождение критериев эквивалентности двух семейств; построение диффеоморфизмов и линейных преобразований, переводящих семейства друг в друга; построение канонических форм, т.е. представителей классов эквивавалентности (по возможности наиболее простого вида). Аналогично определяется проблема классификации систем Пфаффа. Эти проблемы (которые, как видно из дальнейшего, равносильны) до сих пор полностью не решены. Некоторые из имеющихся результатов приведены в этом разделе.

Пусть семейства (1.132) и (1.133) порождают регулярные распределения D и P, а системы Пфаффа (1.134) и (1.135) — регулярные кораспределения K и L. Справедливо

Предложение 1.32. *Семейства* (1.132) *и* (1.133) *(системы* (1.134) *и* (1.135)*) эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие распределения D и P (кораспределения K и L) диффеоморфны.*

Доказательство. Докажем это утверждение для семейств полей. Пусть распределения D и P диффеоморфны относительно диффеоморфизма $\psi\colon M \to N$. Очевидно, что поля $\zeta_a = \psi_*\xi_a$, $a = 1, \ldots, p$, составляют базисное семейство распределения P. Так как семейство (1.133) является также базисным для распределения P, то $\eta_a = \varkappa_a^b(x)\zeta$, причем $\varkappa_a^b(y)$ — гладкие функции и $|\varkappa_a^b| \neq 0$. Следовательно, семейства (1.132) и (1.133) эквивалентны. Обратное утверждение также очевидно. $\square$

Как отмечалось в предыдущем разделе, каждому регулярному распределению D сопоставляется двойственное регулярное кораспределение $D^{\perp}$ (и наоборот). Семейство полей (1.132) и система Пфаффа (1.134) называются взаимными, если семейство (1.132) является базисным для распределения D, а система (1.135) является базисной для кораспределения $D^{\perp}$. Связь между ними (согласно доказательству предложения 1.27) заключается в том, что формы Пфаффа (1.134) определяют фундаментальную систему решений системы линейных однородных алгебраических уравнений относительно $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$:

$$\omega_i \xi^i_a(y) = 0, \quad a = 1, \ldots, p,$$

а семейство (1.132) определяет фундаментальную систему решений системы уравнений относительно $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$:

$$\omega^k_i(\xi^i) = 0, \quad k = 1, \ldots, q = n \Leftrightarrow p.$$

Таким образом, взаимные семейство (1.132) и система (1.134) связаны соотношениями

$$\omega^k_i(\xi^i_a) = 0, \quad a = 1, \ldots, p, \quad k = 1, \ldots, q = n \Leftrightarrow p. \tag{1.136}$$

Ясно, что взаимные семейства полей и системы Пфаффа определены неоднозначно с точностью до линейного невырожденного преобразования. Заметим, что семейство полей является полным тогда и только тогда, когда взаимная система Пфаффа является вполне интегрируемой.

Отметим также еще один результат на эту тему, который доказывается аналогично предложению 1.10.

Предложение 1.33. *Пусть* (1.132) *— линейно несвязанное семейство полей,* (1.134) *— взаимная система Пфаффа* ($q = n \Leftrightarrow p$), I *— некоторое подмножество из* p *элементов множества индексов* $\{1, \ldots, n\}$, $\overline{I} = \{1, \ldots, n\} \setminus I$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) $|\xi^i_a|^{i \in I}_{a=1,\ldots,p} \neq 0$,

б) $|\omega^k_j|^{k=1,\ldots,q}_{j \in \overline{I}} \neq 0$. □

Из предложения 1.32 и того факта, что два распределения диффеоморфны тогда и только тогда, когда диффеоморфны двойственные кораспределения, вытекает

Предложение 1.34. *Два семейства векторных полей эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны взаимные системы Пфаффа.* □

Отсюда следует, что решение той или иной классификационной задачи для семейств полей означает решение соответствующей задачи для семейств Пфаффа и наоборот.

Важнейшим понятием при исследовании проблемы классификации является понятие инварианта, т.е. величины, которая не меняется при переходе к эквивалентному объекту. Приведем примеры инвариантов. Пусть линейно несвязанные семейства (1.132) и (1.133) определяют рспределения D и P.

Распределениям D и P соответствуют распределения D_k и P_k, составляющие производные ряды, и их характеристические распределения $\mathbf{C}D_k$ и $\mathbf{C}P_k$. Из предложения 1.32 вытекает, что семейства (1.132) и (1.133) эквивалентны тогда и только тогда, когда распределения $D_k, \mathbf{C}D_k$ диффеоморфны распределениям P_k, $\mathbf{C}P_k$, $k = 0, 1, \ldots$ Таким образом, если рассматривать семейства векторных полей, которые определяют регулярные распределения указанного вида, то ранги этих распределений являются инвариантами в проблеме классификации таких семейств. Разумеется, все сказанное относится (в двойственной форме) к системам Пфаффа.

Приведем теперь некоторые классические результаты по проблеме классификации. Эти результаты носят локальный характер. Введем соответствующие определения. Говорят, что семейство полей (1.132) локально эквивалентно в точке $y_0 \in M$ семейству (1.133), если существуют такие окрестность U точки y_0 и область $V \subset N$, что семейства (1.132) и (1.133), будучи ограничены на U и V, эквивалентны. Если семейство полей (1.132) локально эквивалентно в каждой точке M семейству (1.133), то говорят, что семейство (1.132) локально эквивалентно семейству (1.133). Аналогичные определения вводятся для систем Пфаффа.

Теорема 1.13. *Полное семейство полей* (1.132) *локально эквивалентно семейству*

$$\eta_b = \frac{\partial}{\partial x^b}, \quad b = n \Leftrightarrow p + 1, \ldots, n. \tag{1.137}$$

Доказательство. Если $p < n$, то семейство (1.132), согласно теореме 1.5, имеет в окрестности точки $y \in M$ $n \Leftrightarrow p$ функционально независимых интегралов

$$\varphi^k(y), \quad k = 1, \ldots, n \Leftrightarrow p. \tag{1.138}$$

Дополним функции (1.138) до набора n функционально независимых функций $\varphi^i(y), i = 1, \ldots, n$. Эти функции определяют локальный диффеоморфизм $x^i \Leftrightarrow \varphi^i(y), i = 1, \ldots, n$. Поля (1.137) перейдут в диффеоморфные поля

$$\zeta_a = \zeta_a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a = 1, \ldots, p, \tag{1.139}$$

причем очевидно, что $\zeta_a^i = 0, i = 1, \ldots, p$, и $|\zeta_a^i|_{a=1,\ldots,p}^{i=n-p+1,\ldots,n} \neq 0$. Ясно, что линейным невырожденным преобразованием поля (1.139) преобразуются в поля (1.137). Если $p = n$, то семейство (1.132) линейным невырожденным преобразованием преобразуется в семейство $\partial/\partial y^a, a = 1, \ldots, n$. □

Двойственный вариант этой теоремы выглядит так:

Теорема 1.14. *Вполне интегрируемая система Пфаффа* (1.134) *локально эквивалентна системе Пфаффа*

$$dx^k = 0, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{1.140}$$

Доказательство. Если $q < n$, то данное утверждение вытекает из теоремы 1.13, так как очевидно, что семейство (1.137) и система (1.140) являются взаимными (при $p = n \Leftrightarrow q$). Если $p = q$, то система (1.134) линейным невырожденным преобразованием переходит в систему $dy^k = 0, k = 1, \ldots, n$. □

Следствие 1.4. *Пусть K, L — регулярные вполне интегрируемые кораспределения, заданные в области $M \subset \mathbb{R}^n$, причем $K \subset L$. Тогда (локально) существует регулярное вполне интегрируемое кораспределение R, такое, что $L = K \oplus R$.*

Доказательство. Приведем базисную систему Пфаффа кораспределения L к виду (1.140). Согласно доказательству теоремы 1.13, это осуществляется с помощью замены координат $x^i = \varphi^i(y)$, $i = 1, \ldots, n$, где функции φ^k, $k = 1, \ldots, q$, составляют полный набор интегралов кораспределения L. Пусть $\dim K = d$. Возьмем в качестве φ^k, $k = 1, \ldots, d$, полный набор интегралов кораспределения K. Тогда очевидно, что уравнения Пфаффа $dx^k = 0$ порождают K, а уравнения $dx^l = 0$, $l = d + 1, \ldots, q$, порождают некоторое регулярное кораспределение R, причем $L = K \oplus R$. Кораспределение R является вполне интегрируемым по теореме 1.10, так как $d(dx^l) = 0$. □

Последующие утверждения формулируются в терминах системы Пфаффа (1.134). (Эти результаты легко можно переформулировать в двойственной форме.) Доказательство теорем 1.15, 1.16, 1.19 см. в [10], теоремы 1.17 — в [56].

Обозначим через K кораспределение, порождаемое системой (1.134).

Теорема 1.15. *Пусть* $\mathbf{C}K \subset P$, *где* P — *некоторое регулярное вполне интегрируемое кораспределение ранга* s. *Тогда система Пфаффа* (1.134) *локально эквивалентна системе Пфаффа вида*

$$\Omega^k = \Omega^k_j(x^1, \ldots, x^s)dx^j = 0, \quad k = 1, \ldots, q, \quad j = 1, \ldots, s. \tag{1.141}$$

Замечание 1.9. Система (1.134) приводится к системе (1.141) диффеоморфизмом $x^i = \varphi^i(y)$, $i = 1, \ldots, n$, где $\varphi^i(y)$, $i = 1, \ldots, s$, — полный набор интегралов P, и некоторым линейным преобразованием (см. доказательство несколько более общей теоремы 1.22). Если $\mathbf{C}K$ — регулярное кораспределение, то, согласно следствию 1.3 к теореме 1.12, $\mathbf{C}K$ является вполне интегрируемым кораспределением. Поэтому систему (1.141) можно получить с помощью интегралов $\mathbf{C}K$ (взяв в качестве P кораспределение $\mathbf{C}K$). Система (1.141), полученная таким образом, обладает следующим свойством: эта система зависит от минимального числа переменных (равного рангу $\mathbf{C}K$, т.е. классу K), от которых может зависеть система Пфаффа, эквивалентная системе (1.134).

Теорема 1.16. *Уравнение Пфаффа, т.е. система* (1.134), *для которой* $q = 1$, *в точке* y_0, *являющейся регулярной для* $\mathbf{C}K$, *локально эквивалентно одному из следующих уравнений:*

$$dx^n = 0, \tag{1.142}$$

$$dx^n \Leftrightarrow x^1 dx^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{2k-1}dx^{2k} = 0, \tag{1.143}$$

где $k = 1, \ldots, (n \Leftrightarrow 2)/2$, *если* n *четно,* $n \geqslant 4$; $(n \Leftrightarrow 1)/2$, *если* n *нечетно,* $n \geqslant 3$. *Число переменных в каждом из уравнений* (1.142), (1.143) *равно классу* K *в точке* y_0. □

Замечание 1.10. В случае одного уравнения Пфаффа класс может быть любым нечетным числом, не превышающим n. Если класс равен единице, то уравнение вполне интегрируемо и эквивалентно уравнению (1.142). Если класс равен $2k+1$, $k > 0$, то уравнение эквивалентно уравнению (1.143). Таким образом, один инвариант (класс) полностью определяет (локальную) классификацию одного уравнения Пфаффа.

Теорема 1.17. *Система Пфаффа* (1.134), *для которой* $n = 4, q = 2$, *в окрестности точки* y_0, *являющейся регулярной для* K_1, $\mathbf{C}K_1$ (*где* K_1 — *второй член производного ряда* (1.97) *для* K), *локально эквивалентна одной из следующих систем:*

$$\begin{cases} dx^1 = 0 \\ dx^2 = 0, \end{cases} \tag{1.144}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dx^1 \qquad\qquad = 0 \\ dx^2 \Leftrightarrow x^3 dx^4 = 0, \end{array} \right. \tag{1.145}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dx^1 \Leftrightarrow x^2 dx^4 = 0 \\ dx^2 \Leftrightarrow x^3 dx^4 = 0, \end{array} \right. \tag{1.146}$$

причем система (1.144) *соответствует случаю полной интегрируемости* ($\dim K = \dim K_1$)*, система* (1.145) *соответствует случаю* $\dim K_1 = \dim \mathbf{C} K_1 = 1$*, а система* (1.146) *соответствует случаю* $\dim K_1 = 1, \dim \mathbf{C} K_1 = 3$. $\square$

Наряду с понятием эквивалентности систем уравнений Пфаффа существует еще понятие эквивалентности семейств форм Пфаффа. Второе отличается от первого тем, что при переходе к эквивалентному семейству форм не разрешается производить операцию линейного преобразования. Иначе говоря, по определению, семейства линейно несвязанных форм Пфаффа

$$\omega^k = \omega^k_i(y) dy^i, \quad k = 1, \ldots, q, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.147}$$

$$\theta^k = \theta^k_i(x) dx^i, \quad k = 1, \ldots, q, \quad x \in N \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.148}$$

эквивалентны, если одно может быть получено из другого с помощью диффеоморфизма (замены координат). Так же, как и для систем уравнений Пфаффа, вводятся понятия локальной эквивалентности в точке и локальной эквивалентности во всей области определения.

Обозначим через S характеристическое кораспределение семейства форм (1.147), т.е. кораспределение, порождаемое системой Пфаффа (1.90), (1.92).

Теорема 1.18. *Пусть* $S \subset P$*, где* P *— некоторое регулярное вполне интегрируемое кораспределение ранга* s*. Тогда семейство форм Пфаффа* (1.147) *локально эквивалентно семейству форм Пфаффа вида*

$$\Omega^k = \Omega^k_j(x^1, \ldots, x^s) dx^j, \quad k = 1, \ldots, q, \quad j = 1, \ldots, s. \square \tag{1.149}$$

Замечание 1.11. Семейство (1.147) приводится к семейству (1.149) диффеоморфизмом $x^i = \varphi^i(y)$, $i = 1, \ldots, n$ где $\varphi^i(y)$, $i = 1, \ldots, s$, — полный набор интегралов P. Если S — регулярное кораспределение, то семейство (1.149) можно получить с помощью интегралов S (взяв в качестве P кораспределение S). Семейство (1.149), полученное таким образом, обладает следующим свойством: это семейство зависит от минимального числа переменных (равного рангу S, т.е. классу семейства форм (1.147)), от которых может зависеть семейство форм Пфаффа, эквивалентное семейству (1.147).

Теорема 1.19. *Пусть для формы Пфаффа*

$$\omega = \omega_i(y)dy^i,$$

т.е. семейства (1.147)*, для которого* $q = 1$*, характеристическое кораспределение* S *является регулярным. Тогда класс* p *формы* ω*, т.е. ранг* S*, может быть любым числом от* 1 *до* n*. Если* p *— нечетное число, то форма* ω *локально эквивалентна одной из форм*:

$$dx^n \quad (p = 1), \tag{1.150}$$

$$dx^n \Leftrightarrow x^1 dx^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{2k-1}dx^{2k} \quad (p = 2k+1,\ k = 1, 2, \ldots). \tag{1.151}$$

Если p *— четное число, то форма* ω *локально эквивалентна одной из форм*:

$$x^{n-1}dx^n \quad (p = 2), \tag{1.152}$$

$$x^{n-1}dx^n \Leftrightarrow x^1 dx^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{2j-1}dx^{2j} \quad (p = 2j,\ j = 1, 2, \ldots). \ \square \tag{1.153}$$

Подчеркнем, что число переменных в каждой из форм (1.150), (1.151), (1.152), (1.153) равно классу формы ω. Таким образом, один инвариант полностью определяет (локальную) классификацию формы Пфаффа.

Перейдем теперь к вопросу об эквивалентности семейств векторных полей и систем Пфаффа в более широком смысле. Приведем соответствующие определения.

Введем в рассмотрение семейства векторных полей с отмеченным полем. В каждом таком семействе

$$\xi_a = \xi_a^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad a = 0, 1, \ldots, p, \quad y \in M \subset R^n, \tag{1.154}$$

под отмеченным полем будем понимать поле с нулевым индексом — ξ_0. Предполагается, что остальные поля $\xi_a, a = 1, \ldots, p$, являются линейно несвязанными. Будем говорить, что семейство векторных полей $\eta_b, b = 0, 1, \ldots, p$, получается из семейства (1.154) аффинным преобразованием, если

$$\eta_0 = \xi_0 + \lambda_0^a(y)\xi_a, \quad \eta_b = \lambda_b^a(y)\xi_a, \quad a, b = 1, \ldots, p,$$

где $\lambda_b^a(y), a = 1, \ldots, p, b = 0, 1, \ldots, p,$ — гладкие функции, причем $|\lambda_b^a|_{b=1,\ldots,p}^{a=1,\ldots,p} \neq 0$. Будем говорить также, что два семейства полей с отмеченным полем аффинно эквивалентны, если одно семейство может быть получено из другого с помощью следующих операций: 1) диффеоморфизма (замены переменных), 2) аффинного преобразования.

Замечание 1.12. Каждому линейно несвязанному семейству полей (1.132) можно канонически сопоставить семейство с отмеченным полем (1.154), где $\xi_0 = 0$. Очевидно, что два линейно несвязанных семейства полей эквивалентны тогда и только тогда, когда аффинно эквивалентны канонически сопоставленные им семейства с отмеченным полем. Таким образом, вопрос об аффинной эквивалентности семейств полей включает в себя классический вопрос об эквивалентности семейств полей.

Рассмотрим семейство (1.154) и семейство с отмеченным полем

$$\eta_b = \eta_b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad b = 0, 1, \ldots, p, \quad x \in N \subset R^n. \tag{1.155}$$

Введем аффинные распределения

$$F: y \in M \mapsto F(y) = \xi_0(y) + \operatorname{span}\{\xi_a(y), a = 1, \ldots, p\},$$

$$G: x \in N \mapsto G(x) = \eta_0(x) + \operatorname{span}\{\eta_b(y), b = 1, \ldots, p\}.$$

Очевидно, что семейства (1.154) и (1.155) являются базисными семействами F и G. Легко доказать следующее утверждение, аналогичное предложению 1.32.

Предложение 1.35. *Семейства полей* (1.154) *и* (1.155) *аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие аффинные распределения F и G диффеоморфны.* $\square$

Рассмотрим теперь двойственный вариант понятия аффинной эквивалентности. Введем в рассмотрение линейно несвязанные t-системы Пфаффа, т.е. системы Пфаффа следующего вида:

$$\omega_i^k(y)\,dy^i + \omega_{n+1}^k(y)\,dt = 0, \tag{1.156}$$

$$k = 1, \ldots, q, \quad (y, t) \in M \times R^1 \subset R^{n+1},$$

$$\operatorname{rank}\left\|\omega_i^k\right\|_{i=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,q} = q.$$

Будем говорить, что t-система Пфаффа (1.156) t-эквивалентна t-системе Пфаффа

$$\lambda_i^k(x)\,dx^i + \lambda_{n+1}^k(x)\,dt = 0, \tag{1.157}$$

$$k = 1, \ldots, q, \quad (x, t) \in N \times R^1 \subset R^{n+1},$$

если одна может быть получена из другой с помощью следующих операций: 1) t-диффеоморфизма (замены переменных, при которых переменная t не меняется); 2) линейного невырожденного преобразования, коэффициенты которого являются гладкими функциями, не зависящими от t.

Замечание 1.13. Вопрос о t-эквивалентности t-систем Пфаффа включает классический вопрос об эквивалентности систем Пфаффа. Действительно, последний равносилен по существу вопросу о t-эквивалентности t-систем Пфаффа вида (1.156), для которых $\omega^k_{n+1} = 0$.

Сопоставим t-системам Пфаффа (1.156) и (1.157) порождаемые ими кораспределения K и P, которые, очевидно, являются t-кораспределениями. Легко доказать следующее

Предложение 1.36. *t-Системы Пфаффа* (1.156) *и* (1.157) *тогда и только тогда t-эквивалентны, когда соответствующие t-кораспределения K и P t-диффеоморфны.*

Согласно разделу 1.4, каждому аффинному распределению F, заданному в области M, ставится в соответствие двойственное t-кораспределение $F_\perp$ на $M \times R^1$ (и наоборот), причем два аффинных распределения F и G диффеоморфны тогда и только тогда, когда t-кораспределения $F_\perp$ и $G_\perp$ t-диффеоморфны.

Базисные семейства (1.154) аффинного распределения F и базисные системы Пфаффа (1.156) t-кораспределения $F_\perp$ удовлетворяют соотношениям

$$\omega^k_i \xi^i_0 + \omega^k_{n+1} = 0, \tag{1.158}$$

$$\omega^k_i \xi^i_a = 0, \quad k = 1, \ldots, q = n \Leftrightarrow p, \quad a = 1, \ldots, p = \dim F. \tag{1.159}$$

Семейство векторных полей с отмеченным полем (1.154) и t-систему Пфаффа (1.156), удовлетворяющие соотношениям (1.158), (1.159), будем называть взаимными.

Замечание 1.14. Если $\xi^i_0 = 0$, то для взаимной t-системы Пфаффа $\omega^k_{n+1} = 0$, и наоборот. В этом случае приведенное определение по существу переходит в данное ранее определение взаимных семейств полей и систем Пфаффа.

Из предыдущего вытекает

Предложение 1.37. *Два семейства векторных полей с отмеченными векторными полями тогда и только тогда аффинно эквивалентны, когда соответствующие им взаимные t-системы Пфаффа t-эквивалентны.* □

Отметим также следующее

Предложение 1.38. *Пусть семейство полей* (1.154) *и система Пфаффа* (1.156) *являются взаимными* ($q = n \Leftrightarrow p$), *I — некоторое* *подмножество из p элементов множества индексов $\{1,...,n\}$, $J = \{1,...,n\}/I$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

$$\text{а)}|\xi_a^i|_{a=1,\ldots,p}^{i\in I} \neq 0; \quad \text{б)}|\omega_j^k|_{j\in J}^{k=1,\ldots,q} \neq 0.$$

Доказательство. а)$\Rightarrow$б). Из (1.159) следует, что компоненты полей $\xi_a = (\xi_a^1,...,\xi_a^n), a = 1,...,p$, составляют фундаментальную систему решений для следующей системы линейных алгебраических однородных уравнений относительно $(\xi^1,...,\xi^n) : \omega_i^k \xi^i = 0, k = 1,...,q$. Построим другую фундаментальную систему решений с помощью линейного невырожденного преобразования $\eta_b = \mu_b^a(y)\xi_a, b \in I$, где функции μ_b^a образуют матрицу, обратную к $||\xi_a^i||_{a=1,\ldots,p}^{i\in I}$. Построенное семейство полей имеет следующий вид: $\eta_b = \partial/\partial y^b + \eta_b^c(y)\partial/\partial y^c, b \in I, c \in J$. Имеем: $\omega_b^k = \Leftrightarrow \eta_b^c \omega_c^k, k = 1,...,q, b \in I, c \in J$. Отсюда следует б), ибо иначе равенство $\operatorname{rank}||\omega_i^k(y)||_{i=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,q} = q$ невозможно. Утверждение б)$\Rightarrow$а) доказывается аналогично. $\square$

Как всегда, при исследовании проблемы эквивалентности важную роль играют инварианты. В данном случае(аффинной эквивалентности и t-эквивалентности) инвариантами являются, в частности, ранги распределений, связанных с аффинным распределением F (см. раздел 1.3), т.е. величины $\dim \mathbf{L}_{F_k}$, $\dim (spanF)_k$, $\dim \mathbf{C}(spanF)_k$, $\dim \mathbf{C}F_k$, $\dim (\mathbf{L}_F)_k$, $\dim \mathbf{C}(\mathbf{L}_F)_k$ и т.д.

Приведем некоторые результаты, обобщающие классические результаты, данные ранее. Они носят локальный характер. Локальный вариант определения аффинной эквивалентности вводится так же, как и в случае эквивалентности семейств полей. Что касается t-систем Пфаффа, то будем говорить, что t-система (1.156) локально эквивалентна в точке $y_0 \in M$ системе (1.157), если существуют такие окрестность U точки y_0 и область $V \subset N$, что t-системы, получающиеся ограничением t-систем (1.156) и (1.157) на $U \times R^1$ и $V \times R^1$, t-эквивалентны.

Сначала приведем два утверждения, обобщающие теоремы 1.13 и 1.14.

Семейство полей с отмеченным полем (1.154) будем называть аффинно полным, если

$$[\xi_a, \xi_b] = \mu_{ab}^c(y)\xi_c, \quad a = 0, 1, \ldots, p, \quad b, c = 1, \ldots, p. \tag{1.160}$$

Легко видеть, что регулярное аффинное распределение инволютивно тогда и только тогда, когда каждое базисное семейство полей является аффинно полным.

Замечание 1.15. Линейно несвязанное семейство векторных полей $\xi_a, a = 1, \ldots, p$, является полным тогда и только тогда, когда канонически сопоставленное ему семейство с нулевым отмеченным полем (см. замечание 1.12) является аффинно полным.

Рассмотрим семейство полей (1.154). Пусть F — аффинное распределение: $y \in M \mapsto F(y) = \xi_0(y) + \mathrm{span}\,\{\xi_a(y), a = 1, \ldots, p\}$. Справедлива

Теорема 1.20. *Аффинно полное семейство* (1.154) *локально эквивалентно в регулярной точке распределения $SpanF$ семейству*

$$\eta_0 = 0,\ \eta_a = \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad a = n \Leftrightarrow p + 1, \ldots, n, \tag{1.161}$$

если $\dim SpanF = p$, *и семейству*

$$\eta_0 = \frac{\partial}{\partial x^{n-p}},\ \eta_a = \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad a = n \Leftrightarrow p + 1, \ldots, n, \tag{1.162}$$

если $\dim SpanF = p + 1$.

Доказательство. Пусть $\dim SpanF = p$. В этом случае утверждение данной теоремы по существу равносильно утверждению теоремы 1.13. Действительно, так как $\xi_0(y) \in \mathrm{Span}\,\{\xi_a(y), a = 1, \ldots, p\}$, то семейство (1.154) аффинно эквивалентно семейству $\zeta_a, a = 0, 1, \ldots, p$, где $\zeta_0 = 0, \zeta_a = \xi_a, a = 1, \ldots, p$ (ибо $\zeta_0 = \xi_0 + \mu^a(y)\xi_a$ для подходящих $\mu^a(y)$). Семейство $\zeta_a, a = 0, 1, \ldots, p$, локально аффинно эквивалентно семейству (1.161), так как семейство $\zeta_a, a = 1, \ldots, p$, будучи полным, согласно теореме 1.13, локально эквивалентно семейству $\eta_a = \partial/\partial x^a, a = n \Leftrightarrow p+1, \ldots, n$. Пусть теперь $\dim SpanF = p+1$. Приведем сначала полное семейство $\xi_a, a = 1, \ldots, p$, к (локально) эквивалентному семейству $\zeta_a = \partial/\partial z^a, a = n \Leftrightarrow p + 1, \ldots, n$. Применяемый при этом диффеоморфизм переведет поле ξ_0 в некоторое поле $\zeta_0 = \zeta_0^i(z)\partial/\partial z^i$. Семейство $\zeta_a, a = 0, n \Leftrightarrow p + 1, \ldots, n$, аффинным преобразованием приведем к семейству $\nu_0 = \zeta_0 \Leftrightarrow \zeta_0^b(z)\zeta_b, \nu_a = \zeta_a,\ a, b = n \Leftrightarrow p + 1, \ldots, n$. Таким образом, $\nu_0^b = 0,\ b = n \Leftrightarrow p + 1, \ldots, n$. Так как данное семейство является аффинно полным, то $[\nu_0, \nu_a] = h_a^b \nu_b,\ a, b = n \Leftrightarrow p + 1, \ldots, n$. Легко видеть, что в данном случае $h_a^b = 0$. Отсюда следует, что компоненты $\nu_0^l, l = 1, \ldots, n \Leftrightarrow p$, не зависят от $z^{n-p+1}, \ldots, z^n$. Рассмотрим в области изменения переменных $z^1, \ldots, z^{n-p}$ поле $\tilde{\nu}_0 = \nu_0^l \partial/\partial z^l,\ l = 1, \ldots, n \Leftrightarrow p$. Так как $\dim SpanF = p + 1$, то $\nu_0 \neq 0$ и, следовательно, $\tilde{\nu}_0 \neq 0$. Согласно теореме 1.3, неособое векторное поле заменой переменных можно выпрямить. Следовательно, поле $\tilde{\nu}_0$ локально диффеоморфно полю $\partial/\partial x^{n-p}$ относительно некоторого диффеоморфизма $x^l = \psi^l(z^1, \ldots, z^{n-p}),\ l = 1, \ldots, n \Leftrightarrow p$. Теперь осталось заметить, что под действием диффеоморфизма

$$x^l = \psi^l(z^1, \ldots, z^{n-p}),\ l = 1, \ldots, n \Leftrightarrow p,$$

$$x^k = z^k,\ k = n \Leftrightarrow p + 1, \ldots, n,$$

поля $\nu_a, a = 0, n \Leftrightarrow p + 1, \ldots, n$, перейдут в диффеоморфные поля (1.162). □

Далее через K обозначается t-кораспределение, порожденное t-системой Пфаффа (1.156), в терминах которой сформулированы нижеследующие утверждения. (Соответственно, $\mathbf{C}_t K$ — t-характеристическое распределение, K_1 — t-кораспределение из двойственного производного ряда (1.111).)

Теорема 1.21. *Вполне интегрируемая t-система Пфаффа* (1.156) *локально t-эквивалентна в регулярной точке распределения* $\operatorname{Span} K_\perp$ *t-системе*

$$dx^k = 0, \quad k = 1, \ldots, q, \tag{1.163}$$

если $\dim \operatorname{Span} K_\perp = n \Leftrightarrow q$, *и t-системе*

$$\begin{cases} dx^q \Leftrightarrow dt = 0, \\ \qquad dx^k = 0, \end{cases} \tag{1.164}$$

$$k = 1, \ldots, q \Leftrightarrow 1,$$

если $\dim \operatorname{Span} K_\perp = n \Leftrightarrow q + 1$.

Доказательство. Рассмотрим семейство с отмеченным полем (1.154), которое является взаимным к t-системе Пфаффа (1.156) (где $p = n \Leftrightarrow q$). Сопоставим этому семейству семейство полей, заданных в $M \times R^1$,

$$\tilde{\xi}, \hat{\xi}_a, \quad a = 1, \ldots, p, \tag{1.165}$$

где $\tilde{\xi}_0 = (\xi_0, 1) = (\xi_0^1, \ldots, \xi_0^n, 1)$, $\hat{\xi}_a = (\xi_a, 0) = (\xi_a^1, \ldots, \xi_a^n, 0), a = 1, \ldots, p$. Семейство (1.165) будем трактовать как семейство векторных полей без отмеченного поля. Нетрудно видеть, что семейство (1.165) является линейно несвязанным и взаимным (как семейство без отмеченного поля) к системе Пфаффа (1.156). Отсюда следует, что семейство (1.165) является полным, что равносильно тому, что семейство (1.154) с отмеченным полем является аффинно полным. Теперь из предложения 1.37 и теоремы 1.20 вытекает утверждение данной теоремы. Действительно, семейство (1.161) является взаимным к системе (1.163), а семейство (1.162) — к системе (1.164). □

Теорема 1.22. *Пусть $\mathbf{C}_t K \subset P$, где P — регулярное вполне интегрируемое кораспределение, заданное в области M и имеющее ранг s.*

Тогда t-система Пфаффа (1.156) локально t-эквивалентна t-системе Пфаффа вида

$$\Omega^k = \Omega^k_j(x^1, \ldots, x^s)dx^j + \Omega^k_{n+1}(x^1, \ldots, x^s)dt = 0, \tag{1.166}$$

$$k = 1, \ldots, q, \quad j = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. Если $s = n$, то доказывать нечего. Пусть $s < n$. Согласно теореме 1.13, распределение $P^\perp$ в некоторой (локальной) системе координат имеет базисное семейство вида (1.137), где $p = n \Leftrightarrow s$. Согласно доказательству этой теоремы, замена переменных определяется полным набором интегралов $P^\perp$. t-Система (1.156) под действием соответствующего t-диффеоморфизма перейдет в некоторую t-систему

$$\mu^k = \mu^k_i(x)\,dx^i + \mu^k_{n+1}(x)\,dt = 0, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{1.167}$$

Так как $P^\perp \subset (\mathbf{C}_t K)^\perp$, то $\eta_a \in (\mathbf{C}_t K)^\perp$. Поэтому из доказательства теоремы 1.12 следует, что

$$\mu^k_i \eta^i_a = 0, \quad k = 1, \ldots, q, \quad a = s+1, \ldots, n, \tag{1.168}$$

$$\operatorname{rank} \begin{Vmatrix} \mu^k_{i1}\eta^i_a & \cdots & \mu^k_{i,n+1}\eta^i_a \\ \mu^1_1 & \cdots & \mu^1_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu^q_1 & \cdots & \mu^q_{n+1} \end{Vmatrix} = q, \tag{1.169}$$

$k = 1, \ldots, q$, $a = s+1, \ldots, n$, $\eta^i_a = \delta^i_a$ — компоненты η_a. Из (1.168) вытекает, что $\mu^k_i = 0, i = s+1, \ldots, n$. Равенства (1.169) равносильны существованию таких гладких функций $\lambda^k_l(x)$, что

$$\mu^k_{ij}\eta^i = \lambda^k_l \mu^l_j, \quad j = 1, \ldots, n+1.$$

Эти равенства можно переписать так:

$$\frac{\partial \mu^k_j}{\partial x^i} = \lambda^k_l \mu^l_j, \tag{1.170}$$

$$k = 1, \ldots, q, \quad i = s+1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n+1.$$

Покажем, что t-систему (1.167) с помощью линейно невырожденного преобразования

$$\theta^r = \nu^r_k(x)\mu^k \tag{1.171}$$

можно привести к t-эквивалентной t-системе

$$\theta^r = \theta^r_j(x)\,dx^j + \theta^r_{n+1}(x)\,dt = 0, \quad k = 1, \ldots, q, \tag{1.172}$$

компоненты которой не зависят от x^{s+1}. Будем искать функции $\nu_k^r(x)$ из условия

$$\frac{\partial\theta_j^r}{\partial x^{s+1}} = \frac{\partial\nu_k^r}{\partial x^{s+1}}\mu_j^k + \nu_k^r\frac{\partial\mu_j^k}{\partial x^{s+1}} = \frac{\partial\nu_k^r}{\partial x^{s+1}}\mu_j^k + \nu_l^r\lambda_k^l\mu_j^k = \\ = \mu_j^k\left(\frac{\partial\nu_k^r}{\partial x^{s+1}} + \nu_l^r\lambda_k^l\right) = 0.$$

Так как уравнения (1.167) линейно несвязаны, то эти равенства выполняются тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial\nu_k^r}{\partial x^{s+1}} = \Leftrightarrow\nu_l^r\lambda_k^l(x). \tag{1.173}$$

Эти соотношения при фиксированных $x^j, j \neq s+1$, можно трактовать как систему однородных линейных дифференциальных уравнений. Теперь ясно, что в качестве матрицы $\|\nu_k^r\|$ можно взять фундаментальную матрицу решений этой системы. Аналогичным образом t-систему (1.172) можно привести к t-системе, компоненты которой не зависят от x^{s+2}, и т.д. $\square$

Замечание 1.16. Если $\mathbf{C}_t K$ — регулярное кораспределение и под кораспределением P в условии теоремы понимать $\mathbf{C}_t K$, то соответствующая t-система Пфаффа (1.166) характеризуется тем, что она зависит от минимально возможного числа переменных (равного рангу $\mathbf{C}_t K$) среди всех t-систем Пфаффа, t-эквивалентных (1.156). Это доказывается рассуждениями, аналогичными тем, которые используются в классическом случае обычных систем Пфаффа [10]. Отметим, что, согласно доказательству теоремы 1.22, переход к системе (1.166) осуществляется в этом случае с помощью замены координат, в которую входят интегралы $\mathbf{C}_t K$, а также некоторых линейных преобразований.

Теорема 1.23. *Пусть K_1 — регулярное t-кораспределение, для которого $\dim K_1 = p > 0$. Тогда t-система Пфаффа (1.156) локально t-эквивалентна t-системе Пфаффа*

$$\Omega^k = \Omega_i^k(y)\,dy^i + \Omega_{n+1}^k(y)\,dt = 0, \quad k = 1,\ldots,q, \tag{1.174}$$

где первые p уравнений составляют базисную t-систему Пфаффа K_1, причем

$$d\Omega^k = \sum_{j=1}^{q}\lambda^{jk}\wedge\Omega^j, \quad k = 1,\ldots,p, \tag{1.175}$$

где λ^{jk} — некоторые формы Пфаффа.

Доказательство. Так как $K_1 \subset K$, то существует (по крайней мере, локально) базисная t-система Пфаффа (1.174) t-кораспределения K, первые p уравнений которой образуют базисную t-систему Пфаффа t-кораспределения K_1. Очевидно, что t-система (1.156) (локально) эквивалентна t-системе (1.174). Докажем (1.175). Дополним формы Пфаффа $\Omega^k, k = 1, \dots, q$, до $n+1$ линейно несвязанных форм Пфаффа $\Omega^k, k = 1, \dots, n+1$, компоненты которых можно считать не зависящими от t. Согласно разделу 1.4, имеем

$$d\Omega^k = \sum_{i<j} \Omega^k_{ij} \Omega^i \wedge \Omega^j, \quad k = 1, \dots, p, \quad i, j = 1, \dots, n+1.$$

Для доказательства (1.175) достаточно показать, что

$$\Omega^k_{ij}(y) = 0, \quad i, j > q. \tag{1.176}$$

Согласно (1.85), $\Omega^k_{ij} = d\Omega^k(\eta_i, \eta_j)$, где $\eta_i, i = 1, \dots, n+1$, — двойственное семейство векторных полей к $\Omega^k, k = 1, \dots, n+1$. Напомним, что $\Omega^k(\eta_i) = \delta^k_i$. Заметим, что поля $\eta_i, i = q+1, \dots, n+1$, составляют взаимное семейство к системе Пфаффа (1.174). Рассмотрим базисное семейство аффинного распределения $K_\perp$: $\xi_i, i = 0, 1, \dots, n \Leftrightarrow q$. Поставим ему в соответствие семейство полей, заданное в области изменения переменных y, t: $\xi'_0 = (\xi_0, 1), \xi'_i = (\xi_i, 0), i = 1, \dots, n \Leftrightarrow q$. Семейства $\eta_i, i = q+1, \dots, n+1$, и $\xi'_i, i = 0, 1, \dots, n \Leftrightarrow q$, являются эквивалентными. Поэтому равенства (1.176) будут иметь место, если

$$d\Omega^k(\xi'_i, \xi'_j) = 0, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \Leftrightarrow q. \tag{1.177}$$

Согласно (1.88), имеем

$$d\Omega^k(\xi'_i, \xi'_j) = \xi'_i \Omega^k(\xi'_j) \Leftrightarrow \xi'_j \Omega^k(\xi'_j) \Leftrightarrow \Omega^k([\xi'_i, \xi'_j]).$$

Из определения $(K_1)_\perp$ (см. раздел 1.4) следует, что $[\xi_i, \xi_j] \in \mathbf{L}_{(K_1)_\perp}$. Поэтому $\Omega^k([\xi'_i, \xi'_j]) = 0$. Далее, так как $\xi_0 \in K_\perp, \xi_j \in \mathbf{L}_{K_\perp}, j = 1, \dots, n \Leftrightarrow q$, то $\Omega^k(\xi'_j) = 0, j = 0, 1, \dots, n \Leftrightarrow q$. Следовательно, справедливы равенства (1.177). □

Замечание 1.17. Из теоремы 1.23 вытекает, что внешние дифференциалы $d\Omega^k, k = 1, \dots, p$, равны нулю в силу (1.174). Этот факт можно интерпретировать также следующим образом. Запишем $d\omega^k$ в стандартном базисе (см. (1.83)):

$$d\Omega^k = \sum_{i<j} \Omega_{ij}(y, t) dy^i \wedge dy^j + \sum_{i=1}^{n} \Omega_{i,n+1}(y, t) dy^i \wedge dt,$$

$$i, j = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, q.$$

Выразим q дифференциалов dy^{i_r}, $r = 1, \ldots, q$, из (1.174) и подставим в указанные выражения для $d\Omega^k$. Из теоремы 1.23 легко следует, что для $k = 1, \ldots, p$ эти выражения тождественно обратятся в нуль. Для $k > p$ эти выражения не обратятся в нуль ни в какой точке (y, t). Последнее утверждение равносильно следующему: для произвольной точки (y_0, t) не существует таких форм $\lambda^j \in T^*(M \times R^1)_{(y_0,t)}$, что

$$d\Omega^k(y_0, t) = \sum_{j=1}^{q} \lambda^j \wedge \Omega^j(y_0, t), \quad k > p. \tag{1.178}$$

Для того чтобы доказать этот факт, достаточно показать, что из (1.178) вытекает

$$\Omega^k(y_0, t) \in K_1(y_0, t), \quad k > p, \tag{1.179}$$

ибо (1.179) противоречит тому, что $\dim K_1(y_0, t) = p$. Возьмем два произвольных поля $\xi, \eta \in K_\perp$. Пусть $\tilde{\xi} = (\xi, 1), \tilde{\eta} = (\eta, 1)$. Из (1.178) вытекает, что $d\Omega^k(y_0, t)(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = 0$. Согласно (1.88), имеем

$$d\Omega^k(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \tilde{\xi}\Omega^k(\tilde{\eta}) \Leftrightarrow \tilde{\eta}\Omega^k(\tilde{\xi}) \Leftrightarrow \Omega^k([\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]).$$

Поэтому в точке $(y_0, t) \quad \Omega^k([\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]) = 0$. Отсюда следует (1.179).

Теорема 1.24. *t-Уравнение Пфаффа (каковым является t-система Пфаффа* (1.156) *при $q = 1$)*

$$\omega = \omega_i(y)\, dy^i + \omega_{n+1}(y)\, dt = 0 \tag{1.180}$$

в точке, являющейся регулярной для кораспределения $\mathbf{C}_t K$ и в которой $\omega_{n+1} \neq 0$, локально t-эквивалентно одному из следующих уравнений:

$$dx^n \Leftrightarrow dt = 0, \tag{1.181}$$

$$dx^n \Leftrightarrow x^1 dx^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{2k-1} dx^{2k} \Leftrightarrow dt = 0, \tag{1.182}$$

$$dx^n \Leftrightarrow x^{n-1} dt = 0, \tag{1.183}$$

$$dx^n \Leftrightarrow x^1 dx^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{2j-1} dx^{2j} \Leftrightarrow x^{n-1} dt = 0, \tag{1.184}$$

где $k, j = 1, \ldots, (n \Leftrightarrow 2)/2$, если n четно, $n \geqslant 4$; $k = 1, \ldots, (n \Leftrightarrow 1)/2$, если n нечетно, $n \geqslant 3$; $j = 1, \ldots, (n \Leftrightarrow 3)/2$, если n нечетно, $n \geqslant 5$. Число переменных в каждой из систем (1.181)–(1.184) *равно рангу $\mathbf{C}_t K$.*

Доказательство. Разделим (1.180) на ω_{n+1}. В результате уравнение (1.180) преобразуется в t-эквивалентное уравнение

$$a_i(y)\,dy^i + dt = 0. \tag{1.185}$$

Построим систему Пфаффа вида (1.105), (1.106), порождающую t-характеристическое кораспределение $\mathbf{C}_t K$. Эта система будет иметь вид

$$a_i(y)\,dy^i = 0, \tag{1.186}$$

$$(a_{ij}a_{j_1} \Leftrightarrow a_{ij_1}a_j)dy^i = 0, \quad 1 \leqslant j < j_1 < n+1, \tag{1.187}$$

$$a_{ij}dy^i = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.188}$$

где $a_{ij} = (\partial a_j/\partial y^i) \Leftrightarrow (\partial a_i/\partial y^j)$. Очевидно, что $\mathbf{C}_t K$ порождается системой Пфаффа (1.186), (1.188). Система (1.186), (1.188) совпадает с характеристической системой Пфаффа формы Пфаффа $a = a_i(y)\,dy^i$ (которая отличается от характеристической системы уравнения Пфаффа $a = a_i(y)\,dy^i = 0$). Согласно теореме 1.19, если число линейно несвязанных форм этой системы, называемое классом формы a, равно p, то форма a с помощью только замены переменных (которая строится с использованием интегралов системы (1.186), (1.188)) без применения линейного преобразования приводится к форме, зависящей от p переменных. Класс p может быть любым числом от 1 до n. Если p — нечетное число, то форма a приводится к виду (1.150) или к виду (1.151). Очевидно, что после такой замены переменных уравнение Пфаффа (1.185) перейдет в t-эквивалентное уравнение (1.181) или (1.182). Если p — четное число, то форма a приводится к виду (1.152) или к виду (1.153). Очевидно, что уравнение (1.185) при этом приводится к соответствующему t-эквивалентному уравнению

$$x^{n-1}dx^n \Leftrightarrow dt = 0, \tag{1.189}$$

$$x^{n-1}dx^n \Leftrightarrow x^1dx^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{2j-1}dx^{2j} \Leftrightarrow dt = 0. \tag{1.190}$$

Уравнения (1.189), (1.190) заменой переменных вида

$$(1/x^{n-1}) \mapsto x^{n-1}, \quad (x^i/x^{n-1}) \mapsto x^i, \quad i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1,$$

приводятся к уравнениям (1.183), (1.184). (Здесь предполагается без ограничения общности, что в рассматриваемой окрестности $x^{n-1} \neq 0$.) $\square$

1.6. Группы диффеоморфизмов

Введем сначала понятие группы преобразований произвольного множества M. Пусть $\Xi(M)$ — множество всех биекций M, т.е. взаимно однозначных отображений множества M на себя. Суперпозиция биекций $\psi, \varphi \in \Xi(M)$ также принадлежит $\Xi(M)$ и обозначается через $\psi\varphi$ (здесь имеется в виду, что на точки M сначала действует φ, а затем ψ). Тождественное отображение (которое оставляет все точки M на месте) естественно принадлежит $\Xi(M)$ и обозначается через e_M. Каждой биекции $\psi \in \Xi(M)$ соответствует обратное отображение $\psi^{-1} \in \Xi(M)$, т.е. такое отображение, что $\psi\psi^{-1} = \psi^{-1}\psi = e_M$.

Множество $S \subset \Xi(M)$ называется группой преобразование M, если:

1) $s_1, s_2 \in S \Longrightarrow s_1 s_2 \in S$,

2)$s \in S \Longrightarrow s^{-1} \in S$.

Из определения группы S следует, что $e_M \in S$.

Введем понятие однопараметрической группы диффеоморфизмов. Пусть M — область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим совокупность преобразований

$$G = \{g^t : t \in \mathbb{R}^1\} \subset \Xi(M),$$

каждое из которых является диффеоморфизмом. Введем отображение $H : \mathbb{R}^1 \times M \to M$, определяемое равенством $H(t, y) = g^t(y)$. Предположим, что для каждого фиксированного $y \in M$ выполняются свойства:

1) отображение H гладко зависит от t на $\mathbb{R}^1$,
2) $g^0(y) = y$,
3) $g^{t_2}(g^{t_1}(y)) = g^{t_1+t_2}(y)$,
4) $g^{-t}(g^t(y)) = y$.

Из свойств 3), 4) следует, что

$$g^{t_2}g^{t_1} = g^{t_1+t_2} \in G, \quad (g^t)^{-1} = g^{-t} \in G,$$

т.е. G — группа преобразований M, которая называется глобальной однопараметрической группой диффеоморфизмов области M (обычно слово «глобальная» опускают). Заметим, что $g^0 = e_M$, H — гладкое отображение $R^1 \times M$ в M, а свойство 4) является следствием свойств 2), 3).

Пример 1.7. Приведем некоторые «стандартные» однопараметрические группы диффеоморфизмов:

а) группа сдвигов $M = \mathbb{R}^1$, состоящая из преобразований

$$g^t \colon y \mapsto y + t,$$

б) группа растяжений $M = \mathbb{R}^1$, состоящая из преобразований

$$g^t \colon y \mapsto ye^t,$$

в) группа вращений $M = \mathbb{R}^2$, состоящая из преобразований

$$g^t \colon (x, y) \mapsto (x \cos t \Leftrightarrow y \sin t, x \sin t + y \cos).$$

Введем обобщение понятия однопараметрической группы. Рассмотрим совокупность локальных диффеоморфизмов $G = \{g^t \colon t \in \mathbb{R}^1\}$ области $M \subset \mathbb{R}^n$. Для каждого $g^t \in G$ существуют такие области $\operatorname{dom} g^t, \operatorname{ran} g^t$ (возможно, пустые), что g^t представляет собой диффеоморфизм $\operatorname{dom} g^t$ на $\operatorname{ran} g^t$. Суперпозиция $g^{t_2}g^{t_1}$ есть локальный диффеоморфизм, причем

$$\operatorname{dom}(g^{t_2}g^{t_1}) = (g^{t_1})^{-1}(\operatorname{dom} s^{t_2}), \quad \operatorname{ran}(g^{t_2}g^{t_1}) = g^{t_2}(\operatorname{ran} g^{t_1} \cap \operatorname{dom} g^{t_2}).$$

Введем множество $U \subset \mathbb{R}^1 \times M$, на котором определено отображение $H \colon U \to M$, задаваемое равенством $H(t, y) = g^t(y)$. Пусть для каждого фиксированного $y \in M$ выполняются свойства:

1) множество чисел $t \in \mathbb{R}^1$, для которых $y \in \operatorname{dom} g^t$, является интервалом I_y, на котором отображение H гладко зависит от t;

2) $g^0(y) = y$;

3) если $y \in \operatorname{dom}(g^{t_2} g^{t_1})$, то $y \in \operatorname{dom} g^{t_1+t_2}$, причем

$$g^{t_2} g^{t_1}(y) = g^{t_1+t_2}(y);$$

4) если $y \in \operatorname{dom} g^t$, то $g^t(y) \in \operatorname{dom} g^{-t}$, причем $g^{-t} g^t(y) = y$.

Из этих свойств следует, что U — область в $\mathbb{R}^1 \times M$, содержащая множество $\{0\} \times M$, а H — гладкое отображение U в M. Кроме того, $(g^t)^{-1} = g^{-t}$, причем $\operatorname{dom} g^t = \operatorname{ran} g^{-t}$, $\operatorname{ran} g^t = \operatorname{dom} g^{-t}$.

Совокупность локальных диффеоморфизмов G, удовлетворяющая свойствам 1)–4), называется локальной однопараметрической группой диффеоморфизмов области M (часто область определения U не уточняют, а слово «локальная» опускают). Заметим, что единственное отличие от глобальной группы заключается в виде области U, в которой определено отображение H: если $U = \mathbb{R}^1 \times M$, то локальная группа является глобальной.

Пример 1.8. Преобразования

$$g^t \colon y \mapsto \frac{y}{1 \Leftrightarrow ty}$$

являются локальными диффеоморфизмами $M = \mathbb{R}^1$ и образуют локальную однопараметрическую группу. В данном случае отображение H определено в области

$$U = \{(t, y) \colon 1 \Leftrightarrow ty > 0\} \subset R^1 \times M.$$

Рассмотрим связь между векторными полями и однопараметрическими группами диффеоморфизмов, которая по существу является интерпретацией хорошо известной связи между системами дифференциальных уравнений и их решениями.

Каждая (локальная и глобальная) однопараметрическая группа G определяет векторное поле

$$\xi = \xi^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

по формулам

$$\xi^i(y) = \left. \frac{\partial H^i}{\partial t} \right|_{t=0},$$

где $H(t, y) = g^t(y)$. При этом для каждой точки y_0 кривая

$$y(t) = H(t, y_0) = g^t(y_0), \quad t \in I_{y_0},$$

является интегральной кривой поля ξ, удовлетворяющей начальному условию $y(0) = y_0$. Действительно, докажем равенство

$$\left(\frac{\partial H^i(t, y_0)}{\partial t}\right)_{t=t_1} = \xi^i(H(t_1, y_0)), \quad \forall t \in I_{y_0}. \tag{1.191}$$

Согласно свойствам 1) и 3) в определении G, для достаточно малых $\tau \in \mathbb{R}^1$ имеем равенства

$$H^i(t_1 + \tau, y_0) = H^i(\tau, H(t_1, y_0)).$$

Дифференцируя эти равенства по τ в точке $\tau = 0$, получаем в левой части

$$\left(\frac{\partial H^i(t_1 + \tau, y_0)}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = \left(\frac{\partial H^i(t, y_0)}{\partial t}\right)_{t=t_1}$$

(здесь использована замена $t_1 + \tau = t$), а в правой части — $\xi^i(H(t_1, y_0))$. Сравнивая, получим (1.191).

Обратно, пусть в области $M \subset \mathbb{R}^n$ задано векторное поле

$$\xi = \xi^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Предположим сначала, что поле ξ является полным. Это означает, что решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}^i = \xi^i(y), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.192}$$

для любой начальной точки $y_0 \in M$ определено при всех $\mathbb{R}^1$. Введем отображение $H: \mathbb{R}^1 \times M \to M$ по правилу: $y(t) = H(t, y_0)$ — интегральная кривая поля ξ, определенная на $\mathbb{R}^1$, причем $y(0) = y_0$. Иными словами, отображение H задает общее решение системы (1.192). Покажем, что совокупность преобразований $G = \{g^t : t \in \mathbb{R}^1\}$ области M, таких, что $g^t(y) = H(t, y)$, является глобальной однопараметрической группой диффеоморфизмов. Во-первых, в силу известных теорем о дифференцируемости решений системы дифференциальных уравнений по t и по начальным условиям, отображение H является гладким [52]. Следовательно, каждое отображение g^t — гладкое, и выполняется свойство 1) в определении однопараметрической группы. Из определения H следует, что $H(0, y) = g^0(y) = y, \forall y \in M$, т.е. выполняется свойство 2). Докажем свойство 3). Фиксируем $t_1 \in \mathbb{R}^1$ и рассмотрим кривую $y(t) = H(t + t_1, y)$. Из равенств

$$\frac{\partial H^i(t + t_1, y)}{\partial t} = \frac{\partial H^i(t + t_1, y)}{\partial (t + t_1)} = \xi^i(H(t + t_1))$$

следует, что $y(t)$ — решение системы (1.192), причем с начальным условием $y(0) = H(t_1, y)$. С другой стороны, по определению, решение системы (1.192) с таким начальным условием записывается следующим образом: $H(t, H(t_1, y))$. Из единственности решения следует, что

$$H(t_2, H(t_1, y)) = H(t_2 + t_1, y), \quad \forall t_2 \in \mathbb{R}^1.$$

Это и означает выполнение свойства 3). Свойство 4) следует из свойств 2), 3).

Если поле ξ не полное, то аналогично определяется отображение H по правилу: $H(t, y_0) = y(t)$ — интегральная кривая поля ξ, определенная на максимальном интервале $I_{y_0} \subset \mathbb{R}^1$, причем $y(0) = y_0$. В данном случае отображение H определено на некотором множестве $U \subset \mathbb{R}^1 \times M$, содержащем $\{0\} \times M$. При этом преобразования $g^t(y) = H(t, y)$ являются локальными диффеоморфизмами области M. Аналогично, как и для полного поля, можно показать, что преобразования g^t составляют локальную однопараметрическую группу диффеоморфизмов $G = \{g^t : t \in \mathbb{R}^1\}$ (подробности в [8]).

Итак, полное (неполное) векторное поле порождает глобальную (локальную) однопараметрическую группу диффеоморфизмов. Далее в любом случае будет использоваться, как правило, более короткая фраза: поле порождает однопараметрическую группу. При этом, если в какой-либо формуле не указана область определения, то предполагается справедливость этой формулы там, где она имеет смысл.

Пример 1.9. Векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial y}, \quad y\frac{\partial}{\partial y}, \quad \Leftrightarrow y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

порождают глобальные однопараметрические группы, рассмотренные в примере 1.7. Векторное поле

$$y^2\frac{\partial}{\partial y}$$

порождает локальную однопараметрическую группу, рассмотренную в примере 1.8.

Пусть векторное поле $\xi \in \mathcal{T}(M)$ порождает однопараметрическую группу $G = \{g^t\}$. Для любой гладкой функции $\Phi(y)$, заданной в области M, фиксируя точку y, получим функцию $\Phi(g^t(y))$, зависящую от t. Применяя к этой функции формулу Тейлора в окрестности точки $t = 0$, получим

$$\Phi(g^t(y)) = \Phi(y) + t\xi\Phi(y) + o(t). \tag{1.193}$$

В частности, для функции $\Phi = y^i$ имеем

$$(g^t)^i(y) = y^i + t\xi^i(y) + o(t). \tag{1.194}$$

Гладкая функция Φ называется инвариантом однопараметрической группы G, если $\Phi(y) = \Phi(g^t(y)), \forall y \in M, t \in I_y$.

Предложение 1.39. *Инварианты однопараметрической группы G суть интегралы векторного поля ξ, которое порождает G.*

Доказательство. Если $\Phi(y)$ —инвариант, то из (1.193) легко следует, что $\xi\Phi(y) = 0$, т.е. $\Phi(y)$ — интеграл поля ξ. Обратно, пусть Φ является интегралом поля ξ. Возьмем произвольную точку y_0 и введем функцию $F(t) = \Phi(g^t(y_0))$. Имеем в каждой точке $t \in I_{y_0}$ равенство

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial y^i}\xi^i(g^t(y_0)) = \xi\Phi|_{y=g^t(y_0)} = 0.$$

Следовательно, $F(t) = \mathrm{const}$, т.е. $\Phi(y)$ — инвариант. $\square$

Доказанное утверждение представляет собой другую формулировку упоминавшегося в разделе 1.3 утверждения: интегралы векторного поля представляют собой функции, которые принимают постоянные значения на интегральных траекториях.

Дадим теперь интерпретацию понятий f-связности, f-проектируемости векторных полей, а также касания полем многообразия, рассмотренных в разделе 1.3, в терминах однопараметрических групп.

Предложение 1.40. *Пусть векторные поля*

$$\xi = \xi^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \eta = \eta^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k},$$

заданные в областях $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$, порождают в этих областях однопараметрические группы $G = \{g^t\}$, $H = \{h^t\}$, и пусть задано гладкое отображение $f\colon M \to N$. Тогда для каждой точки $y \in M$ выполняются соотношения

$$fg^t(y) = h^t f(y), \quad t \in I_y. \tag{1.195}$$

Доказательство. Предположим, что поля ξ и η являются f-связанными. Для произвольной точки $y \in M$ рассмотрим в области N гладкую кривую $c(t) = fg^t(y)$. Имеем, согласно определению f-связанности (1.12),

$$\frac{dc^k}{dt} = \frac{\partial f^k}{\partial y^i}\xi^i(g^t(y)) = \eta^k(f(g^t(y))) = \eta^k(c(t)),$$

$$k = 1, \ldots, m.$$

Следовательно, $c(t)$ является интегральной кривой поля η с начальным условием $c(0) = f(y)$. С другой стороны, кривая $h^t(f(y))$ также является интегральной кривой поля η с тем же начальным условием. Отсюда вытекает (1.195).

Обратно, пусть справедливо (1.195). Возьмем произвольную точку $y \in M$ и положим $c(t) = h^t f(y) = f g^t(y)$. Имеем равества

$$\left.\frac{dc^k}{dt}\right|_{t=0} = \eta^k(f(y)) = \frac{\partial f^k}{\partial y^i}\xi^i(y), \quad k = 1, \ldots, m,$$

т.е. поля ξ и η являются f-связанными. $\square$

Интерпретацию понятия f-проектируемости для нас удобно будет сделать с использованием понятия регулярного отношения эквивалентности.

Пусть на множестве M задано отношение эквивалентности R. Говорят, что R совместимо с биекцией $\psi \in \Xi(M)$, если

$$aRb \Longrightarrow \psi(a)R\psi(b).$$

Будем говорить также, что отношение эквивалентности R совместимо с группой $G \subset \Xi(M)$, если

$$aRb, g \in G \Longrightarrow g(a)Rg(b). \tag{1.196}$$

Ясно, что тривиальные отношения эквивалентности π_0, π_1 (которые определены в разделе 1.1) совместимы с любой группой. Если существует нетривиальное отношение эквивалентности R, совместимое с группой G, то G называется импримитивной группой, а классы эквивалентности R называются системами импримитивности группы G. Если не существует нетривиальных отношений эквивалентности, совместимых с группой G, то G называется примитивной группой.

Пусть M — область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Отношение эквивалентности R, заданное в области M, называется регулярным, если существует такой набор функционально независимых функций

$$\varphi^k(y), \quad k = 1, \ldots, m \leqslant n, \tag{1.197}$$

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial \varphi^k}{\partial y^i} \right\|_{i=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,m} = m, \quad \forall y \in M,$$

что

$$y_1 R y_2 \Longleftrightarrow \varphi^k(y_1) = \varphi^k(y_2), \quad k = 1, \ldots, m. \tag{1.198}$$

Для регулярного отношения эквивалентности R, задаваемого функциями (1.197), характерно то, что на фактормножестве M/R можно ввести структуру области в R^m, причем канонической проекцией будет субмерсия. Действительно, рассмотрим отображение $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^m$, определяемое функциями (1.197). Согласно предложению 1.2, множество $\tilde{M} = \varphi(M) \subset \mathbb{R}^m$ является областью. Область $\tilde{M}$ можно отождествить с фактормножеством M/R, а отображение φ — с канонической проекцией $M \to M/R$. Действительно, при отображении φ все точки области M, принадлежащие одному классу эквивалентности, переходят в одну точку множества $\tilde{M}$, которую можно идентифицировать с этим классом. Фактически с помощью данных рассуждений вводится некоторая система координат на фактормножестве M/R. Заметим, что каждый класс эквивалентности является $n{\Leftrightarrow}m$-мерным многообразием

$$\varphi^k(y) = c^k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{1.199}$$

где $c^k = \text{const}$.

Если задана некоторая сюръективная субмерсия φ области $M \subset \mathbb{R}^n$ на область $N \subset \mathbb{R}^m$, задаваемая функциями (1.197), то очевидно, что N можно трактовать как фактормножество по регулярному отношению эквивалентности R в соответствии с определением (1.198). Будем говорить, что φ индуцирует отношение эквивалентности R.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — область, а R — отношение эквивалентности на M. Определение совместимости отношения эквивалентности с локальным диффеоморфизмом ψ по существу остается прежним, если учитывать область определения $\operatorname{dom}\psi \subset M$ локального диффеоморфизма ψ в соответствии с принятым ранее соглашением: сформулированные утверждения и записанные выражения верны там, где они имеют смысл. Если R — регулярное отношение эквивалентности, задаваемое функциями (1.197), то определение совместимости R с локальной однопараметрической группой диффеоморфизмов G можно записать так:

$$\varphi^k(y_1) = \varphi^k(y_2) \Longrightarrow \varphi^k(g^t(y_1)) = \varphi^k(g^t(y_2)), \tag{1.200}$$

$$k = 1, \ldots, m.$$

Следующее утверждение представляет собой условие φ-проектируемости векторного поля в терминах однопараметрической группы, порождаемой этим полем, если φ — сюръективная субмерсия.

Предложение 1.41. *Пусть G является однопараметрической группой диффеоморфизмов области M, которая порождается полем ξ, отображение $\varphi\colon M \to N$ является сюрьективной субмерсией, а R —*

регулярное отношение эквивалентности на M, индуцируемое отображением φ. Поле ξ φ-проектируемо тогда и только тогда, когда R совместимо с G.

Доказательство. Пусть поле ξ является φ-проектируемым и пусть поле $\eta = \varphi_* \xi$ порождает однопараметрическую группу $H = \{h^t\}$ диффеоморфизмов области N. Возьмем точки $y_1, y_2 \in M$, такие, что $y_1 R y_2$. Согласно предложению 1.40,

$$\varphi g^t(y_l) = h^t \varphi(y_l), \quad k = 1, \ldots, m, \quad l = 1, 2.$$

Так как $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$, то $\varphi(g^t(y_1)) = \varphi(g^t(y_2))$, т.е. $g^t(y_1) R g^t(y_2)$. Следовательно, R совместимо с G.

Обратно, предположим, что отношение эквивалентности R, порождаемое функциями (1.197), совместимо с S. Пусть $y_1 R y_2$. Дифференцируя равенства

$$\varphi^k(g^t(y_1)) = \varphi^k(g^t(y_2)), \quad k = 1, \ldots, m,$$

по t в точке $t = 0$, получим, что $\varphi_*|_{y_1} \xi(y_1) = \varphi_*|_{y_1} \xi(y_2)$. Из предложения 1.3 вытекает, что поле ξ является φ-проектируемым. □

Напомним определение касания полем многообразия. Пусть поле $\xi \in \mathcal{T}(M)$ и $N \subset M$ — многообразие. Говорят, что поле ξ касается N, если в каждой точке $y \in N$ касательный вктор $\xi(y)$ принадлежит касательному пространству TN_y многообразия. Это понятие эквивалентно понятию локальной инвариантности многообразия однопараметрической группы диффеоморфизмов $G = \{g^t\}$, порождаемой полем ξ. Многообразие N называется локально инвариантным, если для каждой точки $y_0 \in N$ найдется такой интервал $J \subset \mathbb{R}^1$, причем $0 \in J$, что $g^t(y_0) \in N, t \in J$. Многообразие N называется инвариантным, если для каждой точки $y_0 \in N$ интервал J совпадает со всем интервалом I_{y_0}, на котором определена интегральная кривая $g^t(y_0)$ поля ξ, которое порождает локальную группу G.

Предложение 1.42. *Векторное поле $\xi \in \mathcal{T}(M)$ касается многообразия $N \subset M$ тогда и только тогда, когда N является локально инвариантным многообразием однопараметрической группы диффеоморфизмов, порождаемой полем ξ.*

Доказательство. Пусть поле ξ касается N. Возьмем произвольную точку y_0 многообразия N и некоторую карту (V, χ), такую, что $x_0 = \chi^{-1}(y_0) \in V$. В соответствии с предложением 1.5 в области V существует индуцированное поле $\overline{\xi}$, такое, что $\xi = \chi_* \overline{\xi}$. Из предложения 1.40 вытекает, что на некотором интервале J

$$\chi \overline{g}^t(x_0) = g^t \chi(x_0).$$

Следовательно, $g^t(y_0) = g^t\chi(x_0) \in N$.

Обратно, пусть для произвольной точки y_0 существует такой интервал J,что $g^t(y_0) \in N, t \in J$, причем $0 \in J$. Рассмотрим некоторую карту (V, χ), для которой $x_0 = \chi^{-1}(y_0) \in V$. В области V введем кривую $c(t) = \chi^{-1}(g^t(y_0))$, определенную на возможно более узком интервале $J' \subset J$. Так как параметризация χ является диффеоморфизмом, то эта кривая гладкая. Дифференцируя равенство

$$g^t(y_0) = \chi c(t)$$

по t в точке $t = 0$, получим равенство

$$\xi(y_0) = \chi_* \,|_{x_0} \frac{dc}{dt}\bigg|_{t=0},$$

где $dc/dt|_{t=0}$ — касательный вектор кривой $c(t)$ в точке x_0, принадлежащий касательному пространству TV_{x_0}. Таким образом, по определению касательного пространства многообразия вектор $\xi(y_0)$ принадлежит TN_{y_0}. $\square$

Если многообразие $N \subset M$ является замкнутым множеством в M, то условие касания полем ξ многообразия влечет инвариантность N для группы $G = \{g^t\}$, порожденной полем. Отметим, кстати, что замкнутым является многообразие, заданное в неявном виде как множество точек $y \in M$, удовлетворяющих системе алгебраических уравнений (1.4).

Действительно, пусть N — замкнутое многообразие. Возьмем произвольную точку y_0 и покажем, что на всем интервале определения I_{y_0} интегральная кривая $y(t) = g^t(y_0)$ принадлежит N. Не ограничивая общности, докажем этот факт для $t \geqslant 0$. Введем множества точек

$$A = \{t \geqslant 0 \colon y(t) \in N\}, \quad B = \{t > 0 \colon y(t) \notin N\}.$$

Пусть $t_1 = \inf B$. Покажем, что $y(t_1) \in N$. Можно утверждать, что существует последовательность точек $t_k \in A, k = 1, \ldots$, такая, что $t_1 = \lim\limits_{k\to\infty} t_k$. Так как множество N замкнутое, то $y(t_1) \in N$. Докажем теперь, что существует открытый интервал J, такой, что

$$y(t) \in N, \quad t \in J, \quad t_1 \in J.$$

Отсюда будет следовать, что $t_1 \neq \inf B$. Это противоречие покажет, что B — пустое множество. Пусть $y_1 = y(t_1) = g^{t_1}(y_0)$. Из предыдущего предложения следует существование такого интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$, что

$g^\tau(y_1) \in N, \tau \in (\Leftrightarrow\varepsilon, \varepsilon)$. Из третьего свойства в определении однопараметрической группы вытекает, что

$$g^{\tau+t_1}(y_0) = g^\tau g^{t_1}(y_0) = g^\tau(y_1) \in N, \quad \tau \in (\Leftrightarrow\varepsilon, \varepsilon).$$

Полагая $t = \tau + t_1$, получим, что

$$y(t) = g^t(y_0) \in N, \quad t \in J = (t_1 \Leftrightarrow\epsilon, t_1 + \epsilon).$$

Итак, доказано

Предложение 1.43. *Если многообразие $N \subset M$ является замкнутым множеством в M, то векторное поле $\xi \in \mathcal{T}(M)$ касается многообразия N тогда и только тогда, когда N является инвариантным многообразием группы $G = \{g^t\}$, порожденной полем ξ.*

Пусть ξ — векторное поле, заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$, и пусть h — локальный диффеоморфизм области M, т.е. диффеоморфизм некоторой области $\operatorname{dom} h \subset M$ на область $\operatorname{ran} h \subset M$. В области $\operatorname{ran} h$ однозначно определено поле η, диффеоморфное полю $\xi|_{\operatorname{dom} h}$, т.е. поле $\eta = h_*(\xi|_{\operatorname{dom} h})$. Более подробно,

$$\eta(y) = h_*|_{h^{-1}(y)}\xi(h^{-1}(y)).$$

Далее во всех таких случаях будем писать просто $\eta = h^*\xi$, считая, что рассматриваемые поля ограничены на соответствующие области определения.

Говорят, что векторное поле $\xi \in \mathcal{T}(M)$ инвариантно относительно локального диффеоморфизма h области M, если

$$\xi(h(y)) = h_*|_y\xi(y),$$

или более коротко $\xi = h_*\xi$ (как мы условились писать). Говорят также, что векторное поле ξ инвариантно относительно однопараметрической группы диффеоморфизмов, если ξ инвариантно относительно каждого локального диффеоморфизма этой группы. Из предложения 1.40 вытекает

Предложение 1.44. *Векторное поле ξ, порождающее однопараметрическую группу $G = \{g^t\}$, инвариантно относительно однопараметрической группы $S = \{s^t\}$ тогда и только тогда, когда преобразования этих групп коммутируют, т.е. $s^\tau g^t = g^t s^\tau$.*

Следствие 1.5. *Векторное поле инвариантно относительно однопараметрической группы, порождаемой этим полем.* □

Существует инфинитезимальный аналог предложения 1.44, т.е. условие инвариантности в терминах векторных полей. Прежде чем доказывать соответствующее утверждение, выведем полезную формулу для коммутатора векторных полей.

Лемма 1.1. *Пусть $\xi, \eta \in \mathcal{T}(M)$ и пусть поле η порождает однопараметрическую группу $S = \{s^t\}$. Тогда*

$$[\eta, \xi] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\xi \Leftrightarrow s^t_* \xi). \tag{1.201}$$

Доказательство. Докажем (1.201) в произвольной точке $y \in$ $\in M$. Так как

$$(s^t_* \xi)(y) = s^t_*|_{s^{-t}(y)} \xi(s^{-t}(y)),$$

то требуется найти дифференциал отображения s^t_* в точке $s^{-t}(y)$. Иначе говоря, нужно вычислить частные производные функций $(s^t)^i(y)$, $i = 1, \ldots, n$. Воспользуемся формулой (1.194). Дифференцируя левые и правые части равенства (1.194) по y^j, получим

$$\frac{\partial (s^t)^i(y)}{\partial y^j} = \delta^i_j + t \frac{\partial \eta^i}{\partial y^j} + o(t).$$

Используя формулу (1.193), получим

$$\xi^j(s^{-t}(y)) = \xi^j(y) \Leftrightarrow t\eta^k \frac{\partial \xi^j}{\partial y^k} + o(t).$$

Таким образом,

$$(s^t_* \xi)^i(y) = \left(\delta^i_j + t\frac{\partial \eta^i}{\partial y^j} + o(t)\right)\left(\xi^j \Leftrightarrow t\eta^k \frac{\partial \xi^j}{\partial y^k} + o(t)\right) =$$
$$= \xi^i(y) + t\left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial y^j} \Leftrightarrow \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial y^j}\right) + o(t).$$

(Здесь производные $\partial \eta^i / \partial y^j$ берутся в точке $s^{-t}(y)$.) Отсюда предельным переходом получим (1.201) в точке $y \in M$. □

Теорема 1.25. *Пусть $\xi, \eta \in \mathcal{T}(M)$. Векторное поле ξ инвариантно относительно однопараметрической группы, порождаемой векторным полем η, тогда и только тогда, когда эти поля коммутируют, т.е.*

$$[\xi, \eta] = 0. \tag{1.202}$$

Доказательство. Обозначим через $S = \{s^t\}$ однопараметрическую группу, порождаемую полем η. Если поле ξ инвариантно относительно S, то из (1.201) следует (1.202).

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим семейство векторных полей, зависящих от параметра t,

$$\xi^t = s^t_* \xi.$$

Таким образом, $\xi^0 = \xi$. Из (1.202), используя (1.201), выводим, что

$$\left.\frac{\partial \xi^t}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

всюду в области M. Используя третье свойство однопараметрической группы, получим

$$\xi^{t_2+t_1} = s^{t_2+t_1}_* \xi = s^{t_2}_* s^{t_1}_* \xi = s^{t_2}_* \xi^{t_1}.$$

Фиксируем t_1 и положим $\xi^t_1 = \xi^{t+t_1}$. Используя предложение 1.4, следствие 1.5 и (1.202), получим равенство

$$[s^t_* \xi, \eta] = 0.$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial \xi^t_1}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial \xi^t}{\partial t}\right|_{t=t_1} = 0.$$

Поэтому поля ξ^t не зависят от t, т.е. поле ξ инвариантно относительно однопараметрической группы G. $\square$

Обобщением понятия инвариантности векторного поля относительно локального диффеоморфизма является понятие инвариантности аффинного распределения относительно локального диффеоморфизма. Это понятие вводится следующим образом. Пусть в области $M \subset \mathbb{R}^n$ заданы аффинное распределение F и локальный диффеоморфизм h. Говорят, что F инвариантно относительно h, если

$$F(h(y)) = h_*|_y F((y)), \quad \forall y \in \operatorname{dom} h,$$

или более коротко $h_* F = F$. Будем говорить также, что F инвариантно относительно однопараметрической группы G, если F инвариантно относительно каждого локального диффеоморфизма $g^t \in G$, т.е. если

$$g^t_*|_y F(y) = F(g^t(y)), \quad \forall g^t \in G, \quad y \in \operatorname{dom} g^t.$$

Более коротко факт инвариантности записывается так:

$$g^t_* F = F, \quad \forall g^t \in G.$$

Докажем условие инвариантности аффинного распределения относительно однопараметрической группы, обобщающее теорему 1.25.

Теорема 1.26. *Аффинное распределение F, заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$, инвариантно относительно однопараметрической группы, порождаемой векторным полем $\xi \in \mathcal{T}(M)$, тогда и только тогда, когда*

$$[\xi, F] \subset L_F \tag{1.203}$$

(т.е. $[\xi, \eta] \in L_F, \forall \eta \in F$).

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{s^\tau\}$ — однопараметрическая группа, порождаемая полем ξ, и пусть η — поле, принадлежащее F. Согласно лемме 1.1,

$$[\xi, \eta](y) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}(\eta(y) \Leftrightarrow (s_*^\tau \eta)(y)), \quad \forall y \in M. \tag{1.204}$$

По условию $(s_*^\tau \eta)(y) \in F(y)$. Следовательно,

$$\eta(y) \Leftrightarrow (s_*^\tau \eta)(y) \in \mathbf{L}_F(y).$$

Отсюда и из (1.204) вытекает, что $[\xi, \eta](y) \in \mathbf{L}_F(y)$.

Достаточность. Пусть $\{s^\tau\}$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порождаемая полем ξ, удовлетворяющим (1.203). Фиксируем y_0. Интегральная кривая $s^\tau(y_0)$ поля ξ определена на некотором интервале $I_{y_0} \subset \mathbb{R}^1$. Достаточно доказать, что

$$s_*^\tau|_{y_0} F(y_0) = F(s^\tau(y_0)), \quad \tau \geqslant 0, \quad \tau \in I_{y_0}. \tag{1.205}$$

Для $\tau \leqslant 0$ доказательство аналогично. Считаем, что $\xi(y_0) \neq 0$ (если $\xi(y_0) = 0$, то утверждение очевидно). Обозначим через A множество чисел $\tau \in I_{y_0}$, удовлетворяющих (1.205). Множество остальных чисел

$$\{\tau \in I_{y_0} : \tau \geqslant 0\},$$

обозначим через B. Требуется показать, что $B = \emptyset$. Допустим противное. Тогда существует $\inf B$, который обозначим через $\overline{\tau}$. Покажем, во-первых, что $\overline{\tau} \in A$. Рассмотрим последовательность $\tau_k \in A$, такую, что $\lim \tau_k \to \overline{\tau}$. Введем обозначение: $\overline{y} = s^{\overline{\tau}}(y_0)$. Рассмотрим также базисное семейство векторных полей

$$\eta_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, p,$$

аффинного распределения F, определенное в окрестности точки $\overline{y}$. Пусть $d \in F(y_0)$. Имеем

$$s_*^{\tau_k}|_{y_0} d = \eta_0(s^{\tau_k}(y_0)) + \lambda^{\alpha_k} \eta_\alpha(s^{\tau_k}(y_0)).$$

Из соображений непрерывности следует, что эти равенства при $\tau_k \to \overline{\tau}$ перейдут в равенства

$$s_*^{\overline{\tau}}|_{y_0} d = \eta_0(s^{\overline{\tau}}(y_0)) + \lambda^\alpha \eta_\alpha(s^{\overline{\tau}}(y_0))$$

(причем $\lambda^\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k^\alpha$), т.е. $\overline{\tau} \in A$. В окрестности точки $\overline{y}$ (очевидно, что $\xi(\overline{y}) \neq 0$) сделаем такую замену координат $x = \varphi(y)$, после которой поле ξ примет вид $\partial/\partial x^1$. (Напомним, что это можно сделать в соответствии с теоремой 1.3.) Введем обозначение: $\overline{x} = \varphi(\overline{y})$. Согласно (1.203), имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \eta_\alpha\right] = \mu_\alpha^\beta(x)\eta_\beta, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, p, \quad \beta = 1, \ldots, p.$$

(В новой системе координат для базисного семейства $\eta_\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots, p$, и аффинного распределения F сохраним обозначения.) Построим базисное семейство полей

$$\zeta_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, p,$$

аффинного распределения F, компоненты которых не зависят от x^1. Это семейство должно быть аффинно эквивалентно семейству

$$\eta_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, p,$$

что означает выполнение следующих соотношений:

$$\zeta_0 = \eta_0 + \varkappa_0^\beta(x)\eta_\beta, \quad \zeta_\alpha = \varkappa_\alpha^\beta(x)\eta_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, p,$$

причем $|\varkappa_\alpha^\beta|_{\alpha=1,\ldots,p}^{\beta=1,\ldots,p} \neq 0$. Имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \zeta_0\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \eta_0\right] + \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\varkappa_0^\beta\right)\eta_\beta + \varkappa_0^\beta\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \eta_\beta\right] =$$
$$= \left(\mu_0^\gamma + \frac{\partial \varkappa_0^\gamma}{\partial x^1} + \varkappa_0^\beta \mu_\beta^\gamma\right)\eta_\gamma,$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \zeta_\alpha\right] = \left(\frac{\partial \varkappa_\alpha^\gamma}{\partial x^1} + \varkappa_\alpha^\beta \mu_\beta^\gamma\right)\eta_\gamma.$$

Следовательно, функции $\varkappa_\alpha^\beta, \alpha = 0, 1, \ldots, p, \beta = 1, \ldots, p$, должны удовлетворять системам уравнений

$$\frac{\partial \varkappa_0^\gamma}{\partial x^1} = \Leftrightarrow \mu_\beta^\gamma(x)\varkappa_0^\beta \Leftrightarrow \mu_0^\gamma(x), \tag{1.206}$$

$$\frac{\partial \varkappa_\alpha^\gamma}{\partial x^1} = -\mu_\beta^\gamma(x)\varkappa_\alpha^\beta, \quad \alpha = 1, \ldots, p. \tag{1.207}$$

Системы (1.206), (1.207) (при фиксированных $x^2, \ldots, x^n$) представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ясно, что в качестве матрицы $\|\varkappa_\alpha^\beta\|_{\alpha=1,\ldots,p}^{\beta=1,\ldots,p}$ можно взять фундаментальную матрицу решений системы (1.207), а в качестве $\varkappa_0^\gamma$ — любое решение системы (1.206). В новых переменных преобразования s^σ имеют вид

$$(x^1, x^2, \ldots, x^n) \mapsto (x^1 + \sigma, x^2, \ldots, x^n).$$

Очевидно, что

$$s_*^\sigma|_{\overline{x}}\xi_\alpha(\overline{x}) = \xi_\alpha(s^\sigma(\overline{x})), \quad \alpha = 0, 1, \ldots, p, \quad \sigma \in J,$$

где $J = (-\epsilon, \epsilon)$ — некоторый интервал. Так как $s^\sigma s^{\overline{\tau}} = s^{\sigma+\overline{\tau}}$, то, полагая $\tau = \sigma + \overline{\tau}$, получим, что

$$s_*^\tau|_{y_0}F(y_0) = F(s^\tau(y_0)), \quad \tau \in (\overline{\tau} - \epsilon, \overline{\tau} + \epsilon).$$

Следовательно, $\overline{\tau} \neq \inf B$ и B — пустое множество. □

Понятие инвариантности распределения относительно локального диффеморфизма тесно связано с понятием совместимости отношения эквивалентности с локальным диффеоморфизмом. Рассмотрим эту связь. Каждое регулярное отношение эквивалентности R, заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$ с помощью функций (1.197), порождает в M регулярное инволютивное (а следовательно, и вполне интегрируемое) распределение Δ_R ранга $n - m$, для которого классы эквивалентности (1.199) являются интегральными $(n - m)$-мерными многообразиями. Базисные семейства распределения Δ_R представляют собой полные семейства векторных полей, определенные в окрестности каждой точки $y \in \in M$, для которых функции (1.197) составляют полный набор интегралов. Такие полные семейства существуют в соответствии с предложением 1.9.

Предложение 1.45. *Регулярное отношение эквивалентности R, заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$, совместимо с локальным диффеоморфизмом ψ области M тогда и только тогда, когда распределение Δ_R инвариантно относительно ψ.*

Доказательство. Пусть R совместимо с ψ. Для распределения Δ_R это означает, что интегральные многообразия размерности $\dim \Delta_R$ под действием диффеоморфизма ψ переходят друг в друга.

При этом дифференциал отображения ψ изоморфным образом переводит касательные пространства этих многообразий также друг в друга (в соответствующих точках). Но касательное пространство интегрального многообразия размерности $\dim\Delta_R$, проходящего через точку $y_0 \in M$, совпадает с $\Delta_R(y_0)$. Отсюда следует, что если $\psi(y_0) = y_1$, то $\psi_*|_{y_0}\Delta_R(y_0) = \Delta_R(y_1)$. Таким образом, распределение Δ_R инвариантно относительно ψ. Пусть теперь, наоборот, распределение Δ_R инвариантно относительно ψ. Возьмем произвольное интегральное многообразие N распределения Δ_R размерности $\dim\Delta_R$, т.е. некоторый класс эквивалентности отношения эквивалентности R. Под действием диффеоморфизма ψ многообразие N перейдет в многообразие $\tilde{N}$. При этом

$$\psi_*|_{y_0}TN_{y_0} = T\tilde{N}_{\psi(y_0)}, \quad y_0 \in \operatorname{dom}\psi.$$

Так как $TN_{y_0} = \Delta_R(y_0)$ и $\psi_*|_{y_0}\Delta_R(y_0) = \Delta_R(\psi(y_0))$, то $T\tilde{N}_{\psi(y_0)} = \Delta_R(\psi(y_0))$. Это означает, что $\tilde{N}$ является интегральным многообразием размерности $\dim\Delta_R$ и входит во множество классов эквивалентности R. □

Из доказанного предложения и теоремы 1.26 вытекает

Следствие 1.6. *Регулярное отношение эквивалентности R совместимо с однопараметрической группой, порождаемой полем ξ, тогда и только тогда, когда*

$$[\xi, \Delta_R] \subset \Delta_R. \tag{1.208}$$

Итак, как мы выяснили, регулярное отношение эквивалентности R порождает регулярное инволютивное распределение Δ_R. Но можно также говорить, что и, наоборот, регулярное инволютивное распределение D порождает, по крайней мере локально, некоторое регулярное отношение эквивалентности R_D, задаваемое полным набором интегралов распределения D, который существует в окрестности каждой точки определения D. Ясно, что $\Delta_{R_D} = D$. Этот факт, а также следствие 1.6 используются для поиска отношений эквивалентности, которые совместимы с заданной однопараметрической группой. Очевидно, что можно сформулировать следующее условие существования таких отношений эквивалентности.

Теорема 1.27. *Для однопараметрической группы G, порождаемой векторным полем $\xi \in \mathcal{T}(M)$, существуют регулярные отношения эквивалентности, определенные в окрестности точки $y \in M$ и совместимые с G, тогда и только тогда, когда в окрестности точки*

$y \in M$ существуют регулярные инволютивные распределения D, удовлетворяющие соотношениям

$$[\xi, D] \subset D. \tag{1.209}$$

Каждое такое распределение порождает отношение эквивалентности R_D, совместимое с G.

Рассмотрим теперь более общие, чем однопараметрические, группы диффеоморфизмов, точнее, локальные группы диффеоморфизмов, порождаемые семействами векторных полей. Пусть в области $M \subset \mathbb{R}^n$ задано семейство векторных полей

$$\xi_j = \xi_j^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad j \in J. \tag{1.210}$$

Локальной группой диффеоморфизмов, порожденной семейством векторных полей (1.210), называется множество G локальных диффеоморфизмов вида

$$g = g_{j_k}^{t_k} \dots g_{j_1}^{t_1}, \tag{1.211}$$

где g_j^t — локальные диффеоморфизмы, принадлежащие локальным однопараметрическим группам диффеоморфизмов G_j, порождаемых векторными полями $\xi_j, j \in J$. Локальная группа G является минимальным множеством локальных диффеоморфизмов, которое содержит локальные однопараметрические группы $G_j, j \in J$, порождаемые полями (1.210), и которое замкнуто относительно образования композиций и обратных локальных диффеоморфизмов. Если поля (1.210) полные, то G — «обычная» группа преобразований. Далее, как правило, слово «локальная» будет опускаться.

Рассмотрим наряду с семейством векторных полей (1.210) семейство векторных полей

$$\eta_p = \eta_p^l(x)\frac{\partial}{\partial x^l}, \quad p \in P, \tag{1.212}$$

заданных в области $N \subset \mathbb{R}^m$ и порождающих в этой области группу диффеоморфизмов H.

Морфизмом f группы G, порождаемой семейством (1.210), в группу H, порождаемую семейством (1.212), называется гладкое отображение $f\colon M \to N$, если $J = P$, и как только $y \in \operatorname{dom} g$, где g — преобразование (1.211), то $f(y) \in \operatorname{dom} h$, где преобразование $h = h_{j_k}^{t_k} \dots h_{j_1}^{t_1}$, причем

$$fg(y) = hf(y).$$

Группы, порождаемые семействами полей, с так введенными морфизмами образуют категорию, которую обозначим через $\mathcal{G}$.

Из предложения 1.40 следует

Предложение 1.46. *Пусть в областях* $M \subset \mathbb{R}^n, N \subset \mathbb{R}^m$ *заданы семейства векторных полей* (1.210), (1.212), *причем* $J = P$. *Гладкое отображение* $f\colon M \to N$ *является морфизмом группы диффеоморфизмов, порождаемой семейством* (1.210), *в группу диффеоморфизмов, порождаемую семейством* (1.212), *тогда и только тогда, когда соответствующие поля семейств* f*-связаны, т.е.*

$$\eta_j = f_* \xi_j, \quad j \in J. \tag{1.213}$$

В разделе 1.3 (см. с. 35) была введена категория $\mathcal{VF}$ семейств векторных полей, морфизмы в которой удовлетворяют условию (1.213). Таким образом, из предложения 1.46 вытекает изоморфность категорий $\mathcal{G}$ и $\mathcal{VF}$. Полная подкатегория категории $\mathcal{G}$, объектами которой являются группы, порождаемые семействами, состоящими из конечного числа полей, обозначается через $\mathcal{FG}$. Эта категория изоморфна категории $\mathcal{FVF}$, объектами которой являются конечные семейства полей.

Для групп, порождаемых семействами полей, естественным образом вводятся понятия инварианта, совместимости с регулярным отношением эквивалентности, импримитивности и локальной инвариантности многообразия, введенные ранее для однопараметричеких групп. Скажем, понятие локальной инвариантности вводится следующим образом. Многообразие $N \subset M$ называется локально инвариантным многообразием группы диффеоморфизмов G, порождаемой семейством полей (1.210), если для любой точки $y \in N$ и для любого конечного набора индексов $j_1, \ldots, j_k \in J$ найдется набор интервалов

$$I_1 \subset \mathbb{R}^1, \ldots, I_k \subset \mathbb{R}^1, \tag{1.214}$$

содержащих $0 \in \mathbb{R}^1$, такой, что $g_{j_k}^{t_k} \ldots g_{j_1}^{t_1}(y) \in N, \forall t_l \in I_l, l = 1, \ldots, k$. Многообразие N называется инвариантным многообразием группы G, если $y_0 \in N \Rightarrow g(y_0) \in N, \forall g \in G$.

Справедливы утверждения, аналогичные предложениям 1.39, 1.41, 1.45 и 1.42, которые сводят вопрос об инвариантах группы к вопросу об интегралах семейства полей, вопрос о совместимости регулярного отношения эквивалентности с группой — к вопросу о f-проектируемости семейства полей и инвариантности распределения относительно группы, а также вопрос о локальной инвариантности многообразия группы — к вопросу о касании многообразия семейством полей. Докажем, к примеру, следующее утверждение.

Предложение 1.47. *Семейство полей* (1.210) *касается многообразия* $N \subset M$ *тогда и только тогда, когда многообразие* N *является* *локально инвариантным многообразием группы G, порождаемой семейством* (1.210).

Доказательство. Если многообразие N является локально инвариантным, то факт касания полями (1.210) многообразия непосредственно вытекает из определения группы G и предложения 1.42. Пусть теперь поля (1.210) касаются N. Возьмем произвольную точку y_0 и некоторую карту (V, χ), для которой $x_0 = \chi^{-1}(y_0) \in V$. В области V определено семейство индуцированных полей

$$\overline{\xi}_j = \overline{\xi}^p_j(x)\frac{\partial}{\partial x^p}, \quad j \in J.$$

Эти поля порождают однопараметрические группы $\overline{G}_j = \{\overline{g}^t_j\}$ диффеоморфизмов области V. Возьмем произвольный конечный набор индексов $j_1, \ldots, j_k \in J$. Из определения локальной однопараметрической группы следует, что выражение $\overline{g}^{t_k}_{j_k} \ldots \overline{g}^{t_1}_{j_1}(x)$ определено на некотором множестве точек $(t_1, \ldots, t_k, x)$, которое открыто в $\mathbb{R}^k \times V$ и которое содержит множество $(0, \ldots, 0) \times V$. Следовательно, существует такой набор интервалов (1.214), содержащих $0 \in \mathbb{R}^1$, что

$$x_0 \in \operatorname{dom}\left(\overline{g}^{t_k}_{j_k} \ldots \overline{g}^{t_1}_{j_1}\right), \quad \forall t_1 \in I_1, \ldots, \forall t_k \in I_k.$$

Так как $\xi_j = \chi_* \overline{\xi}_j$, $j \in J$, то, согласно предложению 1.46,

$$g^{t_k}_{j_k} \ldots g^{t_1}_{j_1}(y_0) = \chi(\overline{g}^{t_k}_{j_k} \ldots \overline{g}^{t_1}_{j_1}(x_0)) \in N, \quad \forall t_l \in I_l, \quad l = 1, \ldots, k. \ \square$$

Из предложения 1.43 следует

Предложение 1.48. *Семейство полей* (1.210) *касается замкнутого многообразия $N \subset M$ тогда и только тогда, когда многообразие N является инвариантным многообразием группы G, порождаемой семейством* (1.210).

Свойства групп диффеоморфизмов, порождаемых семействами векторных полей, значительно отличаются от свойств однопараметрических групп. Отметим здесь лишь некоторые отличия. Так, любая однопараметрическая группа G, порождаемая векторным полем ξ без особых точек, имеет (локальные) инвариантные многообразия любой размерности от 1 до n (где n — размерность области M, в которой задано векторное поле ξ). В соответствии с теоремой 1.7, любое многообразие размерности r, $1 \leqslant r < n$, можно задать в виде (1.52), где $q = n \Leftrightarrow r$, $m = n \Leftrightarrow 1$, а функции $\varphi^k(y)$, $k = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1$, составляют полный набор интегралов поля ξ.

Что касается группы G, порождаемой семейством $\mathfrak{g}$ векторных полей (1.210), то здесь существование локально инвариантных могообразий определется алгеброй Ли $\mathfrak{g}^*$, т.е. минимальной алгеброй Ли, содержащей $\mathfrak{g}$. Если $\dim \Delta_{\mathfrak{g}^*}(y_0) = p < n$, где $\Delta_{\mathfrak{g}^*}$ — распределение, порождаемое алгеброй $\mathfrak{g}^*$, y_0 — регулярная точка этого распределения, то существуют (локально) инвариантные многообразия группы G, проходящие через y_0, любой размерности от p до n (здесь n — размерность области M, в которой задано семейство $\mathfrak{g}$). В соответствии с теоремой 1.7 любое инвариантное многообразие размерности r, $p \leqslant r < n$, можно локально представить в виде (1.52), где $q = n \Leftrightarrow r$, $m = n \Leftrightarrow p$, а функции $\varphi^k(y), k = 1, \dots, m$, составляют полный набор интегралов семейства $\mathfrak{g}$. Если $\dim \Delta_{\mathfrak{g}^*}(y) = n, \forall y \in M$, то инвариантных многообразий размерности $r < n$ не существует (это следует из равенства (1.49)). В этом случае (при условии связности M) группа G является транзитивной, т.е. для любых точек y_1, y_2 существует такое преобразование $g \in G$, что $y_2 = g(y_1)$. Докажем это утверждение, известное как теорема Рашевского—Чжоу [54, 66].

Теорема 1.28 (Рашевского—Чжоу). *Пусть G — группа диффеоморфизмов, порождаемая семейством полей $\mathfrak{g}$, которое задано в связной области $M \subset \mathbb{R}^n$. Если $\dim \Delta_{\mathfrak{g}^*}(y) = n, \forall y \in M$, то группа G транзитивна.*

Доказательство. Докажем сначала, что для каждой точки $y_1 \in M$ существует окрестность $L \subset M$, обладающая следующим свойством: для любой точки $y \in L$ найдется такое преобразование $g \in G$, что $g(y_1) = y$. Пусть семейство $\mathfrak{g}$ состоит из полей (1.210). Так как $\dim \Delta_{\mathfrak{g}^*}(y_1) = n$, то существует такое векторное поле $\xi_{j_1} \in \mathfrak{g}$, что $\xi_{j_1}(y_1) \neq 0$. Введем отображение $\varkappa_1$ интервала $I \subset \mathbb{R}^1$ в M следующим образом: $t \mapsto \varkappa_1(t) = g^t_{j_1}(y_1)$, где $\{g^t\}$ — однопараметрическая группа, порождаемая полем ξ_{j_1}. Отображение $\varkappa_1$ является иммерсией, ибо якобиева матрица отображения $\varkappa_1$ представляет собой столбец, состоящий из компонент поля ξ_{j_1}. Из предложения 1.1 следует существование такого интервала $I' \subset I$, что множество $N_1 = \varkappa_1(I')$ является одномерным многообразием в M. Из предложения 1.42 вытекает, что поле ξ_{j_1} касается N_1. Далее, существуют такие число $\tau_1 \in I'$ и векторное поле ξ_{j_2}, что векторы $\xi_{j_1}(y_2), \xi_{j_2}(y_2)$, где $y_2 = \varkappa(\tau_1)$, линейно независимы. Действительно, в противном случае семейство $\mathfrak{g}$, а следовательно, и алгебра $\mathfrak{g}^*$ касались бы многообразия N_1. Из формулы (1.49) следует, что ранг распределения $\Delta_{\mathfrak{g}^*}$ в точках многообразия N_1 должен быть равен единице, что невозможно (если $n > 1$). Введем отображение $\varkappa_2\colon (t_1, t_2) \mapsto g^{t_2}_{j_2} g^{t_1}_{j_1}(y_1)$. Ранг отображения $\varkappa_2$ в точке $(\tau_1, 0)$ равен двум. Действительно, матрица Якоби отображения $\varkappa_2$ в этой точке представляет собой два столбца, состоящие из компонент векторов $\xi_{j_1}(y_2), \xi_{j_2}(y_2)$. Следовательно, в некоторой окрестности точки $(\tau_1, 0)$ отображение $\varkappa_2$ является иммерсией. Согласно предложению 1.1, существует такая окрестность U точки $(\tau_1, 0)$, что множество $N_2 = \varkappa_2(U)$ является многообразием размерности 2. Если $n > 2$, то таким же образом можно построить многообразие N_3, и так далее. По индукции доказывается существование:

а) n векторных полей $\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_n}$ из $\mathfrak{g}$ (не обязательно различных);

б) n чисел $\tau_1, \ldots, \tau_n$ $(\tau_n = 0)$, таких, что отображение

$$\varkappa_n\colon (t_1, \ldots, t_n) \mapsto g_{j_n}^{t_n} \ldots g_{j_1}^{t_1}(y_1)$$

имеет ранг n в точке $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

Следовательно, по теореме 1.1 (об обратном отображении), существует такая окрестность V точки $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, что $\varkappa_n$ диффеоморфно отображает область V на некоторую область $W = \varkappa_n(V) \subset M$. Из построения W следует существование такого преобразования $\tilde{g} \in G$, что $\tilde{g}(y_1) = y_n = \varkappa_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Теперь ясно, что в качестве области L можно взять область $\tilde{g}^{-1}(W)$. Для завершения доказательства остается заметить, что любые две точки M можно соединить компактной кривой, которую покрывает конечное число областей типа L. Отсюда легко следует, что для любых двух точек M найдется преобразование из G, переводящее одну точку в другую. $\square$

Замечание 1.18. Если $\dim \Delta_{\mathfrak{g}^*}(y) = p < n, \forall y \in M$, то можно доказать, что G — интранзитивная группа, причем M разбивается на орбиты G, которые являются p-мерными мнгообразиями (возможно, более общего вида, чем рассматриваемые в этой книге), получающиеся склейкой интегральных многообразий распределения $\Delta_{\mathfrak{g}^*}$ вида (1.199), где функции $\varphi^k, k = 1, \ldots, n \Leftrightarrow p$, составляют (локально) полный набор интегралов семейства полей $\mathfrak{g}$. Если M содержит особые точки распределения $\Delta_{\mathfrak{g}^*}$, то исчерпывающий ответ в терминах алгебры $\mathfrak{g}^*$ по поводу транзитивности группы G можно дать лишь, когда семейство $\mathfrak{g}$ состоит из аналитических полей. В этом случае через каждую точку $y_0 \in M$, для которой $\dim \Delta_{\mathfrak{g}^*}(y_0) = p$, проходит p-мерное инвариантное многообразие группы G. В частности, в аналитическом случае справедливо обращение теоремы Рашевского—Чжоу: если группа G транзитивна, то M — связная область и $\dim \Delta_{\mathfrak{g}^*}(y) = n, \forall y \in M$. В гладком случае это, вообще говоря, неверно. (По поводу всех этих вопросов см., например, [57, 67].)

Рассмотрим вопрос о существовании регулярных отношений эквивалентности, совместимых с группой диффеоморфизмов, порождаемой семейством векторных полей. Здесь также имеется отличие от случая однопараметрической группы. Для однопараметрической группы существуют нетривиальные отношения эквивалентности, совместимые с группой. В частности, любой набор независимых инвариантов $\varphi^1(y), \ldots, \varphi^m(y)$ определяет (локально) совместимое отношение эквивалентности, классами эквивалентности которого являются многообразия $\varphi^k(y) = c^k, k = 1, \ldots, m$. Существуют нетривиальные совместимые отношения эквивалентности и другого вида. Таким образом, однопараметрические группы импримитивны. Группа, порождаемая семейством векторных полей, вообще говоря, не является импримитивной. Из теоремы 1.27 вытекает следующее условие импримитивности.

Теорема 1.29. *Группа диффеоморфизмов G, порождаемая семейством $\mathfrak{g}$ векторных полей* (1.210)*, заданных в области $M \subset \mathbb{R}^n$, импримитивна в окрестности точки $y_0 \in M$ тогда и только тогда, когда в окрестности y_0 существует такое регулярное инволютивное распределение D ранга p, $0 < p < n$, что*

$$[\xi_j, D] \subset D, \quad j \in J, \tag{1.215}$$

причем классы регулярного отношения эквивалентности R_D являются системами импримитивности.

Использование соотношений (1.215) для изучения вопроса о существовании и нахождении систем импримитивности группы G приводит к вопросу о совместности и нахождении решений некоторой системы дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковой главной частью, причем главная часть задается полями семейства $\mathfrak{g}$. Если эта система не совместна, то группа G примитивна. Теория систем уравнений с одинаковой главной частью развивается в следующем разделе. Из этой теории следует, что для изучения вопроса о примитивности и импримитивности группы G, так же, как и для изучения вопроса о транзитивности и интранзитивности группы G, необходимо использование алгебры Ли $\mathfrak{g}^*$. Соотношения (1.215) подробно исследуются в главе 4, посвященной факторизации управляемых систем. Это связано с тем, что вопрос о факторизации в одной из категорий управляемых систем равносилен вопросу о примитивности и импримитивности некоторой группы диффеоморфизмов, порождаемой управляемой системой.

Замечание 1.19. Если группа G порождается семейством векторных полей $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{g}^*$ — конечномерная алгебра Ли (т.е. ее размерность как линейного пространства конечна), причем $\mathfrak{g}$ — ее базис, то G является так называемой (локальной) группой Ли. Теория таких групп достаточно подробно разработана [14]. Свойства группы Ли полностью определяются свойствами ее алгебры Ли. В частности, имеется взаимно однозначное соответствие между подалгебрами $\mathfrak{g}^*$ и подгруппами G, идеалами $\mathfrak{g}^*$ и нормальными подгруппами G и т.д. В общем случае связь между $\mathfrak{g}^*$ и G недостаточно разработана. Для изучения таких вопросов, как транзитивность и импримитивность группы G, применение алгебры $\mathfrak{g}^*$ является эффективным.

1.7. Системы дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковой главной частью

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений вида

$$a_k^j(x)\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = b_k^i(x,y), \tag{1.216}$$

$$i=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,m, \quad k=1,\ldots,r.$$

Функции a_k^j, b_k^i — гладкие в области $V\times U$, где $V\subset\mathbb{R}^m$, $U\subset\mathbb{R}^n$.

Замечание 1.20. Системы (1.216) для $r=1$ рассматривались в [28]. Другой частный случай систем вида

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = b_j^i(x,y), \quad i=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,m, \tag{1.217}$$

также хорошо известен (см., например, [29, 15]). В [30] автором получен алгоритм проверки совместности и нахождения решений систем (1.216) со специальной правой частью. Этот алгоритм обобщен на случай произвольных систем (1.216) [31], который рассматривается в этом разделе.

Следуя [28], будем искать решение $y(x)$ системы (1.216) в неявном виде

$$\psi^c(x,y)=0, \quad c=1,\ldots,n, \tag{1.218}$$
$$\operatorname{rank}\left\|\partial\psi^c/\partial y^i\right\|_{\psi(x,y)=0}=n.$$

Легко проверить (см. далее теорему 1.30), что выражение (1.218) тогда и только тогда определяет неявно решение системы (1.216), когда в силу (1.216) выполняются равенства

$$a_k^j\frac{\partial\psi^c}{\partial x^j}+b_k^i\frac{\partial\psi^c}{\partial y^i}=0.$$

На геометрическом языке (см. предложение 1.8) это означает, что векторные поля $a_k^j\partial/\partial x^j + b_k^i\partial/\partial y^i$ касаются многообразия (1.218). Далее выводятся условия существования таких многообразий, их общий вид и процедура нахождения. Применительно к системе (1.216) эти факты выражают соответственно условия совместности, общее решение и алгоритм его нахождения.

Введем семейство векторных полей $\mathfrak{b}$, состоящее из полей

$$X_k = a_k^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad k = 1, \ldots, r, \tag{1.219}$$

заданных в области V, и семейство полей $\mathfrak{b}'$, состоящее из полей

$$X'_k = a_k^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j} + b_k^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad k = 1, \ldots, r, \tag{1.220}$$

заданных в области $V \times U$. Из определения следует, что $X'_k = X_k + b_k^i\partial/\partial y^i$. Согласно разделу 1.3, семейство $\mathfrak{b}$ определяет последовательность семейств векторных полей — производный ряд (1.32). Будем считать, что все распределения $\Delta_{\mathfrak{b}_k}$ являются регулярными. (Это оправдано локальностью дальнейшего рассмотрения, а также тем, что особые точки $\Delta_{\mathfrak{b}_k}$ составляют нигде не плотное замкнутое множество, и решения $y = \varphi(x)$ системы (1.216), проходящие через регулярные точки $x \in V$, продолжаются на особые точки по непрерывности.) Таким образом, для некоторого $N \leqslant m \Leftrightarrow 1$ $\Delta_{\mathfrak{b}_N} = \Delta_{\mathfrak{b}_{N+1}}$, причем $\Delta_{\mathfrak{b}_N} = \Delta_{\mathfrak{b}^*}$. Введем обозначение: $B = \Delta_{\mathfrak{b}^*}$. Заметим, что в данном случае $\Delta_{\mathfrak{b}^*} = (\Delta_{\mathfrak{b}})^*$.

Наряду с производным рядом (1.32) для семейства $\mathfrak{b}$ введем в рассмотрение производный ряд для семейства векторных полей $\mathfrak{b}'$:

$$\mathfrak{b}'_0 \subset \mathfrak{b}'_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{b}'_k \subset \ldots.$$

Эти поля заданы в области $V \times U$. Каждому полю $X \in \mathfrak{b}^*$ будет взаимно однозначно соответствовать поле $X' \in \mathfrak{b}'^*$, причем $X' = X + \mu^i\partial/\partial y^i$, где μ^i — некоторые функции от x, y. Введем обозначение: $B' = \Delta_{\mathfrak{b}'^*}$

Докажем теперь утверждение, сформулированное в начале раздела.

Теорема 1.30. *Многообразие* (1.218) *тогда и только тогда определяет неявно решение системы* (1.216), *когда семейство* $\mathfrak{b}'$ *касается этого многообразия.*

Доказательство. Пусть многообразие (1.218) определяет неявно решение системы (1.216). Продифференцируем (1.218) по x^j, считая

y^i функциями от x. Получим, что в силу (1.218) выполняются равенства

$$\frac{\partial \psi^c}{\partial x^j} + \frac{\partial \psi^c}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \tag{1.221}$$

$$j = 1, \ldots, m, \quad c = 1, \ldots, n.$$

Равенства (1.221), умноженные соответственно на a_k^j, просуммируем по j для фиксированных k, c. Используя (1.216), получим, что в силу (1.218) выполняются равенства $X_k' \psi^c = 0$, т.е. поля (1.220) касаются (1.218). Обратно, пусть $\mathfrak{b}'$ касается (1.218). Снова рассмотрим равенства (1.221) и просуммируем их, умножив соответственно на a_k^j, по j при фиксированных k, c. Используя факт касания полями X_k' многообразия (1.218), получим

$$\frac{\partial \psi^c}{\partial y^i} \left(a_k^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Leftrightarrow b_k^i \right) = 0.$$

Так как $|\partial \psi^c / \partial y^i| \neq 0$, то отсюда получаем, что функции $y(x)$, определяемые неявно уравнениями (1.218), составляют решение системы (1.216). □

Итак, задача нахождения решений системы (1.216) сводится к нахождению многообразий (1.218), которых касается семейство $\mathfrak{b}'$. Выясним условия существования таких многообразий.

Лемма 1.2. *Если через точку* (x_0, y_0) *проходит многообразие вида* (1.218)*, которого касается* $\mathfrak{b}'$*, то* $\dim B(x_0) = \dim B'(x_0, y_0)$.

Доказательство. Пусть существует многообразие (1.218), указанное в условии. Данное многообразие можно представить в виде $y^i = \varphi^i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ (в частности, $y_0 = \varphi(x_0)$). Так как поля $X' \in \mathfrak{b}'^*$ касаются этого многообразия, то, согласно предложению 1.5, каждому полю X' однозначно соответствует индуцированное поле $\overline{X'}$, определенное в области изменения переменных x. Если учесть предложение 1.6, то ясно, что $\overline{X'} = X$ для любого поля $X' \in \mathfrak{b}'^*$. Следовательно, $B = \overline{B'}$. Теперь утверждение леммы вытекает из тождества (1.50). □

Лемма 1.3. *Пусть* $\dim B(x_0) = \dim B'(x_0, y_0) = p$*, где* (x_0, y_0) *является регулярной точкой распределения* B'*. Тогда через каждую точку некоторой окрестности точки* (x_0, y_0) *проходит многообразие вида* (1.218)*, которого касается* $\mathfrak{b}'$*, причем*:

1) *если* $p = m$*, то вся совокупность многообразий* (1.218) *описывается так*:

$$F^q(x.y) = c^q, \quad q = 1, \ldots, n, \tag{1.222}$$

где $F^q(x,y)$ *— полный набор интегралов семейства* $\mathfrak{b}'$ *в точке* (x_0, y_0), $c^q = \mathrm{const}$;

2) *если* $p < m$, *то вся совокупность многообразий* (1.218) *описывается так*:

$$F^q(x,y) = H^q(\Phi^1(x), \ldots, \Phi^t(x)), \quad q = 1, \ldots, n, \tag{1.223}$$

где $\Phi^k(x)$, $F^q(x,y)$ *— полный набор интегралов* $\mathfrak{b}'$, *причем функции* $\Phi^k(x)$ *составляют одновременно полный набор интегралов* $\mathfrak{b}$ *в точке* x_0, $\mathrm{rank}\,\|\partial F^q/\partial y^i\| = n$, $t = m \Leftrightarrow p$, H^q *— произвольные гладкие функции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $p = 0$, то доказательство тривиально: в этом случае семейство $\mathfrak{b}'$ касается любого многообразия вида (1.218). Пусть $p > 0$. Так как $\dim B'(x,y) \geqslant \dim B(x,y)$, то точка x_0 является регулярной точкой распределения B. Если $p < m$, то, согласно теореме 1.6, в точке x_0 распределение B имеет полный набор интегралов

$$\Phi^k(x), \quad k = 1, \ldots, t = m \Leftrightarrow p. \tag{1.224}$$

С другой стороны, распределение B' имеет в точке (x_0, y_0) полный набор интегралов, состоящий из функций (1.224) и некоторых функций

$$F^q(x,y), \quad q = 1, \ldots, n. \tag{1.225}$$

Если $p = m$, то B' имеет n независимых интегралов (1.225). Покажем, что (в любом случае) в окрестности (x_0, y_0)

$$\mathrm{rank}\, P = n, \tag{1.226}$$

где $P = \|\partial F^q/\partial y^i\|$. Отсюда будет следовать, что любое многообразие (1.222) или (1.223) является многообразием вида (1.218), которого касается B'.

Рассмотрим некоторое базисное семейство векторных полей $Y_a = g_a^j(x)\partial/\partial x^j$, $a = 1, \ldots, p$, распределения B. Тогда соответствующее семейство полей $Y'_a = Y_a + \nu_a^i \partial/\partial y^i$, $a = 1, \ldots, p$, в силу условий данной леммы, будет базисным семейством распределения B'. Не ограничивая общности, считаем, что в окрестности x_0

$$|g_a^k(x)|_{a=1,\ldots,p}^{k=1,\ldots,p} \neq 0. \tag{1.227}$$

Если $p = m$, то функции (1.225) составляют полный набор интегралов полного семейства $Y'_a, a = 1, \ldots, p$, поэтому из предложения 1.10

вытекает (1.226). Пусть $p < m$, тогда функции (1.224), (1.225) составляют полный набор интегралов семейства $Y'_a, a = 1, \ldots, p$. Из (1.227) и предложения 1.10 следует, что

$$K = \begin{vmatrix} Q & 0 \\ S & P \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.228}$$

где

$$Q = \left\| \frac{\partial \Phi^k}{\partial x^j} \right\|_{j=p+1,\ldots,m}^{k=1,\ldots,t}, \quad S = \left\| \frac{\partial F^q}{\partial x^j} \right\|_{j=p+1,\ldots,m}^{q=1,\ldots,n}.$$

Применяя к (1.228) разложение Лапласа по n последним столбцам, получим

$$K = |Q| \cdot |P|. \tag{1.229}$$

Так как функции (1.224) составляют полный набор интегралов семейства $Y_a \in \mathfrak{b}^*$, то из (1.228), (1.229) вытекает (1.226). Покажем теперь, что любое многообразие (1.218), которого касается B', в окрестности (x_0, y_0) представимо в виде (1.222) или (1.223). Воспользуемся теоремой 1.7, имея в виду, что в данном случае $(\Delta_{\mathfrak{b}'})^* = B'$. Согласно теореме 1.7, многообразие (1.218) можно представить в виде

$$G^q(F^1(x,y), \ldots, F^n(x,y)) = 0, \quad q = 1, \ldots, n, \tag{1.230}$$

если $p = m$, или в виде

$$G^q(\Phi^1(x), \ldots, \Phi^t(x), F^1(x,y), \ldots, F^n(x,y)) = 0, \quad q = 1, \ldots, n, \tag{1.231}$$

если $p < m$, где G^q — независимые функции. Так как равенства (1.230) и (1.231) однозначно разрешимы относительно y, то отсюда легко следует, учитывая (1.226), что равенства (1.230), (1.231) можно разрешить относительно функций $F^i(x,y)$, т.е. представить в виде (1.222), (1.223). □

Замечание 1.21. Если функции в (1.216) зависят от x, y, то также можно ввести распределения B и B', только в этом случае оба распределения заданы в области $V \times U$. Предыдущие утверждения останутся справедливыми за исключением того, что в (1.223) функции Φ^k будут зависеть от x, y и, вообще говоря, не будут являться интегралами распределения B.

Лемма 1.4. *Пусть решение $y = \varphi(x)$ системы* (1.216) *принадлежит (как график) множеству*

$$\zeta^d(x,y) = 0, \quad d = 1, \ldots, l. \tag{1.232}$$

Тогда это решение принадлежит также множеству

$$\lambda^d_k(x,y)=0,\quad k=1,\ldots,r,\quad d=1,\ldots,l,\tag{1.233}$$

где $\lambda^d_k=X'_k\zeta^d$.

Доказательство. Пусть решение $y=\varphi(x)$ системы (1.216) принадлежит множеству (1.232). Подставим $y=\varphi(x)$ в (1.232) и продифференцируем полученное тождество (1.232) по x^j. Получим, что в силу (1.232) выполняются равенства

$$\frac{\partial\zeta^d}{\partial x^j}+\frac{\partial\zeta^d}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial x^j}=0.$$

Эти равенства, умноженные соответственно на a^j_k, просуммируем по j. Учитывая (1.216), получим, что в силу (1.232) выполняются равенства (1.233). □

Используя доказанные утверждения, построим алгоритм проверки совместности и алгоритм построения общего решения системы (1.216) в окрестности точки $(x_0,y_0)\in V\times U$.

Рассмотрим некоторое базисное семейство $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{b}^*$ распределения B в окрестности x_0, состоящее из полей $Y_a=g^j_a(x)\partial/\partial x^j, a=1,\ldots,p$. (Предполагается, что $\dim B(x_0)=p>0$, ибо если $p=0$, то в (1.216) $a^j_k(x)=0$.) Семейству $\mathfrak{q}$ соответствует семейство $\mathfrak{q}'$, состоящее из некоторых полей $Y'_a=Y_a+\mu^i_a(x,y)\partial/\partial y^i, a=1,\ldots,p$, принадлежащих $\mathfrak{b}'^*$. Согласно лемме 1.2, многообразия (1.218), определяющие решения системы (1.216), должны лежать во множестве P точек (x,y), в которых $\dim B(x)=\dim B'(x,y)$. Ясно, что $P\subset K$, где K — множество точек (x,y), в которых $X'_d=\nu^b_d(x,y)Y'_b, d=1,\ldots,r, [Y'_a,Y'_b]=h^c_{ab}(x,y)Y'_c$, где ν^b_d,h^c_{ab} — некоторые функции. Множество K можно описать как множество точек, удовлетворяющих некоторой системе алгебраических уравнений

$$\theta^j(x,y)=0,\quad j=1,\ldots,e.\tag{1.234}$$

Можно так охарактеризовать данный этап проведения алгоритма. Система дифференциальных уравнений (1.216) приведена по существу к эквивалентной системе уравнений, состоящей из дифференциальных уравнений

$$g^j_a(x)\frac{\partial y^i}{\partial x^j}=\mu^i_a(x,y),\tag{1.235}$$

$$i=1,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,m,\quad a=1,\ldots,p,$$

и конечных уравнений (1.234).

Здесь могут представиться два случая.

Случай 1. В некоторой окрестности точки (x_0, y_0) равенства (1.234) удовлетворяются тождественно. Отсюда легко следует, что в этой окрестности для любого поля $X' \in \mathfrak{b}'^*$ справедливо представление $X' = \xi^b(x,y)Y'_b$, где ξ^b — некоторые функции. Таким образом, $K = P$, и семейство $\mathfrak{q}'$ является базисным семейством инволютивного распределения B'. Согласно лемме 1.3, через каждую точку окрестности (x_0, y_0) проходит многообразие (1.218), задающее решение системы (1.216). Если $p = m$, то, разрешая (1.222), получим общее решение системы (1.216)

$$y^i = \varphi^i(x, c^1, \ldots, c^n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.236}$$

где c^i — произвольные постоянные, причем через каждую точку (x, y) проходит единственное решение системы (1.216), соответствующее некоторым c^i. Если $p < m$, то, разрешая (1.223), получим общее решение системы (1.216)

$$y^i = \varphi^i(x, H^1(\Phi^1(x), \ldots, \Phi^t(x)), \ldots, H^n(\Phi^1(x), \ldots, \Phi^t(x))), \tag{1.237}$$

$$i = 1, \ldots, n,$$

где H^q — произвольные функции, причем через каждую точку (x, y) проходит некоторое семейство несовпадающих решений.

Случай 2. Равенства (1.234) не удовлетворяются тождественно ни в какой окрестности точки (x_0, y_0). Заметим, что в этом случае решения, проходящие через (x_0, y_0), существуют лишь тогда, когда (x_0, y_0) является особой точкой распределения B'. Действительно, если (x_0, y_0) — регулярная точка распределения B', то либо $\dim B(x_0) < \dim B'(x_0, y_0)$, либо возможен уже рассмотренный случай 1. Решения системы (1.216) представляют собой многообразия, которых касается распределение B' и которые должны принадлежать множеству K. Для решения вопроса о существовании таких многообразий рассмотрим последовательность множеств функций

$$G_1 \subset G_2 \subset \ \ldots \subset G_k \subset \ \ldots \tag{1.238}$$

В (1.238) G_1 состоит из функций $\theta^j(x, y)$, определяющих систему уравнений (1.234). Для $k > 1$ множество функций G_k состоит из G_{k-1} и функций вида $X'_s\theta(x, y)$, где $\theta \in G_{k-1}$, $X'_s \in \mathfrak{b}'$. Пусть $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$.

Предположим, что G состоит из функций $\theta^l, l \in L$, и рассмотрим множество W точек (x, y), удовлетворяющих равенствам

$$\theta^l(x, y) = 0, \quad l \in L. \tag{1.239}$$

Согласно лемме 1.4, решения системы (1.216) как многообразия должны лежать во множестве W. Заметим, что мы интересуемся многообразиями специального вида (1.218). Между тем равенства (1.239) могут определять пустое множество или задавать связи между независимыми переменными $\psi^a(x) = 0$, при этом, разумеется, W не может содержать многообразия вида (1.218). Здесь следует воспользоваться теоремой о функциональной зависимости из математического анализа, которую сформулируем следующим образом [49].

Теорема 1.31 (теорема о функциональной зависимости). *Если $f^k(z), k = 1, \ldots, m \leqslant n$, — гладкие функционально независимые функции в области $M \subset \mathbb{R}^n$, а $f^{m+1}(z)$ — такая гладкая функция в M, что в любой точке $z \in M$*

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial f^k}{\partial z^i} \right\|_{i=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,m+1} = m,$$

то для каждой точки $y \in M$ существует такая окрестность U, что

$$f^{m+1}(z) = F(f^1(z), \ldots, f^m(z)), \quad z \in U,$$

где F — гладкая функция. □

Замечание 1.22. Из доказательства теоремы о функциональной зависимости следует, что окрестность U, фигурирующая в формулировке этой теоремы, зависит лишь от точки z и функций $f^k(z), k = 1, \ldots, m$, но не зависит от вида функции $f^{m+1}(z)$.

Замечание 1.23. В соответствии с предложением 1.23 и замечанием 1.7 условие теоремы о функциональной зависимости можно записать так:

$$df^1 \wedge \ldots \wedge df^m \neq 0, \quad df^1 \wedge \ldots \wedge df^m \wedge df^{m+1} = 0.$$

Введем в рассмотрение матрицу $\|\partial\theta^l/\partial y^i\|_{i=1,\ldots,n}^{l\in L}$. Предположим, что в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) ранг этой матрицы постоянен и равен s. (В этом случае будем говорить, что (x_0, y_0) — регулярная по y точка множества функций G.) Если $s = 0$, то равенства (1.239) определяют либо пустое множество, либо задают связи $\psi^a(x) = 0$. И в том и другом случае система (1.216) не имеет решений.

Пусть $s > 0$. Рассмотрим такие функции $\eta^j(x, y) = \theta^{l_j} \in G$, $j = 1, \ldots, s$, что $\operatorname{rank} \left\|\partial\eta^j/\partial y^i\right\|_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,s} = s$. Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функции $\eta^j(x, j), j = 1, \ldots, s$, вместе с функцией $\eta^0(x, y) = x$ составляют набор из $s + 1$ функционально независимых функций. По теореме 1.31 (о функциональной зависимости), в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), зависящей лишь от вида функций η^j (см. замечание 1.22), имеем представления

$$\theta^l(x,y) = h^l(x, \eta^1(x,y), \ldots, \eta^s(x,y)), l \in L,$$

где g^l — гладкие функции. Таким образом, в этой окрестности множество W можно представить в виде

$$\eta^j(x,y) = 0, \quad j = 1, \ldots, s, \tag{1.240}$$

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial \eta^j}{\partial y^i} \right\|_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,s} = s,$$

$$h^l(x, 0, \ldots, 0) = 0, \quad l \in L. \tag{1.241}$$

Если не существует окрестности, в которой выражения (1.241) выполняются тождественно, то либо равенства (1.240), (1.241) противоречивы, либо задают связи между независимыми переменными, и поэтому множество W не содержит многообразий (1.218). Если все выражения (1.241) являются тождествами, то множество W (в соответствующей окрестности) является многообразием (1.240). Покажем, что в этом случае система (1.216) имеет решение.

Если в (1.240) $s = n$, то многообразие (1.240) определяет неявно единственное решение системы (1.216) $y^i = \varphi^i(x), i = 1, \ldots, n$. Пусть $s < n$. По теореме 1.2 (о неявной функции) уравнения (1.240) можно представить в разрешенном виде относительно s переменных из $(y^1, \ldots, y^n)$. Предположим, не ограничивая общности, что (1.240) можно представить в виде

$$y^i = \varphi^i(x, y^1, \ldots, y^d), \quad i = d+1, \ldots, n, \quad d = n \Leftrightarrow s. \tag{1.242}$$

Так как поля X'_k касаются многообразия W, задаваемого равенствами (1.242), то можно ввести индуцированные поля, которые в соответствии с предложением 1.6 имеют вид

$$\overline{X'_k} = a_k^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} + b_k^i(x, \overline{y}, \varphi(\overline{y})) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad i = 1, \ldots, d,$$

где $\overline{y} = (y^1, \ldots, y^d)$, а

$$\varphi(\overline{y}) = (y^1, \ldots, y^d, \varphi^{d+1}(y^1, \ldots, y^d), \ldots, \varphi^n(y^1, \ldots, y^n)).$$

Любое многообразие (1.218), лежащее в многообразии (1.242), может быть задано равенствами (1.242) и некоторыми равенствами

$$\psi^j(x, y^1, \ldots, y^d) = 0, \quad j = 1, \ldots, d, \tag{1.243}$$

$$\left|\frac{\partial\psi^j}{\partial y^i}\right| \neq 0.$$

Поля X'_k касаются многообразия (1.242), (1.243) тогда и только тогда, когда поля $\overline{X'_k}$ касаются многообразия (1.243). Таким образом, вопрос о существовании решений системы (1.216) сводится к вопросу о существовании многообразий вида (1.243), которых касаются индуцированные поля $\overline{X'}$.

Рассмотрим семейство индуцированных полей $\overline{Y'_a}, a = 1, \ldots, p$, соответствующих полям Y_a, входящим в семейство $\mathfrak{q}'$. Так как многообразие (1.242) принадлежит K, то в точках многообразия (1.242) поля $X'_s \in \mathfrak{b}'$, $[Y'_a, Y'_b]$ выражаются линейно через поля $Y'_a, a = 1, \ldots, p$. Ясно, что и индуцированные поля $\overline{X'_s}$, $[\overline{Y'_a}, \overline{Y'_b}]$ линейно выражаются через поля $\overline{Y'_a}, a = 1, \ldots, p$, в некоторой окрестности точки $(x_0, \overline{y}_0)$, где использовано обозначение $\overline{y} = (y^1, \ldots, y^d)$. В силу того, что дифференциал параметризации многообразия является линейным изоморфизмом, семейство $\overline{Y'_a}, a = 1, \ldots, p$, является линейно несвязанным, а следовательно, базисным семейством распределения $\overline{B'}$. Итак, в окрестности $(x_0, \overline{y}_0)$ выполняются равенства $\dim B(x) = \dim \overline{B'}(x, \overline{y})$. (Этот же результат следует из приведенной в разделе 1.3 формулы (1.50).) Поэтому, согласно лемме 1.3, через каждую точку окрестности точки $(x_0, \overline{y}_0)$ проходит многообразие вида (1.243), которого касаются поля $\overline{X'_s}$. Вся совокупность таких многообразий описывается соответственно случаям $p = m$ и $p < m$ следующим образом:

$$F^i(x, \overline{y}) = c^i, \quad i = 1, \ldots, d, \tag{1.244}$$

$$F^i(x, \overline{y}) = H^i(\Phi^1(x), \ldots, \Phi^t(x)), \quad i = 1, \ldots, d, \tag{1.245}$$

где $\Phi^k(x)$, $F^i(x, \overline{y})$ — полный набор интегралов семейства полей $\overline{\mathfrak{b}'}$, причем $|\partial F^k / \partial y^i|_{i=1,\ldots,d}^{k=1,\ldots,d} \neq 0$, $\Phi^k(x)$ — полный набор интегралов семейства полей $\mathfrak{b}$. Разрешая (1.244), (1.245) относительно $\overline{y}$, получим, что общее решение системы (1.216) записывается в виде (1.242) и

$$y^i = \varphi^i(x, c^1, \ldots, c^d), \quad i = 1, \ldots, d, \tag{1.246}$$

если $p = m$, или в виде (1.242) и

$$y^i = \varphi^i(x, H^1(\Phi^1(x), \ldots, \Phi^t(x)), \ldots, H^d(\Phi^1(x), \ldots, \Phi^t(x))), \tag{1.247}$$

$$i = 1, \ldots, d,$$

если $p < m$. Здесь $c^i = \mathrm{const}$, H^j — произвольные функции.

Отметим, что многообразие W совпадает (в окрестности (x_0, y_0)) с множеством P. Это следует из равенств

$$p = \dim B(x) = \dim \overline{B'}(x, \overline{y}) = \dim B'(x, y), \quad (x, y) \in W.$$

Суммируем изложенное следующим образом.

Теорема 1.32. *Система* (1.216) *имеет решение, проходящее через точку* (x_0, y_0), *при выполнении одного из следующих двух условий:*

1) (x_0, y_0) — *регулярная точка распределения* B'; $\dim B(x_0) = \dim B'(x_0, y_0) = p$ *(в этом случае через каждую точку окрестности точки* (x_0, y_0) *проходит решение системы* (1.216), *причем если* $p = m$, *то общее решение имеет вид* (1.236), *если* $p < m$, *то* — (1.237);

2) (x_0, y_0) — *особая точка распределения* B'; $\dim B(x_0) = \dim B'(x_0, y_0) = p$; *множество* W *в окрестности* (x_0, y_0) *является многообразием вида* (1.240) *(в этом случае через каждую точку многообразия* W *в окрестности* (x_0, y_0) *проходит решение системы* (1.216), *причем любое решение целиком принадлежит* W; *если в* (1.240) $s = n$, *то имеется всего одно решение, причем оно совпадает с* W; *если* $s < n$, *то общее решение имеет вид* (1.242), (1.246), *когда* $p = m$, *и* (1.242), (1.247), *когда* $p < m$).

Замечание 1.24. Проверка выполнения условий теоремы 1.32 производится с помощью алгебраических операций, а нахождение общего решения — с помощью решения некоторых систем алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, базисное семейство $\mathfrak{q} = \{Y_a, a = 1, \ldots, p\}$ распределения B находится с помощью процесса пополнения путем вычисления конечного числа определителей (см. замечание 1.6). Такого же рода операции требуются для нахождения выражений (1.234). Если имеем случай 1, то для нахождения общего решения системы (1.216) требуется найти полный набор интегралов полного семейства, что эквивалентно решению некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Если имеем случай 2, то для построения многообразия (1.240) практически вместо последовательности (1.238) строится последовательность

$$\tilde{G}_1 \subset \tilde{G}_2 \subset \ldots \tilde{G}_k \subset \ldots,$$

где $\tilde{G}_k$ — максимальное множество функционально независимых функций (по y) из G_k (предполагается, что (x_0, y_0) — регулярная по y точка множеств G_k). Для некоторого $k \leqslant n$ $\tilde{G}_k = \tilde{G}_{k+1}$. Легко проверить, что в этом случае $\tilde{G}_{k+1} = \tilde{G}_{k+2} = \ldots$ Функции из $\tilde{G}_k$ и составляют выражение (1.240). Если хотя бы одна из функций вида $X'_s\zeta$, где $\zeta \in \tilde{G}_k$, не обращается тождественно в нуль в силу (1.240), то система (1.216) несовместна. Если все функции такого рода обращаются тождественно в нуль в силу (1.240), то это будет верно и для любой функции из G. В этом случае система (1.216) имеет решение, и общий вид его определяется с помощью представления множества (1.240) в виде (1.242) и нахождения интегралов индуцированного семейства $\overline{Y'_a}$, $a = 1, \ldots, p$.

Замечание 1.25. Для частного случая системы (1.217) условия 1) и 2) теоремы 1.32 являются по существу условиями известных теорем Фробениуса и Томаса—Веблена [29, 15]. Отметим, что в этом случае равенства (1.234), задающие множество K, имеют вид

$$Y_j b^i_k \Leftrightarrow Y_k b^i_j = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j, k = 1, \ldots, m, \tag{1.248}$$

где $Y_j = \partial/\partial x^j + b^i_j \partial/\partial y^i$. Равенства (1.248) можно трактовать как равенство смешанных производных:

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^s} = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^s \partial x^j}$$

(в силу (1.217)).

Замечание 1.26. Если в системе (1.216) функции a^j_k зависят от x, y, то алгоритм нахождения решения в окрестности регулярной точки распределения B аналогичен рассмотренному случаю, когда функции не зависят от y. Разница заключается только в том, что если $p < m$, то общее решение, вообще говоря, нельзя представить в разрешенном относительно y виде (1.237) или (1.242), (1.247). Общее решение можно записать лишь в неявном виде (1.223) или (1.242), (1.245), так как в этих выражениях функции Φ^k будут зависеть от x, y. Далее необходимо рассмотреть множество особых точек распределения B, которое имеет некоторый вид $\psi^q(x, y) = 0$ и может содержать решения $y = \varphi(x)$ системы (в случае, когда функции a^j_k не зависят от y, это множество имеет вид $\psi^q(x) = 0$ и не может содержать решений системы, поэтому им можно пренебречь).

Замечание 1.27. Пусть в (1.216) функции b^i_k зависят также от дополнительных переменных z (т.е. $b^i_k = b^i_k(x, y, z)$), которые являются неизвестными функциями $z(x)$. Переменные z называются параметрическими. Условия совместности для систем уравнений без параметрических переменных можно использовать для систем с параметрическими переменными, правда они уже не будут алгебраическими, а будут представлять собой некоторые дифференциальные уравнения для $z(x)$. Если функции a^j_s, b^i_s зависят от z и производных $\partial z/\partial x$, то применение данного в этом параграфе алгоритма совместности приводит также к дифференциальным уравнениям относительно $z(x)$, которые могут быть довольно сложными.

Замечание 1.28. Если наряду с системой дифференциальных уравнений (1.216) заданы конечные соотношения

$$\psi^l(x, y) = 0, \quad l \in L, \tag{1.249}$$

то при исследовании вопроса о решениях системы (1.216), (1.249) соотношения (1.249) следует присоединить к равенствам (1.234), определяющим множество K. Пусть наряду с системой (1.216) заданы дифференциальные соотношения

$$\eta^l\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0, \quad l \in L, \tag{1.250}$$

или, иначе говоря, дана система дифференциальных уравнений, состоящая из уравнений (1.216) и уравнений (1.250). Если в процессе проведения алгоритма исследования на совместность системы (1.216) выяснилось, что $\dim \Delta_{\mathfrak{b}^*} = p = m$, то дифференциальные соотношения (1.250) можно преобразовать в конечные. Действительно, из уравнений (1.235) производные $\partial y^i / \partial x^j$ выражаются как функции от x, y. После подстановки этих функций в (1.250) получим конечные соотношения вида (1.249), которые следует присоединить к равенствам (1.234) и продолжить проведение алгоритма.

Глава 2

Категории управляемых систем

2.1. Категория $\mathcal{AS}$

Перейдем к изучению нелинейных управляемых систем следующего вида:

$$\dot{y} = f_0(y) + f(y)u, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r. \tag{2.1}$$

Предполагается, что f_0 — гладкое векторное поле; f — $n \times r$-матрица, столбцы которой $f_\alpha, \alpha = 1, \ldots, r,$ — гладкие векторные поля; M — область в $\mathbb{R}^n$, которая называется фазовым пространством системы. Переменные y называются фазовыми переменными, u — управлениями.

Решением или фазовой траекторией системы (2.1) называется непрерывная кусочно C^1-гладкая функция $y(t), t \in [t_0, t_1]$, для которой существует такое кусочно-непрерывное управление $u(t), t \in [t_0, t_1]$, что функции $y(t), u(t)$ удовлетворяют соотношениям (2.1). (Напомним, что C^1-гладкость означает существование и непрерывность первых производных.) Для функций, терпящих разрыв, принимаем следующее соглашение: в точках разрыва значения функций равны пределам справа, причем в концах отрезка определения $[t_0, t_1]$ функции считаются непрерывными.

С каждой управляемой системой (2.1) естественным образом связывается ряд дифференциально-геометрических объектов, с помощью которых эффективно исследуется редукция системы. В число основных входят семейство векторных полей $\mathfrak{f} = \{f_\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots, r\}$, минимальная алгебра Ли $\mathfrak{f}^*$, содержащая $\mathfrak{f}$, локальная группа диффеоморфизмов, порождаемая $\mathfrak{f}$, аффинное распределение F:

$$y \in M \mapsto F(y) = f_0(y) + \operatorname{span}\{f_\alpha(y), \alpha = 1, \dots, r\}$$

и двойственное t-кораспределения $F_\perp$. Эти объекты будем называть ассоциированными объектами системы (2.1) (например, $\mathfrak{f}$ — ассоциированное семейство полей системы (2.1)). Заметим, что управляемые системы вида (2.1) часто называют аффинными, так как один из основных ассоциированных диференциально-геометрических объектов — аффинное распределение.

Если F является распределением, то система (2.1) называется симметрической. Управляемая система (2.1) называется регулярной, если $\operatorname{rank} f(y) = \operatorname{const}$. Ясно, что регулярная управляемая система определяет регулярное ассоциированное аффинное распределение. Регулярная система (2.1) называется неприводимой, если $\operatorname{rank} f = r$, т.е. ассоциированные поля $f_\alpha, \alpha = 1, \dots, r$, являются линейно несвязанными.

В дальнейшем рассматриваются только регулярные аффинные системы.

Если $\dim \Delta_{\mathfrak{f}^*} = n, \forall y \in M$, где $\Delta_{\mathfrak{f}^*}$ — распределение, порождаемое $\mathfrak{f}$, то говорят, что система (2.1) находится в общем положении. (Название обусловлено тем, что в определенном смысле почти все системы вида (2.1) находятся в общем положении [45].)

Морфизмом ψ системы (2.1) в систему

$$\dot{x} = g_0(x) + g(x)v, \quad x \in N \subset \mathbb{R}^m, \quad v \in \mathbb{R}^s, \tag{2.2}$$

называется такое гладкое отображение $\psi: M \to N$, что как только $y(t), t \in [t_0, t_1]$, — решение системы (2.1), то $x(t), t \in [t_0, t_1]$, — решение системы (2.2).

Легко видеть, что регулярные аффинные системы (2.1) с такими морфизмами образуют категорию, которая обозначается через $\mathcal{AS}$. Регулярные симметрические аффинные системы образуют полную подкатегорию категории $\mathcal{AS}$, которую обозначим через $\mathcal{SAS}$. Тождественный морфизм 1_S аффинной системы S, описываемой соотношениями (2.1), — это тождественное отображение $e_M: M \to M$. Изоморфизм $\psi: S_1 \to S_2$, где S_1, S_2 — системы, описываемые соотношениями (2.1), (2.2), — это такой диффеоморфизм $\psi: M \to M$, что ψ, ψ^{-1} являются морфизмами. Отметим, что если $\psi: M \to N$ — морфизм системы S_1, описываемой соотношениями (2.1), в систему S_2, описываемую соотношениями (2.2), и $V \subset M$ — область, то отображение $\psi|_V: V \to N$ является морфизмом системы $(S_1)_V$ в систему S_2, где $(S_1)_V$ — аффинная система, являющаяся ограничением системы S_1 на V.

Теорема 2.1. *Пусть F, G — ассоциированные аффинные распределения систем* (2.1), (2.2). *Тогда гладкое отображение $\psi\colon M \to N$ является морфизмом системы* (2.1) *в систему* (2.2), *если и только если ψ — морфизм F в G (т.е. $\psi_*|F(y) \subset G(\psi(y)), \forall y \in M$).*

Доказательство. Пусть $\psi\colon M \to N$ — морфизм системы (2.1) в систему (2.2). Возьмем произвольную точку $y_0 \in M$ и вектор $\xi \in F(y_0)$. Тогда существует такая точка $u_0 \in \mathbb{R}^r$, что $\xi = f_0(y_0) + f(y_0)u_0$. Докажем, что $\psi_*|_{y_0}\xi \in G(\psi(y))$. Рассмотрим решение системы (2.1) $y(t), t \in [t_0, t_1], y(t_0) = y_0$, которое соответствует некоторому управлению $u(t), t \in [t_0, t_1]$. Так как $x(t) = \psi(y(t)), t \in [t_0, t_1]$, — решение системы (2.2), то очевидно, что $\dot{x}(t) \in G(x(t))$. Осталось заметить, что $\dot{x}(t_0) = \psi_*|_{y_0}\dot{y}(t_0) = \psi_*|_{y_0}\xi$. Пусть $\psi\colon M \to N$ — морфизм F в G и $y(t), t \in [t_0, t_1]$, — решение системы (2.1), соответствующее управлению $u(t), t \in [t_0, t_1]$. Докажем, что $x(t) = \psi(y(t)), t \in [t_0, t_1]$, — решение системы (2.2), т.е. требуется доказать существование такого кусочно-непрерывного управления $u(t), t \in [t_0, t_1]$, что функции $y(t), u(t)$ удовлетворяют соотношениям (2.1). Это утверждение достаточно доказать для случая, когда $y(t)$ — C^1-гладкая кривая. Пусть $\operatorname{rank} g = p$. Будем считать, что кривая $x(t)$ принадлежит области, в которой какой-нибудь минор p-го порядка отличен от нуля. (Если этот факт не имеет места, то дальнейшие рассуждения следует провести для каждой из областей такого вида, число которых конечно, причем они покрывают кривую $y(t)$. Построенные при этом управления нетрудно склеить в одно кусочно-непрерывное управление, соответствующее кривой $x(t)$.) Так как $\dot{x}(t) = \psi_*|_{y(t)}\dot{y}(t)$ и $\dot{y}(t) \in F(y(t))$, то $\dot{x}(t) \in G(x(t))$. Следовательно, найдутся такие функции $v(t), t \in [t_0, t_1]$, что

$$\dot{x}(t) = g_0(x(t)) + g_\beta(x(t))v^\beta(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{2.3}$$

Докажем, что в качестве $v^\beta(t)$ можно взять непрерывные функции. Если $p = 0$, то доказательство очевидно. Пусть $p = s > 0$. Тогда функции $v(t)$ однозначно определяются из соотношений (2.3) и являются непрерывными функциями, ибо представляют собой единственное решение совместной системы линейных алгебраических уравнений с непрерывными коэффициентами. Пусть $0 < p < s$. Предположим, что отличен от нуля минор p-го порядка в матрице $\|g^i_\alpha(x)\|^{i=1,\ldots,n}_{\alpha=1,\ldots,p}$, порождаемый полями $g_\alpha, \alpha = 1, \ldots, p$. Тогда $g_\beta = \varkappa^\alpha_\beta(x)g_\alpha, \beta = p+1, \ldots, s$, где $\varkappa^\alpha_\beta$ — гладкие функции. Запишем соотношения (2.3) в виде

$$\dot{x}(t) = g_0(x(t)) + g_\alpha(x(t))(v^\alpha(t) + \varkappa^\alpha_\beta(x(t))v^\beta(t)). \tag{2.4}$$

Из соотношений (2.4) можно однозначно определить непрерывные функции $w^\alpha(t) = v^\alpha(t) + \varkappa^\alpha_\beta(x(t))v^\beta(t)$. Взяв в качестве $v^\beta(t)$, $\beta = p+1, \ldots, s$, произвольные непрерывные функции, получим непрерывные функции $v^\alpha(t) = w^\alpha(t) \Leftrightarrow \varkappa^\alpha_\beta(x(t))v^\beta$, $\alpha = 1, \ldots, p$. Ясно, что функции $x(t)$ и построенные непрерывные функции $v^\beta(t), \beta = 1, \ldots, s$, удовлетворяют (2.3), т.е. $x(t), t \in [t_0, t_1]$, — решение системы (2.2). $\square$

Напомним, что в разделе 1.3 были введены категория регулярных аффинных распределений $\mathcal{RAD}$ и категория регулярных распределений $\mathcal{RD}$. Построим отображение $A\colon \mathcal{AS} \to \mathcal{RAD}$ следующим образом. Каждой аффинной управляемой системе S поставим в соответствие ассоциированное аффинное распределение $A(S)$, а каждому морфизму $\psi\colon S_1 \to S_2$ — морфизм $A(\psi)\colon A(S_1) \to A(S_2)$, который является тем же самым отображением $\psi\colon M \to N$ (где M, N — области, в которых определены системы S_1, S_2). В силу теоремы 2.1 отображение A определено корректно. Ясно, что отображение A является функтором из $\mathcal{AS}$ в $\mathcal{RAD}$. Кроме того, можно утверждать, что функтор A осуществляет эквивалентность между категорией $\mathcal{AS}$ и категорией $\mathcal{FRAD}$, которая является полной подкатегорией категории $\mathcal{RAD}$. (Напомним, что объектами категории $\mathcal{FRAD}$ являются регулярные аффинные распределения, аффинно порождаемые конечным числом векторных полей.) Действительно, из теоремы 2.1 следует, что для каждой пары объектов $S_1, S_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{AS}$ отображение

$$\operatorname{Mor}_{\mathcal{AS}}(S_1, S_2) \to \operatorname{Mor}_{\mathcal{FRAD}}(A(S_1), A(S_2))$$

биективно. С другой стороны, для каждого объекта F из $\mathcal{FRAD}$ существует объект S из $\mathcal{AS}$, такой, что $A(S) = F$. В самом деле, пусть аффинное распределение F определено в области $M \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим в этой области некоторое конечное семейство векторных полей $\xi_\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots, r$, порождающее F, т.е.

$$F(y) = \operatorname{affspan}\{\xi_\alpha(y), \alpha = 0, 1, \ldots, r\}, \quad \forall y \in M.$$

Тогда если с помощью полей $f_0 = \xi_0, f_\alpha = \xi_0 \Leftrightarrow \xi_\alpha, \alpha = 1, \ldots, r$, построить аффинную управляемую систему S, описываемую соотношениями (2.1), то очевидно, что $A(S) = F$. Ясно также, что и категории $\mathcal{SAS}, \mathcal{FRD}$ эквивалентны.

Итак, доказано

Предложение 2.1. *Категории $\mathcal{AS}$ и $\mathcal{FRAD}$ эквивалентны.*

Замечание 2.1. Категории $\mathcal{AS}$ и $\mathcal{FRAD}$ не изоморфны. Действительно, если $F \in \operatorname{Ob}\mathcal{FRAD}$, то, согласно доказательству предложения 2.1, построение управляемой системы S, такой, что $A(S) = F$, неоднозначно. Очевидно, что все такие системы изоморфны (относительно изоморфизма, являющегося тождественным отображением). Допуская вольность речи, можно сказать, что категория $\mathcal{FRAD}$ получается из $\mathcal{AS}$ склеиванием (факторизацией) такого рода изоморфных систем. При этом склеивании не происходит потери совокупности морфизмов.

Из сказанного следует вывод: нахождение морфизмов категории $\mathcal{AS}$ регулярных аффинных управляемых систем сводится к нахождению морфизмов категории регулярных аффинных распределений. Таким образом, теория редукции аффинных управляемых систем, основанная на использовании морфизмов категории $\mathcal{AS}$, имеет в виде теории аффинных распределений и двойственной теории t-кораспределений адекватный математический аппарат.

Приступим к изучению морфизмов категории $\mathcal{AS}$.

Пусть $\psi\colon M \to N$ — морфизм системы (2.1) в систему (2.2). Заменой управлений, соответствующей морфизму ψ, будем называть гладкое отображение $\Lambda\colon M \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$, обладающее следующим свойством: если $y(t), t \in [t_0, t_1]$, — решение системы (2.1), соответствующее управлению $u(t), t \in [t_0, t_1]$, то $x(t) = \psi(y(t)), t \in [t_0, t_1]$, — решение системы (2.2), соответствующее управлению $v(t) = \Lambda(y(t), u(t)), t \in [t_0, t_1]$.

Предложение 2.2. *Пусть $\psi\colon M \to N$, $\Lambda\colon M \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$ — гладкие отображения. Отображение ψ является морфизмом управляемой системы* (2.1) *в управляемую систему* (2.2), *причем отображение Λ является соответствующей заменой управлений, тогда и только тогда, когда для любых $y \in M, u \in \mathbb{R}^r$*

$$g_0(\psi(y)) + g(\psi(y))\Lambda(y, u) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(f_0(y) + f(y)u). \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть ψ — морфизм, а Λ — замена управлений. Возьмем произвольные точки $y_0 \in M, u_0 \in \mathbb{R}^r$. Рассмотрим такое решение системы (2.1) $y(t), t \in [t_0, t_1]$, которое соответствует управлению $u(t) = u_0, t \in [t_0, t_1]$, причем $y(t_0) = y_0$. Так как $x(t) = \psi(y(t))$ — решение системы (2.2), соответствующее управлению $v(t) = \Lambda(y(t), u(t))$, то $\dot{x}(t_0) = g_0(\psi(y_0)) + g(\psi(y_0))\Lambda(y_0, u_0)$. С другой стороны,

$$\dot{x}(t_0) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{y_0} \dot{y}(t_0) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{y_0} (f_0(y_0) + f(y_0)u_0).$$

Отсюда вытекает справедливость (2.5) при $y = y_0$, $u = u_0$. Обратно, пусть выполняется (2.5). Возьмем решение $y(t)$ системы (2.1), соответствующее управлению $u(t)$. Покажем, что $x(t) = \psi(y(t))$ — решение системы (2.2), соответствующее управлению $v(t) = \Lambda(y(t), u(t))$. Имеем, согласно (2.5),

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) \quad &= \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}\dot{y}(t) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(f_0(y(t)) + f(y(t)u(t)) = g_0(\psi(y(t)))+ \\ &+g(\psi(y(t)))\Lambda(y(t), u(t)) = g_0(x(t)) + g(x(t))v(t). \ \square\end{aligned}$$

Следствие 2.1. *Пусть* $\psi\colon M \to N$, $\Lambda\colon M \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$ *— гладкие отображения, причем* Λ *имеет вид*

$$v^\beta = \lambda_0^\beta(y) + \lambda_\alpha^\beta(y)u^\alpha, \quad \beta = 1, \ldots, s. \tag{2.6}$$

Отображение ψ *является морфизмом системы* (2.1) *в систему* (2.2), *причем отображение* Λ *является соответствующей заменой управлений, тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi}{\partial y}f_0(y) = g_0(\psi(y)) + \lambda_0^\beta(y)g_\beta(\psi(y)), \\ &\frac{\partial\psi}{\partial y}f_\alpha(y) = \lambda_\alpha^\beta(y)g_\beta(\psi(y)), \quad y \in M, \quad \alpha = 1, \ldots, r. \ \square\end{aligned} \tag{2.7}$$

Следствие 2.2. *Пусть* $\psi\colon M \to N$ *— морфизм системы* S_1, *описываемой соотношениями* (2.1), *в систему* S_2, *описываемую соотношениями* (2.2). *Тогда для каждой точки* $y_0 \in M$ *найдется такая окрестность* U *и отображение* $\Lambda\colon U \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$, *имеющее вид* (2.6), *что* Λ *является заменой управлений, соответствующей морфизму* $\psi|_U$ *системы* $(S_1)|_U$ *в систему* S_2.

Доказательство. Из теоремы 2.1 и предложения 1.21 следует, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}f_0(y) \in G(\psi(y)), \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}f_\alpha(y) \in \mathbf{L}_G(\psi(y)), \quad \alpha = 1, \ldots, r,$$

для любой точки $y \in M$. Следовательно, существуют функции λ_α^β, удовлетворяющие (2.7), т.е. система (2.7) совместна. Пусть $x_0 = \psi(y_0)$. Тогда существует окрестность V точки x_0, в которой отличен от нуля некоторый базисный минор матрицы $g(x)$. Очевидно, что в окрестности $U = \psi^{-1}(V)$ существует гладкое решение системы (2.7), которое и определяет замену управлений, соответствующую морфизму $\psi|_U$. $\square$

Замечание 2.2. Для данного морфизма ψ замена управлений (2.6) определена неоднозначно: каждое гладкое решение системы уравнений (2.7) определяет соответствующую замену управлений. Замена управлений определяется однозначно тогда и только тогда, когда система (2.2) неприводима (т.е. $\operatorname{rank} g = s$).

В дальнейшем под заменой управлений, соответствующей морфизму, будем понимать замену управлений вида (2.6). Для фиксированной точки $y \in M$ замена управлений $\Lambda\colon M \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$ определяет отображение $\Lambda_y\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$, ставящее в соответствие каждой точке $u \in \mathbb{R}^r$ точку $v = \Lambda(y, u) \in \mathbb{R}^s$. Замена управлений называется невырожденной, если $r = s$ и Λ_y — биекция, т.е. $|\lambda| \neq 0$.

2.2. Специальные подкатегории категории $\mathcal{AS}$

Введем в рассмотрение некоторые специальные виды морфизмов. Морфизм $\psi\colon M \to N$ системы (2.1) в систему (2.2) называется морфизмом по фазовым переменным, если $r = s$ и отображение $v = u$ является соответствующей заменой управлений, т.е. если $y(t)$ — решение системы (2.1), соответствующее управлению $u(t)$, то $x(t) = \psi(y(t))$ — решение системы (2.2), соответствующее управлению $v(t) = u(t)$.

Аффинные управляемые системы (2.1) с такими морфизмами образуют категорию, которая обозначается через $\mathcal{ASP}$ и является подкатегорией категории $\mathcal{AS}$.

В случае морфизма по фазовым переменным соотношения (2.7) принимают следующий вид:

$$f_\alpha^i(y)\frac{\partial \psi^k}{\partial y^i} = g_\alpha^k(\psi(y)), \quad k = 1, \ldots, m, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, r. \tag{2.8}$$

Отсюда вытекает

Предложение 2.3. *Отображение $\psi\colon M \to N$ является морфизмом по фазовым переменным системы* (2.1) *в систему* (2.2) *тогда и только тогда, когда поля $f_\alpha, g_\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots, r$, ψ-связаны.*

В разделе 1.3 (см. с. 35) была введена категория $\mathcal{FVF}$, объектами которой являются конечные семейства векторных полей. Каждой управляемой системе (2.1) ставится в соответствие ассоциированное семейство полей $\mathfrak{f} = \{f_\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots, r\}$, которое является объектом категории $\mathcal{FVF}$. В силу определения морфизмов в категории $\mathcal{FVF}$ и предложения 2.3, ясно, что категории $\mathcal{ACP}$ и $\mathcal{FVF}$ изоморфны. Кроме того, каждой аффинной системе соответствует ассоциированная группа диффеоморфизмов, которая порождается ассоциированным семейством полей. Из предложения 1.46 следует, что категория $\mathcal{ASP}$ изоморфна также категории $\mathcal{FG}$ групп диффеоморфизмов.

Итак, справедливо

Предложение 2.4. *Категория $\mathcal{ASP}$ изоморфна категориям $\mathcal{FVF}$ и $\mathcal{FG}$.*

Отметим, что при изучении нелинейных управляемых систем общего вида

$$\dot{y} = f(y, u), \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r, \tag{2.9}$$

в качестве ассоциированного семейства векторных полей рассматривают семейство $\mathfrak{f}' = \{f_u, u \in U\}$, где поля $f_u \in \mathcal{T}(M)$ получаются из правой части системы (2.9) подстановкой всевозможных значений $u \in U$. В качестве ассоциированной алгебры Ли выступает алгебра Ли $\mathfrak{f}'^*$, а качестве ассоциированной группы — группа диффеоморфизмов, порождаемая семейством $\mathfrak{f}'$.

Для систем (2.9) аналогично вводятся морфизмы по фазовым переменным: гладкое отображение $\psi\colon M \to N$ называется морфизмом по фазовым переменным системы (2.9) в систему

$$\dot{g} = g(x, v), \quad x \in N \subset \mathbb{R}^m, \quad u \in V \subset \mathbb{R}^s, \tag{2.10}$$

если $r = s$, $U = V$ и ψ переводит решения системы (2.9) в решения системы (2.10), соответствующие одинаковым управлениям. Справедлив следующий результат: отображение $\psi\colon M \to N$ является морфизмом по фазовым переменным системы (2.9) в (2.10) тогда и только тогда, когда $g_u = \psi_* f_u, \forall u \in U$. Для аффинных систем этот результат, очевидно, равносилен предложению 2.3 (данное утверждение есть непосредственное следствие предложения 2.2 при $\Lambda(y, u) = u$). Заметим также, что $\mathfrak{f}^* = \mathfrak{f}'^*$. Свойства групп, порождаемых семействами $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{f}'$, одинаковы.

Изучением управляемых систем с (явным или неявным) использованием морфизмов по фазовым переменным занимались многие исследователи, в основном в 70-е годы (см., например, обзоры [11, 12]). Из предложения 2.4 (и из аналогичного результата для систем общего вида (2.9)) ясно, что основными инструментами такого изучения являются ассоциированное семейство векторных полей и ассоциированная группа диффеоморфизмов. Большую роль здесь играют методы теории групп Ли и алгебр Ли. Настоящая книга посвящена редукции в категории $\mathcal{AS}$, однако по ходу изложения будут отмечаться, а иногда и доказываться некоторые результаты по редукции в категории $\mathcal{ASP}$.

Заметим, что вопрос о существовании морфизмов по фазовым переменным для данных систем (2.1) и (2.2) является вопросом о совместности системы дифференциальных уравнений (2.8) относительно неизвестных функций $\psi^k(y), k = 1, \ldots, m$. Это система является системой в частных производных с одинаковой главной частью. Такого рода системы были рассмотрены в разделе 1.7. Из результатов этого раздела следует, что существование морфизмов по фазовым переменным для данных систем устанавливается только алгебраическими средствами. Определение морфизмов сводится к нахождению решений некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Замечание 2.3. Соотношения (2.7), определяющие морфизмы общего вида, являются системой дифференциальных уравнений относительно неизвестных ψ^i, $\lambda_\beta^\alpha(y)$, которая представляет собой систему с одинаковой главной частью относительно ψ^i. Неизвестные λ_β^α являются параметрическими. Исследовать такие уравнения уже сложнее (см. замечание 1.27 в разделе 1.7). Поэтому часто эффективнее находить морфизмы, опираясь на теорему 2.1. После этого соответствующие замены управлений находятся чисто алгебраическими средствами решением уравнений (2.7) относительно $\lambda_\beta^\alpha(y)$.

Можно сказать, что при морфизмах по фазовым переменным не меняются значения управлений. Введем теперь вид морфизмов, при которых не меняются фазовые переменные.

Морфизм системы (2.1) в систему (2.2) называется морфизмом по управлениям, если $M \subset N$ и ψ — инъекция M в N (т.е. отображение, ставящее в соответствие каждой точке $y \in M$ ту же точку, но рассматриваемую как точку N).

Аффинные управляемые системы (2.1) с такими морфизмами образуют категорию, которая обозначается через $\mathcal{ASC}$ и является подкатегорией категории $\mathcal{AS}$.

Если ψ — морфизм по управлениям, то соответствующая замена управлений $v = \lambda_0(y) + \lambda(y)u$ определяется из уравнений (2.7), которые в данном случае имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&f_0(y) = g_0(\psi(y)) + \lambda_0^\beta(y) g_\beta(\psi(y)),\\
&f_\alpha(y) = \lambda_\alpha^\beta(y) g_\beta(\psi(y)), \quad y \in M, \quad \alpha = 1, \ldots, r.
\end{aligned}
$$

Вопрос о существовании морфизмов по управлениям для данных систем решается алгебраически путем исследования на совместность этой системы алгебраических уравнений.

Сказанное можно интерпретировать следующим образом. Тот факт, что существует морфизм по управлениям системы (2.1) в систему (2.2), равносилен тому, что система (2.1) получается из системы (2.2) ограничением на M и подстановкой $v = \lambda_0(y) + \lambda(y)u$, т.е. заменой (не обязательно невырожденной) управлений.

Морфизмы по управлениям, являющиеся изоморфизмами, называются изоморфизмами по управлениям. Очевидно, что если система

(2.1) получается из системы (2.2) невырожденной заменой управлений, то системы (2.1) и (2.2) изоморфны по управлениям, но не наоборот.

Рассмотрим вопрос о представлении морфизмов в виде композиции других морфизмов. Иначе говоря, если имеется морфизм ψ системы S_1 в систему S_2, то поставим вопрос о существовании таких систем $Q_i, i = 1, \ldots, k$, и морфизмов $\gamma_i \colon Q_i \to Q_{i+1}, i = 1, \ldots, k-1$, что $Q_1 = S_1$, $Q_k = S_2$ и $\psi = \gamma_{k-1} \ldots \gamma_1$. Мы будем интересоваться представлением морфизмов общего вида в виде композиции более простых морфизмов по фазовым переменным и морфизмов по управлениям.

Начнем с элементарных утверждений.

Предложение 2.5. *Морфизм, для которого существует невырожденная замена управлений, разлагается в композицию морфизма (точнее, изоморфизма) по управлениям и морфизма по фазовым переменным.*

Доказательство. Пусть ψ — морфизм системы (2.1) в систему (2.2), причем $r = s$ и существует невырожденная замена управлений $\Lambda \colon M \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ вида $v = \lambda_0(y) + \lambda(y)u$, $|\lambda| \neq 0$. Построим отображение $\tilde{\Lambda} \colon M \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ вида

$$u = \tilde{\lambda}_0(y) + \tilde{\lambda}(y)v, \tag{2.11}$$

где $\tilde{\lambda}(y) = \lambda^{-1}(y), \tilde{\lambda}_0(y) = -\lambda^{-1}(y)\lambda_0(y)$, и систему

$$\dot{y} = \tilde{f}_0(y) + \tilde{f}_\beta(y)v^\beta, \quad y \in M, \quad v \in \mathbb{R}^r, \tag{2.12}$$

которая получается из (2.1) подстановкой (2.11). Ясно, что тождественное отображение e_M является изоморфизмом системы (2.1) в систему (2.12). Очевидно также, что ψ является морфизмом по фазовым переменным системы (2.12) в систему (2.2). $\square$

Предложение 2.6. *Морфизм, который является диффеоморфизмом, разлагается в композицию морфизма (точнее, изоморфизма) по фазовым переменным и морфизма по управлениям.*

Доказательство. Пусть морфизму ψ системы (2.1) в систему (2.2) соответствует замена управлений $v = \Lambda(y, u)$. Построим в области N систему

$$\dot{x} = \tilde{g}_0(x) + \tilde{g}_\alpha(x)u^\alpha, \quad x \in N, \quad u \in \mathbb{R}^r, \tag{2.13}$$

которая получается из (2.2) подстановкой $v = \hat{\Lambda}(x, u) = \Lambda(\psi^{-1}(x), u)$. Легко видеть, что ψ является морфизмом по фазовым переменным системы (2.1) в систему (2.13). Ясно также, что тождественное отображение e_N является морфизмом системы (2.13) в систему (2.2). $\square$

Рассмотрим теперь несколько более общий случай. Морфизм ψ системы (2.1) в систему (2.2) называется полным, если $\psi_*|_y F(y) = G(\psi(y)), \forall y \in M$, где F, G — ассоциированные аффинные распределения систем (2.1) и (2.2). Заметим, что морфизм по фазовым переменным является полным морфизмом. Справедливо

Предложение 2.7. *Пусть S_1, S_2 — системы, описываемые соотношениями* (2.1), (2.2), *причем $r = s$, и пусть ψ — полный морфизм S_1 в S_2. Тогда для каждой точки $y_0 \in M$ существует такая окрестность V, что морфизм $\psi|_V$ системы $S_1|_V$ в S_2 разлагается в композицию изоморфизма по управлениям и морфизма по фазовым переменным.*

Доказательство. Если ψ — морфизм, то функции $\lambda_\alpha^\beta(y), \alpha = 0, 1, \ldots, r, \beta = 1, \ldots, r$, определяющие соответствующие замены управлений (2.6), находятся из условий (2.7). Возьмем произвольную точку y_0. Покажем, что существует такая окрестность V этой точки, что для морфизма $\psi|_V$ имеется невырожденная замена управлений, т.е. в (2.6) $|\lambda_\alpha^\beta|_{\alpha=1,\ldots,r}^{\beta=1,\ldots,r} \neq 0$. Пусть $\operatorname{rank} g = p$ и поля $g_\beta, \beta = 1, \ldots, p$, являются линейно несвязанными в окрестности точки $x_0 = \psi(y_0)$. Пусть F, G — ассоциированные аффинные распределения систем S_1, S_2. Так как ψ — полный морфизм, то $\psi_*|_y \mathbf{L}_F(y) = \mathbf{L}_G(\psi(y))$, $\forall y \in M$. Следовательно, векторы $\tilde{f}_\alpha(y) = \psi_*|_y f_\alpha(y) \in TN_{\psi(y)}$, $\alpha = 1, \ldots, r$, порождают линейные пространства $\mathbf{L}_G(\psi(y)), \forall y \in M$. Поэтому среди полей $f_\alpha, \alpha = 1, \ldots, r$, найдутся такие p полей, скажем $f_\alpha, \alpha = 1, \ldots, p$, что векторы $\tilde{f}_\alpha(y_0), \alpha = 1, \ldots, p$, составляют базис $\mathbf{L}_G(\psi(y_0))$. Ясно, что для всех точек y из некоторой окрестности точки y_0 векторы $\tilde{f}_\alpha, \alpha = 1, \ldots, p$, будут составлять базис $\mathbf{L}_G(\psi(y))$. Итак, существует окрестность V точки y_0, в которой справедливы представления

$$\tilde{f}_\alpha(y) = \lambda_\alpha^\beta(y) g_\beta(\psi(y)), \quad \beta = 1, \ldots, p, \quad \alpha = 1, \ldots, p, \tag{2.14}$$

где λ_α^β — гладкие функции, причем $\operatorname{rank} \|\lambda_\alpha^\beta(y)\|_{\alpha=1,\ldots,p}^{\beta=1,\ldots,p} = p$. Полученные функции $\lambda_\alpha^\beta(y)$ используем для построения матрицы λ в замене управлений $v = \lambda_0(y) + \lambda(y) u$. Если $p = s = r$, то данная матрица уже построена. Пусть $p < r$. Недостающие функции λ_α^β определим следующим образом. Положим $\lambda_\alpha^\beta = 0, \alpha = 1, \ldots, p,\ \beta = p+1, \ldots, r$; $\lambda_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta$ (символ Кронекера), $\alpha = p+1, \ldots, r,\ \beta = p+1, \ldots, r$. После этого функции $\lambda_\alpha^\beta, \alpha = p+1, \ldots, r,\ \beta = 1, \ldots, p$, определятся однозначно из соотношений

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} f_\alpha(y) = \lambda_\alpha^\beta(y) g_\beta(\psi(y)), \quad \alpha = p+1, \ldots, r, \quad \beta = 1, \ldots, r.$$

В результате получится матрица $\lambda = \|\lambda^{\beta}_{\alpha}\|^{\beta=1,\ldots,r}_{\alpha=1,\ldots,r}$ следующего вида:

$$\lambda = \left\| \begin{matrix} A & 0 \\ * & E \end{matrix} \right\|. \tag{2.15}$$

В (2.15) матрица $A = \|\lambda^{\alpha}_{\beta}\|^{\alpha=1,\ldots,p}_{\beta=1,\ldots,p}$ имеет ранг p, а E — единичная матрица. Из вида (2.15) следует, что $|\lambda| \neq 0$. Итак, для морфизма $\psi|_V$ построена замена управлений, являющаяся невырожденной. Отсюда и из предложения 2.5 вытекает доказываемое утверждение. $\square$

Глава 3

Эквивалентность управляемых систем

3.1. Общие свойства эквивалентных управляемых систем

Рассмотрим две аффинные управляемые системы, являющиеся объектами категории $\mathcal{AS}$:

$$\dot{y} = f_0(y) + f(y)u, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \tag{3.1}$$

$$\dot{x} = g_0(x) + g(x)v, \quad x \in N \subset \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}^s. \tag{3.2}$$

По определению система (3.1) эквивалентна системе (3.2) в категории $\mathcal{AS}$, если система (3.1) изоморфна системе (3.2) в категории $\mathcal{AS}$, т.е. существует изоморфизм $\psi\colon M \to N$ системы (3.1) в систему (3.2). Это означает подробнее, что ψ — диффеоморфизм, причем если $y(t)$ — решение системы (3.1), то $x(t) = \psi(y(t))$ — решение системы (3.2), и обратно, если $x(t)$ — решение системы (3.2), то $y(t) = \psi^{-1}(x(t))$ — решение системы (3.1).

Если ψ — изоморфизм в категории $\mathcal{ASP}$ или, иначе говоря, изоморфизм по фазовым переменным, то будем говорить, что системы (3.1) и (3.2) эквивалентны в категории $\mathcal{ASP}$ или эквивалентны по фазовым переменным. Аналогично определяется эквивалентность в категории $\mathcal{ASC}$ или, иначе говоря, эквивалентность по управлениям.

Дадим локальный вариант определения эквивалентности систем. Говорят, что система (3.1) локально эквивалентна в точке $y_0 \in M$ системе (3.2), если существует такая окрестность $V \subset M$ точки y_0 и такой диффеоморфизм $\psi: V \to \psi(V)$, что ψ является изоморфизмом системы (3.1), ограниченной на окрестность V, в систему (3.2), ограниченную на окрестность $\psi(V)$. Если система (3.1) локально эквивалентна в каждой точке $y \in M$ системе (3.2), то будем говорить, что система (3.1) локально эквивалентна системе (3.2).

Существенную роль в вопросе об эквивалентности играет следующее утверждение, непосредственно вытекающее из теоремы 2.1.

Теорема 3.1. *Аффинные управляемые системы эквивалентны тогда и только тогда, когда их ассоциированные аффинные распределения диффеоморфны.* □

Введенное понятие эквивалентности является несколько более широким, чем понятие эквивалентности, основанное на невырожденных заменах переменных. Последнее определим следующим образом.

Рассмотрим диффеоморфизм $D: M \times \mathbb{R}^r \to N \times \mathbb{R}^r$, где M, N — области в $\mathbb{R}^n$, вида

$$(y, u) \mapsto (x, v) = (\psi(y), \Lambda(y, u)), \tag{3.3}$$

где отображение $y \mapsto x = \psi(y)$ является диффеоморфизмом M на N, а отображение

$$(y, u) \mapsto v = \Lambda(y, u) = \lambda_0(y) + \lambda(y)u \tag{3.4}$$

для каждого фиксированного $y \in M$ определяет биекцию $\Lambda_y: \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ (т.е. матрица $\lambda(y)$ невырождена).

Обратный диффеоморфизм $D^{-1}: N \times \mathbb{R}^r \to M \times \mathbb{R}^r$ имеет вид

$$(x, v) \mapsto (y, u) = (\psi^{-1}(x), \tilde{\Lambda}(x, v)), \tag{3.5}$$

причем отображение $\tilde{\Lambda}: N \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ выглядит так:

$$(x, v) \mapsto u = \tilde{\Lambda}(x, v), \tag{3.6}$$

где $\tilde{\Lambda}(x, v) = \tilde{\lambda}_0(x) + \tilde{\lambda}(x)v$, причем

$$\tilde{\lambda}_0(x) = \Leftrightarrow \lambda^{-1}(\psi^{-1}(x))\lambda_0(\psi^{-1}(x)), \quad \tilde{\lambda}(x) = \lambda^{-1}(\psi^{-1}(x)),$$

т.е. $\tilde{\Lambda}_x = \Lambda^{-1}_{\psi^{-1}(x)}$.

Говорят, что системы (3.1), (3.2), для которых $r = s$, диффеоморфны, если существует такой диффеоморфизм D вида (3.3), что

$$\begin{aligned} g_0(\psi(y)) &= \psi_*|_y(f_0(y) \Leftrightarrow f(y)\lambda^{-1}(y)\lambda_0(y)), \\ g(\psi(y)) &= \psi_*|_y(f(y)\lambda^{-1}(y)), \quad y \in M. \end{aligned} \tag{3.7}$$

В этом случае говорят также, что система (3.2) получается из системы (3.1) заменой переменных (3.3). Легко видеть, что, согласно этой терминологии, система (3.1) получается из (3.2) (обратной) заменой переменных (3.5). Действительно, если выполняются равенства (3.7), то выполняются и равенства

$$\begin{aligned} &f_0(\psi^{-1}(x)) = \psi_*^{-1}|_x(g_0(x) \Leftrightarrow g(x)\tilde{\lambda}^{-1}(x)\tilde{\lambda}_0(x)),\\ &f(\psi^{-1}(x)) = \psi_*^{-1}|_x(g(x)\tilde{\lambda}^{-1}(x)), \quad x \in N. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Дадим локальный вариант определения диффеоморфности систем. Говорят, что система (3.1) локально диффеоморфна в точке $y_0 \in M$ системе (3.2), если существует такая окрестность $V \subset M$ точки y_0 и такой диффеоморфизм $D\colon V \times \mathbb{R}^r \to U \times \mathbb{R}^r$ вида (3.3), что система (3.1), ограниченная на окрестность V, диффеоморфна относительно диффеоморфизма D системе (3.2), ограниченной на окрестность $U \subset N$. Если система (3.1) локально диффеоморфна в каждой точке $y \in M$ системе (3.2), то будем говорить, что система (3.1) локально диффеоморфна системе (3.2).

Связь понятий эквивалентности и диффеоморфности систем выражает

Теорема 3.2. *Пусть для систем* (3.1) *и* (3.2) $r = s$. *Если система* (3.1) *диффеоморфна системе* (3.2), *то система* (3.1) *эквивалентна системе* (3.2). *Если система* (3.1) *эквивалентна системе* (3.2), *то система* (3.1) *локально диффеоморфна системе* (3.2).

Доказательство. Пусть системы S_1, S_2, описываемые соотношениями (3.1), (3.2), диффеоморфны относительно диффеоморфизма D вида (3.3). Из (3.7), (3.8) и следствия 2.1 предложения 2.2 вытекает, что ψ — морфизм S_1 в S_2 (причем (3.4) — соответствующая замена управлений), а ψ^{-1} — морфизм S_2 в S_1 (причем (3.6) — соответствующая замена управлений). Обратно, пусть системы S_1 и S_2 эквивалентны, причем $\psi\colon M \to N$ — изоморфизм. Достаточно показать, что для каждой точки $y_0 \in M$ существует окрестность V и невырожденная замена управлений $\Lambda\colon V \times \ R^r \to \mathbb{R}^r$, соответствующая изоморфизму $\psi_V\colon V \to U$ системы $(S_1)_V$ в систему $(S_2)_U$. Действительно, если построить диффеоморфизм $D\colon V \times \mathbb{R}^r \to U \times \mathbb{R}^r$ вида (3.3) (где вместо ψ используется ψ_V), то, согласно следствию 2.1 предложения 2.2, будут выполняться соотношения (3.7) в точках $y \in V$, т.е. системы $(S_1)_V$ и $(S_2)_U$ будут диффеоморфны относительно диффеоморфизма D. Из предложения 2.7 вытекает, что в случае полного морфизма (каковым, разумеется, является изоморфизм) для каждой точки $y_0 \in M$ можно построить такую локальную невырожденную замену управлений. □

Замечание 3.1. Пусть системы (3.1) и (3.2), для которых $r = s$, диффеоморфны относительно диффеоморфизма $D\colon M \times \mathbb{R}^r \to N \times \mathbb{R}^r$ вида (3.3). Тогда, согласно предложению 2.5, изоморфизм разлагается в композицию изоморфизма по управлениям и изоморфизма по фазовым переменным. Иначе говоря, систему (3.2) можно получить из системы (3.1), сделав сначала невырожденную замену управлений $u \mapsto v = \Lambda(y, u)$, а затем — невырожденную замену фазовых переменных $y \mapsto x = \psi(y)$. С другой стороны, согласно предложению 2.6, изоморфизм ψ разлагается в композицию изоморфизма по фазовым переменным и изоморфизма по управлениям. Иными словами, систему (3.2) также можно получить из системы (3.1), сделав сначала невырожденную замену фазовых переменных $y \mapsto x = \psi(y)$, а затем — невырожденную замену управлений $u \mapsto v = \tilde{\Lambda}^{-1}(x, u) = \Lambda(\psi^{-1}(x), u)$.

Если для систем (3.1) и (3.2) $r \neq s$, то эти системы не могут быть диффеоморфными (или, иначе говоря, одну из другой нельзя получить невырожденной заменой переменных). Однако такие системы могут быть эквивалентными. Например, если для системы (3.1) $\operatorname{rank} \|f^i_\alpha\|^{i=1,\ldots,n}_{\alpha=1,\ldots,r} = p < r$ и $f_\alpha, \alpha = 1, \ldots, p,$ — линейно несвязанные поля, то, согласно теореме 3.1, система (3.1) эквивалентна неприводимой системе

$$\dot{y} = f_0(y) + f_\alpha(y) u^\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, p, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p. \tag{3.9}$$

Действительно, системы (3.1) и (3.9) порождают на M одинаковые ассоциированные аффинные распределения. Отсюда следует, что они эквивалентны по управлениям. (Изоморфизмом является тождественное отображение $M \to M$.)

Если системы (3.1) и (3.2) эквивалентны, причем $r \neq s$, то их формально можно интерпретировать как диффеоморфные в следующем смысле. Пусть $r < s$. Сопоставим системе (3.1) эквивалентную ей систему

$$\dot{y} = f_0(y) + f_\alpha(y) u^\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, s, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^s, \tag{3.10}$$

где $f_\alpha = 0, \alpha = r+1, \ldots, s$. Согласно теореме 3.2, системы (3.10) и (3.2), по крайней мере, локально диффеоморфны. Например, системы

$$\dot{y} = u^1, \quad y \in \mathbb{R}^1, \quad u^1 \in \mathbb{R}^1, \tag{3.11}$$

$$\dot{x} = v^1 + v^2, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad v \in \mathbb{R}^2, \tag{3.12}$$

эквивалентны, ибо отображение $x = \psi(y) = y$ является изоморфизмом (3.11) в (3.12). Поставим в соответствие системе (3.11) эквивалентную систему

$$\dot{y} = u^1 + 0 \cdot u^2, \quad y \in \mathbb{R}^1, \quad u \in \mathbb{R}^2. \tag{3.13}$$

Легко видеть, что системы (3.13) и (3.12) диффеоморфны относительно диффеоморфизма D:

$$x = \psi(y) = y, \quad v^1 = \frac{(u^1 + u^2)}{2}, \quad v^2 = \frac{(u^1 \Leftrightarrow u^2)}{2}.$$

3.2. Классификация некоторых типов управляемых систем

Понятие эквивалентности аффинных систем определяет отношение эквивалентности на совокупности аффинных управляемых систем. Следовательно, эта совокупность разбивается на классы эквивалентности, состоящие из эквивалентных систем. Как всегда в таких случаях возникает проблема классификации, которая заключается в описании классов эквивалентности, т.е. в описании управляемых систем с точностью до эквивалентности. В широком смысле эта проблема включает в себя, например, следующие задачи: нахождение критериев эквивалентности двух систем; построение диффеоморфизмов, осуществляющих эквивалентность; построение представителей классов эквивалентности (по возможности, наиболее простого вида).

Далее рассматривается вопрос о «локальной» классификации некоторых типов аффинных систем, т.е. вопрос об описании систем с точностью до локальной эквивалентности. При этом предполагается, что для каждой системы (3.1) точка y_0, в окрестности которой исследуется вопрос об эквивалентности, в зависимости от типа систем должна удовлетворять некоторым условиям регулярности, точнее — быть регулярной точкой некоторых распределений, связанных с аффинной системой. Ранги этих распределений являются инвариантами, т.е. величинами, которые не меняются при переходе к эквивалентной системе.

Тип аффинных управляемых систем — это условное понятие, выделяющее некоторую совокупность систем, характеризуемую либо значениями некоторых инвариантов, либо определенными соотношениями между инвариантами (либо тем и другим).

Пусть F — ассоциированное аффинное распределение, $K = F_\perp$ — ассоциированное t-кораспределение системы (3.1). Инварианты, которые будут использоваться, — это ранги аффинных распределений и распределений, порождаемых F (см. раздел 1.3), или, что равносильно, ранги t-кораспределений и распределений, порождаемых K (см. раздел 1.4). Например, тривиальным инвариантом наряду с $n = \dim M$ является величина $\dim F$, которую будем обозначать через p. Будем предполагать, что распределение $\operatorname{Span} F$, так же, как и F, является регулярным. Поэтому имеем другой тривиальный инвариант — $\dim \operatorname{Span} F$, который обозначается через l. Иначе говоря,

$$p = \operatorname{rank} \|f^i_\alpha\|^{i=1,\dots,n}_{\alpha=1,\dots,r}, \quad l = \operatorname{rank} \|f^i_\alpha\|^{i=1,\dots,n}_{\alpha=0,1,\dots,r}.$$

Важными инвариантами являются ранг характеристического распределения $\mathbf{C}F$ и ранг t-характеристического кораспределения $\mathbf{C}_t K$. Напомним, что последний называется классом K и обозначается через $\operatorname{class} K$. Имеем равенство $\dim \mathbf{C}F = n \Leftrightarrow \operatorname{class} K$ (в случае регулярности $\mathbf{C}F$ и $\mathbf{C}_t K$). Класс K вычисляется с помощью алгебраических операций: требуется построить характеристическую систему Пфаффа (1.105), (1.106) и определить максимальное число линейно несвязанных уравнений, что равносильно вычислению ранга матрицы.

Другими часто используемыми инвариантами являются ранги аффинных распределений, составляющих производный ряд (1.60) аффинного распределения F. Если точка, в окрестности которой ведется рассмотрение, является регулярной точкой производного ряда, то он, по существу, является конечной последовательностью

$$F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_N, \tag{3.14}$$

где $F_0 = F$, которая называется производным флагом. Производному флагу (3.14) соответствует производный кофлаг t-кораспределения K

$$K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_N, \tag{3.15}$$

где $K_0 = K$, причем $(F_i)_\perp = K_i, i = 0, 1, \dots, N$.

Введем обозначения: $\dim K_i = q_i, i = 0, 1, \dots, N$, $q = q_0$. Таким образом, $\dim F_i = n \Leftrightarrow q_i, i = 0, 1, \dots, N$, в частности, $p = n \Leftrightarrow q$. Напомним, что число $N + 1$, которое также является инвариантом, называется длиной производного флага (3.14) и, соответственно, производного кофлага (3.15).

Для нахождения чисел q_i можно использовать два алгоритма. Во-первых, это процесс пополнения, описанный в замечании 1.6: в последовательности (1.65) число полей семейства $\mathfrak{d}_i$, которое является базисным для распределения $\mathbf{L}_{F_i}$, равно рангу F_i. Другим алгоритмом является процесс построения базисных систем Пфаффа t-кораспределений $K_i, i = 0, 1, \dots, N$ (см. с. 86). Число уравнений в базисной системе Пфаффа t-кораспределения K_i как раз равно q_i. Оба алгоритма используют лишь элементарные алгебраические операции.

При изучении вопроса об эквивалентности систем используются и другие инварианты, например $\dim \mathbf{C}_t K_1$ и т.д.

При преобразовании системы (3.1) к эквивалентной системе (3.2) используются следующие приемы. Берется базисное семейство аффинного распределения F, которое, допустим, состоит из полей

$$f_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \dots, p. \tag{3.16}$$

Это семейство, рассматриваемое как семейство с отмеченным полем, приводится к некоторому аффинно эквивалентному семейству с отмеченным полем

$$g_\beta, \quad \beta = 0, 1, \dots, p. \tag{3.17}$$

С помощью семейства (3.17) строится аффинная управляемая система (3.2), которая эквивалентна системе (3.1). Может применяться и двойственный подход, т.е. берется базисная t-система Пфаффа ассоциированного t-кораспределения (которую можно получить из выражений (3.1) исключением переменных u и умножением на dt). Эта t-система Пфаффа приводится к некоторой t-эквивалентной t-системе Пфаффа. Построив для нее взаимное семейство с отмеченным полем (3.17), получим эквивалентную систему (3.2). Разумеется, эти подходы могут применяться совместно. Отметим, что при этом широко применются результаты, приведенные в разделе 1.5.

Далее в этом разделе рассматриваются следующие типы аффинных систем:

1) инволютивные системы;

2) системы, для которых $p = n \Leftrightarrow 1$;

3) системы, для которых $n < 5$;

4) системы, которые эквивалентны линейным.

Для каждого типа систем (при фиксированном значении n) имеется такой конечный набор систем, что любая система данного типа локально эквивалентна одной из систем, входящих в набор. Системы, составляющие набор, можно разделить на два типа: канонические формы и приведенные формы. Вторые отличаются от первых присутствием произвольных функций. Наличие приведенных форм характерно лишь для систем типа 3) при $n = 3, 4$ (причем в случае, когда $n = 3$, имеется только одна приведенная форма). Набор канонических и приведенных форм, соответствующий данному типу, состоит из попарно неэквивалентных систем, ибо они определяются разными значениями инвариантов. Вместе с тем, приведенная форма при конкретизации произвольных функций может порождать как эквивалентные, так и неэквивалентные системы. Для классификации множества возникающих систем используемых здесь числовых инвариантов не достаточно. В данном разделе приведены некоторые результаты по классификации множества систем, порождаемых приведенной формой для случая $n = 3$.

Начнем с инволютивных аффинных управляемых систем (3.1), т.е. таких систем, для которых ассоциированное аффинное распределение является инволютивным. Инволютивность F означает, что $F = F_1$, где F_1 — второй член в производном ряде (1.60). В терминах инвариантов тип инволютивных систем характеризуется равенством

$$\dim F = \dim F_1 = p.$$

Проверка инволютивности элементарна: достаточно показать, что базисное семейство (3.16) аффинного распределения F является аффинно полным, т.е. выполняются равенства

$$[f_\alpha, f_\beta] = \mu^\gamma_{\alpha\beta}(y) f_\gamma, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, p, \quad \gamma = 1, \ldots, p.$$

Теорема 3.3. *Инволютивная аффинная управляемая система* (3.1) *локально эквивалентна одной из следующих систем:*

$$\dot{x}^i = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = 1, \\ \dot{x}^k = 0, \quad k = 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{3.19}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^i = 0, \quad i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow p, \\ \dot{x}^k = v^k, \quad k = n \Leftrightarrow p + 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^i \quad = 0, \quad i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow p \Leftrightarrow 1, \\ \dot{x}^{n-p} = 1, \\ \dot{x}^k \quad = v^k, \quad k = n \Leftrightarrow p + 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\dot{x}^i = v^i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.22}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = 1, \\ \dot{x}^k = v^k, \quad k = 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{3.23}$$

Доказательство. Если $p = 0$, то система (3.1) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Если при этом $l = 1$, то это система без особых точек, и, стало быть, она, согласно теореме 1.3, локально эквивалентна системе (3.19). Если $p = l = 0$, то у системы (3.1) правые части тождественно равны нулю, и, следовательно, приходим к системе (3.18). Также очевидно, что если $p = n$, то система (3.1) эквивалентна (по управлениям) системе $\dot{y} = v$, $y \in M$, $v \in \mathbb{R}^n$, ибо они определяют одинаковые ассоциированные распределения $F \colon y \mapsto TM_y$. Таким образом, в этом случае приходим к системе

(3.22). Если $0 < p < n$, то базисное семейство F является аффинно полным семейством (с отмеченным полем). Из теоремы 1.20 следует, что система (3.1) локально эквивалентна системе (3.20), если $l = p$. Если $l = p + 1, l \neq n$, то система (3.1) локально эквивалентна системе (3.21). Если $l = p + 1 = n$, то система (3.1) локально эквивалентна системе (3.23). □

Замечание 3.2. Для инволютивной системы факт локальной эквивалентности той или иной системе (3.18)–(3.23) определяется лишь значениями n, p, l, а переход к эквивалентной системе осуществляется с помощью решения некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и линейного преобразования.

Замечание 3.3. Управляемые системы (3.1), для которых $p = n$, назовем тривиальными. Тривиальные системы образуют подтип инволютивных систем. Все тривиальные системы (для данного значения n) эквивалентны системе (3.21). Название обусловлено тем, что по существу любая задача управления для таких систем является тривиальной, ибо любая непрерывная кусочно C^1-гладкая кривая является решением.

Рассмотрим теперь другой тип аффинных систем (3.1), характеризующийся равенством $p = n \Leftrightarrow 1$. Справедлива

Теорема 3.4. *Аффинная управляемая система* (3.1), *для которой* $p = n \Leftrightarrow 1$, $n > 1$, *локально эквивалентна в точке* y_0, *являющейся регулярной для* $\mathbf{C}_t K$, *одной из следующих систем:*

$$\begin{cases} \dot{x}^i = v^i, \quad i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1, \\ \dot{x}^n = 0, \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^i = v^i, \quad i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1, \\ \dot{x}^n = x^1 v^2 + \ldots + x^{2k-1} v^{2k}, \end{cases} \tag{3.25}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^i = v^i, \quad i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1, \\ \dot{x}^n = 1, \end{cases} \tag{3.26}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^i = v^i, \quad i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1, \\ \dot{x}^n = 1 + x^1 v^2 + \ldots + x^{2k-1} v^{2k}, \end{cases} \tag{3.27}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^i = v^i, \quad i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1, \\ \dot{x}^n = x^{n-1}, \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^i = v^i, \quad i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1, \\ \dot{x}^n = x^{n-1} + x^1 v^2 + \ldots + x^{2j-1} v^{2j}, \end{cases} \tag{3.29}$$

где $k, j = 1, \ldots, (n \Leftrightarrow 2)/2$, *если* n *четно,* $n \geqslant 4$; $k = 1, \ldots, (n \Leftrightarrow 1)/2$, *если* n *нечетно,* $n \geqslant 3$; $j = 1, \ldots, (n \Leftrightarrow 3)/2$, *если* n *нечетно,* $n \geqslant 5$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда выполняются равенства $p = l = n \Leftrightarrow 1$, т.е. случай симметрической системы. Базисная t-система Пфаффа t-кораспределения K является по существу обычной системой Пфаффа, заданной в области M и состоящей из одного уравнения

$$\omega_i(y)dy^i = 0. \tag{3.30}$$

Заметим, что $\mathbf{C}_t K = \mathbf{C}_t F_\perp = \mathbf{C}F^\perp$ (ибо F является распределением). Согласно теореме 1.16, уравнение (3.30) локально эквивалентно одному из уравнений (1.142), (1.143) в зависимости от ранга $\mathbf{C}F^\perp$, который может быть любым нечетным числом $2k+1 \leqslant n$, где $k = 0, 1, \ldots$ Нетрудно видеть, что взаимным семейством (в этом случае можно говорить об обычных семействах без отмеченного поля) для уравнения (1.142) является семейство

$$g_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow 1, \tag{3.31}$$

а для уравнений (1.143) — семейства

$$\begin{gathered}
g_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad g_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^n}, \ldots, \\
g_{2k-1} = \frac{\partial}{\partial x^{2k-1}}, \quad g_{2k} = \frac{\partial}{\partial x^{2k}} + x^{2k-1} \frac{\partial}{\partial x^n}, \\
g_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 2k+1, \ldots, n \Leftrightarrow 1.
\end{gathered} \tag{3.32}$$

Семейству (3.31) соответствует (инволютивная) система (3.24), а семействам (3.32) — системы (3.25). Пусть теперь $p \neq l$. В этом случае F не является распределением. Рассмотрим базисное t-уравнение Пфаффа t-кораспределения K

$$\omega_i(y)dy^i + \omega_{n+1}(y)dt = 0. \tag{3.33}$$

Согласно теореме 1.24, уравнение (3.33) локально t-эквивалентно одному из уравнений (1.181)–(1.184) в зависимости от ранга $\mathbf{C}_t K$, который в данном случае может быть любым числом от 1 до n. Аналогичным образом построив взаимные семейства полей с отмеченным полем для уравнений (1.181)–(1.184), получим с помощью них аффинные управляемые системы (3.26)–(3.29). □

Замечание 3.4. Для системы (3.1) факт локальной эквивалентности той или иной системе (3.24)–(3.29) определяется лишь значениями

n, l и $\mathbf{C}_t K$ (последняя величина находится элементарными вычислениями), а переход к соответствующей эквивалентной системе осуществляется с помощью решения некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторых операций из линейной алгебры.

Далее тип управляемых систем будет характеризоваться размерностью фазового пространства. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.5. *Система* (3.1)*, для которой $n = 1$, локально эквивалентна одной из следующих систем:*

$$\dot{x}^1 = 0, \quad \dot{x}^1 = 1, \quad \dot{x}^1 = v^1. \tag{3.34}$$

Доказательство теоремы вытекает из того факта, что при $n = 1$ аффинная система является инволютивной, и из теоремы 3.3. □

Теорема 3.6. *Система* (3.1)*, для которой $n = 2$, локально эквивалентна в точке, являющейся регулярной для $\mathbf{C}_t K$, одной из следующих систем:*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = 0, \\ \dot{x}^2 = 0, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}^1 = 1, \\ \dot{x}^2 = 0, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}^1 = 0, \\ \dot{x}^2 = v^1, \end{cases} \tag{3.35}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = 1, \\ \dot{x}^2 = v^1, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = v^1, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}^1 = v^1, \\ \dot{x}^2 = v^2. \end{cases} \tag{3.36}$$

Доказательство теоремы вытекает из того факта, что при $n = 2$ аффинная система является либо инволютивной, либо принадлежит типу $p = n \Leftrightarrow 1$, и из теорем 3.3, 3.4. □

Теорема 3.7. *Система* (3.1)*, для которой $n = 3$, локально эквивалентна в точке, являющейся регулярной для F_1, $\operatorname{Span} F_1$, $\mathbf{C}_t K$, $\mathbf{C}_t K_1$, одной из следующих систем:*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = 0, \\ \dot{x}^2 = 0, \\ \dot{x}^3 = 0, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}^1 = 1, \\ \dot{x}^2 = 0, \\ \dot{x}^3 = 0, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}^1 = 0, \\ \dot{x}^2 = 0, \\ \dot{x}^3 = v^1, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}^1 = 0, \\ \dot{x}^2 = 1, \\ \dot{x}^3 = v^1, \end{cases} \tag{3.37}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = 0, \\ \dot{x}^2 = x^3, \\ \dot{x}^3 = v^1, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}^1 = 1, \\ \dot{x}^2 = x^3, \\ \dot{x}^3 = v^1, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = x^3, \\ \dot{x}^3 = v^1, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}^1 = 1 + x^3 v^1, \\ \dot{x}^2 = v^1, \\ \dot{x}^3 = H(x) v^1, \end{cases} \tag{3.38}$$

где $H(x)$ — произвольная функция, причем $\partial H / \partial x^1 \neq 0$,

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = 0, \\ \dot{x}^2 = v^1, \\ \dot{x}^3 = v^2, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}^1 = 1, \\ \dot{x}^2 = v^1, \\ \dot{x}^3 = v^2, \end{cases} \begin{cases} \dot{x}^1 = v^1, \\ \dot{x}^2 = v^2, \\ \dot{x}^3 = v^3, \end{cases} \tag{3.39}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^3 v^1, \\ \dot{x}^2 = v^1, \\ \dot{x}^3 = v^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = v^1, \\ \dot{x}^3 = v^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}^1 = 1 + x^3 v^1, \\ \dot{x}^2 = v^1, \\ \dot{x}^3 = v^2. \end{cases} \tag{3.40}$$

Доказательство. Системы (3.37), (3.39) соответствуют случаям инволютивных систем для $p = 0, 1, 2, 3$. Системы (3.40) соответствуют случаю неинволютивных систем для $p = n \Leftrightarrow 1 = 2$. Осталось рассмотреть случай $p = 1$, $\dim F_1 = d \neq p$, $l = 2$. Здесь имеется несколько вариантов.

1) $d = 2$, $\dim \operatorname{Span} F_1 = 2$, т.е. F_1 является распределением ($F_1 = \operatorname{Span} F_1$).

Нетрудно видеть, что F_1 является инволютивным распределением. Действительно, если f_0, f_1 — базисное семейство F (как семейство с отмеченным полем f_0), то тот факт, что $d = 2$, означает, что f_0, f_1 — базисное семейство распределения F_1 (как семейство без отмеченного поля), которое является полным. Полнота этого семейства следует из определения $F_1 : [f_0, f_1] \in \mathbf{L}_{F_1} = F_1$. Заметим также, что $\dim \mathbf{C}_t K = 3$, ибо если $\dim \mathbf{C}_t K = 2$, то распределение $\mathbf{C}F$ (которое, согласно теореме 1.12, регулярно) имеет ранг, равный 1, и, следовательно, $\mathbf{C}F = \mathbf{L}_F$, т.е. F — инволютивное аффинное распределение. Базисную t-систему Пфаффа t-кораспределения K запишем в виде (1.174)

$$\Omega_i^1(y)dy^i + \Omega_4^1(y)dt = 0, \tag{3.41}$$

$$\Omega_i^2(y)dy^i + \Omega_4^2(y)dt = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.42}$$

где (3.41) — базисное t-уравнение Пфаффа t-кораспределения K_1. Так как F_1 — распределение, то в (3.41) $\Omega_4^1 \equiv 0$.

Согласно теореме 1.16, уравнение (3.41) эквивалентно уравнению

$$dz^1 = 0. \tag{3.43}$$

Уравнение (3.42) при соответствующем преобразовании перейдет в некоторое уравнение

$$b_i(z)dz^i + b_4(z)dt = 0. \tag{3.44}$$

Подстановкой (3.43) в (3.44), т.е. некоторым линейным преобразованием, (3.43), (3.44) приводится к t-системе, состоящей из (3.43) и t-уравнения

$$b_2(z)dz^2 + b_3(z)dz^3 + b_4(z)dt = 0. \tag{3.45}$$

Заметим, что $b_4 \neq 0$, ибо $p \neq l$. Рассмотрим t-уравнение (3.45) в пространстве переменных z^2, z^3, t, считая z^1 параметром. Из вида (3.43) и (3.45) следует, что t-характеристическая система Пфаффа t-уравнения (3.45) получается из t-характеристической системы Пфаффа t-системы (3.43), (3.45) подстановкой $dz^1 = 0$ и удалением уравнения

(3.43). Отсюда и из того факта, что $\mathbf{C}_t K$ — регулярно, следует, что t-характеристическое распределение, соответствующее t-уравнению (3.45), регулярно (в пространстве переменных z^2, z^3) и имеет ранг 2. Теперь отсюда и из теоремы 1.24 легко следует, что t-система Пфаффа (3.41), (3.42) локально t-эквивалентна t-системе

$$dx^1 = 0, \quad dx^2 \Leftrightarrow x^3 dt = 0, \tag{3.46}$$

которой соответствует первая система среди аффинных систем (3.38).

2) $d = 2$, $\dim \operatorname{Span} F_1 = 3$, т.е. F_1 не является распределением.

Базисную t-систему Пфаффа t-кораспределения K запишем в виде (3.41), (3.42), где (3.41) — базисное t-уравнение Пфаффа t-кораспределения K_1. Подчеркнем, что $\Omega^1_4 \neq 0$. Здесь возможны следующие случаи.

а) $\dim \mathbf{C}_t K_1 = 1$.

Согласно теореме 1.24, t-уравнение (3.41) локально t-эквивалентно t-уравнению

$$dz^1 \Leftrightarrow dt = 0. \tag{3.47}$$

Под действием соответствующей замены переменных и подстановки (3.47) t-уравнение (3.42) преобразуется в некоторое t-уравнение (3.45). Рассмотрим некоторое взаимное семейство векторных полей η_0, η_1 (с отмеченным полем) к t-системе (3.47), (3.45). Так как $\eta_0 \in F$, $\eta_1 \in \mathbf{L}_F$, то из вида (3.47) вытекает, что $\eta_0^1 = 1, \eta_1^1 = 0$. Так как $\eta_1 \neq 0$, то после некоторой замены координат $z^i \to \overline{z}^i$ поле η_1 преобразуется в поле $(0,0,1)$. При этом очевидно, что эту замену можно выбрать так, что переменная z^1 не преобразуется, т.е. $\overline{z}^1 = z^1$. В новой системе координат имеется взаимная (к η_0, η_1) t-система Пфаффа вида

$$d\overline{z}^1 \Leftrightarrow dt = 0, \quad d\overline{z}^2 + a(\overline{z})dt = 0. \tag{3.48}$$

Покажем, что $\partial a/\partial \overline{z}^3 \neq 0$. Вычислим внешний дифференциал второй формы в (3.48)

$$d(d\overline{z}^2 + a(\overline{z})dt) = \frac{\partial a}{\partial \overline{z}^1} d\overline{z}^1 \wedge dt + \frac{\partial a}{\partial \overline{z}^2} d\overline{z}^2 \wedge dt + \frac{\partial a}{\partial \overline{z}^3} d\overline{z}^3 \wedge dt. \tag{3.49}$$

Этот внешний дифференциал в силу (3.48) не должен быть равен нулю (это следует из теоремы 1.23). Но после подстановки (3.48) в (3.49) останется $(\partial a/\partial \overline{z}^3) d\overline{z}^3 \wedge dt$. Следовательно, $\partial a/\partial \overline{z}^3 \neq 0$. Заменой переменных $x^1 = \overline{z}^1, x^2 = \overline{z}^2, x^3 = \Leftrightarrow a(\overline{z})$ t-система (3.48) преобразуется в t-систему Пфаффа

$$dx^1 \Leftrightarrow dt = 0, \quad dx^2 \Leftrightarrow x^3 dt = 0,$$

которой соответствует вторая система среди аффинных систем (3.38).

б) $\mathbf{C}_t K_1 = 2$.

Согласно теореме 1.24, t-уравнение (3.41) локально t-эквивалентно t-уравнению
$$dx^1 \Leftrightarrow z^2 dt = 0. \tag{3.50}$$

После соответствующей замены переменных и подстановки (3.50) t-уравнение (3.42) преобразуется в некоторое t-уравнение (3.45). Заметим, что одновременно b_2 и b_4 не равны нулю. В противном случае внешний дифференциал
$$d(dz^1 \Leftrightarrow z^2 dt) = dz^2 \wedge dt \tag{3.51}$$

не может быть равен нулю в силу t-системы (3.50), (3.45). Пусть $b_2 \neq 0$ (случай $b_4 \neq 0$ приводит к тому же результату). Преобразуем (3.45) к виду
$$dz^2 \Leftrightarrow \overline{b}_3 dz^3 \Leftrightarrow \overline{b}_4 dt = 0. \tag{3.52}$$

Внешний дифференциал (3.51) должен быть равен нулю в силу (3.50) и (3.52). После подстановки (3.52) в (3.51) имеем
$$d(dz^1 \Leftrightarrow z^2 dt) = \overline{b}_3 dz^3 \wedge dt + \overline{b}_4 dt \wedge dt = \overline{b}_3 dz^3 \wedge dt.$$

Следовательно, $\overline{b}_3 = 0$. Покажем теперь, что $\partial \overline{b}_4 / \partial z^3 \neq 0$. Вычислим внешний дифференциал
$$d(dz^2 \Leftrightarrow \overline{b}_4 dt) = \Leftrightarrow \frac{\partial b_4}{\partial z^1} dz^1 \wedge dt \Leftrightarrow \frac{\partial b_4}{\partial z^2} dz^2 \wedge dt \frac{\partial b_4}{\partial z^3} dz^3 \wedge dt. \tag{3.53}$$

В силу t-системы (3.50), (3.52) он не должен быть равен нулю. После подстановки (3.50) и (3.52) в (3.53) получим, что
$$d(dz^2 \Leftrightarrow \overline{b}_4 dt) = (\Leftrightarrow \partial b_4 / \partial z^3) dz^3 \wedge dt.$$

Следовательно, $\partial b_4 / \partial z^3 \neq 0$. Заменой переменных $x^1 = z^1, x^2 = z^2, x^3 = \overline{b}_4(z)$ t-система (3.50), (3.52) приводится к t-системе
$$dx^1 \Leftrightarrow x^2 dt = 0, \quad dx^2 \Leftrightarrow x^3 dt = 0,$$

которой соответствует третья система среди аффинных систем (3.38).

в) $\dim \mathbf{C}_t K_1 = 3$.

Согласно теореме 1.24, t-уравнение (3.41) локально t-эквивалентно t-уравнению
$$dx^1 \Leftrightarrow x^3 dx^2 \Leftrightarrow dt = 0. \tag{3.54}$$

После соответствующей замены переменных и подстановки (3.54) t-уравнение (3.42) преобразуется в некоторое t-уравнение

$$b_2(x)dx^2 + b_3(x)dx^3 + b_4(x)dt = 0. \tag{3.55}$$

Заметим, что одновременно b_2 и b_3 не равны нулю. В противном случае внешний дифференциал

$$d(dx^1 - x^3dx^2 - dt) = -dx^3 \wedge dx^2 \tag{3.56}$$

не может быть равен нулю в силу (3.54), (3.55).

Пусть $b_3 \neq 0$ (случай $b_2 \neq 0$ приводит к тому же результату). Преобразуем (3.55) к виду

$$\overline{b}_2 dx^2 + dx^3 + \overline{b}_4 dt = 0. \tag{3.57}$$

Внешний дифференциал (3.56) должен быть равен нулю в силу (3.54) и (3.57). После подстановки (3.57) в (3.56) получим

$$d(dx^1 - x^3 - dt) = -\overline{b}_4 dt \wedge dx^2.$$

Следовательно, $\overline{b}_4 = 0$. Таким образом, если положить $\overline{b}_2(x) = -H(x)$, то t-уравнение (3.57) примет вид

$$dx^3 - H(x)dx^2 = 0. \tag{3.58}$$

Ясно, что t-системе (3.54), (3.58) соответствует четвертая система среди аффинных систем (3.38). Покажем, что $\partial H/\partial x^1 \neq 0$. Вычислим внешний дифференциал

$$d(dx^3 - Hdx^2) = -\frac{\partial H}{\partial x^1}dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial H}{\partial x^3}dx^3 \wedge dx^2. \tag{3.59}$$

В силу (3.54), (3.58) он не должен быть равен нулю. Подставляя (3.54) и (3.58) в (3.59), получим, что он равен $-(\partial H/\partial x^1)dt \wedge dx^2$. Следовательно, $\partial H/\partial x^1 \neq 0$. $\square$

Для $n = 3$ среди систем, к которым приводится любая аффинная система, имеется система, содержащая произвольную функцию $H(x)$, т.е. приведенная форма (другие системы (3.37)–(3.40), являются каноническими формами). Системы с различными H могут быть эквивалентными, причем, как будет показано далее, факт эквивалентности (или отсутствие его) проверяется алгебраическими вычислениями. Вместе с тем имеется бесконечное число неэквивалентных систем. Действительно, как можно доказать (см. пример 3.1), системы с функциями

$H = (x^1)^q$ и $H = (x^1)^p, p \neq q$, где p, q — натуральные числа, не эквивалентны. Отметим, что, согласно доказательству теоремы, вопрос, к какой из систем (3.37)–(3.40) приводится данная аффинная система (3.1) (для которой $n = 3$), решается вычислением некоторых инвариантов, т.е. чисто алгебраически. При этом преобразования эквивалентности находятся с помощью решения некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Исследуем вопрос о том, когда управляемые системы, получающиеся подстановкой в приведенную форму разных функций H, эквивалентны. Для этого наряду с системой

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = H(x, y, z)u, \quad \partial H/\partial x \neq 0, \end{cases} \tag{3.60}$$

рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}' = 1 + z'v, \\ \dot{y}' = v, \\ \dot{z}' = L(x', y', u')v, \quad \partial L/\partial x' \neq 0. \end{cases} \tag{3.61}$$

Ниже, для лучшей обозримости формул, частные производные функции по ее аргументам будем обозначать нижними индексами. Например, H_x, $L_{x'}$.

Вопрос об эквивалентности систем (3.60) и (3.61) сводится к вопросу о t-эквивалентности t-систем Пфаффа

$$\begin{cases} dx \Leftrightarrow z\,dy \Leftrightarrow dt = 0, \\ dz \Leftrightarrow H\,dy \qquad = 0, \end{cases} \tag{3.62}$$

$$\begin{cases} dx' \Leftrightarrow z'\,dy' \Leftrightarrow dt = 0, \\ dz' \Leftrightarrow L\,dy' \qquad = 0. \end{cases} \tag{3.63}$$

Нетрудно видеть, что t-системы (3.62), (3.63) t-эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такая замена переменных

$$\begin{cases} x' = \alpha(x, y, z), \\ y' = \beta(x, y, z), \\ z' = \gamma(x, y, z) \end{cases} \tag{3.64}$$

и такая функция $\theta(x, y, z)$, что

$$\begin{cases} d\alpha \Leftrightarrow \gamma\,d\beta = dx \Leftrightarrow z\,dy, \\ d\gamma \Leftrightarrow L(\alpha, \beta, \gamma)\,d\beta = (dz \Leftrightarrow H(x, y, z)\,dy)\theta(x, y, z). \end{cases}$$

Отсюда следует, что функции α, β, γ и θ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_x = \gamma\beta_x + 1, \\ \alpha_y = \gamma\beta_y \Leftrightarrow z, \\ \alpha_z = \gamma\beta_z\,, \\ \gamma_x = L(\alpha,\beta,\gamma)\beta_x\,, \\ \gamma_y = L(\alpha,\beta,\gamma)\beta_y \Leftrightarrow \theta(x,y,z)H(x,y,z), \\ \gamma_z = L(\alpha,\beta,\gamma)\beta_z + \theta(x,y,z). \end{cases} \tag{3.65}$$

Уравнения (3.65) являются системой уравнений с одинаковой главной частью относительно неизвестных функций α и γ. Для нее алгебраические условия совместности (равенство смешанных производных $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ и т.д. в силу системы (3.65)) приводят к дифференциальным уравнениям относительно β и θ. Равенство $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$ приводит к равенству $\beta_x = 0$ и, следовательно, к равенствам $\alpha_x = 1$, $\gamma_x = 0$. Эти равенства позволяют дополнить систему (3.65):

$$\begin{cases} \alpha_x = 1, \\ \alpha_y = \gamma\beta_y \Leftrightarrow z, \\ \alpha_z = \gamma\beta_z\,, \\ \beta_x = 0, \\ \gamma_x = 0, \\ \gamma_y = L(\alpha,\beta,\gamma)\beta_y \Leftrightarrow \theta H(x,y,z), \\ \gamma_z = L(\alpha,\beta,\gamma)\beta_z + \theta. \end{cases} \tag{3.66}$$

Далее из равенства $\alpha_{yz} = \alpha_{zy}$ следует, что

$$\beta_y\gamma_z \Leftrightarrow \beta_z\gamma_y = 1. \tag{3.67}$$

Отсюда, кстати, вытекает, что якобиан преобразования (3.64) равен 1:

$$\frac{\partial(x'y'z')}{\partial(xyz)} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_y & \alpha_z \\ 0 & \beta_y & \beta_z \\ 0 & \gamma_y & \gamma_z \end{vmatrix} = \beta_y\gamma_z \Leftrightarrow \beta_z\gamma_y = 1.$$

Подставляя производные γ_y и γ_z в равенство (3.67), получим

$$\theta(\beta_y + H(x,y,z)\beta_z) = 1. \tag{3.68}$$

Продолжим проверку условий совместности. Так как γ не зависит от x, то из последних двух уравнений системы (3.66) получим

$$\beta_y = \frac{(\theta H(x,y,z))_x}{L_{x'}(\alpha,\beta,\gamma)}, \quad \beta_z = \Leftrightarrow \frac{\theta_x}{L_{x'}(\alpha,\beta,\gamma)}. \tag{3.69}$$

Подставляя уравнения (3.69) в уравнение (3.68), получим соотношение для θ:

$$\theta^2 = \frac{L_{x'}(\alpha,\beta,\gamma)}{H_x(x,y,z)} > 0. \tag{3.70}$$

Присоединяя уравнения (3.69) к системе (3.66), получим "обычную" систему дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковой главной частью относительно функций α, β и γ:

$$\begin{cases} \alpha_x = 1, \\ \alpha_y = \gamma(\theta H(x,y,z))_x / L_{x'}(\alpha,\beta,\gamma) \Leftrightarrow z, \\ \alpha_z = \Leftrightarrow \gamma\theta_x / L_{x'}(\alpha,\beta,\gamma), \\ \beta_x = 0, \\ \beta_y = (\theta H(x,y,z))_x / L_{x'}(\alpha,\beta,\gamma), \\ \beta_z = \Leftrightarrow \theta_x / L_{x'}(\alpha,\beta,\gamma), \\ \gamma_x = 0, \\ \gamma_y = L(\alpha,\beta,\gamma)(\theta H)_x / L_{x'} \Leftrightarrow \theta H(x,y,z), \\ \gamma_z = \Leftrightarrow L(\alpha,\beta,\gamma)\theta_x / L_{x'} + \theta, \end{cases} \tag{3.71}$$

где θ удовлетворяет соотношению (3.70).

Заметим, что на самом деле имеются две системы (3.71): одна соответствует значению

$$\theta = \sqrt{L_{x'}(\alpha,\beta,\gamma)/H_x(x,y,z)} > 0, \tag{3.72}$$

а другая —

$$\theta = \Leftrightarrow \sqrt{L_{x'}(\alpha,\beta,\gamma)/H_x(x,y,z)} < 0. \tag{3.73}$$

Итак, вопрос об эквивалентности аффинных систем (3.60), (3.61) сводится к вопросу о совместности систем уравнений с одинаковой главной частью (3.71), (3.72) и (3.71), (3.73). Согласно разделу 1.7, совместность таких систем проверяется с помощью элементарных алгебраических операций, а решение системы находится с помощью решений некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Каждое решение системы (3.71), (3.72) или системы (3.71), (3.73) определяет диффеоморфизм (3.64), осуществляющий эквивалентность систем (3.60) и (3.61).

Продолжим проверку системы (3.71) на совместность. Из условия независимости функции β от x следует равенство

$$2\left(\frac{L_{x'x'}}{L_{x'}}\right)_{x'} \Leftrightarrow \left(\frac{L_{x'x'}}{L_{x'}}\right)^2 = 2\left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)_x \Leftrightarrow \left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)^2. \tag{3.74}$$

Наконец, из последнего условия совместности системы (3.71) $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ следует равенство

$$L_{z'}(\alpha,\beta,\gamma) = z\theta_x + \theta_y + (\theta H(x,y,z))_z.$$

Если из соотношения (3.70) найти производные функции θ и подставить их в последнее равенство, то получим

$$\frac{1}{\sqrt{|L_{x'}|}}\left(2L_{z'} \Leftrightarrow \frac{1}{L_{x'}}\left(z'L_{x'x'} + L_{x'y'} + LL_{x'z'}\right)\right) = \\ = \frac{\pm 1}{\sqrt{|H_x|}}\left(2H_z \Leftrightarrow \frac{1}{H_x}\left(zH_{xx} + H_{xy} + HH_{xz}\right)\right). \tag{3.75}$$

В правой части выражения (3.75) знак плюс соответствует системе уравнений (3.71), (3.72), а минус — системе уравнений (3.71), (3.73).

Если ввести два дифференциальных оператора

$$I_1(H) = 2\left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)_x \Leftrightarrow \left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)^2, \tag{3.76}$$

$$I_2(H) = \frac{1}{\sqrt{|H_x|}}\left(2H_z \Leftrightarrow \frac{1}{H_x}\left(zH_{xx} + H_{xy} + HH_{xz}\right)\right), \tag{3.77}$$

а функции, получающиеся в результате действия операторов, обозначить через $I_1(H)(x,y,z)$ и $I_2(H)(x,y,z)$ соответственно, то равенства (3.74) и (3.75) можно записать в виде

$$\begin{cases} I_1(L)(\alpha,\beta,\gamma) = I_1(H)(x,y,z), \\ I_2(L)(\alpha,\beta,\gamma) = \pm I_2(H)(x,y,z). \end{cases} \tag{3.78}$$

Итак, мы получили результат: для совместности системы (3.71), (3.72) или системы (3.71), (3.73) необходимо выполнение неравенства (3.70) и соотношений (3.78).

Если соотношения (3.78) выполняются тождественно, то, по теореме 1.32, для любой пары точек (x_0,y_0,z_0) и (x_0',y_0',z_0') в некоторой окрестности точки (x_0,y_0,z_0) существует единственное решение (3.64) системы (3.71), удовлетворяющее условию

$$\begin{cases} x_0' = \alpha(x_0,y_0,z_0), \\ y_0' = \beta(x_0,y_0,z_0), \\ z_0' = \gamma(x_0,y_0,z_0). \end{cases}$$

В этом случае система (3.60) локально эквивалентна системе (3.61). Отметим, что если второе уравнение соотношений (3.78) тождественно выполняется со знаком плюс, то существует решение системы (3.71), (3.72), если же со знаком минус, то существует решение системы (3.71), (3.73).

Если соотношения (3.78) противоречивы или не зависят от α, β, γ, но зависят от x, y, z, то системы (3.60) и (3.61) не эквивалентны.

В противном случае процесс проверки совместности продолжается в соответствии с алгоритмом, приведенным в разделе 1.7.

Пример 3.1. Покажем, что системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = x^p u, \end{cases} \tag{3.79}$$

$$\begin{cases} \dot{x}' = 1 + z'v, \\ \dot{y}' = v, \\ \dot{z}' = x'^q v, \end{cases} \tag{3.80}$$

где p, q — натуральные числа, не являются эквивалентными при $p \neq q$. Система уравнений (3.78) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1 \Leftrightarrow p^2}{x^2} = \dfrac{1 \Leftrightarrow q^2}{\alpha^2}, \\ \dfrac{(1 \Leftrightarrow p)z}{\sqrt{|px^{p-1}|}x} = \pm\dfrac{(1 \Leftrightarrow q)\gamma}{\sqrt{|q\alpha^{q-1}|}\alpha}. \end{cases} \tag{3.81}$$

Так как $\alpha_x = 1$, то функцию α мы можем представить в виде $\alpha(x, y, z) = x + \overline{\alpha}(y, z)$. Подставив это выражение в первое уравнение системы (3.81), получим

$$(1 \Leftrightarrow p^2)(x + \overline{\alpha}(y, z))^2 = (1 \Leftrightarrow q^2)x^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим $\overline{\alpha}(y, z) = 0$ и $p = q$. Следовательно, при $p \neq q$ системы (3.79) и (3.80) не эквивалентны.

Неравенство (3.70) показывает, что управляемые системы, у которых функции H_x и $L_{x'}$ имеют разные знаки, не могут быть эквивалентными. Следовательно, знак функции H_x является инвариантом, который разбивает множество систем (3.60) на две группы: с положительной и отрицательной функцией H_x. Инвариантный вид соотношений (3.77) позволяет ввести некоторый тип систем, которые назовем C-системами. Система (3.60), по определению, является C-системой, если

$$I_1(H)(x, y, z) = \text{const}\,, \quad I_2(H)(x, y, z) = \text{const}\,.$$

Приведем некоторые факты из теории таких систем [46].

Теорема 3.8. *Каждой паре чисел (C_1, C_2) при $C_2 \geqslant 0$ соответствуют два класса локально эквивалентных управляемых C-систем. В* *класс* $(C_1, C_2)^+$ *входят* C*-системы вида* (3.60), *где функция* H *удовлетворяет системе уравнений*

$$\begin{cases} I_1(H)(x, y, z) = C_1, \\ I_2(H)(x, y, z) = \pm C_2, \end{cases} \qquad C_2 \geqslant 0, \tag{3.82}$$

и условию $H_x > 0$, *а в класс* $(C_1, C_2)^-$ — *с функцией* H, *удовлетворяющей системе уравнений* (3.82) *и условию* $H_x < 0$. *Для* C*-систем числа* C_1 *и* C_2 *являются инвариантами.*

Доказательство. Если две произвольные C-системы (3.60) и (3.61) принадлежат одному классу $(C_1, C_2)^+$ (или $(C_1, C_2)^-$), то для них справедливо неравенство (3.70), и соотношения (3.78) выполняются тождественно. Тогда, как уже отмечалось выше, существует замена координат (3.64). Следовательно, системы (3.60) и (3.61) локально эквивалентны.

Если две произвольные C-системы (3.60) и (3.61) принадлежат разным классам, то или не справедливо неравенство (3.70), или соотношения (3.78) противоречивы. В любом случае система (3.71) несовместна, и системы (3.60) и (3.61) не являются локально эквивалентнтными. $\square$

Исследуем систему (3.82) и для классов $(C_1, C_2)^+$ и $(C_1, C_2)^-$ найдем соответствующие им канонические формы. Первое уравнение системы (3.82)

$$2\left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)_x \Leftrightarrow \left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)^2 = C_1$$

полностью интегрируется и имеет следующие решения:

- при$C_1 > 0$ $\quad H_1 = \beta(y, z) \operatorname{tg}\left(\dfrac{\sqrt{C_1}}{2}x + \alpha(y, z)\right) + \gamma(y, z),$

  $H_2 = \beta(y, z) \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\sqrt{C_1}}{2}x + \alpha(y, z)\right) + \gamma(y, z);$
- при $C_1 = 0$ $\quad H_3 = \beta(y, z)x + \gamma(y, z),$

  $H_4 = \dfrac{\beta(y, z)}{\alpha(y, z) \Leftrightarrow x} + \gamma(y, z);$
- при $C_1 < 0$ $\quad H_5 = \beta(y, z) \operatorname{th}\left(\dfrac{\sqrt{\Leftrightarrow C_1}}{2}x + \alpha(y, z)\right) + \gamma(y, z),$

  $H_6 = \beta(y, z) \operatorname{cth}\left(\dfrac{\sqrt{\Leftrightarrow C_1}}{2}x + \alpha(y, z)\right) + \gamma(y, z),$

  $H_7 = \beta(y, z)e^{\pm x\sqrt{-C_1}} + \gamma(y, z).$

Во всех уравнениях α, β и γ — произвольные функции.

Теперь нужно подставить найденные решения во второе уравнение системы (3.82).

Рассмотрим подробно решение при $C_1 > 0$. Подставив решение H_1 во второе уравнение системы (3.82), получим равенство

$$I_2(H_1) = \frac{1}{\sqrt{|\frac{\sqrt{C_1}}{2}\beta|}}\left(\sin\left(\frac{\sqrt{C_1}}{2}x+\alpha\right)\left(\beta_z \Leftrightarrow \sqrt{C_1}z \Leftrightarrow 2\alpha_y \Leftrightarrow 2\alpha_z\gamma\right) + \right.$$
$$\left. + \cos\left(\frac{\sqrt{C_1}}{2}x+\alpha\right)\left(2\gamma_z \Leftrightarrow \frac{\beta_y}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\gamma\beta_z}{\beta} + 2\beta\alpha_z\right)\right) = \pm C_2.$$

Это равенство может выполнятся только тогда, когда $C_2 = 0$. Следовательно, классы эквивалентности $(C_1, C_2)^+$ и $(C_1, C_2)^-$ при $C_2 \neq 0$ пусты. При $C_1 > 0$ к классу эквивалентности $(C_1, 0)^+$ принадлежат все управляемые системы вида (3.60) с функцией H вида

$$H(x, y, z) = \beta(y, z)\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{C_1}}{2}x + \alpha(y, z)\right) + \gamma(y, z),$$

где функции $\alpha(y, z)$, $\beta(y, z)$ и $\gamma(y, z)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} \beta_z \Leftrightarrow \sqrt{C_1}z \Leftrightarrow 2\alpha_y \Leftrightarrow 2\alpha_z\gamma = 0, \\ 2\gamma_z \Leftrightarrow \dfrac{\beta_y}{\beta} \Leftrightarrow \dfrac{\gamma\beta_z}{\beta} + 2\beta\alpha_z = 0, \quad \beta(y, z) > 0. \end{cases}$$

Условия принадлежности системы вида (3.60) к классу $(C_1, 0)^-$ такие же, только вместо условия $\beta(y, z) > 0$ будет условие $\beta(y, z) < 0$. Остальные решения исследуются аналогично. Ометим только, что уравнения (3.82) имеют решение только при условии $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$. Следовательно, классы эквивалентности $(C_1, C_2)^+$ и $(C_1, C_2)^-$ пусты при $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$. Для остальных классов выберем канонические системы с наиболее простой функцией $H(x, y, z)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = \dfrac{\sqrt{C_1}}{2}z^2\operatorname{tg}\left(\dfrac{\sqrt{C_1}}{2}x\right)u, \end{cases} \qquad \text{для } (C_1, 0)^+,\ C_1 > 0, \tag{3.83}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = \left(x + \dfrac{C_2}{2}z\right)u, \end{cases} \qquad \text{для } (0, C_2)^+,\ C_2 \geqslant 0, \tag{3.84}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = \left(-x + \dfrac{C_2}{2} z\right) u, \end{cases} \qquad \text{для } (0, C_2)^-,\ C_2 \geqslant 0, \tag{3.85}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = \left(e^{x\sqrt{-C_1}} + \dfrac{\sqrt{-C_1}}{4} z\right) u, \end{cases} \qquad \text{для } (C_1, 0)^+,\ C_1 < 0, \tag{3.86}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = \left(-e^{x\sqrt{-C_1}} + \dfrac{\sqrt{-C_1}}{4} z\right) u, \end{cases} \qquad \text{для } (C_1, 0)^-,\ C_1 < 0. \tag{3.87}$$

Каноническую форму для класса $(C_1, 0)^-$, при $C_1 > 0$ найти пока не удалось.

Пример 3.2. Найдем C-системы (3.60) с линейной по x функцией H, локально эквивалентные каноническим формам (3.84) и (3.85). Функция H имеет вид

$$H(x, y, z) = \beta(y, z)x + \gamma(y, z).$$

Подставим ее во второе уравнение соотношений (3.82)

$$I_2(H) = \frac{1}{\sqrt{|\beta|}} \left(\beta_z x + 2\gamma_z - \frac{\beta_y}{\beta} - \frac{\beta_z \gamma}{\beta}\right) = \pm C_2.$$

Получим систему

$$\begin{cases} \beta_z \ = 0, \\ 2\gamma_z = \dfrac{\beta_y}{\beta} \pm C_2 \sqrt{|\beta|}. \end{cases}$$

Так как β не зависит от z, то мы можем проинтегрировать второе уравнение по z:

$$\gamma = \left(\frac{\beta_y}{2\beta} \pm \frac{C_2}{2} \sqrt{|\beta|}\right) z + \alpha(y),$$

где $\alpha(y)$ — произвольная функция.

Таким образом, управляемые системы вида (3.60) с функцией H

$$H(x, y, z) = \beta(y)x + \left(\frac{\beta_y}{2\beta} \pm \frac{C_2}{2} \sqrt{|\beta|}\right) z + \alpha(y), \quad \beta(y) > 0,$$

где $\alpha(y)$, $\beta(y)$ — произвольные функции, локально эквивалентны канонической форме (3.84). Канонической форме (3.85) локально эквивалентны системы (3.60) с той же функцией H и условием $\beta(y) < 0$.

Рассмотрим тип аффинных систем, характеризуемый значением $n = 4$. Используя методы, применяемые при доказательстве теоремы 3.7, можно показать, что система (3.1), для которой $n = 4$, локально эквивалентна одной из систем, составляющих конечный набор. Некоторые из этих систем содержат произвольные функции, т.е. являются приведенными формами. Число систем, входящих в этот набор, значительно больше, чем в случае $n = 3$. (Полный список приведен в [32].) Здесь мы ограничимся подтипом, характеризуемым соотношением $p = l$, т.е. симметрическими системами. Заметим, что в этом случае приведенных форм нет, т.е. имеется лишь конечное число канонических форм.

Теорема 3.9. *Симметрическая система* (3.1), *для которой* $n = 4$, *локально эквивалентна в точке, являющейся регулярной для* F_1, $\mathbf{C}F^{\perp}$, $\mathbf{C}F_1^{\perp}$, *одной из следующих систем:*

$$\dot{x}^i = 0, \quad i = 1, \ldots, 4, \tag{3.88}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{x}^4 = v^1, \end{cases} \tag{3.89}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^i = 0, \quad i = 1, 2, \\ \dot{x}^3 = v^1, \\ \dot{x}^4 = v^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}^1 = 0, \\ \dot{x}^2 = x^3 v^2, \\ \dot{x}^3 = v^1, \\ \dot{x}^4 = v^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 v^2, \\ \dot{x}^2 = x^3 v^2, \\ \dot{x}^3 = v^1, \\ \dot{x}^4 = v^2, \end{cases} \tag{3.90}$$

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = 0, \\ \dot{x}^2 = v^1, \\ \dot{x}^3 = v^2, \\ \dot{x}^4 = v^3, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 v^2, \\ \dot{x}^2 = v^1, \\ \dot{x}^3 = v^2, \\ \dot{x}^4 = v^3, \end{cases} \tag{3.91}$$

$$\dot{x}^i = v^i, \quad i = 1, \ldots, 4. \tag{3.92}$$

Доказательство теоремы 3.9 вытекает из предыдущих теорем. При $p = 0, 1, 4$ система (3.1) является инволютивной. Поэтому из теоремы 3.3 вытекает, что система (3.1) приводится к одной из систем (3.88), (3.89), (3.92). При $p = 2$ следует применить теорему 1.17, что приводит к каноническим формам (3.90). При $p = 3$ из теоремы 3.4 следует, что система (3.1) приводится к одной из систем (3.91). □

В заключении этого раздела рассмотрим вопрос о локальной эквивалентности аффинной управляемой системы (3.1) линейной системе

$$\dot{z} = Az + Bu, \quad z \in N \subset R^n, \quad u \in R^w, \tag{3.93}$$

удовлетворяющей условию управляемости Калмана

$$\operatorname{rank}\left\| B \; AB \; \ldots \; A^{n-1}B \right\| = n. \tag{3.94}$$

Здесь A, B — постоянные матрицы. Заметим, что система (3.93), удовлетворяющая (3.94), обладает свойством управляемости, если в качестве фазового пространства N рассматривать все пространство R^n, однако, локально это утверждение, вообще говоря, не верно.

Как известно [55], система (3.93), для которой выполняется условие (3.94), невырожденной заменой фазовых переменных и управлений

$$\begin{array}{ll} x = Cz, & x \in R^n, \\ v = \lambda_0 + \lambda u, & v \in R^w, \end{array}$$

может быть приведена к одной из систем вида

$$\begin{array}{lllll} \dot{x}_1^1 = x_2^1, & \dot{x}_2^1 = x_3^1, & \ldots, & \dot{x}_{k_1-1}^1 = x_{k_1}^1, & \dot{x}_{k_1}^1 = v^1, \\ \dot{x}_1^2 = x_2^2, & \dot{x}_2^2 = x_3^2, & \ldots, & \dot{x}_{k_2-1}^2 = x_{k_2}^2, & \dot{x}_{k_2}^2 = v^2, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \dot{x}_1^w = x_2^w, & \dot{x}_2^w = x_3^w, & \ldots, & \dot{x}_{k_w-1}^w = x_{k_w}^w, & \dot{x}_{k_w}^w = v^w, \end{array} \tag{3.95}$$

$$x = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{k_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{k_2}^2, \ldots, x_1^w, \ldots, x_{k_w}^w) \in L \subset R^n, \quad v \in R^w,$$

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_w > 0,$$

которые называются каноническими формами Бруновского. Следовательно, вопрос об эквивалентности системы (3.1) линейной системе (3.93) сводится к вопросу об эквивалентности канонической форме Бруновского (3.95).

Опишем свойства системы (3.95) в терминах ее ассоциированного t-кораспределения Q и связанных с ним инвариантов системы. Базисное семейство t-кораспределения Q составляют t-формы Пфаффа

$$\begin{array}{llll} \theta_1^1 = dx_1^1 \Leftrightarrow x_2^1 dt, & \theta_2^1 = dx_2^1 \Leftrightarrow x_3^1 dt, & \ldots, & \theta_{k_1-1}^1 = dx_{k_1-1}^1 \Leftrightarrow x_{k_1}^1 dt, \\ \theta_1^2 = dx_1^2 \Leftrightarrow x_2^2 dt, & \theta_2^2 = dx_2^2 \Leftrightarrow x_3^2 dt, & \ldots, & \theta_{k_2-1}^2 = dx_{k_2-1}^2 \Leftrightarrow x_{k_2}^2 dt, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \theta_1^w = dx_1^w \Leftrightarrow x_2^w dt, & \theta_2^w = dx_2^w \Leftrightarrow x_3^w dt, & \ldots, & \theta_{k_w-1}^w = dx_{k_w-1}^w \Leftrightarrow x_{k_w}^w dt. \end{array}$$

Привлечем понятие кофлага. Для анализа производного кофлага t-кораспределения Q вычислим внешние дифференциалы выписанных базисных форм

$$\begin{array}{l} d\theta_j^i = dt \wedge dx_{j+1}^i = dt \wedge (dx_{j+1}^i \Leftrightarrow x_{j+2}^i dt) = dt \wedge \theta_{j+1}^i, \\ d\theta_{k_i-1}^i = dt \wedge dx_{k_i}^i, \quad i = 1, \ldots, w, \quad j = 1, \ldots, k_i \Leftrightarrow 2. \end{array} \tag{3.96}$$

Сопоставим t-кораспределению Q следующую конструкцию. Из t-форм $\theta_1^1, \ldots, \theta_{k_1-1}^1, \ldots, \theta_1^w, \ldots, \theta_{k_w-1}^w$ составим w блоков:

$$
\begin{array}{|llll|c|llll|}
\theta_1^1 & \theta_2^1 & \ldots & \theta_{k_1-1}^1 & \ldots & \theta_1^w & \theta_2^w & \ldots & \theta_{k_w-1}^w \\
\ldots & & & & & \ldots & & & \\
\theta_1^1 & \theta_2^1 & & & & \theta_1^w & \theta_2^w & & \\
\theta_1^1 & & & & & \theta_1^w & & &
\end{array}
\tag{3.97}
$$

(блоки, соответствующие $k_i = 1$, являются пустыми). Верхняя строка в построенной структуре представляет собой базисное семейство t-кораспределения Q, а нижележащие строки, как следует из алгоритма построения производного кофлага (см. с. 86) и соотношений (3.96), содержат последовательно базисные семейства членов двойственного производного ряда Q_1, $Q_2, \ldots, Q_{k_1-2}$.

Двойственный производный ряд инвариантен относительно t-диффеоморфизмов, и числа $q_j = \dim Q_j$ и $m_j = \dim Q_j - \dim Q_{j+1}$ являются инвариантами системы (3.95). Нетрудно видеть, что m_j равно количеству блоков (3.97), имеющих не менее $j+1$ строк. Поэтому m_j есть наибольшее целое, такое, что $(k_{m_j} - 1) \geqslant j+1$. Зная длину производного кофлага Q (равную k_1) и числа m_j, можно определить все числа k_j. Следовательно, k_j (называемые индексами Кронекера) также являются инвариантами системы (3.95). Ясно, что справедливо

Предложение 3.1. *Если аффинная управляемая система* (3.1) *эквивалентна в точке y_0 линейной системе* (3.95), *то у ее ассоциированного t-кораспределения K существует в некоторой окрестности точки y_0 базисное семейство, состоящее из t-форм*

$$\theta_j^i, \quad i = 1, \ldots, w, \quad j = 1, \ldots, k_i - 1,$$

такое, что двойственный производный ряд t-кораспределения K декомпозируется на w блоков (3.97), *характеризующихся равенствами*

$$d\theta_j^i \wedge \theta_1^i \wedge \ldots \wedge \theta_{j+1}^i = 0, \quad i = 1, \ldots, w, \quad j = 1, \ldots, k_i - 2. \ \square$$

Как видно из (3.97), все члены двойственного производного ряда, соответствующего системе (3.95), есть регулярные t-кораспределения, а кораспределения $\overline{Q_i}$, $i = 0, \ldots, k_1 - 2$, вполне интегрируемы. Последний член кофлага, Q_{k_1-1}, является нулевым t-кораспределением, т.е. $Q_{k_1-1} = \mathcal{O}$. Эти свойства сохраняются при t-диффеоморфизмах, поэтому они должны выполняться для производного ряда любой системы, представимой в виде (3.95). Оказывается, это составляет не только необходимое, но и достаточное условие локальной эквивалентности системы (3.1) линейной системе (3.95). Прежде чем сформулировать это утверждение, заметим, что в нем используется последовательность распределений (1.113), соответствующая производному ряду (1.111).

Теорема 3.10. *Аффинная система* (3.1) *локально эквивалентна в точке $y_0 \in M$ линейной системе, удовлетворяющей условию управляемости Калмана* (3.94), *тогда и только тогда, когда:*

1) *точка y_0 является регулярной точкой двойственного производного ряда* (1.111) *ассоциированного t-кораспределения K системы* (3.1);

2) $K_N = \mathcal{O}$, *где $N+1$ — длина производного кофлага* (3.15);

3) $\overline{K_i}$, $i = 0, \ldots, N \Leftrightarrow 1$, *являются вполне интегрируемыми кораспределениями.*

Доказательство. Поскольку необходимость уже установлена, докажем достаточность. Как и прежде, будем обозначать

$$q_j = \dim K_j, \quad j = 0, \ldots, N,$$
$$m_j = q_j \Leftrightarrow q_{j+1}, \quad j = 0, \ldots, N \Leftrightarrow 1, \quad m_N = 0.$$

Доказательство проведем по индукции.

Покажем сначала, что t-кораспределение K_{N-1} в некоторых локальных координатах имеет базисное семейство вида

$$\begin{array}{l} \theta_1^1 = dx_1^1 \Leftrightarrow x_2^1 dt, \\ \theta_1^2 = dx_1^2 \Leftrightarrow x_2^2 dt, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \theta_1^{q_{N-1}} = dx_1^{q_{N-1}} \Leftrightarrow x_2^{q_{N-1}} dt. \end{array} \tag{3.98}$$

Поскольку $\overline{K_{N-1}}$ — вполне интегрируемое кораспределение ранга q_{N-1}, то у него имеется полная система интегралов $\psi^1(y), \ldots, \psi^{q_{N-1}}(y)$. Без ограничения общности в точке y_0

$$\left| \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial y^\beta} \right|_{\beta=1,\ldots,q_{N-1}}^{\alpha=1,\ldots,q_{N-1}} \neq 0.$$

В окрестности точки y_0 заменим переменные y^i на

$$x_1^i = \psi^i(y), \quad i = 1, \ldots, q_{N-1},$$

а остальные переменные оставим без изменения. В новых координатах t-кораспределение K_{N-1} будет иметь базисное семейство t-форм вида

$$\begin{array}{l} \theta_1^1 = dx_1^1 \Leftrightarrow \eta_1^1 dt, \\ \theta_1^2 = dx_1^2 \Leftrightarrow \eta_1^2 dt, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \theta_1^{q_{N-1}} = dx_1^{q_{N-1}} \Leftrightarrow \eta_1^{q_{N-1}} dt. \end{array} \tag{3.99}$$

Покажем, что $x_1^1, \ldots, x_1^{q_{N-1}}, \eta_1^1, \ldots, \eta_1^{q_{N-1}}$ функционально независимы. Согласно замечанию 1.7, это означает, что

$$dx_1^1 \wedge \ldots \wedge dx_1^{q_{N-1}} \wedge d\eta_1^1 \wedge \ldots \wedge d\eta_1^{q_{N-1}} \neq 0.$$

Предположим противное:

$$dx_1^1 \wedge \ldots \wedge dx_1^{q_{N-1}} \wedge d\eta_1^1 \wedge \ldots \wedge d\eta_1^{q_{N-1}} = 0.$$

Тогда, согласно предложению 1.23, найдутся такие функции

$$\lambda_i, \quad i = 1, \ldots, q_{N-1},$$

не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_i d\eta_1^i \wedge dx_1^1 \wedge \ldots \wedge dx_1^{q_{N-1}} = 0, \quad i = 1, \ldots, q_{N-1}.$$

Поэтому для t-формы $\omega = \lambda_i \theta_1^i \in K_{N-1}$, $i = 1,\ldots,q_{N-1}$, выполняется

$$\begin{aligned} d\omega \wedge \theta_1^1 \wedge \ldots \wedge \theta_1^{q_{N-1}} &= d(\lambda_i \theta_1^i) \wedge \theta_1^1 \wedge \ldots \wedge \theta_1^{q_{N-1}} = \\ &= \lambda_i d\theta_1^i \wedge \theta_1^1 \wedge \ldots \wedge \theta_1^{q_{N-1}} = dt \wedge \lambda_i d\eta_1^i \wedge dx_1^1 \wedge \ldots \wedge dx_1^{q_{N-1}} = 0, \end{aligned}$$

а это противоречит тому, что $\omega \notin K_N$. Следовательно, в окрестности точки y_0 можно ввести новые переменные $x_2^i = \eta_1^i$, $i = 1,\ldots,q_{N-1}$, после перехода к которым базисное семейство (3.99) примет вид (3.98).

Положим $r_1 = N+1$ и $\nu_1 = q_{N-1}$. Вводимые по ходу доказательства числа $r_1, r_2, \ldots, r_s$ будут соответствовать попарно различным индексам среди $k_1, \ldots, k_r$, а числа $\nu_1, \ldots, \nu_s$ будут иметь смысл кратностей индексов $r_1, \ldots, r_s$ соответственно. Определим также числа $n_i = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_i$, $i = 1,\ldots, s$, $n_0 = 0$.

Предположим, что t-кораспределение K_γ в некоторых координатах имеет базисное семейство вида

$$\theta_1^j = dx_1^j \Leftrightarrow x_2^j dt, \ \ldots, \ \theta_{r_i-\gamma-1}^j = dx_{r_i-\gamma-1}^j \Leftrightarrow x_{r_i-\gamma}^j dt, \tag{3.100}$$

$$i = 1, \ldots, l, \quad j = n_{i-1}+1, \ldots, n_i,$$

где $r_1 > r_2 > \ldots > r_l > \gamma + 1$, $n_0 < n_1 < \ldots < n_l$. Покажем, что тогда при соблюдении условий теоремы базисное семейство t-кораспределения $K_{\gamma-1}$ будут составлять t-формы

$$\theta_1^j = dx_1^j \Leftrightarrow x_2^j dt, \ \ldots, \ \theta_{r_i-\gamma}^j = dx_{r_i-\gamma}^j \Leftrightarrow x_{r_i-\gamma+1}^j dt, \tag{3.101}$$

$$i = 1, \ldots, l, \quad j = n_{i-1}+1, \ldots, n_i,$$

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_l > \gamma, \quad n_0 < n_1 < \ldots < n_l,$$

и, быть может, t-формы

$$\theta_1^j = dx_1^j \Leftrightarrow x_2^j dt, \quad \ldots, \quad \theta^j_{r_{l+1}-\gamma} = dx^j_{r_{l+1}-\gamma} \Leftrightarrow x^j_{r_{l+1}-\gamma+1} dt, \tag{3.102}$$

$$j = n_l + 1, \ldots, n_{l+1}, \quad \gamma < r_{l+1} < r_l, \quad n_{l+1} > n_l.$$

Очевидно, что базисное семейство t-кораспределения $K_{\gamma-1}$ состоит из t-форм (3.100) и еще $m_{\gamma-1}$ некоторых t-форм. Поскольку

$$\theta^j_{r_i-\gamma-1} \in K_\gamma, \quad i = 1, \ldots, l, \quad j = n_{i-1} + 1, \ldots, n_i,$$

то

$$d\theta^j_{r_i-\gamma-1} \equiv 0 \mod K_{\gamma-1}, \quad \text{т.е.} \quad dt \wedge dx^j_{r_i-\gamma} \equiv 0 \mod K_{\gamma-1},$$

$$i = 1, \ldots, l, \quad j = n_{i-1} + 1, \ldots, n_i.$$

Поэтому

$$dx^j_{r_i-\gamma} \equiv 0 \mod \overline{K_{\gamma-1}}.$$

Это означает, что формы Пфаффа $dx^j_{r_i-\gamma}$, $i{=}1,\ldots,l$, $j{=}n_{i-1}+1,\ldots,n_i$, принадлежат $\overline{K_{\gamma-1}}$, и, следовательно, $K_{\gamma-1}$ содержит t-формы вида

$$\theta^j_{r_i-\gamma} = dx^j_{r_i-\gamma} \Leftrightarrow \eta^j_{r_i-\gamma} dt, \tag{3.103}$$

$$i = 1, \ldots, l, \quad j = n_{i-1} + 1, \ldots, n_i.$$

Количество t-форм (3.103) равно n_l, поэтому $m_{\gamma-1} \geqslant n_l$. Возможны два случая.

а) Если $m_{\gamma-1} = n_l$, то t-формы (3.100), (3.103) составляют базисное семейство t-кораспределения $K_{\gamma-1}$. Функциональная независимость всех x, входящих в формулы (3.100), (3.103), и $\eta^j_{r_i-j}$, $i = 1, \ldots, l$, $j = n_{i-1} + 1, \ldots, n_i$, доказывается от противного (см. с. 184): если бы внешнее произведение их дифференциалов обратилось в нуль, то нашлись бы такие функции

$$\lambda^\alpha_\beta, \quad \alpha = r_i \Leftrightarrow \gamma, \quad \beta = n_{i-1} + 1, \ldots, n_i, \quad i = 1, \ldots, l,$$

не равные одновременно нулю, что

$$\lambda^\alpha_\beta d\eta^\beta_\alpha \equiv 0 \mod \overline{K_{\gamma-1}},$$

и для t-формы

$$\omega = \lambda^\alpha_\beta \theta^\beta_\alpha, \quad \alpha = r_i \Leftrightarrow \gamma, \quad \beta = n_{i-1} + 1, \ldots, n_i, \quad i = 1, \ldots, l,$$

выполнялось бы

$$d\omega \equiv 0 \mod K_{\gamma-1}.$$

Однако это противоречит тому, что ω не является линейной комбинацией t-форм (3.100), составляющих базисное семейство t-кораспределения K_γ. Следовательно, функции $\eta^j_{r_i-j}$ можно принять за новые переменные $x^j_{r_i-j+1}$, $i = 1,\ldots,l$, $j = n_{i-1}+1,\ldots,n_i$, и базисное семейство t-кораспределения $K_{\gamma-1}$ примет вид (3.101).

б) Если $m_{\gamma-1} > n_l$, то кораспределение $\overline{K_{\gamma-1}}$, будучи по условию теоремы вполне интегрируемым кораспределением, имеет полную систему интегралов вида x^β_α, $\alpha = 1,\ldots,r_i \Leftrightarrow \gamma$, $\beta = n_{i-1}+1,\ldots,n_i$, $i = = 1,\ldots,l$, $\phi^1,\ldots,\phi^{n_l-m_{\gamma-1}}$. Независимые функции $\phi^1,\ldots,\phi^{n_l-m_{\gamma-1}}$ можно принять за новые переменные $x_1^{n_l+1},\ldots,x_1^{m_{\gamma-1}}$. Тогда t-кораспределение $K_{\gamma-1}$ будет иметь базисное семейство, состоящее из t-форм (3.100), (3.103) и t-форм вида

$$\theta^j_1 = dx^j_1 \Leftrightarrow \eta^j_1\,dt, \quad j = n_l+1,\ldots,m_{\gamma-1}. \tag{3.104}$$

Функциональная независимость всех x и η, входящих в формулы (3.100), (3.103), (3.104), доказывается так же, как и в случае а). Приняв $\eta^j_{r_i-j}$ за новые переменные $x^j_{r_i-j+1}$, $i = 1,\ldots,l$, $j = n_{i-1}+1,\ldots,n_i$, а η^j_1 — за переменные x^j_2, $j = n_l+1,\ldots,m_{\gamma-1}$, и введя числа

$$r_{l+1} = \gamma+1, \quad \nu_{l+1} = m_{\gamma-1} \Leftrightarrow n_l, \quad n_{l+1} = n_l + \nu_{l+1} = m_{\gamma-1},$$

получим, что t-кораспределение $K_{\gamma-1}$ порождается t-формами (3.101) и (3.102).

Итак, t-кораспределение K при выполнении условий теоремы t-диффеоморфно в окрестности точки y_0 t-кораспределению, соответствующему линейной системе вида (3.95). □

Из доказательства теоремы 3.10 вытекает, что в регулярном случае полная интегрируемость кораспределения $\overline{K_\gamma}$ при $\underline{m_\gamma = m_{\gamma-1}}$ влечет за собой полную интегрируемость кораспределения $\overline{K_{\gamma-1}}$. Поэтому если, например, t-кораспределение K таково, что

$$m_0 = m_1 = \ldots = m_{N-1} = 1,$$

то, исследуя вопрос о линеаризации системы (3.1), достаточно проверить полную интегрируемость только одного кораспределения $\overline{K_{N-1}}$. При положительном результате остальные кораспределения $\overline{K_i}$, $i = = 0,\ldots,N \Leftrightarrow 2$, автоматически окажутся вполне интегрируемыми.

Следствие 3.1. *Для того чтобы аффинная система* (3.1) *была локально эквивалентна в точке* $y_0 \in M$ *некоторой системе вида* (3.95), *необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности* y_0:

1) *все* t*-корасп ределения* K_i, i=0,...,$N \Leftrightarrow 1$, *были регулярны*;

2) $K_N = \mathcal{O}$;

3) *кораспределения* $\overline{K_\gamma}$, *для которых* $m_\gamma > m_{\gamma+1}$, *были вполне интегрируемы.* □

Следствие 3.2. *Если управляемая система* (3.1) *эквивалентна системе* (3.95) *при* $w = r$, *то числа* $r_1 > r_2 > \ldots > r_s$ *(попарно различные индексы среди* $k_1, \ldots, k_r$*) и числа* $\nu_1, \ldots, \nu_s$ *(кратности индексов* $r_1, \ldots, r_s$ *соответственно) удовлетворяют следующему свойству: каждому* t*-кораспределению* K_γ, *для которого* $m_\gamma > m_{\gamma+1}$, *взаимно однозначно соответствует пара чисел* (r_i, ν_i) *с* $r_i > 1$, *так что* $r_i = \gamma + 2$, $\nu_i = m_\gamma \Leftrightarrow m_{\gamma+1}$. □

Из доказательства теоремы 3.10 вытекает алгоритм приведения линеаризуемой аффинной системы к соответствующей канонической форме Бруновского. Во-первых, нужно построить двойственный производный ряд ассоциированного с системой t-кораспределения K, выполнив действия, описанные на с. 86. Затем отыскивается линеаризующая замена фазовых координат. Сначала вычисляются интегралы вполне интегрируемого кораспределения $\overline{K_{N-1}}$, и эти функции принимаются за новые переменные $x_1^1, \ldots, x_1^{\nu_1}$. Координаты $x_2^1, \ldots, x_2^{\nu_1}$ находятся алгебраически как коэффициенты перед dt в t-формах $\omega^i \in K$, таких, что $\overline{\omega^i} = dx_1^i$, $i=1,\ldots,\nu_1$. После этого определяются координаты $x_3^1, \ldots, x_3^{\nu_1}$ как коэффициенты перед dt в t-формах $\omega^i \in K$, таких, что $\overline{\omega^i} = dx_2^i$, и так далее до координат $x_{r_1}^1, \ldots, x_{r_1}^{\nu_1}$. На следующем шаге интегрируется система Пфаффа (т.е. находится полный набор интегралов), порождающая очередное кораспределение $\overline{K_\gamma}$, для которого $m_\gamma > m_{\gamma+1}$, т.е. кораспределение $\overline{K_{r_2-2}}$. При этом уже известные интегралы этой системы $x_1^1, \ldots, x_1^{\nu_1}, \ldots, x_{r_1-r_2+1}^1, \ldots, x_{r_1-r_2+1}^{\nu_1}$ полагаются равными константам, и решается получившаяся ν_2-мерная вполне интегрируемая система Пфаффа. Полученные ν_2 интегралов этой системы дают $x_1^{\nu_1+1}, \ldots, x_1^{\nu_1+\nu_2}$. Далее находятся $x_i^{\nu_1+1}, \ldots, x_i^{\nu_1+\nu_2}$, $i=2,\ldots,r_2$, как коэффициенты при dt в соответствующих t-формах, и интегрируется следующая система Пфаффа (порождающая кораспределение $\overline{K_{r_3-2}}$). Так последовательно ищутся все линеаризующие координаты

$$x_i^j = \psi_i^j(y^1, \ldots, y^n), \quad j = 1, \ldots, r, \quad i = 1, \ldots, k_j.$$

Для того чтобы найти замену управлений, соответствующую приведению системы (3.1) к виду (3.95), нужно вычислить полные производные функций $x^j_{k_j}(t)$, $j = 1, \ldots, r$, в силу системы (3.1):

$$\dot{x}^j_{k_j} = \frac{\partial \psi^j_{k_j}}{\partial y^i}\dot{y}^i = \varphi^j_0(y) + \varphi^j_\alpha(y)u^\alpha,$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad \alpha = 1, \ldots, r, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Искомая замена управлений будет определяться равенствами

$$v^j = \varphi^j_0(y) + \varphi^j_1(y)u^1 + \varphi^j_2(y)u^2 + \ldots + \varphi^j_r(y)u^r, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Таким образом, для приведения системы (3.1) к линейному виду, кроме дифференцирований и алгебраических операций, требуется последовательно проинтегрировать l вполне интегрируемых систем Пфаффа размерностями $\nu_1, \ldots, \nu_l$ соответственно, где $l = \max\limits_{r_i > 1} i$. Случай однократных индексов Кронекера наиболее простой, так как здесь для отыскания линеаризующей замены фазовых координат нужно проинтегрировать r (при $k_r > 1$) или $r \Leftrightarrow 1$ (при $k_r = 1$) вполне интегрируемых систем Пфаффа.

Пример 3.3. Приведем к линейному виду в окрестности нуля систему

$$\begin{aligned}
&\dot{y}^1 = \sin y^2,\\
&\dot{y}^2 = \sin y^3,\\
&\dot{y}^3 = y^1 y^2 + u^1,\\
&\dot{y}^4 = y^5 + (y^4)^3 \Leftrightarrow (y^1)^{10},\\
&\dot{y}^5 = \Leftrightarrow 3(y^4)^5 + u^2,\\
&y \in R^5, \quad u \in R^2.
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Системе (3.105) соответствует t-кораспределение K, базисное семейство которого составляют t-формы

$$\begin{aligned}
&\omega^1 = dy^1 \Leftrightarrow \sin y^2 dt, \quad \omega^2 = dy^2 \Leftrightarrow \sin y^3 dt,\\
&\omega^3 = dy^4 \Leftrightarrow (y^5 + (y^4)^3 \Leftrightarrow (y^1)^{10})dt.
\end{aligned}$$

Из соотношений

$$\begin{aligned}
&d\omega^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = \Leftrightarrow \cos y^2 dy^2 \wedge dt \wedge dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^4 = 0,\\
&d\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = \Leftrightarrow \cos y^3 dy^3 \wedge dt \wedge dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^4,\\
&d\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = \Leftrightarrow dy^5 \wedge dt \wedge dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^4
\end{aligned}$$

следует, что t-кораспределение K_1 порождается t-формой ω^1. Так как

$$d\omega^1 \wedge \omega^1 \neq 0,$$

то следующий член двойственного производного ряда есть нулевое t-кораспределение:

$$K_2 = \mathcal{O}.$$

Поскольку K и K_1 регулярны, а $\overline{K}$ и $\overline{K_1}$ вполне интегрируемы, то, согласно теореме 3.10, система (3.105) локально эквивалентна в нулевой точке линейной системе, удовлетворяющей условию Калмана. Вид этой линейной системы определяется значениями индексов Кронекера. Имеем

$$m_2 = 0, \quad m_1 = 1, \quad m_0 = 2.$$

Так как $m_1 > m_2$, $m_0 > m_1$, то, согласно следствию 3.2,

$$r_1 = 3, \quad \nu_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad \nu_2 = 1.$$

Поэтому $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, и система (3.105) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1^1 = x_2^1, \quad \dot{x}_2^1 = x_3^1, \quad \dot{x}_3^1 = v^1, \\ &\dot{x}_1^2 = x_2^2, \quad \dot{x}_2^2 = v^2. \end{aligned}$$

Найдем линеаризующую замену фазовых координат. У кораспределения $\overline{K_1}$ один независимый интеграл — y^1. Положим $x_1^1 = y^1$, тогда в качестве x_2^1 берем коэффициент при dt в t-форме ω^1: $x_2^1 = \sin y^2$. Получим t-форму $\theta_1^1 = dx_1^1 \Leftrightarrow x_2^1 dt$. Так как $dx_2^1 = \cos y^2 dy^2$, то $\theta_2^1 = \cos y^2 \omega^2$. Положим $x_3^1 = \cos y^2 \sin y^3$, тогда $\theta_2^1 = dx_2^1 \Leftrightarrow x_3^1 dt$. У кораспределения $\overline{K_0} = \overline{K}$ три независимых интеграла: x_1^1, x_2^1 и y^4. Примем y^4 за новую переменную x_1^2. Тогда $\theta_1^2 = \omega^3$, и, полагая $x_2^2 = y^5 + (y^4)^3 \Leftrightarrow (y^1)^{10}$, получим $\theta_1^2 = dx_1^2 \Leftrightarrow x_2^2 dt$. Итак, линеаризующая замена фазовых координат есть

$$x_1^1 = y^1, \ \ x_2^1 = \sin y^2, \ \ x_3^1 = \cos y^2 \sin y^3, \ \ x_1^2 = y^4, \ \ x_2^2 = y^5 + (y^4)^3 \Leftrightarrow (y^1)^{10}.$$

Соответствующую замену управлений найдем, продифференцировав функции $x_3^1(t)$ и $x_2^2(t)$ в силу системы (3.105):

$$\begin{aligned} v^1 &= \Leftrightarrow \sin y^2 (\sin y^3)^2 + \cos y^2 \cos y^3 (y^1 y^2 + u^1), \\ v^2 &= u^2 + 3(y^4)^2 (y^5 \Leftrightarrow (y^1)^{10}) \Leftrightarrow 10 (y^1)^9 \sin y^2. \end{aligned}$$

Условия эквивалентности аффинной управляемой системы линейной системе имеют, разумеется, аналог и в терминах аффинных распределений. Заметим, что члены последовательностей (1.61) и (1.113) являются двойственными, т.е. $L_{F_i} = (\overline{K_i})^{\perp}$. Учитывая тот факт, что регулярное кораспределение тогда и только тогда является вполне интегрируемым, когда двойственное распределение является вполне интегрируемым (и, следовательно, по теореме 1.8 инволютивным), получим, что справедлива

Теорема 3.11. *Аффинная управляемая система* (3.1) *локально эквивалентна в точке $y_0 \in M$ линейной системе* (3.95) *тогда и только тогда, когда*:

1) *точка y_0 является регулярной точкой производного ряда* (1.60) *ассоциированного аффинного распределения F системы* (3.1);

2) *F_N, где $N+1$ — длина производного кофлага* (3.14), *является касательным расслоением, т.е. распределением вида $y \mapsto TM_y$*;

3) *$\mathbf{L}_{F_i}, i = 0, 1, \ldots, N$, являются инволютивными распределениями.*

В работах [33, 34], [54, 55] получены условия локальной диффеоморфности аффинной системы (3.1) линейной системе (3.95) или, иначе говоря, условия существования локальной невырожденной замены фазовых переменных и управлений, преобразующей аффинную систему в линейную. Эти условия, по существу, совпадают с условиями теоремы 3.11. Приведенные здесь результаты в терминах двойственных объектов получены в работе [47], в которой были использованы некоторые идеи работы [68].

При изучении вопроса о приведении аффинной управляемой системы к линейной теорему 3.11 удобно использовать при небольшом числе управлений. Если же система имеет много управлений (больше, чем $n/2$), то ранг ассоциированного t-кораспределения K меньше ранга ассоциированного аффинного распределения F, и поэтому лучше воспользоваться теоремой 3.10.

Пример 3.4. Исследуем на эквивалентность линейной системе в окрестности нуля аффинную систему

$$\begin{aligned}
&\dot y^1 = \sin y^2 + y^1 (y^5)^3 u^1 + (y^5)^2 u^2,\\
&\dot y^2 = \cos y^2 \sin y^3,\\
&\dot y^3 = u^1 + \sin y^4\, u^2 + y^2 (y^4)^2\, u^3,\\
&\dot y^4 = y^3 \sin y^5\, u^1 + \cos y^1\, u^3,\\
&\dot y^5 = y^1 y^5 u^1 + u^2,\\
&y \in R^5, \quad u \in R^3.
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Системе (3.106) соответствует аффинное распределение F, порождаемое векторными полями

$$f_0 = \sin y^2 \frac{\partial}{\partial y^1} + \cos y^2 \sin y^3 \frac{\partial}{\partial y^2},$$
$$f_1 = y^1 (y^5)^3 \frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial}{\partial y^3} + y^3 \sin y^5 \frac{\partial}{\partial y^4} + y^1 y^5 \frac{\partial}{\partial y^5},$$
$$f_2 = (y^5)^2 \frac{\partial}{\partial y^1} + \sin y^4 \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y^5},$$
$$f_3 = y^2 (y^4)^2 \frac{\partial}{\partial y^3} + \cos y^1 \frac{\partial}{\partial y^4}$$

и t-кораспределение K, порождаемое t-формами Пфаффа

$$\omega^1 = dy^1 \Leftrightarrow (y^5)^2 dy^5 \Leftrightarrow \sin y^2 \, dt,$$
$$\omega^2 = dy^2 \Leftrightarrow \cos y^2 \sin y^3 \, dt.$$

Для того чтобы проверить выполнение для системы (3.106) условий теоремы 3.11, нужно провести процесс пополнения, т.е. построить последовательность (1.65). Следовательно, во-первых, требуется найти коммутаторы $[f_1, f_2]$, $[f_1, f_3]$, $[f_1, f_2]$ и убедиться в том, что они линейно (с переменными коэффициентами) выражаются через векторные поля f_i, $i = 1, 2, 3$ (т.е. L_{F_0} инволютивно). Во-вторых, нужно вычислить коммутаторы $[f_0, f_i]$, $i = 1, 2, 3$, и найти ранг распределения (L_{F_1}), порождаемого этими коммутаторами и полями f_i, $i = 1, 2, 3$. Ранг L_{F_1} будет равен 4. Затем следует вычислить коммутаторы $[f_i, [f_0, f_j]]$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \leqslant j$, и убедиться в том, что они линейно выражаются через поля f_i, $[f_0, f_i]$, $i = 1, 2, 3$ (т.е. L_{F_1} инволютивно). Наконец, нужно найти, например, $[f_0, [f_0, f_1]$ и получить в результате распределение L_{F_2} ранга 5. Так как $\dim K < \dim F$, то вычисления будут гораздо менее трудоемкими, если воспользоваться условиями эквивалентности в терминах t-кораспределений. Имеем

$$d\omega^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \quad d\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0, \quad d\omega^1 \wedge \omega^1 \neq 0.$$

Поэтому t-кораспределение K_1 порождается t-формой ω^1, а $K_2 = 0$. Так как $m_0 = m_1 = 1$, $m_2 = 0$, то на полную интегрируемость достаточно проверить кораспределение $\overline{K_1}$. Поскольку $d\overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^1} = 0$, то система (3.106) локально эквивалентна в нулевой точке линейной системе. Имеем

$$r_1 = 3, \quad \nu_1 = 1, \quad r_2 = 1, \quad \nu_2 = n \Leftrightarrow \nu_1 r_1 = 2.$$

Следовательно, система (3.106) локально эквивалентна в нулевой точке

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1^1 = x_2^1, \quad \dot{x}_2^1 = x_3^1, \quad \dot{x}_3^1 = v^1, \\ &\dot{x}_1^2 = v^2, \\ &\dot{x}_1^3 = v^3, \end{aligned}$$

к которой приводится следующей заменой фазовых переменных

$$\begin{aligned} &x_1^1 = y^1 \Leftrightarrow \tfrac{1}{3}(y^5)^3, \\ &x_2^1 = \sin y^2, \\ &x_3^1 = (\cos y^2)^2 \sin y^3, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &x_1^2 = y^4, \\ &x_1^3 = y^5, \end{aligned}$$

и управлений

$$\begin{aligned} v^1 &= \Leftrightarrow \sin 2y^2 \sin y^3 (\sin y^2 + y^1 (y^5)^3 u^1 + (y^5)^2 u^2) + \\ &\qquad + (\cos y^2)^2 \cos y^3 (u^1 + \sin y^4\, u^2 + y^2 (y^4)^2 u^3), \\ v^2 &= y^3 \sin y^5\, u^1 + \cos y^1\, u^3, \\ v^3 &= y^1 y^5 u^1 + u^2. \end{aligned}$$

3.3. Допускаемые группы и допускаемые алгебры Ли

Здесь рассматриваются изоморфизмы аффинных систем (3.1) на себя или, иначе говоря, автоморфизмы категории $\mathcal{AS}$. В категориях, связанных с системами дифференциальных уравнений, автоморфизмы обычно называются преобразованиями, которые допускаются системами дифференциальных уравнений, или симметриями.

Знание допускаемых преобразований позволяет по известным решениям находить новые решения управляемых систем. Кроме того, допускаемые группы и алгебры Ли играют существенную роль в вопросах факторизации и сужения аффинных управляемых систем (см. далее разделы 4.2, 5.2).

Итак, по определению диффеоморфизм $\psi\colon M \to M$ допускается системой (3.1) (в категории $\mathcal{AS}$), если как только $y(t)$ — решение системы (3.1), то $y'(t) = \psi(y(t))$ — также решение системы (3.1).

Далее, в более общем смысле под допускаемыми преобразованиями понимаются также локальные диффеоморфизмы, переводящие решения в решения. В основном нас будут интересовать такие локальные однопараметрические группы $\{s^\tau, \tau \in R^1\}$, что каждый локальный диффеоморфизм s^τ является допускаемым преобразованием. Такие группы будем называть допускаемыми группами, а векторные поля, порождающие допускаемые группы, — допускаемыми полями системы (3.1).

В подкатегории $\mathcal{ASP}$ допускаемыми являются преобразования, которые переводят решения в решения, соответствующие одинаковым управлениям. Из предложения 2.3 следует, что диффеоморфизм ψ допускается системой (3.1) в категории $\mathcal{ASP}$ тогда и только тогда, когда

$$\psi_* f_\alpha = f_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, r,$$

т.е. когда ассоциированные поля $f_\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots, r$, системы (3.1) инвариантны относительно ψ по терминологии раздела 1.6. Из теоремы 1.25 того же раздела следует

Теорема 3.12. *Векторное поле ξ допускается системой* (3.1) *в категории $\mathcal{ASP}$ тогда и только тогда, когда*

$$[\xi, f_\alpha] = 0, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, r. \ \square \tag{3.107}$$

Из тождества Якоби (1.9) следует, что множество полей ξ, удовлетворяющих (3.107), является алгеброй Ли, которую будем обозначать через $\mathfrak{a}_0$ и называть алгеброй, допускаемой системой (3.107) в категории $\mathcal{ASP}$.

Замечание 3.5. Алгебра $\mathfrak{a}_0$ была введена Г.Н.Яковенко для нелинейных систем общего вида (2.9) как множество полей ξ, удовлетворяющих условию $[\xi, f_u] = 0, \forall u \in U$ [42, 43]. Отметим один результат, принадлежащий Г.Н.Яковенко: если $\Delta_{\mathfrak{f}'^*}(y_0) = n, y_0 \in M$, то $\dim \mathfrak{a}_0 \leqslant n$ в некоторой окрестности N точки $y_0 \in M$ (иначе говоря, $\dim \mathfrak{a}_0 \leqslant n$ для системы, получающейся ограничением (2.9) на V). Здесь $\Delta_{\mathfrak{f}'^*}$ — распределение, порождаемое алгеброй Ли $\mathfrak{f}'^*$, а $\mathfrak{f}'$ — семейство векторных полей $f_u, u \in U$.

Из теоремы 2.1 следует, что диффеоморфизм $\psi\colon M \to M$ допускается системой (3.1) в категории $\mathcal{AS}$ тогда и только тогда, когда $\psi_* F = F$, где F — ассоциированное аффинное распределение системы (3.1). Аналогичное утверждение справедливо и для локального диффеоморфизма ψ, допускаемого системой (3.1), с учетом области определения. Таким образом, векторное поле $\xi \in \mathcal{T}(M)$ допускается системой (3.1) тогда и только тогда, когда ассоциированное распределение F системы (3.1) инвариантно относительно однопараметрической группы, порождаемой полем ξ. Отсюда и из теоремы 1.26 вытекает

Теорема 3.13. *Векторное поле ξ допускается аффинной системой* (3.1) *в категории $\mathcal{AS}$ тогда и только тогда, когда*

$$[\xi, F] \subset \mathbf{L}_F \tag{3.108}$$

(*т.е.* $[\xi, \eta] \in \mathbf{L}_F, \forall \eta \in F$).

Из (3.108) легко вывести (используя тождество Якоби), что совокупность векторных полей, допускаемых системой (3.1), является алгеброй Ли, которую обозначим через $\mathfrak{a}_1$ и будем называть допускаемой алгеброй Ли системы (3.1) в категории $\mathcal{AS}$. Ясно, что алгебра $\mathfrak{a}_0$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{a}_1$.

Замечание 3.6. Для нелинейных управляемых систем общего вида (2.9) Ю.Н.Павловский ввел алгебру Ли векторных полей вида

$$X = \xi^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i} + \omega^\alpha(y, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{3.109}$$

обладающих тем свойством, что соответствующие однопараметрические группы переводят функции $y(t)$, $u(t)$, удовлетворяющие (2.9), в функции $y'(t)$, $u'(t)$, также удовлетворяющие (2.9) [39]. Обозначим эту алгебру через $\mathfrak{b}$. В случае систем вида (3.1) легко видеть, что если поле (3.109) принадлежит $\mathfrak{b}$, то поле $\xi = \xi^i\partial/\partial y^i$ принадлежит $\mathfrak{a}_1$. Обратно, если $\xi \in \mathfrak{a}_1$, то существуют такие функции ω^α, что соответствующее поле (3.109) принадлежит $\mathfrak{b}$.

Рассмотрим вопрос о нахождении алгебры $\mathfrak{a}_1$. Начнем с подалгебры $\mathfrak{a}_0$, отыскание которой сводится к решению системы дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью. Действительно, в компонентной записи соотношения (3.107) записываются следующим образом:

$$f^j_\alpha\frac{\partial \xi^i}{\partial y^j} = \xi^j\frac{\partial f^i_\alpha}{\partial y^j}, \tag{3.110}$$
$$\alpha = 0, 1, \ldots, r, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Алгоритм решения таких систем дифференциальных уравнений, описанный в разделе 1.7, основан на построении производного ряда (1.32) для ассоциированного семейства полей системы (3.1)

$$\mathfrak{f}_0 \subset \mathfrak{f}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{f}_k \subset \ldots, \tag{3.111}$$

где $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{f} = \{f_\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots, r\}$. Напомним, что семейство

$$\mathfrak{f}^* = \operatorname{span}\{\mathfrak{f}_k, k = 0, 1, \ldots\}$$

является минимальной алгеброй Ли, содержащей $\mathfrak{f}$, и называется ассоциированной алгеброй системы (3.1). Решение системы (3.110) получается в результате выполнения некоторых алгебраических операций, в частности нахождения базисного семейства распределения $\Delta_{\mathfrak{f}^*}$ с помощью процесса пополнения, а также нахождения интегралов некоторого полного семейства, что равносильно решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что если $\dim \Delta_{\mathfrak{f}^*} = n$ (иначе говоря, управляемая система находится в общем положении), то, согласно теореме 1.32, общее решение системы (3.110) зависит от констант, число которых не превышает n. Это означает, что в этом случае алгебра $\mathfrak{a}_0$ конечномерна, как уже было сказано в замечании 3.5. Число констант равно размерности $\mathfrak{a}_0$. Это число находится с помощью выполнения алгебраических операций без решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении еще одной подалгебры алгебры $\mathfrak{a}_1$. Заметим, что поля, принадлежащие характеристическому распределению $\mathbf{C}F$, допускаются системой (3.1) в категории $\mathcal{AS}$. Это следует из (3.108) и определения $\mathbf{C}F$. Обозначим через $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ множество векторных полей, принадлежащих $\mathbf{C}F$. Итак, $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}} \subset \mathfrak{a}_1$. Поле ξ из алгебры $\mathfrak{a}_1$ принадлежит $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$, если $\xi \in \mathbf{L}_F$. В том случае, когда $\mathbf{C}F$ регулярно, то, согласно предложению 1.19, $\mathbf{C}F$ инволютивно, и, следовательно, $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ представляет собой алгебру Ли, являющуюся подалгеброй алгебры $\mathfrak{a}_1$. Алгебра $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ является, кроме того, еще и модулем над кольцом гладких функций. Действительно, если $\xi \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$, то и любое поле $h(y)\xi$, где h является произвольной гладкой функцией, также принадлежит $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$. Отсюда, в частности, следует, что если $\dim \mathbf{C}F \neq 0$, то алгебра $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$, а следовательно, и алгебра $\mathfrak{a}_1$ являются бесконечномерными.

Важным свойством алгебры $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ является то, что для описания $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ не нужно решать дифференциальные уравнения, т.е. $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ описывается с помощью лишь элементарных алгебраических средств. Для нахождения $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ следует перейти от аффинного распределения F к двойственному t-кораспределению $F_\perp$ и затем построить систему Пфаффа (1.105), (1.106), порождающую t-характеристическое кораспределение $\mathbf{C}_t F_\perp$. Если $\mathbf{C}_t F_\perp$ регулярно и $\dim \mathbf{C}_t F_\perp = q$, то среди уравнений (1.105), (1.106) (локально) имеется q линейно несвязанных

$$\omega^k = \omega^k_i(y)\, dy^i = 0, \quad k = 1, \dots, q. \tag{3.112}$$

Из теоремы 1.12 следует, что в этом случае $\mathbf{C}F$ является регулярным распределением, причем $\mathbf{C}F = (\mathbf{C}_t F_\perp)^\perp$. Таким образом, базисное семейство

$$\xi_a = \xi^i_a(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad a = 1, \dots, p = n = q, \tag{3.113}$$

распределения $\mathbf{C}F$ является взаимным к (3.112) и находится с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\omega_i^k \xi^i = 0, \quad k = 1, \ldots, q.$$

Итак, алгебру $\mathfrak{a}_\mathbf{C}$ (по крайней мере, локально) можно описать следующим образом: каждое векторное поле $\xi \in \mathfrak{a}_\mathbf{C}$ имеет вид $\xi = \mu^a(y)\xi_a$, где ξ_a — поля (3.113), μ^a — некоторые гладкие функции.

Допускаемые поля $\xi \in \mathfrak{a}_1$ общего вида находятся с помощью решения дифференциальных уравнений. Соотношение (3.108) равносильно соотношениям

$$[\xi, \eta_0] \in \mathbf{L}_F, \quad [\xi, \mathbf{L}_F] \subset L_F, \tag{3.114}$$

где η_0 — некоторое поле, принадлежащее F. Доказательство аналогично доказательству равносильности соотношений (1.57) и соотношений (1.58), (1.59). Условия (3.114) можно записать также в следующем виде:

$$[\xi, f_\alpha] = \mu_\alpha^\beta(y) f_\beta, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, r, \quad \beta = 1, \ldots, r, \tag{3.115}$$

где ν_α^β — некоторые функции. (Здесь $\eta_0 = f_0$.)

Соотношения (3.115) представляют собой систему дифференциальных уравнений относительно компонент поля $\xi = \xi^i(y)\partial/\partial y^i$

$$f_\alpha^j \frac{\partial \xi^i}{\partial y^j} = \xi^j \frac{\partial f_\alpha^i}{\partial y^j} + \mu_\alpha^\beta f_\beta^i, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, r, \quad \beta = 1, \ldots, r. \tag{3.116}$$

Система (3.116) представляет собой систему дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью относительно переменных $\xi^i(y)$, но, в отличие от системы (3.110), здесь имеются еще неизвестные функции $\mu_\alpha^\beta(y)$ — так называемые параметрические переменные, что существенно усложняет дело при использовании алгоритмов, описанных в разделе 1.7 (см. замечание 1.27).

Для решения системы (3.116) можно также применить прием исключения параметрических переменных. В результате получится система дифференциальных уравнений относительно ξ^i без параметрических переменных, но эта система, вообще говоря, не будет системой с одинаковой главной частью. Заметим, что в соотношениях (3.116) вместо полей $f_\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots, r$, равносильным образом может фигурировать любое базисное семейство $\eta_\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots, p = \dim F$, аффинного распределения F. Построим базисное семейство специального вида. Пусть, не ограничивая общности, поля $f_\alpha, \alpha = 1, \ldots, p$, составляют базисное семейство распределения $\mathbf{L}_F$, причем $|f_\alpha^i|_{\alpha=1,\ldots,p}^{i=1,\ldots,p} \neq 0$. Тогда очевидно, что линейным невырожденным преобразованием семейство

$f_\alpha, \alpha = 1, \ldots, p$, приводится к так называемому якобиеву виду

$$\eta_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \eta_\alpha^l(y)\frac{\partial}{\partial y^l}, \quad \alpha = 1, \ldots, p, \quad l = p+1, \ldots, n. \tag{3.117}$$

Нужное базисное семейство сотоит из поля $\eta_0 = f_0$ и полей (3.117). Уравнения вида (3.116) для построенного семейства $\eta_\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots, p$, в компонентной записи выглядят так:

$$\xi(\eta_0^\gamma) \Leftrightarrow \eta_0(\xi^\gamma) = \nu_0^\beta \delta_\beta^\gamma, \tag{3.118}$$

$$\xi(\eta_0^l) \Leftrightarrow \eta_0(\xi^l) = \nu_0^\beta \eta_\beta^l, \tag{3.119}$$

$$\xi(\delta_0^\gamma) \Leftrightarrow \eta_\alpha(\xi^\gamma) = \nu_\alpha^\beta \delta_\beta^\gamma, \tag{3.120}$$

$$\xi(\eta_\alpha^l) \Leftrightarrow \eta_\alpha(\xi^l) = \nu_\alpha^\beta \eta_\beta^l, \tag{3.121}$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, p, \quad l = p+1, \ldots, n.$$

Из (3.118), (3.120) имеем $\nu_0^\gamma = \xi(\eta_0^\gamma) \Leftrightarrow \eta_0(\xi^\gamma)$, $\nu_\alpha^\gamma = \Leftrightarrow \eta_\alpha(\xi^\gamma)$. Подставляя в (3.119), (3.121), получим равносильную систему уравнений

$$\begin{aligned} \eta_0(\xi^l) + \eta_\beta^l(\xi(\eta_0^\beta) \Leftrightarrow \eta_0(\xi^\beta)) \Leftrightarrow \xi(\eta_0^l) &= 0, \\ \eta_\alpha(\xi^l) \Leftrightarrow \eta_\beta^l(\eta_\alpha(\xi^\beta)) \Leftrightarrow \xi(\eta_\alpha^l) &= 0, \end{aligned} \tag{3.122}$$

$$\alpha, \beta = 1, \ldots, p, \quad l = p+1, \ldots, n,$$

которая является линейной системой дифференциальных уравнений в частных производных относительно ξ^i без параметрических переменных.

Пример 3.5. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 + zv, \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{z} &= xv \end{aligned} \tag{3.123}$$

(которая получается из приведенной формы в (3.38) при $H = x$). Ассоциированное семейство $\mathfrak{f}$ состоит из полей

$$f_0 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad f_1 = z\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Найдем сначала алгебру $\mathfrak{a}_0$. Поле

$$\xi = \xi^1\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2\frac{\partial}{\partial y} + \xi^3\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.124}$$

принадлежит $\mathfrak{a}_0$, если $[\xi, f_0] = [\xi, f_1] = 0$. Эти соотношения определяют систему дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью относительно ξ^i:

$$
\begin{aligned}
&\xi^i_x = 0, \quad i = 1, 2, 3,\\
&z\xi^1_x + \xi^1_y + x\xi^1_x = \xi^3,\\
&z\xi^2_x + \xi^2_y + x\xi^2_z = 0,\\
&z\xi^3_x + \xi^3_y + x\xi^3_z = \xi^1.
\end{aligned}
\tag{3.125}
$$

(Здесь и далее нижние индексы вида x, y, z означают производные по соответствующим аргументам.) Согласно алгоритму исследования уравнений такого рода (см. раздел 1.7), следует с помощью процесса пополнения найти базисное семейство $\mathfrak{q}$ распределения $\Delta_{\mathfrak{f}^*}$. Имеем $[f_0, f_1] = \partial/\partial z$. Таким образом, базисное семейство $\mathfrak{q}$ состоит из трех полей $f_0, f_1, f_3 = \partial/\partial z$. Соответствующее семейство $\mathfrak{q}'$ состоит из полей

$$
f'_0 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad f'_1 = z\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} + \xi^3\frac{\partial}{\partial \xi^1} + \xi^1\frac{\partial}{\partial \xi^3}, \quad f'_2 = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.126}
$$

Вычисляя коммутаторы полей (3.126), убеждаемся, что семейство $\mathfrak{q}'$ является полным. Следовательно, условие совместности (1.234) выполняется тождественно. Для нахождения решений системы (3.125) нужно определить полный набор интегралов полного семейства (3.126). В качестве таковых можно взять функции

$$
G_1 = (\xi^1)^2 \Leftrightarrow (\xi^3)^2, \quad G_2 = e^{-y}(\xi^1 + \xi^3), \quad G_3 = \xi^2.
$$

Разрешая систему алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
&(\xi^1)^2 \Leftrightarrow (\xi^3)^2 = c_1,\\
&e^{-y}(\xi^1 + \xi^3) = c_2,\\
&\xi^2 = c_3, \quad c_i = \mathrm{const}\,,
\end{aligned}
$$

относительно ξ, получим общее решение системы (3.125), определяющее совокупность векторных полей, принадлежащих алгебре $\mathfrak{a}_0$. В данном случае ранг распределения $\Delta_{\mathfrak{f}^*}$ максимален, поэтому общее решение зависит от констант, что соответствует конечномерности алгебры $\mathfrak{a}_0$. Каждое поле $\xi \in \mathfrak{a}_0$ имеет вид

$$
\xi = (C_1e^y + C_2e^{-y})\frac{\partial}{\partial x} + C_3\frac{\partial}{\partial y} + (C_1e^y \Leftrightarrow C_2e^{-y})\frac{\partial}{\partial z}, \tag{3.127}
$$

где $C_i = \mathrm{const}$. Алгебра $\mathfrak{a}_0$ является трехмерной, причем в качестве базиса можно взять поля

$$X_1 = e^y \frac{\partial}{\partial x} + e^y \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = e^{-y} \frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow e^{-y} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Построим теперь алгебру $\mathfrak{a}_1$. В соответствии с соотношениями (3.115) поле (3.124) принадлежит $\mathfrak{a}_1$ тогда и только тогда, когда найдутся такие функции $\mu_0(x, y, z)$, $\mu_1(x, y, z)$, что

$$[\xi, f_0] = \mu_0 f_1, \quad [\xi, f_2] = \mu_1 f_1.$$

Исключая $\mu_0(x, y, z)$, $\mu_1(x, y, z)$, получим систему уравнений (3.122)

$$\begin{aligned}
&\xi^1_x \Leftrightarrow z\xi^2_x = 0,\\
&\xi^3_x \Leftrightarrow x\xi^2_x = 0,\\
&\xi^1_y \Leftrightarrow z\xi^2_y + x(\xi^1_z \Leftrightarrow z\xi^2_z) \Leftrightarrow \xi^3 = 0,\\
&\xi^3_y \Leftrightarrow x\xi^2_y + x(\xi^3_z \Leftrightarrow x\xi^2_z) \Leftrightarrow \xi^1 = 0.
\end{aligned}$$

Проверка условий совместности типа $\xi^1_{xy} = \xi^1_{yx}$, $\xi^3_{xy} = \xi^3_{yx}$, ... приводит эту систему к следующей равносильной системе:

$$\xi^i_x = \xi^i_z = 0, \quad \xi^1_y = \xi^3, \quad \xi^3_y = \xi^1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Данная система уже является системой с одинаковой главной частью. Решая ее, получим, что каждое поле из $\mathfrak{a}_1$ имеет вид (3.127), т.е. $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1$. Совокупность преобразований, порождаемых полями (3.127), описывается следующим образом:

$$g^\tau \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \dfrac{C_1}{C_3} e^{y + C_3\tau} \Leftrightarrow \dfrac{C_2}{C_3} e^{-y - C_3\tau} \\ y + C_3\tau \\ z + \dfrac{C_1}{C_3} e^{y + C_3\tau} + \dfrac{C_2}{C_3} e^{-y - C_3\tau} \end{pmatrix}, \tag{3.128}$$

если $C_3 \neq 0$,

$$g^\tau \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + C_1 e^y \tau + C_2 e^{-y} \tau \\ y \\ z + C_1 e^y \tau \Leftrightarrow C_2 e^{-y} \tau \end{pmatrix}, \tag{3.129}$$

если $C_3 = 0$.

Можно показать, что множество преобразований, допускаемых системой (3.123) в категории $\mathcal{ASP}$, совпадает с множеством преобразований (3.128), (3.129). Что касается категории $\mathcal{AS}$, то преобразование

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \Leftrightarrow y \\ \Leftrightarrow z \end{pmatrix} \tag{3.130}$$

допускается системой (3.123) в категории $\mathcal{AS}$, но не входит во множество (3.128), (3.129). Оказывается, что любое преобразование, допускаемое системой (3.123) в категории $\mathcal{AS}$, представляет собой некоторую суперпозицию преобразований (3.128), (3.129) и (3.130). Таким образом, в данном случае, несмотря на совпадение алгебр $\mathfrak{a}_0$ и $\mathfrak{a}_1$, множества автоморфизмов в категориях $\mathcal{ASP}$ и $\mathcal{AS}$ не совпадают.

При нахождении допускаемых полей и групп системы (3.1) существенную помощь может оказать переход к эквивалентной управляемой системе, для которой данная задача может быть проще или уже решена. Определив допускаемые поля и группы для эквивалентной системы и произведя обратный диффеоморфизм, получим искомые объекты для исходной системы. В предыдущем разделе была представлена локальная классификация для некоторых типов управляемых систем. Построим допускаемые алгребры Ли $\mathfrak{a}_1$ для ряда полученных канонических форм.

Из-за громоздкости приводимых формул примем следующие соглашения по поводу обозначений, которые используются далее в этом разделе. Канонические формы будем записывать несколько иначе, нежели в предыдущем разделе. Для сумм вида $\sum z^i u^i$ иногда применяется запись zu, нижний индекс вида x^i в выражении φ_{x^i} означает дифференцирование по x^i. Канонические формы приводятся в виде списков, нумерация в которых осуществляется римскими цифрами. Спискам канонических форм соответствуют списки допускаемых алгебр с теми же номерами. Каждый тип управляемых систем рассматривается в отдельном подразделе, где своя нумерация для списков канонических форм и допускаемых алгебр Ли.

1. Рассмотрим инволютивные системы, т.е. системы, для которых ассоциированные аффинные распределения являются инволютивными.

Согласно теореме 3.3, каждая инволютивная система локально эквивалентна одной из следующих систем:

$$
\begin{array}{lll}
\text{I.} & \dot{x} = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\
\text{II.} & \dot{x} = 0, & x \in \mathbb{R}^{n-1}, \\
 & \dot{y} = 1, & y \in \mathbb{R}^1, \\
\text{III.} & \dot{x} = 0, & x \in \mathbb{R}^d, \\
 & \dot{y} = u, & y \in \mathbb{R}^{n-d}, \\
\text{IV.} & \dot{x} = 0, & x \in \mathbb{R}^p, \\
 & \dot{y} = u, & y \in \mathbb{R}^{n-p-1}, \\
 & \dot{z} = 1, & z \in \mathbb{R}^1, \\
\text{V.} & \dot{x} = u, & x \in \mathbb{R}^{n-1}, \\
 & \dot{z} = 1, & z \in \mathbb{R}^1, \\
\text{VI.} & \dot{x} = u, & x \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

Здесь d, p — любые натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < d < n$, $0 < p < n \Leftrightarrow 1$.

Допускаемые алгебры Ли для указанных инволютивных систем находятся достаточно просто и имеют следующий вид:

$$
\begin{array}{ll}
\text{I.} & \mathfrak{a}_1 = \left\{ \varphi_i(x) \dfrac{\partial}{\partial x^i} \right\}, \\[2ex]
\text{II.} & \mathfrak{a}_1 = \left\{ \varphi_i(x) \dfrac{\partial}{\partial x^i} \quad + \psi_j(x) \dfrac{\partial}{\partial y^j} \right\}, \\[2ex]
\text{III.} & \mathfrak{a}_1 = \left\{ \varphi_i(x) \dfrac{\partial}{\partial x^i} + \psi_j(x, y) \dfrac{\partial}{\partial y^j} \right\}, \\[2ex]
\text{IV.} & \mathfrak{a}_1 = \left\{ \varphi_i(x) \dfrac{\partial}{\partial x^i} \quad + \psi_j(x, y, z) \dfrac{\partial}{\partial y^j} + \chi(x) \dfrac{\partial}{\partial z} \right\}, \\[2ex]
\text{V.} & \mathfrak{a}_1 = \left\{ \varphi_i(x, z) \dfrac{\partial}{\partial x^i} + C \dfrac{\partial}{\partial z} \right\}, \\[2ex]
\text{VI.} & \mathfrak{a}_1 = \left\{ \varphi_i(x) \dfrac{\partial}{\partial x^i} \right\}.
\end{array}
$$

Здесь φ_i, ψ_j, χ — произвольные гладкие функции, а C — произвольная константа.

2. Рассмотрим системы (3.1), для которых $\operatorname{rank} f = n \Leftrightarrow 1$. Каждая такая система, удовлетворяющая условиям теоремы 3.4, локально эквивалентна одной из следующих систем:

$$
\text{I.} \begin{cases} \dot{x} = 0, & x \in \mathbb{R}^1, \\ \dot{y} = u, & y \in \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases} \qquad\qquad \text{II.} \begin{cases} \dot{x} = 1, & x \in \mathbb{R}^1, \\ \dot{y} = u, & y \in \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases}
$$

$$\text{III.}\ \begin{cases} \dot x = y, & x \in \mathbb{R}^1,\\ \dot y = u, & y \in \mathbb{R}^1,\\ \dot z = v, & z \in \mathbb{R}^{n-2}, \end{cases}$$

$$\text{IV.}\ \begin{cases} \dot x = zu, & x \in \mathbb{R}^1,\\ \dot y = u, & y,\, z \in \mathbb{R}^k,\\ \dot z = v, & n = 2k+1, \end{cases} \qquad \text{V.}\ \begin{cases} \dot x = zu, & x \in \mathbb{R}^1,\\ \dot y = u, & y,\, z \in \mathbb{R}^k,\\ \dot z = v, & q \in \mathbb{R}^{n-l},\\ \dot q = w, & l = 2k+1, \end{cases}$$

$$\text{VI.}\ \begin{cases} \dot x = 1 + zu, & x \in \mathbb{R}^1,\\ \dot y = u, & y,\, z \in \mathbb{R}^k,\\ \dot z = v, & n = 2k+1, \end{cases} \qquad \text{VII.}\ \begin{cases} \dot x = 1 + zu, & x \in \mathbb{R}^1,\\ \dot y = u, & y,\, z \in \mathbb{R}^k,\\ \dot z = v, & q \in \mathbb{R}^{n-l},\\ \dot q = w, & l = 2k+1, \end{cases}$$

$$\text{VIII.}\ \begin{cases} \dot x = y + zw, & x,\, y \in \mathbb{R}^1,\\ \dot y = u, & z,\, q \in \mathbb{R}^k,\\ \dot z = v, & \\ \dot q = w, & n = 2k+2, \end{cases} \qquad \text{IX.}\ \begin{cases} \dot x = y + zw, & x,\, y \in \mathbb{R}^1,\\ \dot y = u, & z,\, q \in \mathbb{R}^k,\\ \dot z = v, & p \in \mathbb{R}^{n-l},\\ \dot q = w, & \\ \dot p = h, & l = 2k+1. \end{cases}$$

Здесь k и l — натуральные числа, причем $l < n$.

Системы I и II — это уже рассмотренные нами инволютивные системы.

Рассмотрим систему IV. Базисная система Пфаффа ассоциированного кораспределения этой системы состоит из уравнения

$$dx \Leftrightarrow z^1\, dy^1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z^k\, dy^k = 0,$$

задающего контактную структуру в фазовом пространстве. Допускаемое преобразование $(x, y, z) \mapsto (\bar x, \bar y, \bar z)$ должно сохранять эту структуру и, следовательно, удовлетворять условию

$$dx \Leftrightarrow z\, dy = \rho(\, d\bar x \Leftrightarrow \bar z\, d\bar y), \tag{3.131}$$

где ρ — некоторая функция. Таким образом, допускаемые преобразования в данном случае — это контактные или, иначе говоря, касательные преобразования [15, 16]. Как известно, контактные векторные поля (т.е. поля, порождающие однопараметрические группы, состоящие из контактных преобразований) образуют следующую алгебру Ли:

$$\text{IV.}\ \mathfrak{a}_1 = \left\{ (\varphi(x, y, z) \Leftrightarrow z^i \varphi_{z^i}) \frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow \varphi_{z^j} \frac{\partial}{\partial y^j} + (\varphi_{y^j} + z^j \varphi_x) \frac{\partial}{\partial z^j} \right\}.$$

В качестве функции φ, которая называется производящей, можно брать произвольные гладкие функции от x, y, z. Поэтому алгебра $\mathfrak{a}_1$ бесконечномерна. Заметим, что алгебра $\mathfrak{a}_0$ является n-мерной, причем в качестве базиса можно взять поля $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $Y_j = \dfrac{\partial}{\partial y^j}$, $Z_i = \dfrac{\partial}{\partial z^i} + y^i \dfrac{\partial}{\partial x}$, соответствующие производящим функциям $\varphi = 1$, $\varphi = \Leftrightarrow z^j$, $\varphi = y^i$.

Алгебра $\mathfrak{a}_1$ для системы V представляет собой небольшое обобщение IV:

$$\left\{ (\varphi(x,y,z) \Leftrightarrow z^i \varphi_{z^i}) \frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow \varphi_{z^j} \frac{\partial}{\partial y^j} + (\varphi_{y^j} + z^j \varphi_x) \frac{\partial}{\partial z^j} + \psi_l(x,y,z,q) \frac{\partial}{\partial q^l} \right\}.$$

Рассмотрим систему VI. Базисная система Пфаффа ассоциированного t-кораспределения $F_\perp$ этой системы состоит из уравнения

$$dx \Leftrightarrow z^1\, dy^1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z^k\, dy^k \Leftrightarrow dt = 0.$$

Так как переменная t не преобразуется, то из вида этого уравнения и условия сохранения структуры $F_\perp$ следует, что допускаемое преобразование $(x,y,z) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ должно удовлетворять условию (3.131), где $\rho = 1$. По терминологии книги [15] такого рода преобразования называются касательными преобразованиями в узком смысле, причем соответствующая алгебра векторных полей совпадает с системой IV за исключением того, что функция φ не должна зависеть от x, т.е.

$$\text{VI. } \mathfrak{a}_1 = \left\{ (\varphi(y,z) \Leftrightarrow z^i \varphi_{z^i}) \frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow \varphi_{z^j} \frac{\partial}{\partial y^j} + \varphi_{y^j} \frac{\partial}{\partial z^j} \right\}.$$

Алгебра $\mathfrak{a}_1$ для системы VII представляет собой обобщение VI:

$$\text{VII. } \mathfrak{a}_1 = \left\{ (\varphi(y,z) \Leftrightarrow z^i \varphi_{z^i}) \frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow \varphi_{z^j} \frac{\partial}{\partial y^j} + \varphi_{y^j} \frac{\partial}{\partial z^j} + \psi_l(x,y,z,q) \frac{\partial}{\partial q^l} \right\}.$$

Рассмотрим теперь систему VIII. Базисная система ассоциированного t-кораспределения этой системы состоит из уравнения

$$dx \Leftrightarrow z^1\, dq^1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z^k\, dq^k \Leftrightarrow y\, dt = 0.$$

Удобно сделать следующую замену координат:

$$x' = x, \quad y' = \frac{1}{y}, \quad z'^i = \Leftrightarrow \frac{z^i}{y}, \quad q' = q, \quad i = 1, \ldots, k.$$

В результате получим уравнение

$$y'\, dx' + z'^1\, dq'^1 + \ldots + z'^k\, dq'^k \Leftrightarrow dt = 0.$$

Из условия сохранения структуры $F_\perp$ следует,что допускаемое преобразование $(x', y', z', q') \mapsto (\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{q}')$ должно удовлетворять условию

$$y'\, dx' + z'\, dq' = \bar{y}'\, d\bar{x}' + \bar{z}'\, d\bar{q}'.$$

Как известно [15], преобразования такого рода называются однородными касательными преобразованиями. Алгебра допускаемых полей таких преобразований имеет вид

$$\Big\{ \Leftrightarrow \varphi(x', q')\frac{\partial}{\partial x'} + (y'\varphi_{x'} + z'^j(\psi_j)_{x'})\frac{\partial}{\partial y'} + \\ + (y'\varphi_{q'^i} + z'^j(\psi_j)_{q'^i})\frac{\partial}{\partial z'^i} \Leftrightarrow \psi_i \frac{\partial}{\partial q'^i} \Big\},$$

где $\varphi(x', q')$, $\psi_i(x', q')$ — произвольные функции своих аргументов. Возвращаясь к переменным x, y, z и q, получим алгебру

$$\text{VIII. } \mathfrak{a}_1 = \Big\{ \varphi(x, q)\frac{\partial}{\partial x} + (y\varphi_x \Leftrightarrow z^j(\psi_j)_x)\frac{\partial}{\partial y} + \\ + (z^i\varphi_x \Leftrightarrow \varphi_{q^i} \Leftrightarrow z^j z^i(\psi_j)_x \Leftrightarrow z^j(\psi_j)_{q^i})\frac{\partial}{\partial z^i} + \psi_i\frac{\partial}{\partial q^i} \Big\}.$$

Алгебра $\mathfrak{a}_1$ для системы IX представляет собой обобщение VIII:

$$\text{IX. } \mathfrak{a}_1 = \Big\{ \varphi(x, q)\frac{\partial}{\partial x} + (y\varphi_x \Leftrightarrow z^j(\psi_j)_x)\frac{\partial}{\partial y} + \\ + (z^i\varphi_x \Leftrightarrow \varphi_{q^i} \Leftrightarrow z^j z^i(\psi_j)_x \Leftrightarrow z^j(\psi_j)_{q^i})\frac{\partial}{\partial z^i} + \psi_i\frac{\partial}{\partial q^i} + \chi_i(x, y, z, q, p)\frac{\partial}{\partial p^i} \Big\}.$$

Для линейной системы III базисная система Пфаффа состоит из уравнения $dx \Leftrightarrow y\,dt = 0$. Исследуя ее аналогично системе VIII, получим допускаемую алгебру Ли:

$$\text{III. } \mathfrak{a}_1 = \Big\{ \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x} + y\varphi_x\frac{\partial}{\partial y} + \psi_i(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z^i} \Big\}.$$

3. Рассмотрим системы (3.1) при $n = 3$. (Приведенные результаты для этого случая получены в [46].) Любая система данного вида при выполнении условий теоремы 3.7 локально эквивалентна одной из следующих систем:

$$\text{I. } \begin{cases} \dot x = 0, \\ \dot y = 0, \\ \dot z = 0, \end{cases} \qquad \text{II. } \begin{cases} \dot x = 0, \\ \dot y = 0, \\ \dot z = 1, \end{cases} \qquad \text{III. } \begin{cases} \dot x = 0, \\ \dot y = 0, \\ \dot z = u, \end{cases}$$

$$\text{IV. } \begin{cases} \dot x = 0, \\ \dot y = 1, \\ \dot z = u, \end{cases} \qquad \text{V. } \begin{cases} \dot x = 0, \\ \dot y = z, \\ \dot z = u, \end{cases} \qquad \text{VI. } \begin{cases} \dot x = 1, \\ \dot y = z, \\ \dot z = u, \end{cases}$$

$$\text{VII.}\ \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, \end{cases} \qquad \text{VIII.}\ \begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = H(x, y, z)u, \end{cases} \qquad \text{IX.}\ \begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = v, \end{cases}$$

$$\text{X.}\ \begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = v, \end{cases} \qquad \text{XI.}\ \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = v, \end{cases} \qquad \text{XII.}\ \begin{cases} \dot{x} = zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = v, \end{cases}$$

$$\text{XIII.}\ \begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = v, \end{cases} \qquad \text{XIV.}\ \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = v, \\ \dot{z} = w. \end{cases}$$

Замечание 3.7. Для систем (3.1), характеризуемых значениями $n = 1$ и $n = 2$, в соответствии с теоремами 3.5, 3.6 имеется конечное число канонических форм, причем все они принадлежат к уже рассмотренным типам.

Системы I–IV, IX–X и XIV являются уже рассмотренными инволютивными системами. Системы XI–XIII — это системы, у которых базисная система Пфаффа состоит из одного уравнения. Как уже было показано, допускаемыми алгебрами таких систем являются алгебры касательных преобразований разного вида.

Найдем допускаемую алгебру Ли для линейной системы VII. Запишем условия (3.115) принадлежности векторного поля ξ к алгебре $\mathfrak{a}_1$ системы VII в следующем виде:

$$\left[y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}, \xi\right] = \mu_0(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \left[\frac{\partial}{\partial z}, \xi\right] = \mu_1(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z},$$

где μ_0 и μ_1 — некоторые функции. Раскрывая коммутаторы и приводя подобные члены, получим систему

$$\begin{cases} y\xi^1_x + z\xi^1_y \Leftrightarrow \xi^2 = 0, \\ y\xi^2_x + z\xi^2_y \Leftrightarrow \xi^3 = 0, \\ \xi^1_z = 0, \\ \xi^2_z = 0. \end{cases} \tag{3.132}$$

Дифференцируя первое уравнение системы (3.132) по z, получим $\xi^1_y = 0$. Следовательно, ξ^1 зависит только от x: $\xi^1 = \varphi(x)$. Подставляя это соотношение в первое и второе уравнения системы (3.132), найдем из них $\xi^2 = y\varphi_x(x)$ и $\xi^3 = y^2\varphi_{xx}(x)$. Допускаемые алгебры для систем V и VI отыскиваются аналогично.

Итак, для систем V, VI и VII допускаемые алгебры имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\text{V. } \mathfrak{a}_1 &= \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \psi(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + z\psi_y\frac{\partial}{\partial z},\\
\text{VI. } \mathfrak{a}_1 &= C\frac{\partial}{\partial x} + \psi(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + (z\psi_y + \psi_x)\frac{\partial}{\partial z},\\
\text{VII. } \mathfrak{a}_1 &= \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x} + y\varphi_x\frac{\partial}{\partial y} + (y^2\varphi_{xx} + z\varphi_x)\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Все найденные допускаемые алгебры Ли канонических систем I–VII и IX–XIV зависят от произвольных функций, следовательно, они бесконечномерны.

Для приведенной формы VIII верна следующая теорема.

Теорема 3.14. *Для управляемой системы*

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = 1 + zu,\\
&\dot{y} = u,\\
&\dot{z} = H(x,y,z)u, \quad H_x(x,y,z) \neq 0
\end{aligned} \tag{3.133}$$

допускаемая алгебра Ли $\mathfrak{a}_1$ *конечномерна, и размерность ее не превышает* 3.

Доказательство. Запишем соотношения (3.115) применительно к системе (3.133):

$$\begin{cases}
\left[\dfrac{\partial}{\partial x}, \xi\right] = \mu_0\left(z\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} + H\dfrac{\partial}{\partial z}\right),\\
\left[z\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} + H\dfrac{\partial}{\partial z}, \xi\right] = \mu_1\left(z\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} + H\dfrac{\partial}{\partial z}\right).
\end{cases}$$

Раскрывая коммутаторы и приводя подобные члены, получим систему

$$\begin{cases}
\xi^1_x = z\mu_0,\\
\xi^2_x = \mu_0,\\
\xi^3_x = H\mu_0,\\
z\xi^1_x + \xi^1_y + H\xi^1_z \Leftrightarrow \xi^3 = z\mu_1,\\
z\xi^2_x + \xi^2_y + H\xi^2_z = \mu_1,\\
z\xi^3_x + \xi^3_y + H\xi^3_z \Leftrightarrow H_x\xi^1 \Leftrightarrow H_y\xi^2 \Leftrightarrow H_z\xi^3 = H\mu_1.
\end{cases}$$

После исключения μ_0 и μ_1 и некоторых упрощений получим систему вида (3.122):

$$\begin{cases} \xi^1_x = z\xi^2_x, \\ \xi^3_x = H\xi^2_x, \\ \xi^1_y + H\xi^1_z \Leftrightarrow \xi^3 = z\xi^2_y + zH\xi^2_z, \\ \xi^3_y + H\xi^3_z \Leftrightarrow H_x\xi^1 \Leftrightarrow H_y\xi^2 \Leftrightarrow H_z\xi^3 = H\xi^2_y + H^2\xi^2_z. \end{cases} \tag{3.134}$$

Проинтегрируем первое уравнение и получим равенство

$$\xi^1 = z\xi^2 \Leftrightarrow \varphi(y,z),$$

где $\varphi(y,z)$ — произвольная функция. Подставляем ξ^1 в третье уравнение и определим из него ξ^3, которое в свою очередь подставим во второе уравнение. Получим равенство $(\xi^2 \Leftrightarrow \varphi_z)H_x = 0$. Так как $H_x \neq 0$, то в итоге получим

$$\begin{cases} \xi^1 = z\varphi_z \Leftrightarrow \varphi(y,z), \\ \xi^2 = \varphi_z, \\ \xi^3 = \Leftrightarrow \varphi_y. \end{cases} \tag{3.135}$$

Подставив ξ^1, ξ^2 и ξ^3 в четвертое уравнение системы (3.134), получим

$$\varphi_{yy} + 2H\varphi_{yz} + H^2\varphi_{zz} \Leftrightarrow H_z\varphi_y + H_y\varphi_z \Leftrightarrow H_x(\varphi \Leftrightarrow z\varphi_z) = 0. \tag{3.136}$$

Очевидно, что размерность алгебры зависит от вида решения уравнения (3.136). Так как функция φ не зависит от x, то по переменной x уравнение (3.136) расщепляется. Продифференцируем уравнение (3.136) по x и разделим его на $H_x \neq 0$. Получим второе уравнение. Дифференцируя его аналогично первому, получаем третье уравнение.

Итак, имеем систему из трех уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \varphi_{yy} + 2H\varphi_{yz} + H^2\varphi_{zz} \Leftrightarrow H_z\varphi_y + H_y\varphi_z \Leftrightarrow H_x(\varphi \Leftrightarrow z\varphi_z) = 0, \\ 2\varphi_{yz} + 2H\varphi_{zz} \Leftrightarrow (H_{zx}/H_x)\varphi_y + (H_{yx}/H_x)\varphi_z \Leftrightarrow \\ \qquad \Leftrightarrow (H_{xx}/H_x)(\varphi \Leftrightarrow z\varphi_z) = 0, \\ 2\varphi_{zz} \Leftrightarrow ((H_{zx}/H_x)_x/H_x)\varphi_y + ((H_{yx}/H_x)_x/H_x)\varphi_z \Leftrightarrow \\ \qquad \Leftrightarrow ((H_{xx}/H_x)_x/H_x)(\varphi \Leftrightarrow z\varphi_z) = 0. \end{cases} \tag{3.137}$$

Дальнейшее решение системы (3.137) сильно зависит от вида функции H. Если коэффициенты в третьем уравнении системы (3.137) зависят от x, то необходимо процесс расщепления системы уравнений продолжить дальше. Тогда к системе (3.137) могут добавиться четвертое, пятое и шестое уравнения.

Во всех уравнениях в левой части оставляем только первое слагаемое. Затем подставим последнее уравнение в системе (3.137) в предпоследнее и т.д. вплоть до первого уравнения. В конце концов получится система уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \varphi_{yy} = \alpha_1(y,z)\varphi_y + \beta_1(y,z)\varphi_z + \gamma_1(y,z)\varphi, \\ \varphi_{yz} = \alpha_2(y,z)\varphi_y + \beta_2(y,z)\varphi_z + \gamma_2(y,z)\varphi, \\ \varphi_{zz} = \alpha_3(y,z)\varphi_y + \beta_3(y,z)\varphi_z + \gamma_3(y,z)\varphi, \end{cases} \tag{3.138}$$

где α_1, $\alpha_2, \ldots, \gamma_2$, γ_3 — известные функции. Введем вспомогательные функции $p(y,z) = \varphi_y$ и $q(y,z) = \varphi_z$, тогда $\varphi_{yy} = p_y$, $\varphi_{zz} = q_z$, $\varphi_{yz} = p_z = q_y$. Мы получим систему дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковой главной частью относительно трех неизвестных функций

$$\begin{cases} \varphi_y = p, \\ \varphi_z = q, \\ p_y = \alpha_1(y,z)p + \beta_1(y,z)q + \gamma_1(y,z)\varphi, \\ p_z = \alpha_2(y,z)p + \beta_2(y,z)q + \gamma_2(y,z)\varphi, \\ q_y = \alpha_2(y,z)p + \beta_2(y,z)q + \gamma_2(y,z)\varphi, \\ q_z = \alpha_3(y,z)p + \beta_3(y,z)q + \gamma_3(y,z)\varphi. \end{cases} \tag{3.139}$$

Для системы (3.139) необходимо проверить условия совместности типа $p_{yz} = p_{zy}$ и т.д. Если все условия тождественно выполняются, то по теореме 1.32 система (3.139) совместна, и ее общее решение зависит от трех констант (по числу неизвестных функций). В этом случае размерность алгебры $\mathfrak{a}_1$ равна 3. Если же условия совместности тождественно не выполняются, то их надо добавить к системе (3.139). Эти уравнения будут линейны по φ, p и q, поэтому каждое лишнее уравнение, полученное либо в процессе расщепления, либо из условий совместности, будет уменьшать число констант на единицу. Итак, размерность алгебры $\mathfrak{a}_1$ будет не больше 3. $\square$

В предыдущем разделе при исследовании эквивалентности систем вида VIII между собой были определены классы локально эквивалентных C-систем: каждой паре чисел (C_1, C_2) при $C_2 \geqslant 0$ соответствуют два класса — $(C_1, C_2)^+$ и $(C_1, C_2)^-$. Для этих классов были найдены представители (канонические формы) (3.83)–(3.87). Оказывается, что допускаемые алгебры Ли $\mathfrak{a}_1$ для этих канонических форм конечномерны. Приведем соответствующие базисы. Базис допускаемой алгебры $\mathfrak{a}_1$ для системы (3.83):

$$\frac{\partial}{\partial y}, \quad y\frac{\partial}{\partial y} \Leftrightarrow z\frac{\partial}{\partial z}, \quad \Leftrightarrow \frac{4}{C_1 z}\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{y^2}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{C_1 z^2}\right)\frac{\partial}{\partial y} \Leftrightarrow yz\frac{\partial}{\partial z}.$$

Базис допускаемой алгебры $\mathfrak{a}_1$ для системы (3.84):

$$\frac{\partial}{\partial y}, \quad \exp\left(y\left(\frac{C_2}{4} - \sqrt{1+\frac{C_2^2}{16}}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{C_2}{4} - \sqrt{1+\frac{C_2^2}{16}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\right),$$
$$\exp\left(y\left(\frac{C_2}{4} + \sqrt{1+\frac{C_2^2}{16}}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{C_2}{4} + \sqrt{1+\frac{C_2^2}{16}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Базис допускаемой алгебры $\mathfrak{a}_1$ для системы (3.85) при $C_2 > 4$:

$$\frac{\partial}{\partial y}, \quad \exp\left(y\left(\frac{C_2}{4} - \sqrt{-1+\frac{C_2^2}{16}}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{C_2}{4} - \sqrt{-1+\frac{C_2^2}{16}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\right),$$
$$\exp\left(y\left(\frac{C_2}{4} + \sqrt{-1+\frac{C_2^2}{16}}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{C_2}{4} + \sqrt{-1+\frac{C_2^2}{16}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Базис допускаемой алгебры $\mathfrak{a}_1$ для системы (3.85) при $0 \leqslant C_2 < 4$: $\dfrac{\partial}{\partial y}$,

$$e^{yC_2/4}\left(\frac{C_2}{4}\cos\left(y\sqrt{1-\frac{C_2^2}{16}}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{1-\frac{C_2^2}{16}}\sin\left(y\sqrt{1-\frac{C_2^2}{16}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\right),$$
$$e^{yC_2/4}\left(\frac{C_2}{4}\sin\left(y\sqrt{1-\frac{C_2^2}{16}}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{1-\frac{C_2^2}{16}}\cos\left(y\sqrt{1-\frac{C_2^2}{16}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Базис допускаемой алгебры $\mathfrak{a}_1$ для системы (3.85) при $C_2 = 4$:

$$\frac{\partial}{\partial y}, \quad e^y\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad e^y\left(y\frac{\partial}{\partial x} + (y+1)\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Для канонических форм (3.86) и (3.87) допускаемые алгебры одинаковы и имеют базис

$$\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{2}{\sqrt{-C_1}}\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{4}{\sqrt{-C_1}}y\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y} + \left(2zy + \frac{4}{\sqrt{-C_1}}\right)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Мы видим, что для всех найденных нами канонических систем алгебра $\mathfrak{a}_1$ получилась трехмерной. Так как алгебра $\mathfrak{a}_1$ инвариантна относительно изоморфизмов категории $\mathcal{AS}$, то для всех управляемых систем, принадлежащих классам $(C_1, C_2)^+$ и $(C_1, C_2)^-$, допускаемая алгебра $\mathfrak{a}_1$ будет также трехмерной.

Глава 4

Факторизация управляемых систем

4.1. Факторсистемы и условия их существования

Рассмотрим аффинную управляемую систему

$$\dot{y} = f_0(y) + f(y)u, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \tag{4.1}$$

которая представляет собой объект S категории $\mathcal{AS}$. Согласно терминологии теории категорий (см. раздел 1.2), факторобъект объекта S — это пара, состоящая из управляемой системы $\tilde{S}$, задаваемой соотношениями

$$\dot{z} = g_0(z) + g(z)v, \quad z \in N \subset \mathbb{R}^m, \quad v \in \mathbb{R}^s, \tag{4.2}$$

и эпиморфизма, т.е. морфизма $\varphi: M \to N$ системы S в систему $\tilde{S}$, представляющего собой сюръективное отображение. Далее мы ограничимся изучением факторобъектов, характеризующихся тем, что соответствующий морфизм φ является полным и, кроме того, субмерсией. Напомним, что, согласно терминологии раздела 2.2, полнота морфизма φ означает следующее: если F, G — ассоциированные аффинные распределения систем (4.1), (4.2), то $\varphi_*|_y F(y) = G(\varphi(y)), \quad \forall y \in M$. Тот факт, что φ — субмерсия, означает, что φ задается m функционально независимыми функциями

$$\varphi^k(y), \quad k = 1, \ldots, m \leqslant n, \tag{4.3}$$

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial\varphi^k}{\partial y^i}\right\|_{i=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,m} = m, \quad \forall y \in M.$$

Если для системы (4.1) существует факторобъект $(\tilde{S}, \varphi)$, то будем говорить, что система (4.1) допускает факторизацию в категории $\mathcal{AS}$, при этом систему $\tilde{S}$ будем называть факторсистемой или агрегированной системой системы (4.1), а функции (4.3) — агрегатами системы (4.1). Если фазовое пространство N факторсистемы имеет размерность m, то будем также применять следующую терминологию: система (4.1) допускает факторизацию порядка $n \Leftrightarrow m$. Если $m = n$, то ясно, что система (4.1) (локально) эквивалентна факторсистеме (4.2).

Агрегаты (4.3) порождают в M регулярное отношение эквивалентности R (см. раздел 1.6):

$$y_1 R y_2 \Leftrightarrow \varphi^k(y_1) = \varphi^k(y_2), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Это отношение эквивалентности называется факторизующим или $\mathcal{F}$-отношением эквивалентности системы (4.1). При этом фазовое пространство N факторсистемы (4.2) можно трактовать как факторпространство M/R, а морфизм φ как каноническую проекцию $M \to M/R$. Если R является $\mathcal{F}$-отношением эквивалентности системы (4.2), то применяется также следующая терминология: система (4.2) допускает факторизацию по отношению эквивалентности R.

Будем говорить, что система (4.1) допускает локальную факторизацию в точке $y_0 \in M$, если управляемая система, получающаяся ограничением системы (4.1) на некоторую окрестность точки y_0, допускает факторизацию. Практически все дальнейшие результаты по факторизации носят локальный характер, т.е. относятся к локальной факторизации в некоторой точке (при этом явное упоминание о локальности часто будет опускаться).

Если система (4.1) допускает факторизацию, причем соответствующий морфизм φ является морфизмом по фазовым переменным, то говорят, что система (4.1) допускает факторизацию по фазовым переменным или факторизацию в категории $\mathcal{ASP}$. (Напомним, что морфизмы по фазовым переменным являются полными.) Понятие факторизации по фазовым переменным было введено Ю.Н.Павловским. Им получены первые важные результаты, в частности, следующая далее теорема 4.3 [39–41]. Важность понятия факторизации определяется прежде всего тем, что факторизация порождает некоторую декомпозицию управляемой системы. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Система* (4.1) *допускает в категории* $\mathcal{ASP}$ *локальную факторизацию* (*в точке* y_0) *порядка* $n \Leftrightarrow m$ *тогда и только тогда,* *когда система* (4.1) *локально эквивалентна* (*в точке* y_0) *управляемой системе следующего вида:*

$$\dot{z}^k = g_0^k(z^1,\ldots,z^m) + g_\alpha^k(z^1,\ldots,z^m)v^\alpha, \quad k=1,\ldots,m, \tag{4.4}$$
$$\dot{z}^i = g_0^i(z^1,\ldots,z^n) + g_\alpha^i(z^1,\ldots,z^n)v^\alpha, \quad i=m+1,\ldots,n, \tag{4.5}$$

$$(z^1,\ldots,z^m)\in W\subset\mathbb{R}^m, \quad (z^{m+1},\ldots,z^n)\in L\subset\mathbb{R}^{n-m}, \quad u\in\mathbb{R}^r.$$

Доказательство. Пусть система (4.1) допускает локальную факторизацию по фазовым переменным в точке y_0, причем факторсистема имеет вид

$$\dot{z} = \tilde{g}_0(z) + \tilde{g}_\alpha(z)u^\alpha, \quad z\in\tilde{P}\subset\mathbb{R}^m, \tag{4.6}$$

и соответствующими агрегатами являются функции $\varphi^k, k=1,\ldots,m$. Векторные поля f_α, ограниченные на некоторую окрестность P точки y_0, и векторные поля $\tilde{g}_\alpha$ являются φ-связанными, т.е.

$$\tilde{g}_\alpha^k(\varphi^1(y),\ldots,\varphi^m(y)) = \frac{\partial\varphi^k}{\partial y^i}f_\alpha^i(y), \tag{4.7}$$

$$\alpha=0,1,\ldots,r, \quad k=1,\ldots,m, \quad y\in P.$$

Дополним функции $\varphi^k(y), k=1,\ldots,m$, до набора, состоящего из n функций $\varphi^k(y), k=1,\ldots,n$, являющихся функционально независимыми в области P. Эти функции определяют диффеоморфизм некоторой окрестности P' точки y_0 на область $T=W\times L\subset\mathbb{R}^n$, где $W\subset\tilde{P}\subset\mathbb{R}^m$, $L\subset\mathbb{R}^{n-m}$. В области T однозначно определена система

$$\dot{z} = g_0(z) + g_\alpha(z)u^\alpha, \quad z\in K\subset\mathbb{R}^n, \quad u\in\mathbb{R}^r, \tag{4.8}$$

которая диффеоморфна системе (4.1), ограниченной на окрестность P', относительно диффеоморфизма $\varphi\colon P'\to K$. Следовательно, система (4.1) локально эквивалентна по фазовым переменным системе (4.8). Векторные поля $g_\alpha, \alpha=0,1,\ldots,r$, диффеоморфны полям $f_\alpha, \alpha=0,1,\ldots,r$, т.е.

$$g_\alpha^k(\varphi^1(y),\ldots,\varphi^n(y)) = \frac{\partial\varphi^k}{\partial y^i}f_\alpha^i(y), \tag{4.9}$$

$$\alpha=0,1,\ldots,r, \quad k=1,\ldots,m, \quad y\in P'.$$

Сравнивая (4.7) и (4.9), видим, что

$$\tilde{g}_\alpha^k(z^1,\ldots,z^m) = g_\alpha^k(z^1,\ldots,z^n), \quad k=1,\ldots,m,$$

т.е. функции $g_\alpha^k, k=1,\ldots,m$, не зависят от $z^{m+1},\ldots,z^n$. Таким образом, система (4.8) имеет вид (4.4), (4.5).

Обратно, пусть система (4.1) локально эквивалентна (в точке y_0) системе (4.4), (4.5) относительно диффеоморфизма $z = \varphi(y)$. Очевидно, что первые m функций из n функций, определяющих этот диффеоморфизм, задают (локально) морфизм по фазовым переменным системы (4.1) в систему (4.4), которая является факторсистемой. □

Декомпозиция (4.4), (4.5) позволяет свести процесс нахождения решения системы к нахождению решений для двух систем, фазовые пространства которых имеют размерности, меньшие, чем n. Действительно, любое решение управляемой системы (4.4), (4.5) может быть получено следующим образом: сначала находится решение факторсистемы (4.4) $z^1(t), \dots, z^m(t)$ (соответствующее некоторому управлению $v(t)$), а затем эти функции подставляются в систему (4.5), которая превращается в замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно остальных компонент $z^{m+1}(t), \dots, z^n(t)$ решения всей системы (4.4), (4.5). Кроме того, как оказалось, многие задачи управления связаны с существованием определенных факторсистем. К таковым относятся, например, задачи о наблюдаемости, реализации, инвариантности по возмущениям и автономности [58, 59, 48].

Приведем условия факторизации в категории $\mathcal{ASP}$, т.е. условия существования факторобъектов. Из предложения 2.3 непосредственно вытекает, что субмерсия $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^m$ тогда и только тогда является эпиморфизмом (т.е. является сюръективным морфизмом в некоторую управляемую систему, заданную в области $N = \varphi(M)$), когда ассоциированные поля $f_\alpha, \alpha = 0, 1, \dots, r$, являются φ-проектируемыми. (Напомним, что, согласно предложению 1.30, субмерсия является открытым отображением.) Действительно, если эти поля φ-проектируемы, то поля $g_\alpha = \varphi_* f_\alpha$ однозначно определяют факторсистему $\dot{z} = g_0 + gu$ в $N = \varphi(M)$. Отсюда и из предложения 1.41 следует, что субмерсия φ является эпиморфизмом в категории $\mathcal{ASP}$ тогда и только тогда, когда она индуцирует в области M отношение эквивалентности R, совместимое с однопараметрическими группами диффеоморфизмов, порождаемых ассоциированными векторными полями f_α, $\alpha = 0, 1, \dots, r$. Совместимость R с этими однопараметрическими группами равносильна совместимости с ассоциированной группой, порождаемой ассоциированным семейством полей $\mathfrak{f}$. Таким образом, управляемая система (4.1) допускает факторизацию ненулевого порядка тогда и только тогда, когда ассоциированная группа импримитивна; при этом системы импримитивности определяют классы $\mathcal{F}$-отношения эквивалентности. Отсюда и из теоремы 1.29 вытекает следующее условие существования факторсистем.

Теорема 4.2. *Для того чтобы система* (4.1) *допускала* (*локаль-*

ную) факторизацию по фазовым переменным порядка $n \Leftrightarrow m$, *необходимо и достаточно, чтобы (локально) существовало такое регулярное инволютивное распределение* D *ранга* $p = n \Leftrightarrow m$, *что*

$$[f_\beta, D] \subset D, \quad \beta = 0, 1, \ldots, r, \tag{4.10}$$

при этом R_D *является* $\mathcal{F}$*-отношением эквивалентности.* (*В* (4.10) *под выражением* $[f_\beta, D]$ *понимается множество всевозможных полей вида* $[f_\beta, Z]$, *где* $Z \in D$.) □

Соотношения (4.10) выполняются тогда и только тогда, когда для каждого базисного семейства векторных полей

$$Z_a = b_a^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad a = 1, \ldots, p, \tag{4.11}$$

распределения D выполняются соотношения

$$[f_\beta, Z_a] = h_{\beta a}^c(y) Z_c, \quad \beta = 0, 1, \ldots, r, \quad a = 1, \ldots, p, \tag{4.12}$$

где $h_{\beta a}^c$ — некоторые функции. Следовательно, справедлива

Теорема 4.3. *Для того чтобы управляемая система* (4.1) *допускала (локальную) факторизацию по фазовым переменным порядка* $n \Leftrightarrow m > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы (локально) существовало такое полное семейство векторных полей* (4.11), *где* $p = n \Leftrightarrow m$, *что выполняются соотношения* (4.12). □

Регулярное инволютивное распределение D, (локально) заданное в фазовом пространстве M системы (4.1), будем называть $\mathcal{F}$-распределением системы (4.1), если полный набор интегралов распределения D состоит из агрегатов, т.е. R_D — $\mathcal{F}$-отношение эквивалентности. Базисные семейства векторных полей $\mathcal{F}$-распределения называются $\mathcal{F}$-семействами. Как мы выяснили, $\mathcal{F}$-распределения D удовлетворяют соотношениям (4.10), а $\mathcal{F}$-семейства (4.11) — соотношениям (4.12).

Пусть $(\tilde{S}, \varphi)$ — факторобъект системы (4.1), состоящий из факторсистемы $\tilde{S}$ и эпиморфизма φ, задаваемого полным набором интегралов (4.3) $\mathcal{F}$-распределения D. Рассмотрим еще один факторобъект $(\hat{S}, \psi)$ системы (4.1), состоящий из факторсистемы $\hat{S}$ и эпиморфизма ψ, задаваемого другим полным набором интегралов $\psi^k(y), k = 1, \ldots, m$. Предположим, что функции φ^k и ψ^k определены в области $U \subset M$. Из теоремы 1.6 следует, что

$$\begin{aligned} \psi^k(y) &= \nu^k(\varphi^1(y), \ldots, \varphi^m(y)), \quad k = 1, \ldots, m, \\ \varphi^k(y) &= \mu^k(\psi^1(y), \ldots, \psi^m(y)), \quad k = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

где ν^k — гладкие функции, определенные в фазовом пространстве $N = \varphi(U)$ факторсистемы $\tilde{S}$, а μ^k — гладкие функции, определенные в фазовом пространстве $L = \psi(U)$ факторсистемы $\hat{S}$. Следовательно, имеем гладкие отображения $\nu: N \to L$, $\mu: L \to N$, являющиеся диффеоморфизмами, причем $\mu = \nu^{-1}$. Нетрудно убедиться в том, что ν является изоморфизмом $\tilde{S}$ в $\hat{S}$, а μ — изоморфизмом $\hat{S}$ в $\tilde{S}$. Так как $\psi = \nu\varphi$, $\varphi = \mu\psi$, то факторобъекты $(\tilde{S}, \varphi)$, $(\hat{S}, \psi)$ эквивалентны (определение эквивалентности факторобъектов дано в разделе 1.2). С другой стороны, если (S', χ) — факторобъект, эквивалентный факторобъекту $(\tilde{S}, \varphi)$, то легко видеть, что эпиморфизм χ задается полным набором интегралов распределения D. Итак, $\mathcal{F}$-распределение порождает класс эквивалентных факторобъектов.

Замечание 4.1. Так как области задания полных наборов интегралов регулярного инволютивного распределения D определены неоднозначно, то D определяет классы эквивалентных факторобъектов также неоднозначно. Дело можно поправить переходом к росткам $\mathcal{F}$-распределений или, что равносильно, росткам $\mathcal{F}$-отношений эквивалентности в точке. (О ростках см., например, [27].) Каждый такой росток однозначно определяет класс (локально) эквивалентных факторобъектов (в точке). На технических деталях соответствующих определений здесь останавливаться не будем. Отметим только, что можно ввести структуру частичного порядка на множестве ростков. В [3, 4] доказано, что это множество имеет структуру решетки, если система (4.1) находится в общем положении. Там же приведены алгоритмы нахождения точных верхних и нижних граней для некоторых подмножеств ростков. Эти алгоритмы, представляющие собой построение так называемых верхних и нижних факторизующих рядов, используются для решения задач реализации, наблюдаемости и инвариантности по возмущениям в теории управления.

Займемся теперь вопросом нахождения факторобъектов системы (4.1) в категории $\mathcal{ASP}$. Выражения (4.12) можно трактовать как систему дифференциальных уравнений

$$f_\beta(b_a^i) = Z_a(f_\beta^i) + h_{\beta a}^c b_c^i, \tag{4.13}$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad a, c = 1, \ldots, p, \quad \beta = 0, 1, \ldots, r,$$

относительно неизвестных компонент $\mathcal{F}$-семейства (4.11). (В (4.13) выражения $f_\beta(b_a^i)$, $Z_a(f_\beta^i)$ представляют собой действия полей f_β, Z_a на функции b_a^i, f_β^i как операторов.) После решения этой системы нужно найти полный набор интегралов (4.3) полного семейства (4.11), что, согласно доказательству теоремы 1.5, сводится к решению некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для нахождения правых частей факторсистемы функции $f^i_\alpha \dfrac{\partial \varphi^k}{\partial y^i}$ следует выразить функционально через функции (4.3), т.е. представить их в виде

$$f^i_\alpha \frac{\partial \varphi^k}{\partial y^i} = g^k_\alpha(\varphi^1(y), \ldots, \varphi^m(y)).$$

Построенные функции g^k_α и определяют искомую факторсистему

$$\dot{z}^k = g^k_0(z) + g^k_\alpha(z) u^\alpha.$$

Система (4.13) представляет собой систему уравнений с одинаковой главной частью относительно $b^i_a(y)$, причем эта система содержит еще неизвестные параметрические переменные $h^c_{\beta a}$. Последнее обстоятельство усложняет дело. Кроме того, нужно добавить условие полноты $[Z_b, Z_a] = \varkappa^c_{ba} Z_C$ семейства (4.11), которое тоже представляет собой систему дифференциальных уравнений, причем с неизвестными параметрическими переменными $\varkappa^c_{ba}$.

Рассмотрим метод исключения параметрических переменных, который предложен автором в [17] и осуществляется с помощью использования якобиевых $\mathcal{F}$-семейств. Для того чтобы исключить функции $h^c_{\beta a}$ из (4.13), следует задаться некоторым свойством, которым должны обладать агрегаты (4.3). Это свойство заключается в определенном расположении базисного минора в якобиевой матрице $\|\partial \varphi^k / \partial y^i\|$.

Предположим, что для искомых агрегатов (4.3)

$$\left| \frac{\partial \varphi^k}{\partial y^i} \right|^{k=1,\ldots,m}_{i=p+1,\ldots,n} \neq 0, \quad p = n \Leftrightarrow m. \tag{4.14}$$

Справедлива

Теорема 4.4. *Для того чтобы система* (4.1) *допускала (локальную) факторизацию порядка $p = n \Leftrightarrow m$, характеризующуюся свойством* (4.14), *необходимо и достаточно, чтобы была совместна система дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $b^l_a(y)$:*

$$f_\beta(b^l_a) = Z_a(f^l_\beta) \Leftrightarrow b^l_c Z_a(f^c_\beta), \tag{4.15}$$

$$Z_a(b^l_c) = Z_c(b^l_a), \tag{4.16}$$

где

$$Z_a = \frac{\partial}{\partial y^a} + b^l_a(y) \frac{\partial}{\partial y^l}, \tag{4.17}$$

$$\beta = 0, 1, \ldots, r, \quad a, c = 1, \ldots, p, \quad l = p + 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Необходимость. Если система (4.1) допускает факторизацию со свойством (4.14), то, согласно предложению 1.10, существует $\mathcal{F}$-семейство вида (4.17). Семейство (4.17) должно удовлетворять соотношениям (4.12). Запишем эти соотношения покомпонентно:

$$f_\beta(\delta_a^i) \Leftrightarrow Z_a(f_\beta^i) = h_a^c \delta_c^i, \tag{4.18}$$

$$f_\beta(b_a^l) \Leftrightarrow Z_a(f_\beta^l) = h_a^c b_c^l, \tag{4.19}$$

$$i, a, c = 1, \ldots, p, \quad l = p + 1, \ldots, n, \quad \delta_a^i \text{ — символ Кронекера.}$$

Из (4.18) имеем $h_a^i = \Leftrightarrow Z_a(f_\beta^i)$. Подставляя h_a^i в (4.19), получим (4.15). Равенства (4.16) представляют собой условие полноты семейства (4.17). Действительно, согласно доказательству теоремы 1.5, семейство вида (4.17) является полным тогда и только тогда, когда оно якобиево, т.е. $[Z_a, Z_c] = 0$, $a, c = 1, \ldots, p$, что равносильно равенствам (4.16).

Достаточность. Если совместна система (4.15), (4.16), то, во-первых, семейство полей (4.17) является полным. Далее, полагая $h_a^i = \Leftrightarrow Z_a(f_\beta^i)$, из (4.15) получим (4.18), (4.19), откуда вытекает (4.12). Следовательно, система (4.1) допускает факторизацию порядка p. Свойство (4.14) вытекает из вида $\mathcal{F}$-семейства (4.17) и предложения 1.10. □

Уравнения (4.15) представляют собой систему уравнений с одинаковой главной частью относительно b_a^l без параметрических переменных.

При ином расположении базисного минора в матрице $\|\partial\varphi^k/\partial y^i\|$ условия факторизации (4.15), (4.16) преобразуются очевидным образом. Итак, задача решения системы дифференциальных уравнений (4.13) с параметрическими переменными сведена к задаче решения нескольких систем дифференциальных уравнений вида (4.15), являющихся системами с одинаковой главной частью (без параметрических переменных). Согласно разделу 1.7, вопрос о совместности систем вида (4.15) связан с выполнением элементарных алгебраических операций. Нахождение решений системы (4.15) сводится к решению некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение системы (4.15), т.е. набор компонент семейства полей (4.17), следует подставить для проверки в уравнения (4.16), представляющие собой условия полноты семейства (4.17). Лишь те решения системы (4.15), которые одновременно являются и решениями системы (4.16), определяют $\mathcal{F}$-семейство, порождающее факторизацию порядка p.

Оказывается, что для управляемой системы (4.1), находящейся в общем положении, можно проверить совместность системы (4.15), (4.16), не решая предварительно систему (4.15). Действительно, согласно замечанию 1.28, в этом случае при проведении алгоритма исследования на совместность системы (4.15) дополнительные дифференциальные связи типа уравнений (4.16) можно заменить на конечные связи и рассматривать их в рамках проведения данного алгоритма. Сформулируем этот результат следующим образом.

Теорема 4.5. *Для управляемой системы, находящейся в общем положении, существование факторобъектов в категории $\mathcal{ASP}$ устанавливается с помощью только алгебраических операций. Фактор-объекты находятся с помощью решения обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений.* □

Замечание 4.2. Для систем, находящихся в общем положении, справедлив также следующий результат: множество ростков $\mathcal{F}$-распределений (см. замечание 4.1) параметризуется конечным числом вещественных параметров. Это следует из теоремы 1.32, согласно которой в данном случае общее решение системы вида (4.15), (4.16) зависит от конечного числа произвольных постоянных.

Замечание 4.3. Пусть регулярное распределение D удовлетворяет условию (4.10), но не является инволютивным. Пусть также существует производный флаг (1.46) длины $N+1$. Тогда, используя тождество Якоби (1.9), можно показать, что $[f_\alpha, D^*] \subset D^*$, т.е. минимальное инволютивное распределение $D^* = D_N$, содержащее D, является $\mathcal{F}$-распределением, если $\dim D^* < n$, и определяет факторизацию порядка $\dim D^*$. Таким образом, полный набор интегралов распределения D состоит из агрегатов. В терминах семейств векторных полей этот факт означает следующее. Пусть линейно несвязанное семейство (4.11) удовлетворяет условию (4.12), но не является полным. Тогда следует произвести процесс пополнения (1.47). Если в результате получится полное семейство, состоящее из меньшего, чем n, числа полей, то построенное семейство будет $\mathcal{F}$-семейством.

Если система (4.1) не находится в общем положении и распределение $\Delta_{\mathfrak{f}^*}$ регулярно, то система допускает факторизацию некоторого специального вида. Пусть $\dim \Delta_{\mathfrak{f}^*} = p < n$. Тогда ассоциированное семейство $\mathfrak{f}$, ассоциированная алгебра $\mathfrak{f}^*$ и распределение $\Delta_{\mathfrak{f}^*}$ имеют в окрестности каждой точки $y_0 \in M$ $m = n \Leftrightarrow p$ функционально независимых интегралов (4.3), которые будем называть также интегралами управляемой системы (4.1). Очевидно, что интегралы (4.3) являются агрегатами, причем соответствующая факторсистема (4.2) имеет вид

$$\dot{z}^k = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{4.20}$$

Итак, регулярное распределение $\Delta_{\mathfrak{f}^*}$ является $\mathcal{F}$-распределением, если система (4.1) не находится в общем положении.

Пример 4.1. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot y_1 &= c_1 y_2 y_3 + u, \\ \dot y_2 &= c_2 y_1 y_3, \\ \dot y_3 &= c_3 y_1 y_2, \end{aligned} \tag{4.21}$$

где $y \in M = \{y \in \mathbb{R}^3 \colon y_i > 0\}$, $u \in \mathbb{R}^1$, c_i — постоянные, не равные нулю.

Исследуем возможности системы (4.21) допускать факторизацию порядка 2 с агрегатами $\varphi(y)$, обладающими свойством

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \neq 0. \tag{4.22}$$

Для этой цели нужно найти якобиевы $\mathcal{F}$-семейства вида (4.17):

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{\partial}{\partial y_1} + b_1(y)\frac{\partial}{\partial y_3}, \\ Z_2 &= \frac{\partial}{\partial y_2} + b_2(y)\frac{\partial}{\partial y_3}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Исследуем соответствующую систему дифференциальных уравнений (4.15) с помощью алгоритма, приведенного в разделе 1.7. В качестве семейства полей $\mathfrak{b}$ здесь фигурирует ассоциированное семейство $\mathfrak{f}$, состоящее из полей

$$\begin{aligned} f_0 &= c_1 y_2 y_3 \frac{\partial}{\partial y_1} + c_2 y_1 y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} + c_3 y_1 y_2 \frac{\partial}{\partial y_3}, \\ f_1 &= \frac{\partial}{\partial y_1}. \end{aligned}$$

Полями семейства $\mathfrak{b}'$ являются поля

$$\begin{aligned} f_0' = f_0 &+ (c_3 y_2 - b_1^2 c_1 y_2 - b_1 b_2 c_2 y_1 - b_2 c_2 y_3)\frac{\partial}{\partial b_1} + \\ &+ (c_3 y_1 - b_1 c_1 y_3 - b_1 b_2 c_1 y_2 - b_2^2 c_2 y_1)\frac{\partial}{\partial b_2}, \\ f_2' = f_2&. \end{aligned}$$

Найдем базисное семейство распределения $\Delta_{\mathfrak{b}^*}\,(= \Delta_{\mathfrak{f}^*})$ с помощью процесса пополнения. Образуем коммутатор

$$f_2 = [f_0, f_1] = c_2 y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} + c_3 y_2 \frac{\partial}{\partial y_3}.$$

Имеем $f_2 = \dfrac{1}{y_1} f_0 \Leftrightarrow \dfrac{c_1 y_2 y_3}{y_1} f_1$. Следовательно, $\mathfrak{f}$ — полное семейство, которое является базисным семейством распределения $\Delta_{\mathfrak{f}^*}$. Таким образом, это распределение имеет ранг, равный двум. Поэтому $\Delta_{\mathfrak{f}^*}$ является $\mathcal{F}$-распределением, определяющим специальную факторизацию вида (4.20). Агрегатом является интеграл $\Delta_{\mathfrak{f}^*}$, например функция $\varphi = c_2 y_3^2 \Leftrightarrow c_3 y_2^2$, обладающая свойством (4.22). В данном случае факторсистема состоит из одного (скалярного) уравнения

$$\dot{z} = 0. \tag{4.24}$$

Покажем, что других $\mathcal{F}$-кораспределений нет (иначе говоря, имеется один класс эквивалентных факторобъектов, каждый из которых определяется каким-либо интегралом системы (4.21)). В соответствии с алгоритмом раздела 1.7, нужно построить множество K, состоящее из точек $(y_1, y_2, y_3, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^5$, в которых коммутатор $[f_0', f_1']$ выражается через поля f_0', f_1'. Из вида этого коммутатора

$$[f_0', f_1'] = f_2 \Leftrightarrow b_1 b_2 c_2 \frac{\partial}{\partial b_1} + (c_3 \Leftrightarrow b_2^2 c_2) \frac{\partial}{\partial b_2}$$

следует, что это множество задается равенствами

$$\begin{gathered} c_3 y_2 \Leftrightarrow b_1^2 c_1 y_2 \Leftrightarrow b_2 c_2 y_3 = 0, \\ b_1 (y_3 + b_2 y_2) = 0. \end{gathered}$$

Очевидно, что решения $b_1 = b_1(y)$, $b_2 = b_2(y)$ системы дифференциальных уравнений (4.15) как многообразия, могут принадлежать либо множеству

$$\begin{gathered} c_3 y_2 \Leftrightarrow b_2 c_2 y_3 = 0, \\ b_1 = 0, \end{gathered} \tag{4.25}$$

либо множеству

$$\begin{gathered} c_3 y_2 \Leftrightarrow b_1^2 c_1 y_2 \Leftrightarrow b_2 c_2 y_3 = 0, \\ y_3 + b_2 y_2 = 0. \end{gathered} \tag{4.26}$$

Действуя полями f_0', f_1' как операторами на левые части уравнений (4.26) и приравнивая нулю полученные выражения, получим на некотором этапе уравнения вида $\psi(y) = 0$. Это означает, что решения системы (4.15) не могут лежать во множестве (4.26). Действуя полями f_0', f_1' на левые части уравнений (4.25), убеждаемся в том, что полученные выражения равны нулю в силу (4.25), т.е. поля f_0', f_1' касаются многообразия (4.25). Это многообразие определяет единственное решение

$$b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{c_3 y_2}{c_2 y_3}$$

системы (4.15). Итак, $\mathcal{F}$-семейство (4.23) имеет вид

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{\partial}{\partial y_1}, \\ Z_2 &= \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{c_3 y_2}{c_2 y_3}\frac{\partial}{\partial y_3}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Имеем равенства: $f_0 = c_1 y_2 y_3 Z_1 + c_2 y_1 y_3 Z_2$, $f_1 = Z_1$. Следовательно, семейства (4.27) и $\mathfrak{f}$ эквивалентны и являются базисными семействами одного $\mathcal{F}$-распределения $\Delta_{\mathfrak{f}^*}$.

Пример 4.2. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{y}_i = P_i(y) + u_i, \tag{4.28}$$

$$i = 1, 2, 3, \quad y, u \in \mathbb{R}^3,$$

где $P_i(y) = A_i y_1^2 + B_i y_2^2 + C_i y_3^2 + D_i y_1 y_2 + E_i y_1 y_3 + F_i y_2 y_3$.

Исследуем возможность факторизации вида (4.22). Ясно, что ассоциированные поля $f_i = \partial/\partial y_i$ $i = 1, 2, 3$, системы (4.28) составляют базисное семейство распределения $\Delta_{\mathfrak{f}^*}$. Поэтому система (4.28) находится в общем положении и не допускает факторизацию специального вида (4.20). Уравненения (4.15), определяющие искомые $\mathcal{F}$-семейства (4.23) и соответствующие полям $f_i, i = 1, 2, 3$, имеют вид

$$\frac{\partial b_k}{\partial y_i} = 0, \quad k = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.29}$$

Следовательно, $b_k = \mathrm{const}$ и уравнения (4.16) удовлетворяются тождественно. Подставляя (4.29) в уравнения (4.15), соответствующие ассоциированному полю

$$f_0 = P_1(y)\frac{\partial}{\partial y_1} + P_2(y)\frac{\partial}{\partial y_2} + P_3(y)\frac{\partial}{\partial y_3},$$

получим (после приравнивания нулю коэффициентов при y_i), что постоянные b_1, b_2 должны удовлетворять системе алгебраических уравнений

$$\begin{array}{ll} 2A_3 \Leftrightarrow 2A_1 b_1 \Leftrightarrow E_1 b_1^2 \Leftrightarrow 2A_2 b_2 \Leftrightarrow E_2 b_1 b_2 + E_3 b_1 & = 0, \\ D_3 \Leftrightarrow D_1 b_1 \Leftrightarrow F_1 b_1^2 \Leftrightarrow D_2 b_2 \Leftrightarrow F_2 b_1 b_2 + F_3 b_1 & = 0, \\ E_3 \Leftrightarrow E_1 b_1 \Leftrightarrow 2C_1 b_1^2 \Leftrightarrow E_2 b_2 \Leftrightarrow 2C_2 b_1 b_2 + 2C_3 b_1 & = 0, \\ D_3 \Leftrightarrow D_1 b_1 \Leftrightarrow E_1 b_1 b_2 \Leftrightarrow D_2 b_2 \Leftrightarrow E_2 b_2^2 + E_3 b_2 & = 0, \\ 2B_3 \Leftrightarrow 2B_1 b_1 \Leftrightarrow F_1 b_1 b_2 \Leftrightarrow 2B_2 b_2 \Leftrightarrow F_2 b_2^2 + F_3 b_2 & = 0, \\ F_3 \Leftrightarrow F_1 b_1 \Leftrightarrow 2C_1 b_1 b_2 \Leftrightarrow F_2 b_2 \Leftrightarrow 2C_2 b_2^2 + 2C_3 b_2 & = 0. \end{array} \tag{4.30}$$

Итак, система (4.28) допускает факторизацию второго порядка вида (4.22) тогда и только тогда, когда совместна система алгебраических уравнений (4.30) относительно b_1, b_2. Каждое решение системы (4.30) определяет $\mathcal{F}$-семейство (4.23), в качестве интеграла которого можно взять, например, функцию $\varphi = y_3 \Leftrightarrow b_2 y_2 \Leftrightarrow b_1 y_1$, являющуюся агрегатом системы (4.28). Факторсистема имеет следующий вид:

$$\dot{z} = (C_3 \Leftrightarrow b_2 C_2 \Leftrightarrow b_1 C_1) z^2 + u_3 \Leftrightarrow b_2 u_2 \Leftrightarrow k_1 u_1 .$$

Рассмотрим частный случай системы (4.28)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 3y_1^2 + 2y_2^2 + 14y_3^2 \Leftrightarrow 12 y_1 y_3 + u_1, \\ \dot{y}_2 &= y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 \Leftrightarrow 4 y_1 y_3 + u_2, \\ \dot{y}_3 &= y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2 \Leftrightarrow 4 y_1 y_3 + u_3. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Для этой управляемой системы система алгебраических уравнений (4.30) имеет лишь одно решение: $b_1 = 1/2$, $b_2 = 0$. В качестве агрегата можно взять функцию $\varphi = y_1 \Leftrightarrow 2y_3$. Факторсистема имеет вид

$$\dot{z} = z_1^1 + u_1 \Leftrightarrow 2u_3.$$

Аналогичным образом можно убедиться в том, что других $\mathcal{F}$-распределений, имеющих интегралы φ, для которых выполняется свойство $\partial\varphi/\partial y_1 \neq 0$ или свойство $\partial\varphi/\partial y_2 \neq 0$, не существует. Таким образом, имеется только один факторобъект, точнее, один класс эквивалентных факторобъектов (для факторизации второго порядка).

Возможности для факторизации в категории $\mathcal{ASP}$ довольно ограничены. Управляемая система, находящаяся в общем положении, вообще говоря, не допускает нетривиальную факторизацию (т.е. факторизацию порядка, который больше нуля). В теории групп эта ситуация известна: транзитивная группа, вообще говоря, примитивна. (Напомним, что управляемая система допускает нетривиальную факторизацию тогда и только тогда, когда ассоциированная группа диффеоморфизмов импримитивна.) Возможностей для факторизации в категории $\mathcal{AS}$ значительно больше. Перейдем к исследованию этих возможностей. Покажем сначала, что факторизация в категории $\mathcal{AS}$ порождает декомпозицию, так же, как и в случае категории $\mathcal{ASP}$ (см. теорему 4.1).

Теорема 4.6. *Система* (4.1) *допускает в категории* $\mathcal{AS}$ *локальную факторизацию* (*в точке* $y_0 \in M$) *порядка* $n \Leftrightarrow m$ *тогда и только* *тогда, когда система* (4.1) *локально эквивалентна* (*в точке* y_0) *управляемой системе следующего вида*:

$$\dot{z}^k = g_0^k(z^1, \ldots, z^m) + g_\beta^k(z^1, \ldots, z^m)v^\beta, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{4.32}$$
$$\dot{z}^i = g_0^i(z^1, \ldots, z^n) + g_\beta^i(z^1, \ldots, z^n)v^\beta, \quad i = m+1, \ldots, n, \tag{4.33}$$

$$(z^1, \ldots, z^m) \in W \subset \mathbb{R}^m, \quad (z^{m+1}, \ldots, z^n) \in L \subset \mathbb{R}^{n-m}, \quad v \in \mathbb{R}^s.$$

Доказательство. Пусть система S, описываемая соотношениями (4.1), допускает локальную факторизацию в точке y_0, т.е. система S, ограниченная на некоторую окрестность $P \subset M$, допускает факторизацию, причем факторсистема $\tilde{S}$ имеет вид (4.2). Предположим сначала, что $r = s$. Тогда, согласно предложению 2.7, в некоторой окрестности $V \subset P$ точки y_0 существует система

$$\dot{y} = \tilde{f}_0(y) + \tilde{f}(y)v, \quad v \in \mathbb{R}^r, \tag{4.34}$$

которая изоморфна по управлениям системе $S|_V$, причем система $\tilde{S}|_L$ (где $L = \varphi(V) \subset N$, φ — отображение, задаваемое агрегатами $\varphi^k(y)$) является факторсистемой системы (4.34) по фазовым переменным. Согласно теореме 4.1, система (4.34) локально эквивалентна в точке y_0 по фазовым переменным системе вида (4.32), (4.33). Так как система (4.1) локально эквивалентна системе (4.34), то, следовательно, система (4.1) локально эквивалентна системе (4.32), (4.33). Пусть теперь $r < s$. Воспользуемся следующим приемом (который уже использовался в разделе 3.1). Сопоставим системе (4.1) систему

$$\dot{y} = f_0(y) + f_\alpha(y)u^\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, s, \tag{4.35}$$

где $f_\alpha = 0, \alpha = r+1, \ldots, s$. Система (4.1) эквивалентна системе (4.35), поэтому система (4.2) является факторсистемой системы (4.35). В этом случае, как уже доказано, система (4.35) локально эквивалентна системе вида (4.32), (4.33). Следовательно, и система (4.1) локально эквивалентна системе (4.32), (4.33). Если $r > s$, то аналогичным образом поступаем с факторсистемой (4.2), т.е. сопоставляем системе (4.2) эквивалентную ей систему

$$\dot{z} = g_0 + g_\alpha v^\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, r,$$

где $g_\alpha = 0, \alpha = s+1, \ldots, r$, которая является также факторсистемой системы (4.1). Обратно, если система (4.1) локально эквивалентна системе (4.32), (4.33) в точке y_0, то легко видеть, что система (4.1) допускает локальную факторизацию в точке y_0, причем система (4.32) является факторсистемой. $\square$

Замечание 4.4. Если дана факторсистема (4.2) системы (4.1), то в процессе доказательства теоремы 4.6 выстраивается декомпозиция (4.32), (4.33), где система (4.32) совпадает с факторсистемой (4.2). При этом, вообще говоря, $r \neq s$. Покажем, что существует декомпозиция

$$\dot z^k = \overline{g}_0^k(z^1, \ldots, z^m) + \overline{g}_\gamma^k(z^1, \ldots, z^m)v^\gamma, \tag{4.36}$$
$$\dot z^i = \overline{g}_0^i(z^1, \ldots, z^n) + \overline{g}_\gamma^i(z^1, \ldots, z^n)v^\gamma, \tag{4.37}$$

$$k = 1, \ldots, m, \quad i = m+1, \ldots, n, \quad w \in \mathbb{R}^r,$$

причем системы (4.32), (4.33) и (4.36), (4.37) эквивалентны системе (4.1) относительно одного и того же диффеоморфизма $z = \varphi(y)$. (Отсюда следует, в частности, что системы (4.32), (4.33) и (4.36), (4.37) эквивалентны по управлениям.) Доказательство этого факта отличается от доказательства теоремы 4.6 лишь в случае, когда $s > r$. Для этого случая построим систему (4.36), (4.37) следующим образом. Заметим, что для факторсистемы (4.2)

$$\operatorname{rank} \|g_\beta^k\|_{\beta=1,\ldots,s}^{k=1,\ldots,m} \leqslant \operatorname{rank} \|f_\alpha^i\|_{\alpha=1,\ldots,r}^{i=1,\ldots,n} = p \leqslant r.$$

Тогда очевидно, что существует система вида

$$\dot z^k = \overline{g}_0^k(z^1, \ldots, z^m) + \overline{g}_\gamma^k(z^1, \ldots, z^m)w^\gamma, \tag{4.38}$$

$$w \in \mathbb{R}^r, \quad k = 1, \ldots, m,$$

эквивалентная системе (4.2) по управлениям. Ясно, что система (4.38) является факторсистемой, причем агрегаты те же самые, т.е. φ^k, $k = 1, \ldots, m$. Далее построение системы (4.36), (4.37) производится так же, как и в доказательстве теоремы 4.6. Из теоремы 3.2 следует, что система (4.36), (4.37) (локально) получается из системы (4.1) невырожденной заменой фазовых переменных и управлений вида

$$(y, u) \mapsto (z, w) = (\varphi(y), \lambda_0(y) + \lambda(y)u). \tag{4.39}$$

Итак, можно сказать, что система (4.1) допускает (локальную) факторизацию порядка $n \Leftrightarrow m$ тогда и только тогда, когда система (4.1) (локальной) невырожденной заменой фазовых переменных и управлений (4.39) приводится к виду (4.36), (4.37).

Перейдем теперь к рассмотрению условий факторизации в категории $\mathcal{AS}$. Будем по-прежнему применять следующую терминологию: $\mathcal{F}$-семейством и $\mathcal{F}$-распределением системы (4.1) называются полное семейство векторных полей и регулярное инволютивное распределение, имеющие такой полный набор интегралов, которые составляют набор агрегатов системы (4.1), т.е. определяют морфизм в некоторую факторсистему. Так же, как и в категории $\mathcal{ASP}$, $\mathcal{F}$-распределение определяет класс эквивалентных факторобъектов (точнее, класс локально эквивалентных факторобъектов). Отметим одно отличие: в категории $\mathcal{ASP}$ эпиморфизму $\varphi: M \to N$ (иначе говоря, набору агрегатов системы (4.1)) соответствует только одна факторсистема в области N, а в категории $\mathcal{AS}$ — множество эквивалентных по управлениям факторсистем (в частности, в это множество входят все управляемые системы, которые получаются из одной факторсистемы невырожденной заменой управлений). Заметим, что других факторсистем в N нет. (Это вытекает из того факта, что рассматриваются лишь факторсистемы, определяемые полными морфизмами.)

Исследуем вопрос о существовании и нахождении $\mathcal{F}$-распределений и $\mathcal{F}$-семейств. Подчеркнем, что все результаты носят локальный характер.

Во-первых, покажем, как условия факторизации по фазовым переменным, выраженные в теоремах 4.2, 4.3, можно использовать в общем случае. Согласно замечанию 4.4, система (4.1) допускает (локальную) факторизацию тогда и только тогда, когда допускает (локальную) факторизацию по фазовым переменным управляемая система

$$\dot{y} = \tilde{f}_0(y) + \tilde{f}(y)v, \quad v \in \mathbb{R}^r, \tag{4.40}$$

которая получается из (4.1) некоторой (локальной) невырожденной заменой управлений

$$u = \mu_0(y) + \mu(y)v, \quad |\mu| \neq 0. \tag{4.41}$$

Имеем $\tilde{f}_0 = f_0 + f\mu_0, \tilde{f} = f\mu$.

Таким образом, из теоремы 4.3 вытекает, что система (4.1) допускает факторизацию порядка $n - m$ тогда и только тогда, когда существует полное семейство полей (4.11) и функции

$$\mu_0^\alpha(y), \mu_\beta^\alpha(y), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, r, \tag{4.42}$$

$$|\mu_\beta^\alpha|_{\beta=1,\dots,r}^{\alpha=1,\dots,r} \neq 0,$$

такие, что

$$[f_0 + f_\alpha\mu_0^\alpha, Z_a] = h_{0a}^c(y)Z_c, \quad [f_\alpha\mu_\beta^\alpha, Z_a] = h_{\beta a}^c Z_c. \tag{4.43}$$

В терминах $\mathcal{F}$-распределений условия факторизации выглядят так:

$$[f_0 + f_\alpha\mu_0^\alpha, D] \subset D, \quad [f_\alpha\mu_\beta^\alpha, D] \subset D. \tag{4.44}$$

По сравнению с соотношениями (4.12), (4.10) соотношения (4.43), (4.44) содержат дополнительные неизвестные функции (4.42).

Функции μ^α_β можно исключить с помощью подхода, развитого в работах [60, 61, 62]. Согласно терминологии этих работ, распределение D, удовлетворяющее (4.44) при некоторых μ^α_β, называется (f_0, f)-инвариантным распределением системы (4.1). (К слову сказать, распределение D, удовлетворяющее условию (4.10), естественно называть инвариантным распределением системы (4.1), ибо это распределение, согласно терминологии раздела 1.6, является инвариантным относительно ассоциированной группы.) Справедлива

Теорема 4.7. *Регулярное инволютивное распределение D тогда и только тогда является (f_0, f)-инвариантным распределением, когда*

$$[f_\alpha, D] \subset D + L_F, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, r, \tag{4.45}$$

где F — ассоциированное аффинное распределение системы (4.1). □

Соотношения (4.45) в терминах полных семейств (4.11) выглядят так:

$$[f_\alpha, Z_a] = h^c_{\alpha a}(y) Z_c + \nu^\beta_{\alpha a}(y) f_\beta, \tag{4.46}$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots, r, \quad \beta = 1, \ldots, r, \quad a, c = 1, \ldots, p.$$

Равенства (4.46) представляют собой систему дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью относительно компонент $b^i_a(a)$ $\mathcal{F}$-семейства (4.11), в которую входят также неизвестные параметрические переменные $h^c_{\alpha a}, \nu^\beta_{\alpha a}$. Переменные $h^c_{\alpha a}$ можно исключить с помощью применения якобиевых семейств (4.17), чего нельзя сказать о переменных $\nu^\beta_{\alpha a}$.

Итак, условия факторизации (4.43) и (4.46) приводят к дифференциальным уравнениям с одинаковой главной частью относительно компонент $\mathcal{F}$-семейств, причем в эти уравнения входят еще дополнительные неизвестные функции. Последнее обстоятельство осложняет (по сравнению со случаем факторизации по фазовым переменным) поиск факторсистем.

Приступим к изложению двойственного подхода к вопросу о факторизации. При этом подходе отыскиваются вполне интегрируемые системы Пфаффа и кораспределения, полные наборы интегралов которых являются агрегатами. Такие системы Пфаффа и кораспределения будем называть $\mathcal{F}$-системами Пфаффа и $\mathcal{F}$-кораспределениями.

Применение двойственного подхода позволяет выявить некоторую качественную картину, описывающую множество всех $\mathcal{F}$-кораспределений и соответствующих факторобъектов. Оказывается, что можно ввести в рассмотрение два типа $\mathcal{F}$-кораспределений — базисные и тривиальные. Базисные $\mathcal{F}$-кораспределения находятся с помощью решений некоторых систем дифференциальных уравнений, а тривиальные $\mathcal{F}$-кораспределения находятся с помощью лишь алгебраических операций. Произвольное $\mathcal{F}$-кораспределение представляет собой прямую сумму базисного $\mathcal{F}$-кораспределения и тривиального $\mathcal{F}$-кораспределения. Таким образом, решать дифференциальные уравнения нужно лишь для нахождения базисных $\mathcal{F}$-кораспределений. После нахождения базисных $\mathcal{F}$-кораспределений все остальные $\mathcal{F}$-кораспределения достраиваются из базисных $\mathcal{F}$-кораспределений с помощью некоторых алгебраических операций. Из этих соображений вытекает также определенная структура факторсистем: каждая факторсистема допускает декомпозицию на так называемую неразложимую систему и тривиальную систему.

Введение базисных и тривиальных $\mathcal{F}$-кораспределений основано на утверждении, содержащемся в теореме 4.8.

Прежде чем сформулировать теорему, выражающую условия факторизации, напомним, что через $K = F_\perp$ обозначается ассоциированное t-кораспределение системы (4.1), которое является двойственным t-кораспределением к ассоциированному аффинному распределению F и определено в $M \times \mathbb{R}^1$. Напомним также, что если какое-либо гладкое t-кораспределение B определено в $M \times \mathbb{R}^1$, то через $\overline{B}$ обозначается кораспределение в M, задаваемое формами $\overline{\omega} = (\omega^1, \dots, \omega^n)$, где $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n, \omega^{n+1}) \in B$. Если кораспределение S принадлежит $\overline{B}$, то, согласно предложению 1.28, однозначно определено такое t-кораспределение $S' \subset B$, что $S = \overline{S'}$.

Теперь сформулируем и докажем утверждение, выражающее условие факторизации в двойственной форме.

Теорема 4.8. *Для того чтобы система* (4.1) *допускала (локальную) факторизацию порядка $n \Leftrightarrow m > 0$, необходимо и достаточно, чтобы (локально) существовало такое регулярное вполне интегрируемое кораспределение Q ранга m, что кораспределение $\overline{K} \cap Q$ регулярно и*

$$\mathbf{C}_t(\overline{K} \cap Q)' \subset Q, \tag{4.47}$$

при этом Q является $\mathcal{F}$-кораспределением.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1) $\overline{K} = \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}\colon y \mapsto \{0\} \subset TM_y^*$.

Положим $p = \operatorname{rank} f$. В данном случае $p = n$ и любой набор из m независимых функций $\varphi^k, k = 1, \dots, m$, является набором агрегатов и определяет факторизацию порядка $n \Leftrightarrow m$. Действительно, дополним эти функции до n независимых функций и сделаем соответствующую замену координат $z = \varphi(y)$. Система (4.1) преобразуется в эквивалентную систему $\dot z = h_0(z) + h(z)u$. Очевидно, что $\operatorname{rank} \|h_a^i\|_{\alpha=1,\dots,r}^{i=1,\dots,m} = m$. Следовательно, невырожденной заменой управлений $v^k = h_0^k(z) + h_a^k(z)u^\alpha, k = 1,\dots,m, v^s = u^s, s = m+1,\dots,r$, полученная система преобразуется в эквивалентную систему следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot z^k &= v^k, && k = 1,\dots,m, \\ \dot z^i &= g_0^i(z) + g_\alpha^i(z)v^\alpha, && i = m+1,\dots,n, \end{aligned} \tag{4.48}$$

в которой первые m уравнений образуют факторсистему.

Теперь осталось заметить, что в данном случае любое вполне интегрируемое кораспределение Q удовлетворяет условию (4.47), а также то, что для любого набора из m независимых функций найдется вполне интегрируемое кораспределение ранга m, для которого эти функции являются интегралами.

2) $\overline{K} \neq \mathcal{O}$.

Докажем сначала достаточность условия (4.47). Пусть существует вполне интегрируемое кораспределение Q, удовлетворяющее (4.47). Рассмотрим два возможных варианта.

а) $\overline{K} \cap Q = \mathcal{O}$.

Перейдем в систему координат, в которой (согласно теореме 1.14) существует базисная система Пфаффа кораспределения Q вида

$$dz^k = 0, \quad k = 1,\dots,m. \tag{4.49}$$

Рассмотрим произвольную базисную систему Пфаффа t-кораспределения K:

$$a_i^k(z)dz^i + a_{n+1}^k(z)dt = 0, \quad k = 1,\dots,q, \quad i = 1,\dots,n, \tag{4.50}$$

где $q = n \Leftrightarrow p$. Из условия $\overline{K} \cap Q = \mathcal{O}$ вытекает, что $m \leqslant p$ и, кроме того, $\operatorname{rank} \|a_i^k\|_{i=m+1,\dots,n}^{k=1,\dots,q} = q$. Не ограничивая общности, считаем, что $|a_i^k|_{i=p+1,\dots,n}^{k=1,\dots,q} \neq 0$. Согласно предложению 1.38, существует взаимное к (4.50) семейство полей $h_\beta, b = 0,1,...,p$, причем

$$|h_\beta^i|_{\beta=1,\dots,p}^{i=1,\dots,p} \neq 0. \tag{4.51}$$

Поля $h_\beta, b = 0,1,\dots,p$, определяют управляемую систему

$$\dot z = h_0(z) + h(z)w.$$

Из (4.51) следует, что $\operatorname{rank} \|h_\beta^i\|_{\beta=1,\dots,p}^{i=1,\dots,m} = m$. Так же, как и в случае 1), невырожденной заменой управлений эта система приводится к системе вида (4.48).

б) $\overline{K} \cap Q \neq \mathcal{O}$. Положим $B = \overline{K} \cap Q$. Так как $\mathbf{C}_t B' \subset Q$, то из теоремы 1.22 следует, что в соответствующей системе координат B' имеет базисную систему Пфаффа вида

$$a_i^k(z^1, \ldots, z^m)dz^i + a_{n+1}^k(z^1, \ldots, z^m)dt = 0, \tag{4.52}$$

$$k = 1, \ldots, d, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Так как $B' \subset K$, то уравнения (4.52) вместе с некоторыми уравнениями

$$a_j^l(z^1, \ldots, z^n)dz^j + a_{n+1}^l(z^1, \ldots, z^n)dt = 0, \tag{4.53}$$

$$l = d+1, \ldots, q, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $q = n \Leftrightarrow p$, образуют базисную систему Пфаффа t-кораспределения K. Заметим, что $Q \cap P = \mathcal{O}$ для любого кораспределения $P \subset \overline{K}$, такого, что $P \oplus B = \overline{K}$. С другой стороны, $L \oplus B = \overline{K}$, где L — кораспределение, порождаемое системой Пфаффа

$$a_j^l(z^1, \ldots, z^n)dz^j = 0, \quad l = d+1, \ldots, q, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.54}$$

Таким образом, уравнения (4.49) и (4.54) являются линейно несвязанными, т.е. линейно независимыми в каждой точке. Поэтому

$$\operatorname{rank} \|a_j^l\|_{j=m+1,\ldots,n}^{l=d+1,\ldots,q} = n \Leftrightarrow p \Leftrightarrow d. \tag{4.55}$$

Построим семейство полей $g_\beta, \beta = 0, 1, \ldots, p$, являющееся взаимным к системе Пфаффа (4.52), (4.53). Из вида (4.53) вытекает, что $m \geqslant d$, а из (4.55) следует, что $m \leqslant p + d$. Ограничимся случаем, когда выполняются неравенства $d < m < p + d$ (случаи $m = d, m = p + d$ аналогичны). Построим сначала поля $g_\beta, \beta = 1, \ldots, m \Leftrightarrow d$. Первые m компонент этих полей выберем таким образом, чтобы m-мерные поля $(g_\beta^1, \ldots, g_\beta^m), b = 1, \ldots, m \Leftrightarrow d$, образовывали фундаментальную систему решений системы линейных алгебраических уравнений

$$a_i^k(z^1, \ldots, z^m)g^i = 0, \quad k = 1, \ldots, d, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Эти компоненты можно выбрать зависящими лишь от переменных $z^1, \ldots, z^m$. Для фиксированного значения $\beta = 1, \ldots, m \Leftrightarrow d$ компоненты $(g_\beta^{m+1}, \ldots, g_\beta^n)$ n-мерного поля g_β находятся с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений

$$a_j^l(z^1, \ldots, z^n)g^j = 0, \quad l = d+1, \ldots, n \Leftrightarrow p, \quad j = 1, \ldots, n,$$

в которую подставлены найденные ранее компоненты $(g_\beta^1, \ldots, g_\beta^m)$. В силу (4.55) решение существует. Поля $g_\beta, \beta = m \Leftrightarrow d + 1, \ldots, p$, определим следующим образом. Положим $g_\beta^i = 0, i = 1, \ldots, m$. Остальные компоненты $g_\beta^j, j = m+1, \ldots, n$, выберем таким образом, чтобы $(n\Leftrightarrow m)$-мерные векторы $(g_\beta^{m+1}, \ldots, g_\beta^n), \beta = m\Leftrightarrow d+1, \ldots, p$, образовывали фундаментальную систему решений системы алгебраических уравнений

$$a_j^l(z^1, \ldots, z^n)g^j = 0, \quad l = d+1, \ldots, n \Leftrightarrow p, \quad j = m+1, \ldots, n.$$

Поле g_0 построим так. В качестве первых m компонент $g_0^i, i = 1, \ldots, m$, возьмем функции, удовлетворяющие системе уравнений

$$a_i^k(z^1, \ldots, z^m)g^i + a_{n+1}^k(z^1, \ldots, z^m) = 0, \quad k = 1, \ldots, d.$$

Очевидно, что $g_0^i, i = 1, \ldots, m$, можно выбрать зависящими лишь от $z^1, \ldots, z^m$. Остальные компоненты $g_0^j, j = m+1, \ldots, n$, выбираем как решение системы уравнений

$$a_j^l(z^1, \ldots, z^n)g^j + a_{n+1}^l(z^1, \ldots, z^n) = 0, \quad l = d+1, \ldots, q,$$

куда вместо $g^i, i = 1, \ldots, m$, подставлены полученные ранее функции $g_0^i(z^1, \ldots, z^m), i = 1, \ldots, m$.

Построенные векторные поля $g_\beta, \beta = 0, 1, \ldots, p$, определяют систему (4.32), (4.33) (где $s = p$), эквивалентную исходной системе (4.1).

Докажем необходимость условия (4.47). Пусть система (4.1) эквивалентна системе (4.32), (4.33). Следовательно, выполняется равенство $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} ||g_\beta^i||_{\beta=1,\ldots,s}^{i=1,\ldots,n} = p$. Не ограничивая общности, считаем, что $p = s$ (если $s > p$, то $s \Leftrightarrow p$ полей можно удалить, оставив лишь линейно несвязанные; модифицированная система будет по-прежнему эквивалентна системе (4.1)). Построим вполне интегрируемое кораспределение Q, для которого агрегаты являются интегралами. Покажем, что Q удовлетворяет (4.47). Положим

$$\operatorname{rank} ||g_\beta^i||_{\beta=1,\ldots,p}^{i=1,\ldots,m} = c.$$

Рассмотрим два случая.

а) $c = m$.

Предположим, не ограничивая общности, что

$$\operatorname{rank} ||g_\beta^i||_{\beta=1,\ldots,p}^{i=1,\ldots,p} = p.$$

Согласно предложению 1.38, взаимная система Пфаффа (4.50) для полей $g_\beta, \beta = 0, 1, \ldots, p$, обладает свойством

$$\operatorname{rank} ||a_i^k||_{i=p+1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,q} = q = n \Leftrightarrow p.$$

Отсюда и из вида базисной системы Пфаффа (4.49) кораспределения Q следует, что уравнения (4.49) и уравнения $a_i^k(z)dz^i = 0, k = 1, \ldots, q$, порождающие $\overline{K}$, линейно несвязаны, т.е. $\overline{K} \cap Q = \mathcal{O}$.

б) $c < m$.

Построим базисную систему Пфаффа ассоциированного t-кораспределения K системы (4.32), (4.33) следующим образом. Возьмем базисную систему Пфаффа (4.52), где $d = m \Leftrightarrow c$, ассоциированного t-кораспределения факторсистемы (4.32) в пространстве переменных $z^1, \ldots, z^m$. Очевидно, что 1-формы, определяющие уравнения (4.52), рассматриваемые в пространстве переменных $z^1, \ldots, z^n$, принадлежат K. Возьмем уравнения (4.52) в качестве первых d уравнений базисной системы K.

Если $d = n \Leftrightarrow p$, то уравнения (4.52) образуют базисную систему Пфаффа t-кораспределения K. Так как эти уравнения зависят только от $z^1, \ldots, z^m$, то из вида базисной системы Пфаффа (4.49) кораспределения Q следует (4.47).

Пусть $d < n \Leftrightarrow p$. К уравнениям (4.52) для получения базисной системы Пфаффа t-кораспределения K следует добавить некоторые уравнения (4.53). Для завершения доказательства достаточно показать, что система Пфаффа (4.52) порождает t-кораспределение $(\overline{K} \cap Q)'$ (ибо после этого можно рассуждать так же, как и в случае $d = n \Leftrightarrow p$). Это утверждение равносильно выполнению равенства (4.55). Докажем (4.55). Предположим, не ограничивая общности, что $\operatorname{rank} \|g^i_\beta\|^{i=1,\ldots,c}_{\beta=1,\ldots,p} = c$. Из предложения 1.38 следует, что

$$\operatorname{rank} \|a^k_i\|^{k=1,\ldots,d}_{i=c+1,\ldots,m} = d. \tag{4.56}$$

Пусть также, не ограничивая общности, в матрице $\|g^i_\beta\|^{i=1,\ldots,n}_{\beta=1,\ldots,p}$ минор p-го порядка, отличный от нуля, образуется строками с индексами $i \in P \cup S$, где P — множество индексов $\{1, \ldots, c\}$, если $c > 0$, и $P = \emptyset$, если $c = 0$, а S — множество $\{m+1, ..., m+p \Leftrightarrow c\}$. Тогда, согласно предложению 1.38, в матрице $\|a^i_j\|^{i=1,\ldots,q}_{j=1,\ldots,n}$, составленной из компонент системы Пфаффа (4.52), (4.53), имеется минор $(n \Leftrightarrow p)$-го порядка, отличный от нуля и порожденный столбцами с индексами $j \in \overline{P} \cup \overline{S}$, где $\overline{P} = \{1, ..., m\}/P$, $\overline{S} = \{m+1, ..., n\}/S$. Матрица, определяющая этот минор, имеет следующий вид: $\begin{Vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{Vmatrix}$, где $A = \|a^k_i\|^{k=1,\ldots,d}_{i\in\overline{P}}$, $B = \|a^i_j\|^{i=d+1,\ldots,n-p}_{j\in\overline{S}}$. Так как, согласно (4.56), $|A| \neq 0$, то $|B| \neq 0$. $\square$

Замечание 4.5. Система (4.1) всегда допускает факторизацию нулевого порядка. Факторсистемы в этом случае суть системы, эквивалентные системе (4.1), агрегаты — произвольные наборы из n функционально независимых функций. В качестве $\mathcal{F}$-кораспределения здесь фигурирует кокасательное расслоение $T^*M \colon y \mapsto T^*M_y$, которое очевидно удовлетворяет (4.47).

Замечание 4.6. Для симметрических систем условие (4.47) равносильно следующему:
$$\mathbf{C}(F^{\perp} \cap Q) \subset Q. \tag{4.57}$$

4.2. Некоторые типы факторсистем

Обратимся к выражению (4.47), определяющему условия факторизации. Из (4.47) вытекает, что естественным образом выделяются два типа $\mathcal{F}$-кораспределений.

Первый тип составляют такие кораспределения Q, что
$$\overline{K} \cap Q = \mathcal{O}, \tag{4.58}$$
где $\mathcal{O}: y \mapsto \{0\} \subset T^*M_y$, $K = F_{\perp}$ — ассоциированное t-кораспределение управляемой системы (4.1). Такие $\mathcal{F}$-кораспределения будем называть тривиальными. Из доказательства теоремы 4.8 следует, что они определяют факторсистемы вида
$$\dot{z}^k = v^k, \quad k = 1, \ldots, m, \quad z \in N \subset R^m, \quad v \in R^m. \tag{4.59}$$
Напомним (см. замечание 3.3), что системы $\dot{z} = g_0 + gv, z \in N \subset R^m$, для которых $\operatorname{rank} g = m$, называются тривиальными. Все они эквивалентны системе вида (4.59). Отсюда и название для соответствующих $\mathcal{F}$-кораспределений.

Введение второго типа $\mathcal{F}$-кораспределений обусловлено тем, что, согласно следствию 1.3 к теореме 1.12, регулярное t-характеристическое кораспределение является вполне интегрируемым. Поэтому можно ввести такие $\mathcal{F}$-кораспределения Q, что
$$\mathbf{C}_t(\overline{K} \cap Q)' = Q. \tag{4.60}$$
$\mathcal{F}$-Кораспределения, удовлетворяющие условию (4.60), будем называть базисными $\mathcal{F}$-кораспределениями.

Как уже указывалось в замечании 4.5, кокасательное расслоение T^*M является $\mathcal{F}$-кораспределением, причем соответствующие факторсистемы суть системы, эквивалентные исходной системе (4.1). Кокасательное расслоение T^*M является базисным $\mathcal{F}$-кораспределением, если $\overline{K} = T^*M$, и тривиальным, если $\overline{K} = \mathcal{O}$. Кораспределение $\mathcal{O}$ удовлетворяет условию (4.47), хотя и не определяет никакой факторсистемы. Удобно считать $\mathcal{O}$ также $\mathcal{F}$-кораспределением, что и будем делать. Кораспределение $\mathcal{O}$ удовлетворяет как условию (4.58), так и условию (4.60), т.е. является одновременно тривиальным и базисным $\mathcal{F}$-кораспределением.

Дальнейшее рассмотрение, если не оговорено противное, ведется в категории $\mathcal{ASR}$, являющейся полной подкатегорией категории $\mathcal{AS}$. Объектами категории $\mathcal{ASR}$ являются аффинные системы, для которых t-характеристические распределения ассоциированных t-кораспределений являются регулярными. Справедлива

Теорема 4.9. *Кораспределение Q является $\mathcal{F}$-кораспределением управляемой системы* (4.1) *тогда и только тогда, когда существует такое базисное $\mathcal{F}$-кораспределение X и такое тривиальное $\mathcal{F}$-кораспределение Y, что*

$$Q = X \oplus Y, \tag{4.61}$$

причем

$$\overline{K} \cap Q = \overline{K} \cap X. \tag{4.62}$$

Доказательство. Предположим, что Q — $\mathcal{F}$-кораспределение, и пусть $B = \overline{K} \cap Q$. Если $B = \mathcal{O}$, то Q является тривиальным t-кораспределением. В этом случае для Q справедливо представление (4.61), где $X = \mathcal{O}, Y = Q$. Равенство (4.62) также очевидно выполняется. Пусть $B \neq \mathcal{O}$. Согласно доказательству теоремы 4.8, в определенной системе координат $(z^1, \ldots, z^n)$ базисная t-система Пфаффа ассоциированного t-кораспределения системы (4.1) состоит из уравнений вида (4.52) и (4.53), причем уравнения (4.52) составляют базисную t-систему Пфаффа t-кораспределения B'. Кроме того, в системе координат $(z^1, \ldots, z^m)$ уравнения (4.52) можно трактовать как базисную t-систему Пфаффа ассоциированного t-кораспределения $G_\perp$ факторсистемы (4.2), причем t-характеристическое распределение t-кораспределения $G_\perp$ является регулярным (ибо факторсистема (4.2) является объектом категории $\mathcal{ASR}$). Отсюда следует, что в системе координат $(z^1, \ldots, z^n)$ распределение $\mathbf{C}_t B'$ является регулярным. Положим $X = \mathbf{C}_t B'$. Из определения t-характеристического кораспределения и (4.47) следует, что

$$\overline{K} \cap Q \subset X \subset Q. \tag{4.63}$$

Из (4.63) вытекает (4.62). Таким образом, $\mathbf{C}_t(\overline{K} \cap X)' = X$. Следовательно, X — базисное $\mathcal{F}$-кораспределение. Если $Q = X$, то (4.61) выполняется при $Q = \mathcal{O}$. Если $X \neq Q$, то, согласно следствию 1.4 к теореме 1.14, существует такое вполне интегрируемое кораспределение Y, что $Q = X \oplus Y$. Из (4.63) следует, что $\overline{F} \cap Y = \mathcal{O}$, т.е. Y — тривиальное $\mathcal{F}$-кораспределение.

Пусть теперь Q — некоторое кораспределение, для которого справедливы представление (4.61) и равенство (4.62). Из (4.61), (4.62) вытекает, что выполняется условие теоремы 4.8, т.е. Q — t-кораспределение. Докажем, что t-характеристическое кораспределение ассоциированного t-кораспределения соответствующей факторсистемы (4.1) является регулярным, т.е. факторсистема является объектом категории $\mathcal{ASR}$. Положим $B = \overline{K} \cap Q$. Если $B = \mathcal{O}$, т.е. Q — тривиальное t-кораспределение, то факторсистема является тривиальной системой, для которой $\mathbf{C}_t G_\perp = \mathcal{O}$ (в соответствующей области). Поэтому $\mathbf{C}_t G_\perp$ регулярно. Пусть $B \neq \mathcal{O}$. Тогда, согласно доказательству теоремы 4.8, в определенной системе координат $(z^1, \ldots, z^n)$ базисная t-система Пфаффа (4.52) t-кораспределения B' зависит лишь от координат $(z^1, \ldots, z^m)$ и в пространстве координат $(z^1, \ldots, z^m)$ может трактоваться как базисная t-система Пфаффа t-кораспределения $G_\perp$. Так как $\mathbf{C}_t B' = X$ является регулярным кораспределением, то и $\mathbf{C}_t G_\perp$ является регулярным кораспределением. $\square$

Замечание 4.7. В разложении (4.61) базисное $\mathcal{F}$-кораспределение X определено однозначно, а именно $X = \mathbf{C}_t(\overline{F}\perp \cap Q)'$. Тривиальное $\mathcal{F}$-кораспределение Y, являясь прямым дополнением X, определено неоднозначно (за исключением случаев, когда Q — тривиальное или базисное $\mathcal{F}$-кораспределение).

Соотношения (4.61), (4.62) выражают структуру произвольного $\mathcal{F}$-кораспределения системы (4.1). Этой структуре соответствует определенная структура факторсистем, задаваемых $\mathcal{F}$-кораспределением. Именно, справедлива

Теорема 4.10. *Пусть Q является $\mathcal{F}$-кораспределением управляемой системы* (4.1), *причем*

$$\dim Q = m > 0, \quad \dim \overline{K} \cap Q = d > 0, \quad \dim \mathbf{C}_t(\overline{K} \cap Q)' = q < m.$$

Тогда среди эквивалентных факторобъектов, определяемых $\mathcal{F}$-кораспределением Q, найдется такой факторобъект $(\tilde{S}, \varphi)$, что факторсистема $\tilde{S}$ имеет следующий вид:

$$\dot{z}_1 = v_1, \tag{4.64}$$

$$\dot{z}_2 = h_0(z_2) + h(z_2)v_2, \tag{4.65}$$

$$z_1 \in L \subset R^{m-q}, \quad v_1 \in R^{m-q}, \quad z_2 \in P \subset R^q, \quad v_2 \in R^s, \quad s \geqslant q \Leftrightarrow d.$$

Доказательство. Согласно доказательству теоремы 4.8, для построения факторсистемы, соответствующей $\mathcal{F}$-кораспределению Q, производится замена координат $z^i = \varphi^i(y), i = 1, \ldots, n$, где первые m функций φ^k составляют полный набор интегралов кораспределения Q.

Используя разложение (4.61), выберем полный набор следующим образом. Именно, в качестве первых $m-q$ функций возьмем полный набор интегралов кораспределения Y, а в качестве следующих q функций возьмем полный набор интегралов кораспределения X. Введем обозначения $z_1 = (z^1, \dots, z^{m-q})$, $z_2 = (z^{m-q+1}, \dots, z^m)$. Рассмотрим базисную t-систему Пфаффа t-кораспределения K, в которой первые d уравнений образуют базисную t-систему Пфаффа t-кораспределения $(\overline{K} \cap Q)'$. Очевидно (см. теорему 1.22 и замечание 1.16), что в новой системе координат существует базисная t-система Пфаффа t-кораспределения $(\overline{K} \cap Q)'$ вида

$$a_j^k(z_2)dz^j + a_0^k(z_2)dt = 0,$$
$$k = 1, \dots, d, \quad j = m-q+1, \dots, m.$$

Таким образом, здесь в отличие от случая, когда берется произвольный полный набор интегралов Q, в соответствующей системе Пфаффа (4.52)

$$a_j^k = 0, \quad k = 1, \dots, d, \quad j = 1, \dots, m-q.$$

Кроме того, компоненты a_j^k, $k = 1, \dots, d$, $j = m-q+1, \dots, m$, не зависят от z_1. Далее, следуя правилу построения факторсистемы, указанному в доказательстве теоремы 4.8, получим факторсистему вида (4.64), (4.65). □

Замечание 4.8. Теорему 4.10 можно обобщить следующим образом. Пусть Q является $\mathcal{F}$-кораспределением аффинной управляемой системы (4.1), причем $\dim Q = m > 0, \dim \overline{K} \cap Q = d > 0$. Кроме того, пусть существует регулярное вполне интегрируемое кораспределение V ранга $q < m$, такое, что $\mathbf{C}_t(\overline{K} \cap Q)' \subset V \subset Q$. Тогда среди эквивалентных факторобъектов, определяемых $\mathcal{F}$-кораспределением Q, найдется такой факторобъект $(\tilde{S}, \varphi)$, что факторсистема $\tilde{S}$ имеет вид (4.64), (4.65). Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 4.10 (в качестве функций φ^k, $k = m-q+1, \dots, q$, нужно взять полный набор интегралов кораспределения V). Теорема 4.10 соответствует частному случаю, когда $V = \mathbf{C}_t(\overline{K} \cap Q)'$. В этом частном случае для системы (4.65) q принимает минимальное значение.

Если в условии теоремы 4.10 $d = 0$, то Q является тривиальным $\mathcal{F}$-кораспределением. Поэтому каждая факторсистема (4.2) системы (4.1), соответствующая Q, является тривиальной системой и эквивалентна системе $\dot{z} = v$.

Если в условии теоремы 4.10 $q = m$, то Q — базисное $\mathcal{F}$-кораспределение. Так как $\dim \mathbf{C}_t(\overline{K} \cap Q)' = \dim \mathbf{C}_t G_\perp$, где $G_\perp$ — ассоциированное

t-кораспределение факторсистемы (4.2), то в этом случае для каждой факторсистемы $\dim \mathbf{C}_t G_\perp = m$.

Введем следующее определение. Аффинную управляемую систему будем называть неразложимой, если ранг t-характеристического кораспределения ассоциированного t-кораспределения системы равен размерности фазового пространства системы.

Таким образом, если в условии теоремы 4.10 $q = m$, то каждая факторсистема, соответствующая $\mathcal{F}$-кораспределению Q, является неразложимой системой.

Можно сказать, что если выполняются условия теоремы 4.10, то факторсистема допускает декомпозицию на тривиальную и неразложимую системы, которые независимы по фазовым переменным и по управлениям.

Кокасательное расслоение T^*M является $\mathcal{F}$-кораспределением, и поэтому для него справедливо разложение (4.61). Утверждение теоремы 4.10 в данном случае сформулируем следующим образом.

Теорема 4.11. *Пусть для системы* (4.1) $\dim \mathbf{C}_t K = q, 0 < q < n$. *Тогда система* (4.1) *эквивалентна системе вида*

$$\dot{z}_1 = v_1, \tag{4.66}$$

$$\dot{z}_2 = h_0(z_2) + h(z_2)v_2, \tag{4.67}$$

$$z_1 \in L \subset R^{n-q}, \quad v_1 \in R^{n-q}, \quad z_2 \in P \subset R^q, \quad v_2 \in R^s.$$

Итак, произвольная система (4.1), для которой $0 < \dim \mathbf{C}_t K < n$, допускает декомпозицию на тривиальную и неразложимую системы. Неразложимая система (4.1) (т.е. система, для которой $\dim \mathbf{C}_t K = n$) такой декомпозиции не допускает.

Декомпозицию (4.66), (4.67) будем называть основной декомпозицией системы (4.1).

Замечание 4.9. Справедливо обобщение теоремы 4.11, аналогичное обобщению теоремы 4.10, указанному в замечании 4.8: если существует регулярное вполне интегрируемое кораспределение V ранга q, причем $0 < q > n$ и $\mathbf{C}_t K \subset V$, то система (4.1) эквивалентна системе вида (4.66), (4.67). Каждая декомпозиция (4.66), (4.67), определяемая таким кораспределением V, отделяет некоторую тривиальную часть от системы. Основная декомпозиция системы (4.1) (соответствующая случаю, когда $V = \mathbf{C}_t K$) отделяет максимально возможную тривиальную часть. Это позволяет при исследовании той или иной задачи управления, связанной с системой (4.1), разложить эту задачу на две: тривиальную, связанную с системой (4.66), и, вообще говоря, нетривиальную, связанную с системой (4.67) (см. раздел 7.1).

Покажем, как введенные конструкции применяются для нахождения $\mathcal{F}$-кораспределений. Согласно теореме 4.10, этот вопрос сводится к вопросу о нахождении тривиальных и базисных $\mathcal{F}$-кораспределений. Что касается тривиальных $\mathcal{F}$-кораспределений, то, согласно (4.58), их нахождение является чисто алгебраической задачей.

Базисные $\mathcal{F}$-кораспределения определяются из дифференциальных соотношений (4.60). Заметим, что каждое базисное $\mathcal{F}$-кораспределение Q однозначно определяется t-кораспределением $S \subset K$, удовлетворяющим условию

$$\mathbf{C}_t S \cap \overline{K} = \overline{S}. \tag{4.68}$$

Действительно, если t-кораспределение $S \subset K$ удовлетворяет (4.68), то кораспределение $Q = \mathbf{C}_t S$ удовлетворяет (4.60), т.е. является базисным $\mathcal{F}$-кораспределением. Обратно, если Q удовлетворяет (4.60), то t-кораспределение $S = (\overline{K} \cap Q)'$ удовлетворяет (4.68).

Замечание 4.10. Для симметрических аффинных управляемых систем условие (4.68) равносильно условию

$$\mathbf{C} S \cap F^{\perp} = S, \tag{4.69}$$

где $S \subset F^{\perp}$.

t-Кораспределения $S \subset Q_{\perp}$, удовлетворяющие условию (4.68), будем называть факториальными t-кораспределениями системы (4.1). (Для симметрических систем можно говорить о факториальных кораспределениях.)

В терминах систем Пфаффа условие (4.68) означает существование базисной t-системы Пфаффа t-кораспределения K вида

$$\omega_i^k(y)dy^i + \omega_0^k(y)dt = 0, \quad k = 1, \ldots, d, \tag{4.70}$$
$$\omega_i^l(y)dy^i + \omega_0^l(y)dt = 0, \quad l = d+1, \ldots, n \Leftrightarrow p, \tag{4.71}$$

в которой d уравнений (4.70) образуют такую t-систему Пфаффа, что уравнения ее t-характеристической системы Пфаффа должны быть независимы (в каждой точке y) с уравнениями

$$\omega_i^l(y)dy^i = 0, \quad l = d+1, \ldots, n \Leftrightarrow p. \tag{4.72}$$

Очевидно, что если такая t-система Пфаффа (4.70), (4.71) существует, то уравнения (4.70) порождают факториальное t-кораспределение, а уравнения t-характеристической системы, построенной для t-системы (4.70), порождают базисное $\mathcal{F}$-кораспределение.

t-Систему (4.70), порождающую факториальное t-кораспределение, будем называть факториальной t-системой Пфаффа управляемой системы (4.1). Для поиска базисных $\mathcal{F}$-кораспределений можно поступить так. Возьмем произвольную базисную t-систему Пфаффа t-кораспределения

$$a_i^j dy^i + a_0^j dt = 0, \quad j = 1, \ldots, n \Leftrightarrow p,$$

и рассмотрим эквивалентную t-систему

$$\omega^k = \nu_j^k(y)(a_i^j dy^i + a_0^j dt) = 0, \quad k = 1, \ldots, n \Leftrightarrow p,$$

где ν_j^k — неопределенные коэффициенты, причем $|\nu_j^k| \neq 0$. Коэффициенты ν_j^j следует определить из условия, чтобы первые d уравнений образовывали факториальную t-систему Пфаффа. Из вида t-характеристической системы (1.105), (1.106) вытекает, что это приводит к дифференциальным соотношениям, которым должны удовлетворять коэффициенты ν_j^k. Для определения всех базисных $\mathcal{F}$-кораспределений следует рассмотреть случаи $d = 1, \ldots, n \Leftrightarrow p$. Заметим, что случаю $d = n \Leftrightarrow p$ соответствует лишь одно базисное $\mathcal{F}$-кораспределение, а именно $\mathbf{C}_t K$, которое находится с помощью лишь алгебраических операций.

$\mathcal{F}$-Кораспределения, не являющиеся ни базисными, ни тривиальными, можно построить следующим образом. Как уже было показано, каждое базисное $\mathcal{F}$-кораспределение определяется некоторым факториальным t-кораспределением. Рассмотрим базисную t-систему Пфаффа (4.70), (4.71) t-кораспределения K, в которой уравнения (4.70) порождают факториальное t-кораспределение. Базисное $\mathcal{F}$-кораспределение порождается соответствующей t-характеристической системой Пфаффа

$$\Omega_i^k(y) dy^i = 0, \quad k = 1, \ldots, b. \tag{4.73}$$

Напомним, что система (4.73) содержит систему

$$\omega_i^k(y) dy^i = 0, \quad k = 1, \ldots, d.$$

Если присоединить к уравнениям (4.73) некоторые уравнения

$$\lambda_i^s(y) dy^i = 0, \quad s = 1, \ldots, a, \tag{4.74}$$

которые независимы (в каждой точке y) как с уравнениями (4.73), так и с уравнениями (4.71), то, согласно теореме 4.9, полученная система Пфаффа (4.73), (4.74) порождает некоторое $\mathcal{F}$-кораспределение. На основании предыдущих результатов можно утверждать, что все $\mathcal{F}$-кораспределения (кроме базисных и тривиальных) могут быть получены таким образом.

Отметим еще одно обстоятельство, помогающее решать задачу факторизации. Дело в том, что $\mathcal{F}$-кораспределения эквивалентных управляемых систем диффеоморфны. Поэтому часто бывает полезно перейти от исходной системы к эквивалентной системе и попытаться решить для нее задачу факторизации. Полученное решение обратным диффеоморфизмом преобразуется в решение для исходной системы.

Пример 4.3. Рассмотрим произвольную тривиальную управляемую систему (4.1). Для такой системы $\overline{K} = \mathcal{O}$. Поэтому имеются только тривиальные $\mathcal{F}$-кораспределения, причем любое регулярное вполне интегрируемое кораспределение Q является $\mathcal{F}$-кораспределением. Иначе говоря, любой набор функционально независимых функций составляет набор агрегатов. Заметим, что в категории $\mathcal{ASP}$ тривиальная система может вообще не допускать факторизацию ненулевого порядка (см. пример 4.2).

Пример 4.4. Рассмотрим симметрическую систему (4.1), для которой $\operatorname{rank} f = n \Leftrightarrow 1$. В этом случае ассоциированное кораспределение $F^\perp$ имеет ранг, равный 1, и является единственным факториальным кораспределением. Базисное $\mathcal{F}$-кораспределение также определено единственным образом и является характеристическим распределением $\mathbf{C}F^\perp$. Как известно, для кораспределения $F^\perp$ ранга 1 ранг $\mathbf{C}F^\perp$ является нечетным числом. Поэтому сразу можно сказать, что если n — четное число, то система (4.1) всегда допускает нетривиальную факторизацию (т.е. с нетривиальной факторсистемой) порядка $q > 0$. Пусть $\dim \mathbf{C}F^\perp = m = 2k+1$ (или, иначе, $\operatorname{class} F^\perp = m = 2k+1$). Тогда, согласно теореме 1.16, в определенной системе координат базисное уравнение кораспределения $F^\perp$ имеет либо вид

$$dx^1 = 0, \tag{4.75}$$

что соответствует случаю $k = 0$, либо вид

$$dx^m \Leftrightarrow x^1 dx^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{2k-1} dx^{2k} = 0, \tag{4.76}$$

что соответствует случаю $k > 0$. Замена координат осуществляется с помощью функций $x^i = \varphi^i(y)$, $i = 1, \ldots, n$, где первые m функций являются интегралами $\mathbf{C}F^\perp$. Отсюда легко следует (см. доказательство теоремы 3.4), что среди факторсистем, соответствующих базисному $\mathcal{F}$-кораспределению $\mathbf{C}F^\perp$, имеется либо факторсистема вида

$$\dot{x}^1 = 0 \quad (k = 0), \tag{4.77}$$

либо факторсистема вида

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= v^i, i = 1, \ldots, 2k, \\ \dot{x}^m &= x^1 v^2 + \ldots + x^{2k-1} v^{2k}. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Система (4.1) допускает нетривиальную факторизацию порядка q, где q — любое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leqslant q \leqslant n \Leftrightarrow m$. Все факторсистемы эквивалентны факторсистемам определенного вида, которые получаются добавлением к уравнениям (4.77), (4.78) уравнений вида

$$\dot{x}^i = v^i, \quad i = m+1, \ldots, n \Leftrightarrow q. \tag{4.79}$$

Агрегатами являются интегралы $\mathbf{C}F^{\perp}$ и независимые с ними функции. При $q = 0$ имеем основную декомпозицию системы (4.1), которая совпадает с соответствующей канонической формой (3.24) или (3.25). Если $m = n$, то система (4.1) имеет только тривиальные факторсистемы. Таким образом, вопрос о декомпозиции системы (4.1), по существу, равносилен вопросу о приведении системы (4.1) к своей канонической форме. Подчеркнем, что, как структура факторсистем, так и вид канонической формы, определяются одним инвариантом, а именно классом ассоциированного кораспределения $F^{\perp}$ (т.е. величиной $\dim \mathbf{C}F^{\perp}$).

Пример 4.5. Рассмотрим тип управляемых систем (4.1), характеризуемый инвариантами

$$n = 4, \quad \dim \mathbf{L}_F = \dim \operatorname{Span} F = 2, \quad \dim \mathbf{C}(F^{\perp})_1 = 3.$$

Согласно теореме 3.9, каждая система такого типа (локально) эквивалентна системе (канонической форме)

$$\dot{x}_1 = v_1, \quad \dot{x}_2 = v_2, \quad \dot{x}_3 = x_4 v_2, \quad \dot{x}_4 = x_1 v_2. \tag{4.80}$$

Поэтому вопрос о факторизации таких систем сводится к вопросу о факторизации системы (4.80), который и рассмотрим. Одна из базисных систем Пфаффа ассоциированного кораспределения $F^{\perp}$ имеет вид

$$dx_4 \Leftrightarrow x_1 dx_2 = 0, \tag{4.81}$$

$$dx_3 \Leftrightarrow x_4 dx_2 = 0. \tag{4.82}$$

Факториальные кораспределения (если существуют) могут иметь ранг 1 или 2. Факториальным кораспределением ранга 2 является $F^{\perp}$. Базисное $\mathcal{F}$-кораспределение $\mathbf{C}F^{\perp}$ имеет ранг 4 и, следовательно, определяет факторизацию нулевого порядка. Иными словами, система (4.80) является неразложимой и основной декомпозиции не существует.

Займемся вопросом о существовании факториальных кораспределений ранга 1. Заметим, что уравнение Пфаффа (4.82) не является факториальным. Действительно, характеристическая система этого уравнения эквивалентна системе

$$dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0,$$

которая не является линейно несвязанной с уравнением (4.81). Следовательно, факториальные уравнения можно искать в виде

$$dx_4 \Leftrightarrow x_1 dx_2 + \nu(dx_3 \Leftrightarrow x_4 dx_2) = dx_4 \Leftrightarrow (x_1 + \nu x_4)dx_2 + \nu dx_3 = 0, \quad (4.83)$$

где ν — неизвестная функция. Нетрудно проверить, что для любой функции ν уравнение (4.83) является факториальным. Здесь мы ограничимся случаем $\nu = \mathrm{const}$. Построив характеристическую систему для уравнения (4.83), убеждаемся, что она эквивалентна системе, состоящей из уравнения (4.83) и уравнений

$$dx_2 = 0, \quad dx_1 \Leftrightarrow \nu dx_4 = 0. \qquad (4.84)$$

Уравнения (4.83), (4.84), (4.82) линейно несвязаны, поэтому уравнение (4.83) является факториальным для любого ν, причем соответствующее базисное $\mathcal{F}$-кораспределение порождается системой (4.83), (4.84). Итак, базисную систему Пфаффа кораспределения $F^{\perp}$ можно записать в виде (4.70), (4.71):

$$dx_4 \Leftrightarrow (x_1 + \nu x_4)dx_2 + \nu dx_3 = 0, \qquad (4.85)$$

$$dx_3 \Leftrightarrow x_4 dx_2 = 0. \qquad (4.86)$$

Порядок факторизации (для любого ν) равен 1. Впрочем, значение порядка факторизации можно было указать сразу как следствие общей теории. Действительно, класс одного уравнения может быть только нечетным числом. В данном случае это либо 1, либо 3. Класс, равный 1, соответствует полной интегрируемости уравнения, обуславливает существование интеграла у $F^{\perp}$ и приведение системы (4.1) к другой канонической форме. Факт отсутствия интегралов у $F^{\perp}$, а следовательно, и у F, можно легко установить также процессом пополнения ассоциированного семейства полей:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Сделаем в (4.85), (4.86) замену координат

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi_1(x) = x_1 \Leftrightarrow \nu x_4, & z_2 &= \Phi_2(x) = x_2, \\ z_3 &= \Phi_3(x) = x_3, & z_4 &= \Phi(x) = x_4 + \nu x_3. \end{aligned}$$

Функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 составляют полный набор интегралов $\mathcal{F}$-кораспределения, порождаемого системой Пфаффа (4.83), (4.84). В новых координатах существует базисная система Пфаффа кораспределения $F^{\perp}$ вида

$$dz_4 \Leftrightarrow z_1 dz_2 \qquad\quad = 0, \tag{4.87}$$

$$dx_3 \Leftrightarrow (z_4 \Leftrightarrow \nu z_3) dz_2 = 0, \tag{4.88}$$

где (4.87) — факториальное уравнение. Системе Пфаффа (4.87), (4.88) соответствует управляемая система

$$\dot{z}_1 = w_1, \quad \dot{z}_2 = w_2, \quad \dot{z}_3 = (z_4 \Leftrightarrow \nu z_3) w_2, \quad \dot{z}_4 = z_2 w_2, \tag{4.89}$$

которая эквивалентна системе (4.80). (Заметим, что система (4.89) получается из (4.80) заменой фазовых переменных $z_i = \Phi(x)$, $i = 1, \ldots, 4$, и управлений $w_1 = v_1 \Leftrightarrow \nu x_1 v_2$, $w_2 = v_2$.) Первое, второе и четвертое уравнения в (4.89) образуют факторсистему, соответствующую $\mathcal{F}$-системе (4.83), (4.84). Функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 являются агрегатами. Заметим, что для любого значения ν факторсистемы имеют одинаковый вид (ибо факториальное уравнение класса 3 всегда приводимо к канонической форме (4.87)). $\mathcal{F}$-Системе Пфаффа (4.83), (4.84) соответствует взаимное $\mathcal{F}$-поле (т.е. $\mathcal{F}$-семейство, состоящее из одного поля) в категории $\mathcal{AS}$

$$Z = \frac{\partial}{\partial x_3} + \nu^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \Leftrightarrow \nu \frac{\partial}{\partial x_4}. \tag{4.90}$$

Подчеркнем, что поле (4.90) является $\mathcal{F}$-полем в категории $\mathcal{ASP}$ лишь при $\nu = 0$. Действительно, при $\nu \neq 0$ уравнения (4.15) несовместны.

Система (4.80) не допускает нетривиальных факторизаций, отличных от тех, которые порождаются базисными $\mathcal{F}$-кораспределениями. (Существование других нетривиальных факторизаций противоречит, в частности, неразложимости системы (4.80).) Тривиальные $\mathcal{F}$-кораспределения системы (4.80) — это такие кораспределения, порождаемые одним или двумя уравнениями Пфаффа, которые линейно несвязаны с уравнениями (4.81), (4.82).

В заключении этого раздела рассмотрим взаимосвязь факторизации с допускаемыми группами преобразований и допускаемыми алгебрами Ли в категории $\mathcal{AS}$. Во-первых, докажем утверждение, согласно которому знание допускаемых преобразований позволяет строить новые $\mathcal{F}$-кораспределения из известных.

Предложение 4.1. Пусть D — $\mathcal{F}$-распределение системы, а ψ — допускаемое преобразование системы (4.1). Тогда ψ_* — $\mathcal{F}$-распределение системы (4.1).

Доказательство. Условие факторизации (4.45) можно представить в следующем виде: $[F, D] \subset D + \mathbf{L}_F$. Согласно разделу 3.1, $\psi_* F = F$. Поэтому $\psi_* \mathbf{L}_F = \mathbf{L}_F$. Имеем, используя предложение 1.4,

$$\psi_*[F, D] = [\psi_* F, \psi_* D] = [F, \psi_* D],$$
$$\psi_*(D + \mathbf{L}_F) = \psi_* D + \psi_* \mathbf{L}_F = \psi_* D + \mathbf{L}_F.$$

Следовательно, $[F, \psi_* D] \subset \psi_* D + \mathbf{L}_F$. □

Теперь рассмотрим роль допускаемых алгебр Ли для факторизации в категории $\mathcal{AS}$. Заметим, что аналогичный вопрос в категории $\mathcal{ASP}$ был подробно исследован в работах Ю.Н.Павловского и Г.Н.Яковенко [39–44].

Оказывается, что каждая подалгебра $\mathfrak{a}$ алгебры $\mathfrak{a}_1$ (которая определена в разделе 3.3) порождает некоторую факторизацию системы (4.1). Действительно, из теорем 3.12 и 4.7 следует, что распределение $\Delta_{\mathfrak{a}}$, порождаемое алгеброй $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_1$, является (в окрестности регулярной точки) $\mathcal{F}$-распределением системы (4.1).

Остановимся подробнее на подалгебре $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$, которая состоит из векторных полей, принадлежащих характеристическому распределению $\mathbf{C}F$. Вопрос о факторизации, порождаемой алгеброй $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$, по существу уже решен ранее в этой работе в терминах двойственного объекта, а именно t-характеристического корасределения $\mathbf{C}_t K$, где $K = F_\perp$. (Напомним, что, согласно теореме 1.12, $(\mathbf{C}_t K)^\perp = \mathbf{C}F$ в случае регулярности $\mathbf{C}_t K$.) Таким образом, если $\dim \mathbf{C}F = n \Leftrightarrow q$, то по теореме 4.11 система (4.1) допускает основную декомпозицию (4.66), (4.67). В соответствии с замечанием 4.9 подалгебры алгебры $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ также определяют декомпозиции вида (4.66), (4.67). Алгебре $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ соответствует декомпозиция (4.66), (4.67) с максимально тривиальной частью (4.66).

Глава 5

Сужение управляемых систем

5.1. Подсистемы и условия их существования

Рассмотрим аффинную управляемую систему

$$\dot{y} = f_0(y) + f(y)u, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \tag{5.1}$$

являющуюся объектом S категории $\mathcal{AS}$. Согласно терминологии теории категорий (см. раздел 1.2), подобъект объекта S — это пара, состоящая из аффинной управляемой системы

$$\dot{x} = h_0(x) + h(x)v, \quad x \in L \subset \mathbb{R}^m, \quad v \in \mathbb{R}^s, \tag{5.2}$$

являющейся объектом $\overline{S}$ категории AS, и мономорфизма, т.е. морфизма $\nu: L \to M$, представляющего собой инъективное отображение. Систему (5.2) будем называть подсистемой системы (5.1).

Мы ограничимся рассмотрением подсистем, для которых биекция ν области L на свой образ $N = \nu(L)$ является диффеоморфизмом, т.е. обратное отображение $\nu^{-1}: N \to L$ так же, как и ν, является гладким отображением.

Если $\nu: L \to N$ — диффеоморфизм, то N — элементарное многообразие размерности m. Пара (L, ν) является некоторой картой многообразия N, причем параметризация ν является иммерсией.

Итак, если $(\overline{S}, \nu)$ — подобъект системы S, то $N = \nu(L)$ является m-мерным элементарным многообразием, лежащим в области $M \subset \mathbb{R}^n$.

Если в M (являющемся фазовым пространством системы (5.1)) задано элементарное многообразие N, то будем говорить, что система (5.1) допускает сужение на многообразие N, если для некоторой карты (L, ν) существует подобъект $(\overline{S}, \nu)$ системы (5.1). Многообразие N при этом называется $\mathcal{P}$-многообразием системы (5.1). Если $\mathcal{P}$-многообразие является областью в M, то подобъект и соответствующая подсистема называются открытыми.

В силу того, что между точками L и точками N имеется диффеоморфное соответствие, можно говорить (допуская вольность речи), что подсистема (5.2) задана на многообразии N.

Дадим локальный вариант определения сужения. Если $N \subset M$ — многообразие (не обязательно элементарное), то многообразие $W \cap N$, где W — область в M, называется открытым подмногообразием многообразия N. Будем говорить, что система (5.1) допускает локальное сужение на многообразие N в точке $y_0 \in N$, если система (5.1) допускает сужение на некоторое (элементарное) открытое подмногообразие многообразия N, содержащее точку y_0. Результаты этой главы в основном носят локальный характер, т.е. связаны с понятием локального сужения в точке. При этом явное упоминание точки, в которой система допускает локальное сужение, и слово «локальное» будут часто опускаться.

В соответствии с терминологией раздела 2.2 подсистема (5.2) называется подсистемой по фазовым переменным или подсистемой в категории $\mathcal{ASP}$, если морфизм $\nu\colon L \to M$ является морфизмом по фазовым переменным. Подсистема (5.2) называется подсистемой по управлениям или подсистемой в категории ASC, если морфизм ν является морфизмом по управлениям. Соответственно будем говорить также о сужении и $\mathcal{P}$-многообразиях по фазовым переменным и по управлениям.

Рассмотрим кратко вопрос о сужении в категории $\mathcal{ASP}$.

Предложение 5.1. *Управляемая система* (5.1) *тогда и только тогда допускает сужение на (элементарное) многообразие N, когда ассоциированные поля f_α, $\alpha = 0, 1, \ldots, r$, касаются N.*

Доказательство. Пусть система (5.1) допускает сужение на N и пусть система (5.2) является подсистемой. Из предложения 2.3 следует, что $f_\alpha = \nu_* h_\alpha$, т.е. ассоциированные поля f_α и h_α систем (5.1), (5.2) ν-связаны. Из предложения 1.5 вытекает, что поля f_α касаются N, т.е. $f_\alpha(y) \in TN_y$, $\forall y \in N$. Пусть теперь, наоборот, поля f_α касаются N. Возьмем произвольную карту (L, ν) многообразия N. Из предложения 1.5 следует, что в области определены индуцированные поля, т.е. такие

поля
$$\overline{f}_\alpha = \overline{f}{}^k_\alpha \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad k = 1, \ldots, m, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, r, \tag{5.3}$$
что $f_\alpha = \nu_* \overline{f}_\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots, r$. Построим с помощью этих полей управляемую систему
$$\dot{x} = \overline{f}_0(x) + \overline{f}(x)u, \quad x \in L \subset \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R}^r. \tag{5.4}$$
Из предложения 2.3 следует, что ν — морфизм системы (5.4) в систему (5.1). Следовательно, (5.4) — подсистема системы (5.1). □

Из предложений 5.1, 1.47 следует, что система (5.1) допускает сужение на многообразие N тогда и только тогда, когда это многообразие является локально инвариантным многообразием ассоциированной группы, т.е. группы диффеоморфизмов, порождаемой ассоциированным семейством полей $\mathfrak{f} = \{f_\alpha, \alpha = 0, 1, \ldots, r\}$.

Мы будем называть каждое такое многообразие N также локально инвариантным многообразием системы (5.1), ибо оно обладает следующим свойством: любое решение $y(t)$, которое соответствует управлению $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, причем $y(t_0) \in N$, локально принадлежит N, т.е. существует такой полуоткрытый справа интервал $I \subset [t_0, t_1]$, что $y(t) \in I$, $t \in I$. Справедливость этого свойства вытекает из следующих рассуждений. Пусть (5.4) — подсистема, соответствующая многообразию N. Рассмотрим решение $x(t)$ системы (5.4), соответствующее управлению $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, причем $x(t_0) = \nu^{-1}(y(t_0))$. Это решение определено на некотором полуоткрытом справа интервале $I \subset [t_0, t_1]$. По определению подсистемы $y(t) = \nu(x(t)) \in N$, $t \in I$.

Многообразие N называется инвариантным, если любое решение системы (5.1), пересекающее N, целиком принадлежит N. Справедливо утверждение, аналогичное предложению 1.48: замкнутое многообразие является инвариантным многообразием системы (5.1) тогда и только тогда, когда ассоциированные поля касаются этого многообразия.

Итак, $\mathcal{P}$-многообразия по фазовым переменным — это локально инвариантные многообразия системы (5.1).

Между решениями системы (5.1), лежащими на локально инвариантном многообразии N, и решениями подсистемы (5.4) имеется взаимно однозначное соответствие, осуществляемое диффеоморфизмом ν. Следовательно, вопрос о нахождении решений системы (5.1), проходящих через многообразие N, сводится к вопросу о нахождении решений подсистемы по фазовым переменным (5.4), фазовое пространство которой имеет размерность, вообще говоря, меньшую, чем n, и для которой данный вопрос проще, чем для исходной системы.

Существование локально инвариантных могообразий системы (5.1), согласно разделу 1.3, определяется ассоциированной алгеброй Ли $\mathfrak{f}^*$, т.е. минимальной алгеброй Ли, содержащей ассоциированное семейство полей $\mathfrak{f}$. Если $\dim \Delta_{\mathfrak{f}^*}(y_0) = p < n$, где $\Delta_{\mathfrak{f}^*}$ — распределение, порождаемое алгеброй $\mathfrak{f}^*$, y_0 — регулярная точка этого распределения, то существуют (локально) инвариантные многообразия группы G, проходящие через y_0, любой размерности от p до n. В соответствии с теоремой 1.7 любое локально инвариантное многообразие размерности r, $p \leqslant r < n$, можно локально представить в виде (1.52), где $q = n \Leftrightarrow r, m = n \Leftrightarrow p$, а функции $\varphi^k(y), k = 1, \ldots, m$ составляют полный набор интегралов семейства $\mathfrak{f}$. В окрестности точки y_0 определено семейство локально инвариантных многообразий минимальной размерности p

$$\varphi^k(y) \Leftrightarrow c^k = 0, \quad k = 1, \ldots, m = n \Leftrightarrow p, \tag{5.5}$$

где $c^k = \mathrm{const}$.

Рассмотрим связь сужения в категории $\mathcal{ASP}$ с факторизацией специального вида (4.20) в категории $\mathcal{ASP}$. Сделаем (локальную) замену координат

$$x^k = \varphi^k(y), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{5.6}$$

где $\varphi^k(y), k = 1, \ldots, m$ — полный набор интегралов $\mathfrak{f}$, а $\varphi^k(y), k = m + 1, \ldots, n,$ — произвольные функции, выбранные таким образом, чтобы замена координат (5.6) была невырожденной. В новой системе координат семейство многообразий (5.5) выглядит так:

$$x^k \Leftrightarrow c^k = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{5.7}$$

а система (5.1) приобретает следующий вид:

$$\dot{x}^k = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{5.8}$$

$$\dot{x}^l = \overline{f}^l_0(x) + \overline{f}^l_\alpha(x) u^\alpha, \quad l = m + 1, \ldots, n. \tag{5.9}$$

Если взять некоторое многообразие из семейства (5.7), фиксируя постоянные $c^k_0, k = 1, \ldots, m$, то соответствующая подсистема системы (5.8), (5.9) на этом многообразии представляет собой систему (5.9), в которую вместо $x^1, \ldots, x^m$ подставлены постоянные $c^1_0, \ldots, c^m_0$.

Система (5.8) является факторсистемой специального вида (4.20), причем классами $\mathcal{F}$-отношения эквивалентности являются $\mathcal{P}$-многообразия, входящие в семейство (5.5).

Возможности для сужения, так же, как и для факторизации, в категории $\mathcal{ASP}$ довольно ограничены. Если система (5.1) находится в общем положении, т.е. $\dim \Delta_{\mathfrak{f}^*}(y) = n$, $\forall y \in M$, то локально инвариантных многообразий или, иначе говоря, $\mathcal{P}$-многообразий в категории ASP размерности $r < n$ не существует (это следует из равенства (1.50)). Заметим, что в этом случае, согласно теореме 1.28

(Рашевского—Чжоу), ассоциированная группа системы (5.1) (при условии связности M) является транзитивной.

Замечание 5.1. Минимальная алгебра Ли, содержащая поля семейства $\mathfrak{f}' = \{f_u = f_0 + fu, u \in \mathbb{R}^n\}$, совпадает с $\mathfrak{f}^*$. Поэтому если система (5.1) находится в общем положении, а M — связная область, то, согласно теореме 1.28 (Рашевского—Чжоу), группа диффеоморфизмов, порождаемая семейством $\mathfrak{f}'$, является транзитивной. Следовательно, из любой точки $y_0 \in M$ можно попасть в любую другую точку $y_1 \in M$, двигаясь по интегральным траекториям полей семейства $\mathfrak{f}'$, т.е. по решениям управляемой системы (5.1), соответствующим постоянным управлениям. При этом разрешается движение как в положительном направлении времени, так и в отрицательном. В этом случае, говорят, что система (5.1) обладает свойством слабой управляемости. По поводу разных определений управляемости см. [11, 59] .

Что касается подсистем по управлениям системы (5.1), то, в соответствии с разделом 2.2, каждая подсистема

$$\dot{y} = g_0(y) + g(y)v, \quad y \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}^s, \tag{5.10}$$

получается ограничением системы (5.1) на некоторую область $U \subset M$ и заменой управлений (вообще говоря, вырожденной)

$$u = \lambda_0(y) + \lambda(y)v, \quad y \in U \subset \mathbb{R}^n \tag{5.11}$$

(т.е. в (5.10) $g_0 = f_0 + f\lambda_0, g = f\lambda$). Таким образом, множество решений системы (5.10) составляет часть множества решений системы (5.1), лежащих в U.

Переходим теперь к сужению в категории $\mathcal{AS}$.

Справедливо следующее утверждение, согласно которому каждый морфизм, определяющий подсистему общего вида (т.е. в категории $\mathcal{AS}$), допускает (по крайней мере, локально) представление в виде композиции морфизма по фазовым переменным и морфизма по управлениям.

Предложение 5.2. *Пусть система* (5.2) *является подсистемой аффинной системы* (5.1). *Тогда в окрестности каждой точки* y_0 *существует подсистема по управлениям* (5.10) *системы* (5.1), *для которой система* (5.2), *ограниченная на некоторую окрестность, является подсистемой по фазовым переменным.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку y_0. Согласно следствию 2.2 к предложению 2.2, морфизму ν системы (5.2) в систему

(5.1) локально соответствует замена управлений

$$u = \mu_0(x) + \mu(x)v, \quad x \in V \subset L, \tag{5.12}$$

причем $\nu^{-1}(y_0) \in V$. Пусть $N = \nu(V)$ — $\mathcal{P}$-многообразие, соответствующее подсистеме, являющейся ограничением системы (5.2) на V. Так как $\nu^{-1}\colon N \to V$ — гладкое отображение, то для точки $y_0 \in N$ существует такая окрестность $U \subset M$ и такое гладкое отображение $\gamma\colon U \to L$, что $\gamma(y) = \nu^{-1}(y), y \in U \cap N$. Рассмотрим в области U подсистему по управлениям (5.10) системы (5.1), которая получается из (5.1) ограничением на U и заменой управлений (5.11), где

$$\lambda_0(y) = \mu_0(\gamma(y)), \quad \lambda(y) = \mu(\gamma(y)), \quad y \in U.$$

Покажем, что управляемая система, которая получается ограничением (5.2) на область $W = \nu^{-1}(U \cap N) \subset L$, является подсистемой по фазовым переменным системы (5.10). Пусть $x(t)$ — решение системы (5.2), соответствующее управлению $v(t)$. Тогда $y(t) = \nu(x(t))$ — решение системы (5.1), соответствующее управлению $u(t) = \mu_0(x(t))+$ $+\mu(x(t))v(t)$. Заметим, что $x(t) = \gamma(y(t)) = \nu^{-1}(y(t))$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\dot y(t) = f_0(y(t)) + f(y(t))v(t) = f_0(y(t)) + f(y(t))(\mu_0(x(t)) + \mu(x(t))v) = \\ = f_0(y(t)) + f(y(t))(\lambda_0(y(t)) + \lambda(y(t))v(t)) = g_0(y(t)) + g(y(t))v(t).\end{aligned}$$

Таким образом, $y(t)$ — решение системы (5.10), соответствующее управлению $v(t)$, т.е. ν — морфизм по фазовым переменным системы (5.2), ограниченной на W, в систему (5.10). □

Из предложения 5.2 вытекает, что вопрос о существовании подсистем общего вида сводится к вопросу о существовании замен управлений, которые приводят к подсистемам по управлениям, имеющим подсистемы по фазовым переменным или, иначе говоря, имеющим инвариантные многообразия. Таким образом, в принципе, можно искать замены управлений (5.11) из условия, чтобы для возникшей подсистемы (5.10)

$$\dim \Delta_{\mathfrak{g}^*} < n, \tag{5.13}$$

где $\mathfrak{g}$ — ассоциированное семейство полей системы (5.10). Это приводит к дифференциальным уравнениям в частных производных относительно $\lambda^\alpha_\beta(y)$. Ситуация здесь аналогична ситуации, возникающей при нахождении факторсистем, которая рассмотрена в предыдущей главе. Напомним, что морфизмы, определяющие факторизацию, также допускают представление в виде композиции морфизма по управлениям и морфизма по фазовым переменным. Исходя из этого, как отмечалось, можно искать замены управлений (4.41), приводящие к факторизации, используя условия существования факторсистем по фазовым переменным, что приводит к дифференциальным уравнениям в частных производных относительно $\mu_\beta^\alpha(y)$.

Приведем условие существования подобъектов в терминах $\mathcal{P}$-многообразий. Подчеркнем, что в это условие не входят явно замены управлений и что это условие имеет чисто геометрический характер. Напомним также, что по известным морфизмам замены управлений находятся чисто алгебраическими средствами.

Теорема 5.1. *Если система* (5.1) *допускает сужение на многообразие N, то на N существует такое регулярное аффинное распределение A, что*

$$A(y) \subset F(y), \quad \forall y \in N, \tag{5.14}$$

где F — ассоциированное аффинное распределение системы (5.1). *Если на многообразии $N \subset M$ существует такое регулярное аффинное распределение A, что выполняется* (5.14), *то система* (5.14) *допускает локальное сужение на N в каждой точке N.*

Доказательство. Пусть система (5.1) допускает сужение на многообразие N. $\mathcal{P}$-Многообразие N по определению является элементарным. Пусть (5.2) — подсистема системы (5.1), определенная для карты (L, ν). Если H — ассоциированное аффинное распределение системы (5.2), то на многообразии N определено аффинное распределение $A = \nu_* H$, т.е.

$$A\colon y \in N \mapsto A(y) = \nu_*|_{\nu^{-1}(y)} H(\nu^{-1}(y)). \tag{5.15}$$

Так как H — регулярное аффинное распределение, а ν — диффеоморфизм, то A — регулярное аффинное распределение на N. В силу теоремы 2.1 $\nu_*|_x H(x) \subset F(\nu(x)), \forall x \in L$. Отсюда и из (5.15) следует (5.14).

Обратно, пусть на многообразии N (не обязательно элементарном) существует регулярное аффинное распределение A, удовлетворяющее (5.14). Возьмем произвольную точку $y_0 \in N$. Рассмотрим некоторое базисное семейство полей $g_\beta, \beta = 0, 1, \ldots, s$, аффинного распределения A (напомним, что предложение 1.16 верно и для аффинных распределений, заданных на многообразиях). Это семейство определено на некотором открытом подмногообразии $N' \subset N$. Можно считать, что это многообразие элементарное (в противном случае его можно сузить). Рассмотрим произвольную карту (L, ν) многообразия N'. В области L определено индуцированное аффинное распределение $\overline{A} = \nu_*^{-1} A$, т.е.

$$\overline{A}\colon x \in L \mapsto \overline{A}(x) = \nu_*^{-1}|_{\nu(x)} A(\nu(x)).$$

(Точнее было бы писать $A_{N'}$ и $\overline{A_{N'}}$.) Так как ν — диффеоморфизм, то $\overline{A}$ — регулярное аффинное распределение, причем его базисным семейством является индуцированное семейство $\overline{g}_\beta, \beta = 0, 1, \ldots, s$. Построим с помощью этих полей аффинную управляемую систему

$$\dot{x} = \overline{g}_0(x) + g_\beta(x)v^\beta, \quad x \in L, \quad v \in \mathbb{R}^s. \tag{5.16}$$

Так как $\nu_*|_x\overline{A}(x) = A(\nu(x)) \subset F(\nu(x))$, то, согласно теореме 2.1, система (5.16) является подсистемой системы (5.1). □

Каждое регулярное аффинное распределение A, удовлетворяющее условию (5.14), будем называть аффинным $\mathcal{P}$-распределением системы (5.1). (Если A является распределением, то можно говорить о $\mathcal{P}$-распределении.)

В процессе доказательства теоремы 5.1 при построении подобъекта $(\overline{S}, \nu)$, где $\overline{S}$ — подсистема (5.16), мы воспользовались одной картой (L, ν) $\mathcal{P}$-многообразия N', соответствующего аффинному $\mathcal{P}$-распределению A. Если взять другую карту (L_1, ν_1) многообразия N', то получим другой подобъект $(\overline{S}_1, \nu_1)$. Эти подобъекты эквивалентны (определение эквивалентности подобъектов приведено в разделе 1.2). Действительно, рассмотрим диффеоморфизм $\omega = \nu_1^{-1}\nu$ области L на L_1. Имеем

$$\overline{A}_1 = (\nu_1^{-1})_*A = (\nu_1^{-1})_*\nu_*\overline{A} = \omega_*\overline{A}, \quad \overline{A} = (\omega^{-1})_*\overline{A}_1,$$

где $\overline{A}, \overline{A}_1$ — ассоциированные аффинные распределения подсистем $\overline{S}, \overline{S}_1$. Следовательно, ω — изоморфизм системы $\overline{S}$ в систему $\overline{S}_1$, а ω^{-1} является изоморфизмом системы $\overline{S}_1$ в систему $\overline{S}$, причем $\nu = \nu_1\omega$ и $\nu_1 = \nu\omega^{-1}$, т.е. подобъекты $(\overline{S}, \nu)$ и $(\overline{S}_1, \nu_1)$ эквивалентны. Таким образом, каждое аффинное $\mathcal{P}$-распределение порождает класс эквивалентных подобъектов.

Замечание 5.2. Аффинное $\mathcal{P}$-распределение порождает класс эквивалентных подобъектов неоднозначно, ибо соответствующее $\mathcal{P}$-многообразие определено неоднозначно. Для достижения однозначного соответствия нужно переходить к росткам аффинных $\mathcal{P}$-распределений в точке и классам локально эквивалентных подобъектов (в соответствующих точках). Эта ситуация аналогична связи между $\mathcal{F}$-распределениями и факторобъектами (см. замечание 4.1).

Пусть N — некоторое многообразие, принадлежащее фазовому пространству M системы (5.1). Согласно теореме 5.1, для того чтобы выяснить, является или нет многообразие N $\mathcal{P}$-многообразием системы (5.1), естественно построить ограничение F на N, т.е. отображение

$y \in N \mapsto F|_N(y) = F(y) \cap TN_y$. Каждое аффинное $\mathcal{P}$-распределение A, определенное на N, должно принадлежать $F|_N$. Если $F|_N$ является регулярным аффинным распределением, то соответствующие подобъекты и подсистемы будем называть индуцированными.

Проведем соответствующие вычисления по построению $F|_N$ для m-мерного многообразия N, заданного в виде графика

$$y^a \Leftrightarrow \theta^a(y^1, \ldots, y^m) = 0, \quad a = m+1, \ldots, n, \tag{5.17}$$

$$\overline{y} = (y^1, \ldots, y^m) \in V \subset \mathbb{R}^m.$$

Согласно предложению 1.8, векторы из $F(y)$, принадлежащие TN_y, соответствуют тем значениям $u \in \mathbb{R}^r$, для которых

$$(\Phi^a_0(y) + u^\alpha \Phi^a_\alpha(y))|_{y \in N} = 0, \tag{5.18}$$

$$a = m+1, \ldots, n, \quad \alpha = 1, \ldots, r,$$

где $\Phi^a_\beta = f^i_\beta \partial/\partial y^i (y^a \Leftrightarrow \theta^a(\overline{y}))$, $\beta = 0, 1, \ldots, r$. Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{rank} f = r$, т.е. система (5.1) неприводима (в противном случае можно перейти к локально эквивалентной неприводимой системе, которая локально имеет одинаковые аффинные $\mathcal{P}$-распределения).

Введем функциональную матрицу $C(\overline{y}) = ||c^a_\alpha(\overline{y})||^{a=m+1,\ldots,n}_{\alpha=1,\ldots,r}$, где $c^a_\alpha(\overline{y}) = \Phi^a_\alpha(\overline{y}, \theta(\overline{y}))$, и столбец $b(\overline{y}) = ||b^a(\overline{y})||$, $a = m+1, \ldots, n$, где $b^a(\overline{y}) = \Phi^a_0(\overline{y}, \theta(\overline{y}))$.

В этих обозначениях соотношения (5.18) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно u

$$C(\overline{y})u = b(\overline{y}), \quad \overline{y} \in V \subset \mathbb{R}^m. \tag{5.19}$$

Дадим следующее определение. Точку $y_0 \in N$ будем называть регулярной точкой многообразия N относительно системы (5.1), если ранги матриц $C(\overline{y})$, $(C(\overline{y})|b(\overline{y}))$ постоянны в некоторой окрестности точки $\overline{y}_0 \in V \subset \mathbb{R}^m$ (эта точка определяется из условия $y_0 = (\overline{y}_0, \theta(\overline{y}_0))$). Очевидно, что множество регулярных точек является открытым и всюду плотным подмножеством многообразия N (в топологии N).

Дальнейшие рассуждения носят локальный характер в окрестности регулярной точки y_0 многообразия N относительно системы (5.1). Пусть в окрестности точки $\overline{y}_0$

$$\operatorname{rank} C(\overline{y}) = \operatorname{rank}(C(\overline{y})|b(\overline{y})). \tag{5.20}$$

Построим на некотором открытом подмногообразии $N' \subset N$, содержащем y_0, аффинное распределение $F|_{N'}$, которое будет являться аффинным $\mathcal{P}$-распределением системы (5.1). (Заметим, что N' — m-мерное многообразие, диффеоморфное некоторой окрестности $V' \subset V$ точки $\overline{y}_0$.) В силу (5.20) в некоторой окрестности совместна система алгебраических уравнений (5.19). Пусть $\operatorname{rank} C(\overline{y}_0) = p$. Тогда в окрестности $V' \subset V$ общее решение системы (5.19) можно представить в виде

$$u = \lambda_0(\overline{y}) + \lambda_\beta(\overline{y})v^\beta = \lambda_0(\overline{y}) + \lambda(\overline{y})v,$$

где $\lambda_0(\overline{y})$ — частное решение системы (5.19), $\lambda_\beta(\overline{y})$, $\beta = 1, \ldots, l$, — фундаментальная система решений однородной системы (5.19), $v \in \mathbb{R}^l$, $l = n \Leftrightarrow p$. Ранг матрицы $\lambda(\overline{y})$ постоянен и равен l. Введем вектор-функции

$$h_0(y) = f_0(y) + f(y)\lambda_0(\overline{y}), \tag{5.21}$$

$$h_\beta(y) = f(y)\lambda_\beta(\overline{y}), \quad y \in N', \quad \beta = 1, \ldots, l, \tag{5.22}$$

определенные в точках многообразия $N' \subset N$ (соответствующего окрестности $V' \subset V$). Из построения вытекает, что вектор-функции (5.21), (5.22) являются векторными полями на многообразии N', т.е. $h_\beta(y) \in \in TN'_y$, $y \in N'$. Ранг матрицы h, столбцами которой являются поля (5.22), равен l. Следовательно, на многообразии N' поля (5.21), (5.22) определяют регулярное аффинное распределение, которое очевидно совпадает с $F_{N'}$, т.е.

$$F|_{N'}(y) = h_0(y) + \operatorname{span}\{h_\beta(y), \beta = 1, \ldots, l\}, \quad y \in N'.$$

Аффинное распределение $F|_{N'}$ является аффинным $\mathcal{P}$-распределением системы (5.1), которому соответствует индуцированная подсистема

$$\dot{\overline{y}} = \overline{h}_0(\overline{y}) + \overline{h}_\beta(\overline{y})v^\beta, \quad \overline{y} \in V' \subset \mathbb{R}^m, \quad v \in \mathbb{R}^l, \tag{5.23}$$

где $\overline{h}_\beta(\overline{y})$ — индуцированные поля полей $h_\beta(y)$, т.е. $\overline{h}^k_\beta(\overline{y}) = h^k_\beta(\overline{y}, \theta(\overline{y}))$.

Если (5.20) не выполняется, то очевидно, что аффинные $\mathcal{P}$-распределения, определенные на открытых подмногообразиях $N' \subset N$, содержащих данную точку y_0, не существуют. Итак, доказана

Теорема 5.2. *Пусть y_0 — регулярная точка многообразия* (5.17) *относительно системы* (5.1). *Система* (5.1) *допускает локальное сужение на многообразие* (5.17) *в точке y_0 тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки $\overline{y}_0$ выполняется* (5.20).

Замечание 5.3. Для симметрических систем (5.1) условие совместности (5.20) выполняется всегда.

Замечание 5.4. Если y_0 не является регулярной точкой и условие совместности (5.20) выполняется в некоторой окрестности $\overline{y}_0$, то для каждой точки y некоторого открытого подмногообразия N', содержащего y_0, множество векторов $F|_{N'}(y)$ не пусто. Однако аффинное распределение $F|_{N'}$ может быть нерегулярным. В этом случае $F|_{N'}$ не является аффинным $\mathcal{P}$-распределением и не определяет подсистему. Вместе с тем, могут существовать аффинные $\mathcal{P}$-распределения, принадлежащие $F|_{N'}$. Например, в случае симметрических систем всегда существует по крайней мере одно $\mathcal{P}$-распределение, а именно $y \mapsto \{0\} \subset TN_y$, которое, правда, не представляет практического интереса.

5.2. Некоторые типы подсистем

Перейдем к рассмотрению некоторых типов подсистем. Рассматриваемые типы подсистем обуславливаются некоторыми типами $\mathcal{P}$-многообразий. При этом мы опираемся на теорему 5.1. Поэтому введение этих $\mathcal{P}$-многообразий и соответствующих подсистем является результатом чисто геометрических выводов, основанных на условии (5.14).

Первый тип $\mathcal{P}$-многообразий дает хорошо известное в дифференциальной геометрии понятие интегрального многообразия (см. раздел 1.3). Рассмотрим аффинную систему (5.1). Пусть F — ассоциированное аффинное распределение этой системы. Многообразие N, лежащее в фазовом пространстве M, будем называть интегральным многообразием системы (5.1), если N является интегральным многообразием F, т.е. если

$$TN_y \subset F(y), \quad \forall y \in N. \tag{5.24}$$

Оказывается, что вопрос о существовании интегральных многообразий системы (5.1) равносилен вопросу о существовании тривиальных подсистем (5.2) системы (5.1). (Напомним, что система (5.2) называется тривиальной, если $\operatorname{rank} h = m$. Каждая тривиальная система эквивалентна системе вида $\dot{x} = w$.) Именно, справедлива

Теорема 5.3. *Система* (5.1) *допускает сужение на многообразие N, причем среди соответствующих подсистем имеется тривиальная, тогда и только тогда, когда N является интегральным многообразием системы* (5.1).

Доказательство. Пусть система (5.1) допускает сужение на многообразие N, причем подсистема (5.2) является тривиальной. Система (5.2) является симметрической, причем ее ассоциированным распределением является касательное расслоение TL области L. Согласно доказательству теоремы 5.1, соответствующим аффинным распределением A в (5.14) будет распределение $\nu_* TL$, которое является касательным расслоением TN многообразия N. Поэтому из (5.14) вытекает (5.24). Обратно, пусть N — интегральное многообразие. Следовательно, выполняется (5.14), где $A = TN$. В соответствии с доказательством теоремы 5.1 для произвольной карты (L, ν) строится подсистема (5.2), для которой ассоциированным аффинным распределением является $\nu_*^{-1} A = \nu_*^{-1} TN = TL$, т.е. касательное расслоение области L. (В данном случае это построение осуществляется глобально.) Поэтому система (5.2) является тривиальной. $\square$

Замечание 5.5. Если N — интегральное многообразие, то каждое регулярное аффинное распределение на N является аффинным $\mathcal{P}$-распределением системы (5.1). Тривиальные подобъекты (т.е. подобъекты с тривиальной подсистемой) соответствуют максимальному аффинному $\mathcal{P}$-распределению, равному $F|_N = TN$.

Замечание 5.6. Как уже говорилось в замечании 3.3, для тривиальной подсистемы (5.2) справедливо следующее очевидное утверждение: любая непрерывная C^1-гладкая кривая $x(t)$ является решением. Отсюда следует, что любая непрерывная C^1-гладкая кривая $y(t)$, лежащая на интегральном многообразии N системы (5.1), является решением системы (5.1). Это вытекает из того факта, что между кривыми на N и кривыми в открытом множестве L имеется диффеоморфное соответствие. Это свойство интегрального многообразия является важным для задач управления.

Пример 5.1. Рассмотрим симметрическую систему (5.1), для которой $\dim F = n \Leftrightarrow 1, \dim CF^{\perp} = n = 2k+1, k > 0$. Согласно теореме 3.4, система (5.1) эквивалентна системе вида

$$\begin{aligned} \dot{x}^j &= v^j \\ \dot{p}^i &= w^i \\ \dot{z} &= p^1 w^1 + \ldots + p^k w^k, \quad i, j = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Базисная система Пфаффа системы (5.25) (т.е. базисная система ассоциированного кораспределения системы (5.25)) состоит из одного уравнения

$$dz \Leftrightarrow p^1 dx^1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow p^k dx^k = 0. \tag{5.26}$$

Вопрос о существовании интегральных многообразий уравнения (5.26) является решенным вопросом в дифференциальной геометрии [27]. Именно, известно, что наибольшая возможная размерность интегрального многообразия равна k, причем такие многообразия существуют и называются лежандровыми многообразиями. Каждое интегральное многообразие принадлежит некоторому лежандрову многообразию. Важным обстоятельством является то, что лежандровы многообразия описываются чисто алгебраическим образом. Точнее, для любого разбиения множества индексов $\{1, \ldots, k\}$ на непересекающиеся подмножества I и J и для любой функции $S(x^i, p^j)$ от k переменных $x^i, i \in I$, и $p^j, j \in J$, формулы

$$\begin{aligned} p^i &= \partial S/\partial x^i, \\ x^j &= -\partial S/\partial p^j, \\ z &= S - p^j(\partial S/\partial p^j) \end{aligned} \tag{5.27}$$

задают интегральное многообразие уравнения (5.26), причем любое интегральное многообразие размерности k можно представить в виде (5.27). Все сказанное относится и к управляемой системе (5.25).

Пример 5.2. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} &\dot y_1 = u_1 + y_5 u_3, \\ &\dot y_2 = u_2 + y_4 u_3, \\ &\dot y_3 = -y_4 u_2 + u_3, \\ &\dot y_4 = y_2^2 u_1 + y_3 u_2 + (y_3 y_4 + y_5 y_2^2) u_3, \\ &\dot y^5 = y_3 u_1 + y_1^2 u_2 + (y_3 y_5 + y_4 y_1^2) u^3, \\ &y \in \mathbb{R}^5, \quad u \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Исследуем вопрос о существовании двумерных интегральных многообразий вида

$$y_a - \theta_a(y_1, y_2) = 0, \quad a = 3, 4, 5. \tag{5.29}$$

Базисная система Пфаффа системы (5.28) имеет вид

$$dy_4 - 4y_2^2 dy_1 - y_3 dy_2 = 0, \quad dy_5 - y_3 dy_1 - y_1^2 dy_2 = 0. \tag{5.30}$$

В соответствии с общей теорией [37] для нахождения интегральных многообразий следует построить для системы Пфаффа (5.30) продолженную систему Пфаффа. Для этой цели вычислим внешние дифференциалы форм (5.30) и приравняем их нулю:

$$2y_2 dy_2 \wedge dy_1 + dy_3 \wedge dy_2 = 0, \quad dy_3 \wedge dy_1 + 2y_1 dy_1 \wedge dy_2 = 0. \tag{5.31}$$

Продолженная система Пфаффа получается добавлением к (5.30) уравнения $dy_3 + \alpha dy_1 + \beta dy_2 = 0$ с неопределенными функциями α и β, которые определяются после подстановки в (5.31). В результате получим $\alpha = -2y_2$, $\beta = -2y_1$ и уравнение

$$dy_3 - 2y_2 dy_1 - 2y_1 dy_2 = 0. \tag{5.32}$$

Итак, продолженная система Пфаффа имеет вид (5.30), (5.32). Нетрудно убедиться в том, что эта система является вполне интегрируемой. Интегральные многообразия системы (5.30), (5.32) максимальной размерности (т.е. те, которые задаются полным набором интегралов) являются интегральными многообразиями системы (5.30). Решив соответствующие обыкновенные дифференциальные уравнения, найдем интегралы системы (5.30), (5.32) $\varphi_1 = y_3 - 2y_1y_2, \varphi_2 = y_4 - y_2(y_3 - y_1y_2), \varphi_3 = y_5 - y_1(y_3 - y_1y_2)$. Следовательно, интегральные многообразия вида (5.29) существуют, и вся их совокупность описывается так:

$$\begin{aligned} &y_3 - 2y_1y_2 - c_1 = 0, \\ &y_4 - y_2(y_1y_2 + c_1) - c_2 = 0, \\ &y_5 - y_1(y_1y_2 + c_1) - c_3 = 0, \quad c_i = \mathrm{const}\,. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Перейдем теперь к другому типу $\mathcal{P}$-многообразий и соответствующих подсистем. Пусть F — аффинное распределение, заданное в области $M \subset \mathbb{R}^n$ и являющееся ассоциированным аффинным распределением системы (5.1). Многообразие $N \subset M$ будем называть почти интегральным многообразием аффинного распределения F и системы (5.1), если

$$TN_y \subset \mathrm{Span}\, F(y), \quad \forall y \in N, \tag{5.34}$$

$$TN_y \not\subset \mathbf{L}_F(y), \qquad \forall y \in N. \tag{5.35}$$

Выполнение условия (5.34) означает, что N является интегральным многообразием распределения $\mathrm{Span}\, F$, а выполнение условия (5.35) означает, что N не является интегральным многообразием распределения $\mathbf{L}_F$.

Существование почти интегральных многообразий системы (5.1) тесно связано с существованием специального типа подсистем (5.2), для которых

$$\dim \mathbf{L}_H(x) = \mathrm{rank}\, h(x) = n - 1, \quad \forall x \in L, \tag{5.36}$$

$$\dim \mathrm{Span}\, H(x) = \mathrm{rank}(h_0(x)|h(x)) = n, \quad \forall x \in L, \tag{5.37}$$

где H — ассоциированное аффинное распределение системы (5.2).

Систему (5.2), для которой выполняется (5.36), (5.37), будем называть почти тривиальной. (Напомним, что для тривиальной управляемой системы $\dim \mathbf{L}_H(x) = \dim \mathrm{Span}\, H(x) = n, \forall x \in L$.) Заметим, что почти тривиальная система не является симметрической, ибо

$$\mathbf{L}_H(x) \neq \mathrm{Span}\, H(x), \quad \forall x \in L. \tag{5.38}$$

Условимся аффинное распределение H, для которого выполняется (5.38), называть строго аффинным распределением.

Важным свойством почти тривиальных систем является то, что, согласно теореме 3.4, каждая почти тривиальная система с фазовым пространством размерности n (локально) эквивалентна одной из систем (3.26)–(3.29), т.е. имеется конечное число канонических форм. (Напомним, что для тривиальных систем этот факт тоже справедлив: имеется одна каноническая форма $\dot{x} = v$.)

Связь между почти интегральными многообразиями и почти тривиальными системами выражает

Теорема 5.4. *Пусть ассоциированное аффинное распределение F управляемой системы* (5.1) *является строго аффинным распределением (т.е. $\mathbf{L}_F(y) \neq \operatorname{Span} F(y)$, $\forall y \in N$). Если система* (5.1) *допускает сужение на многообразие N, причем среди соответствующих подсистем имеется почти тривиальная, то N является почти интегральным многообразием аффинного распределения F. Если N является почти интегральным многообразием аффинного распределения F, то система* (5.1) *допускает локальное сужение на N в каждой точке N, причем среди соответствующих подсистем имеется почти тривиальная.*

Доказательство. Пусть система (5.1) допускает сужение на многообразие N и для некоторой карты (L, ν) существует почти тривиальная подсистема (5.2). Следовательно, $\nu_* H(x) \subset F(\nu(x)), \forall x \in L$, где H — ассоциированное аффинное распределение системы (5.2). Поэтому

$$\nu_* \operatorname{Span} H(x) \subset \operatorname{Span} F(\nu(x)), \forall x \in L. \tag{5.39}$$

С другой стороны, $\operatorname{Span} H = TL$ и $\nu_* TL = TN$. Отсюда вытекает справедливость (5.34). Докажем (5.35). Достаточно для каждой точки $y \in N$ найти такой вектор $q \in TN_y$, что $q \notin \mathbf{L}_F(y)$. В качестве вектора q можно взять вектор $\nu_*|_{\nu^{-1}(y)} l$, где l — произвольный вектор, принадлежащий аффинному подпространству $H(\nu^{-1}(y))$. Действительно, $q = \nu_*|_{\nu^{-1}(y)} l \in F(y)$. Так как F — строго аффинное распределение, то $q \notin \mathbf{L}_F(y)$.

Пусть теперь многообразие N размерности m является почти интегральным многообразием системы (5.1). Рассмотрим на N произвольное семейство m линейно несвязанных векторных полей $g_\beta(y), \beta = 0, 1, \ldots, m \Leftrightarrow 1, y \in N$. Согласно (5.34),

$$g_\beta(y) = \lambda_\beta^\alpha(y) f_\alpha(y), \quad y \in N, \quad \beta = 0, 1, \ldots, m \Leftrightarrow 1, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, r,$$

где $\lambda_\beta^\alpha(y)$ — гладкие функции на N. Из (5.35) вытекает, что для каждой точки $y_0 \in N$ среди функций $\lambda_\beta^0(y), \beta = 0, 1, \ldots, m \Leftrightarrow 1$, найдется функция, отличная от нуля в точке y_0 и на некотором открытом подмногообразии $N' \subset N$, содержащем эту точку. Отсюда легко следует, что на многообразии N' существует линейно несвязанное семейство полей $g'_\beta, \beta = 0, 1, \ldots, m \Leftrightarrow 1$, которое получается из $g_\beta, \beta = 0, 1, \ldots, m \Leftrightarrow 1$, линейным невырожденным преобразованием и удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} g'_0(y) &= f_0(y) + \mu_0^\gamma(y) f_\gamma(y), \\ g'_\beta(y) &= \mu_\beta^\gamma(y) f_\gamma(y), \end{aligned} \tag{5.40}$$

где $\beta = 1, \ldots, m \Leftrightarrow 1$, $\gamma = 1, \ldots, r$, а $\mu_\beta^\gamma(y)$ — гладкие функции на N'. Очевидно, что аффинное распределение

$$A : y \in N' \mapsto g'_0(y) + \operatorname{span}\{g'_\beta(y), \beta = 1, \ldots, m \Leftrightarrow 1\}$$

удовлетворяет условию (5.14) теоремы 5.1. Следовательно, N' является $\mathcal{P}$-многообразием, а A — аффинным $\mathcal{P}$-распределением системы (5.1). Далее, так же, как и при доказательстве теоремы 5.1, возьмем произвольную карту (L, ν) многообразия N'. Рассмотрим в области L поля $h_\beta = \nu_*^{-1} g'_\beta, \beta = 0, 1, \ldots, m \Leftrightarrow 1$, и построим с их помощью управляемую систему (5.2) (для которой $s = m \Leftrightarrow 1$). Для этой системы ассоциированным аффинным распределением является $H = \nu_*^{-1} A$. Поэтому система (5.2) является подсистемой системы (5.1). Из линейной несвязанности полей $g'_\beta, \beta = 0, 1, \ldots, m \Leftrightarrow 1$, вытекает линейная несвязанность полей $h_\beta, \beta = 0, 1, \ldots, m \Leftrightarrow 1$. Следовательно, система (5.2) является почти тривиальной. □

Замечание 5.7. Построенное в доказательстве теоремы 5.4 аффинное $\mathcal{P}$-распределение A совпадает с $F|_{N'}$. Действительно, пусть для точки $y \in N'$ $\xi \in F(y) \cap TN'_y$. Так как поля $g'_\beta, \beta = 0, 1, \ldots, m \Leftrightarrow 1$, являются линейно несвязанными, то $\xi = \lambda^\beta g'_\beta$. Из (5.40) следует, что

$$g'_0(y) \in F(y), \quad g'_\beta(y) \in \mathbf{L}_F(y), \quad \beta = 1, \ldots, m \Leftrightarrow 1.$$

Поэтому $\lambda^0 = 1$. Следовательно, $\xi \in A(y)$. Таким образом, соответствующая почти тривиальная подсистема (5.2) является индуцированной системой системы (5.1).

Пример 5.3. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\dot y_1 = v_1, \\ &\dot y_2 = v_2, \\ &\dot y_3 = y_5 y_2, \\ &\dot y_4 = y_2^2 v_1 + y_3 v_2, \\ &\dot y_5 = y_3 v_1 + y_1^2 v_2, \\ &y \in M = \{y \in \mathbb{R}^5 \colon y_i \neq 0, i = 1, \ldots, 5\}, \quad u \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Ассоциированные векторные поля f_0, f_1, f_2 являются линейно несвязанными, поэтому ассоциированное аффинное распределение F является строго аффинным распределением. Заметим, что система (5.41) является подсистемой по управлениям системы (5.28) и получается из (5.28) ограничением на M и некоторой заменой управлений (которую нетрудно выписать). Легко видеть, что $\operatorname{Span} F(y) = G(y)$ в каждой точке $y \in M$ (здесь G — ассоциированное распределение системы (5.28)). Поэтому многообразия (5.33) являются интегральными многообразиями распределения $\operatorname{Span} F$. Выберем из этого семейства многообразие N, соответствующее $c_i = 0$,

$$y_3 - 2y_1y_2 = 0, \quad y_4 - y_1y_2^2 = 0, \quad y_5 - y_1^2y_2 = 0. \tag{5.42}$$

Многообразие N является почти интегральным многообразием системы (5.41). В этом можно убедиться из следующих соображений. Многообразие N является двумерным. Кроме того,

$$\dim \mathbf{L}_F(y) = \dim \operatorname{span}\{f_1(y), f_2(y)\} = 2, \quad y \in M.$$

Поэтому условие (5.35) в данном случае эквивалентно тому, что $\mathbf{L}_F$ не касается многообразия N ни в какой точке $y \in M$. Имеем

$$f_1(y_3 - 2y_1y_2) = y_5y_2\frac{\partial}{\partial y_3}(y_3 - 2y_1y_2) = -2y_2.$$

Следовательно, поле f_1 не касается N. Итак, N — почти интегральное многообразие системы (5.41). Построим почти тривиальную подсистему. Согласно замечанию 5.7, данная подсистема является индуцированной системой. Поэтому ее можно построить с помощью алгоритма, который применялся при доказательстве теоремы 5.2. Система (5.19) в данном случае равносильна одному уравнению

$$2y_2v_1 + 2y_1v_2 = y_1^2y_2^2, \tag{5.43}$$

$$\overline{y} = (y_1, y_2) \in V = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \colon y_1 \neq 0, y_2 \neq 0\}.$$

Общее решение системы (5.43) можно записать в виде

$$v_1 = v_1, \quad v_2 = \frac{1}{2}y_1y_2^2 - \frac{y_2}{y_1}v_1, \quad v_1 \in \mathbb{R}^1.$$

Соответствующая подсистема (5.23) имеет вид

$$\dot{y}_1 = v_1, \quad \dot{y}_2 = \frac{1}{2}y_1y_2^2 - \frac{y_2}{y_1}v_1, \quad \overline{y} = (y_1, y_2) \in V, \quad v_1 \in \mathbb{R}^1. \tag{5.44}$$

Приведем почти тривиальную систему (5.44) к канонической форме. Базисное t-уравнение Пфаффа имеет вид

$$2y_1 dy_2 + 2y_2 dy_1 = y_1^2 y_2^2 dt$$

или, иначе,

$$\frac{2y_1 dy_2 + 2y_2 dy_1}{y_1^2 y_2^2} = 2\left(\Leftrightarrow\frac{2}{y_1 y_2}\right) dt.$$

Следовательно, после замены координат

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = \Leftrightarrow\frac{2}{y_1 y_2}$$

базисное t-уравнение Пфаффа преобразуется в t-уравнение $dz_2 = dt$, а система (5.44) — в систему

$$\dot z_1 = v_1, \quad \dot z_2 = 1. \tag{5.45}$$

Заметим, что система (5.45) является инволютивной. Соответствующий морфизм системы (5.45) в систему (5.41) задается функциями

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = \Leftrightarrow\frac{2}{z_1 z_2}, \quad y_3 = \Leftrightarrow\frac{4}{z_2}, \quad y_4 = \frac{4}{z_1^2 z_2^2}, \quad y_5 = \Leftrightarrow\frac{2z_1}{z_2}.$$

Замена управлений выглядит так:

$$v_1 = v_1, \quad v_2 = \frac{2}{z_1 z_2^2} + \frac{2}{z_1^2 z_2} v_1.$$

В заключении этого раздела отметим, что можно строить аффинные $\mathcal{P}$-распределения, $\mathcal{P}$-многообразия и подобъекты с помощью допускаемых преобразований. Точнее, справедливо

Предложение 5.3. Пусть ψ — допускаемое преобразование в категории $\mathcal{AS}$, A — аффинное $\mathcal{P}$-распределение, N — $\mathcal{P}$-многообразие, $(\overline{S}, \nu)$ — подобъект объекта S категории $\mathcal{AS}$. Тогда $\psi_* A$ — аффинное $\mathcal{P}$-распределение, $\psi(N)$ — $\mathcal{P}$-многообразие, $(\overline{S}, \psi\nu)$ — подобъект объекта S.

Доказательство. Пусть F, H — ассоциированные аффинные распределения систем $S, \overline{S}$, описываемых соотношениями (5.1), (5.2). Аффинное распределение A задано на многообразии N, причем $\nu_* H = A$. Так как ψ — допускаемое преобразование системы S, то (согласно разделу 3.3) $\psi_*|_y F(y) = F(\psi(y))$, $y \in M$. В соответствии с теоремой 5.1 имеем

$$\psi_*|_y A(y) = \psi_*|_y A(\psi(y)) \subset \psi_*|_y F(y) = F(\psi(y)), \quad y \in N.$$

Следовательно, афинное распределение $\psi_* A$ является аффинным $\mathcal{P}$-распределением системы S, которое задано на $\mathcal{P}$-многообразии $\psi(N)$. Далее, $(\psi\nu)_* H = \psi_*(\nu_* H) = \psi_* A$, т.е. подобъектом, соответствующим аффинному $\mathcal{P}$-распределению $\psi_* A$, является пара $(\overline{S}, \psi\nu)$. $\square$

Перейдем к рассмотрению вопроса о существовании линейных подсистем. Изложение основано на работах [35, 36]. Мы ограничимся случаем открытых линейных подсистем $\dot{x} = Ax + Bv$, удовлетворяющих условию Калмана (3.94). Напомним, что открытые подсистемы — это подсистемы с размерностью фазового пространства, равной размерности фазового пространства исходной системы.

Для изучения данного вопроса используем двойственный подход. При этом подходе существование подсистемы определяется существованием t-кораспределения S, которое является двойственным к некоторому аффинному $\mathcal{P}$-распределению A и которое, согласно теореме 5.1, должно удовлетворять условию $K \subset S$, где $K = F_\perp$ — ассоциированное t-кораспределение системы (5.1). Это условие должно выполняться в подобласти M, так как рассматриваются открытые подсистемы. Воспользуемся результатами раздела 3.2, которые касаются эквивалентности аффинных систем линейным. Из этих результатов вытекает вывод: для существования линейной подсистемы (в окрестности некоторой точки y_0) необходимо и достаточно, чтобы существовало такое t-кораспределение S, которое содержит K и которое удовлетворяет условиям, приведенным в формулировке теоремы 3.10.

Пусть $\dim K(y) = \mathrm{const} = q$ и K порождается системой Пфаффа вида

$$\omega^k = \omega^k_i(y)dy^i + \omega^k_{n+1}(y)dt = 0, \quad k = 1, \ldots, q. \tag{5.46}$$

Очевидно, что систему Пфаффа, порождающую t-кораспределение S, можно искать как систему, состоящую из уравнений (5.46) и еще некоторого числа уравнений Пфаффа. Поэтому задача сводится к определению неизвестных уравнений Пфаффа с тем расчетом, чтобы для двойственного производного ряда t-кораспределения S выполнялись условия теоремы 3.10. Заметим также, что естественно искать максимальные линейные подсистемы системы (5.1), т.е. подсистемы с ассоциированным t-кораспределением наименьшего ранга.

Применим изложенный подход к построению линейных подсистем аффинной системы (5.1), характеризующейся равенством

$$\operatorname{rank} \left\| f^i_\alpha(y) \right\|^{i=1,\ldots,n}_{\alpha=1,\ldots,r} = n \Leftrightarrow 2.$$

В этом случае ассоциированное t-кораспределение K имеет ранг 2. Будем рассматривать систему (5.1) в окрестности точки, являющейся регулярной точкой двойственного производного ряда

$$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots,$$

построенного для t-кораспределения K. В зависимости от значений инвариантов $q_i = \dim K_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, аффинную систему (5.1) можно отнести к одному из нескольких типов, которые рассмотрим по отдельности.

Если аффинная система (5.1) инволютивна (т.е. ее ассоциированное t-кораспределение K вполне интегрируемо), то у нее нет линейных подсистем, удовлетворяющих условию управляемости Калмана. Действительно, в этом случае для любого t-кораспределения S, содержащего K, $S_N \supset K$, и, следовательно, $S_N \neq \mathcal{O}$, что противоречит условию 2) теоремы 3.10. (Здесь S_N — последний член производного кофлага, построенного для S.) Этому условию нельзя удовлетворить и в том случае, если для системы (5.1) $\dim K_1 = \dim K_2 = 1$, т.е. вполне интегрируемым является t-кораспределение K_1.

Пусть для аффинной системы (5.1) $q_1 = 1$, $q_2 = 0$. Если кораспределение $\overline{K_1}$ вполне интегрируемо, то, согласно следствию 3.1, система (5.1) локально эквивалентна линейной системе, удовлетворяющей условию управляемости, и в поиске линейных подсистем нет необходимости. Поэтому рассмотрим случай, когда $\overline{K_1}$ не является вполне интегрируемым кораспределением.

Предложение 5.4. *Если аффинная система* (5.1)*, для которой* $q_0 = 2$*,* $q_1 = 1$*,* $q_2 = 0$*,* $n \geqslant 4$*, кораспределение* $\overline{K_1}$ *не вполне интегрируемо, имеет линейную подсистему с ассоциированным* t*-кораспределением ранга* 3*, то эта подсистема приводится к каноническому виду*

$$\begin{aligned}
&\dot z_1^1 = z_2^1, \quad \dot z_2^1 = z_3^1, \quad \dot z_3^1 = z_4^1, \quad \dot z_4^1 = w^1,\\
&\dot z_1^2 = w^2,\\
&\ldots\\
&\dot z_1^{n-3} = w^{n-3}.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Доказательство. Пусть ω^1 является базисной t-формой t-кораспределения K_1, а t-формы ω^1 и ω^2 составляют базисное семейство t-кораспределения K. Предположим, что найдется содержащее K t-кораспределение S ранга 3, которое соответствует системе, эквивалентной линейной. Поскольку $\omega^1 \in K_1$, то $\omega^1 \in S_1$, а так как $\overline{K_1}$ не удовлетворяет условию полной интегрируемости, то $S_{N-1} \neq K_1$. Следовательно, производному ряду t-кораспределения S должна соответствовать блоковая структура следующего вида:

$$|\ \ \Omega\ \ \omega^1\ \ \omega^2\ \ |$$

$$\begin{array}{|ll|} \Omega & \omega^1 \\ \Omega & \end{array}. \tag{5.48}$$

Здесь, как и в (3.97), верхняя строка структуры представляет собой базисное семейство t-кораспределения S, а нижележащие строки содержат последовательно базисные семейства t-кораспределений S_1 и S_2. В (5.48) t-форма Ω такова, что $\Omega \notin K$ и уравнение $\overline{\Omega} = 0$ порождает вполне интегрируемое кораспределение. Из вида структуры (5.48) следует, что индексы Кронекера линейной системы, которой эквивалентна система с ассоциированным t-кораспределением S, имеют значения

$$k_1 = 4, \quad k_i = 1, \quad i = 2, \ldots, n \Leftrightarrow 4.$$

Поэтому соответствующая t-кораспределению S аффинная система (являющаяся подсистемой системы (5.1)) приводится к каноническому виду (5.47). $\square$

Теорема 5.5. *Аффинная система* (5.1)*, для которой не выполняются условия теоремы* 3.10 *и* $q_0 = 2$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $n \geqslant 4$, *имеет в окрестности точки* y_0*, регулярной для кораспределений* $\mathbf{C}\overline{K}$ *и* $\mathbf{C}\overline{K_1}$*, линейную подсистему, удовлетворяющую условию Калмана, тогда и только тогда, когда* $\dim \mathbf{C}\overline{K} = 4$.

Доказательство. Прежде всего найдем вид системы Пфаффа, порождающей характеристическое кораспределение $\mathbf{C}\overline{K}$. Пусть t-кораспределение K_1 порождается t-уравнением Пфаффа

$$\omega^1 = 0, \tag{5.49}$$

а t-кораспределение K порождается t-системой

$$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0.$$

Как уже отмечалось, для рассматриваемой в теореме аффинной системы кораспределение $\overline{K_1}$ не является вполне интегрируемым, т.е.

$$d\overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^1} \neq 0.$$

Так как $\omega^1 \in K_1$, то

$$d\omega^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \tag{5.50}$$

$$d\overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^2} = 0. \tag{5.51}$$

Из соотношения (5.51), а также из предложений 1.23 и 1.24 вытекает, что

$$\left(d\overline{\omega^1}\right)^2 \wedge \overline{\omega^1} = 0.$$

Согласно предложению 1.31 и теореме 1.16, $\overline{K_1}$ в некоторых координатах $x = \varkappa(y)$ задается уравнением

$$\overline{\omega^1} = dx^1 - x^2 dx^3 = 0.$$

Базисное t-уравнение t-кораспределения K_1 в координатах x имеет вид

$$\omega^1 = dx^1 - x^2 dx^3 - f(x)dt = 0,$$

где f — некоторая гладкая функция. Из соотношения (5.50) следует, что

$$\left(d\omega^1\right)^2 \wedge \omega^1 = 0, \quad dx^3 \wedge dx^2 \wedge dt \wedge df \wedge dx^1 = 0,$$

т.е. $f = f(x^1, x^2, x^3)$. Найдем вид t-формы ω^2. Равенство (5.51) дает

$$dx^3 \wedge dx^2 \wedge \overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^2} = 0,$$

поэтому в качестве ω^2 можно взять t-форму вида

$$\omega^2 = a dx^2 + b dx^3 + c dt,$$

a и b одновременно в нуль не обращаются. Пусть $a \neq 0$ (при $b \neq 0$ придем к тому же результату). Тогда без ограничения общности ω^2 имеет вид

$$\omega^2 = dx^2 - \varphi dx^3 - \chi dt.$$

Подставив в (5.50) найденные выражения для ω^1 и ω^2, получим

$$\chi = -\left(x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \varphi \frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x^3}\right). \tag{5.52}$$

Из вида t-форм ω^1, ω^2 следует, что кораспределение $\mathbf{C}\overline{K}$ порождается системой Пфаффа

$$\begin{cases} dx^1 - x^2 dx^3 = 0, \\ dx^2 - \varphi dx^3 = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^3 = 0, \quad i = 4, \ldots, n, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^4} dx^4 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^n} dx^n = 0. \end{cases} \tag{5.53}$$

Нетрудно видеть, что ранг системы (5.53) равен либо 2, либо 4. Покажем, что аффинная система (5.1) имеет линейные подсистемы только в том случае, если $\dim \mathbf{C}\overline{K} = 4$.

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = 0, \quad i = 4, \ldots, n,$$

т.е. $\dim \mathbf{C}\overline{K} = 2$. Имеем $\varphi = \varphi(x^1, x^2, x^3)$, и в силу (5.52) $\chi = \chi(x^1, x^2, x^3)$. Покажем, что в этом случае у системы (5.1) нет линейных подсистем. Предположим противное: существует t-кораспределение S, содержащее t-формы ω^1, ω^2 и удовлетворяющее условиям теоремы 3.10. Тогда найдется такое число j, что $\omega^2 \in S_{j-1}$, $\omega^2 \notin S_j$. Так как выполняется (5.50), то $\omega^1 \in S_j$. Пусть t-формы

$$\omega^1, \ \Omega^1, \ \ldots, \ \Omega^k$$

составляют базисное семейство t-кораспределения S_j. Поскольку кораспределение $\overline{S_j}$ является вполне интегрируемым, то

$$d\overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^1} \wedge \overline{\Omega^1} \wedge \ldots \wedge \overline{\Omega^k} = dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^1 \wedge \overline{\Omega^1} \wedge \ldots \wedge \overline{\Omega^k} = 0. \quad (5.54)$$

Нетрудно видеть, что

$$d\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = H(x^1, x^2, x^3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dt,$$

где H — некоторая функция, поэтому

$$d\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \Omega^1 \wedge \ldots \wedge \Omega^k = H(x^1, x^2, x^3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dt \wedge \overline{\Omega^1} \wedge \ldots \wedge \overline{\Omega^k}.$$

Из (5.54) следует, что последнее выражение равно 0, а это противоречит тому, что $\omega^2 \notin S_j$.

Пусть теперь найдется такое $i \geqslant 4$, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \neq 0, \quad (5.55)$$

т.е. $\dim \mathbf{C}\overline{K} = 4$. Без ограничения общности можно считать, что (5.55) выполняется для $i = 4$. Тогда φ можно принять за новую переменную x^4, после чего t-форма ω^2 примет вид

$$\omega^2 = dx^2 \Leftrightarrow x^4 dx^3 \Leftrightarrow \chi dt,$$

где в силу соотношения (5.52) $\chi = \chi(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Из доказательства предложения (5.4) следует, что t-форму Ω, дополняющую ω^1 и ω^2 до базисного семейства t-кораспределения, удовлетворяющего условиям теоремы 3.10, нужно искать в виде

$$\Omega = d\xi \Leftrightarrow \eta dt,$$

причем должно выполняться

$$
\begin{aligned}
&d\overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^1} \wedge \overline{\Omega} = dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^1 \wedge d\xi = 0,\\
&d\Omega \wedge \omega^1 \wedge \Omega = dt \wedge d\eta \wedge (dx^1 \Leftrightarrow x^2 dx^3) \wedge d\xi = 0.
\end{aligned}
$$

Поэтому в качестве ξ можно взять произвольную гладкую функцию от x^1, x^2, x^3, не равную константе, а в качестве η — функционально независимый с ξ первый интеграл вполне интегрируемого кораспределения, порождаемого системой Пфаффа

$$
d\xi = 0, \quad dx^1 \Leftrightarrow x^2 dx^3 = 0.
$$

Положим

$$
\Omega = dx^3 \Leftrightarrow (x^1 + C)dt, \quad C = \mathrm{const}\,.
$$

Константу C выберем так, чтобы

$$
\begin{aligned}
&d\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \Omega \neq 0,\\
&d\omega^1 \wedge \omega^1 \wedge \Omega \neq 0,
\end{aligned}
$$

т.е. чтобы в точке $x_0 = \varkappa(y_0)$ выполнялось

$$
\frac{\partial f}{\partial x^2} + x^1 + C \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial x^4} + x^1 + C \neq 0.
$$

t-Кораспределение, порождаемое t-системой Пфаффа

$$
\begin{cases}
\omega^1 = dx^1 \Leftrightarrow x^2 dx^3 \Leftrightarrow f dt = 0,\\
\omega^2 = dx^2 \Leftrightarrow x^4 d^3 \Leftrightarrow \chi dt = 0,\\
\Omega = dx^3 \Leftrightarrow (x^1 + C) dt = 0,
\end{cases}
$$

имеет производный ряд, записываемый в виде (5.48), и соответствует линеаризуемой (т.е. эквивалентной линейной) подсистеме системы (5.1)

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}^1 = f(x^1, x^2, x^3) + x^2(x^1 + C),\\
&\dot{x}^2 = \chi(x^1, x^2, x^3, x^4) + x^4(x^1 + C),\\
&\dot{x}^3 = x^1 + C,\\
&\dot{x}^i = v^{i-3}, \quad i = 4, \dots, n.
\end{aligned}
\tag{5.56}
$$

Система (5.56) приводится к каноническому виду (5.47) заменой переменных

$$
\begin{aligned}
&z_1^1 = x^3,\\
&z_2^1 = x^1 + C,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&z_3^1 = f + x^2(x^1 + C),\\
&z_4^1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2\right)(f + x^2(x^1 + C)) + \\
&\qquad + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2} + x^1 + C\right)(\chi + x^4(x^1 + C)) + \frac{\partial f}{\partial x^3}(x^1 + C),\\
&z_1^i = x^{i+3}, \quad i = 2, \ldots, n \Leftrightarrow 3.
\end{aligned}
$$

Закон преобразования управлений можно получить, вычислив полные производные функций $z_4^1(x)$, $z_1^i(x)$, $i = 2, \ldots, n \Leftrightarrow 3$, в силу системы (5.56). □

Прежде чем рассматривать следующий тип систем, докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть S — регулярное в $L \subset \mathbb{R}^m$ кораспределение ранга 2, его характеристическое кораспределение $\mathbf{C}S$ регулярно и имеет ранг $r > 2$. Если кораспределение S порождается системой Пфаффа вида*

$$
\begin{cases}
dz^1 = 0,\\
\omega_i(z)dz^i = 0, \quad i = 2, \ldots, m,
\end{cases}
\tag{5.57}
$$

то его класс r четный, и для каждой точки $z \in L$ существует такая окрестность $U \subset L$ и замена координат в U

$$
x^1 = z^1, \quad x^i = x^i(z^1, \ldots, z^m), \quad i = 2, \ldots, m,
$$

что в новых координатах кораспределение S порождается в U системой Пфаффа

$$
\begin{cases}
dx^1 = 0,\\
dx^2 \Leftrightarrow x^3 dx^4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{r-1}dx^r = 0.
\end{cases}
\tag{5.58}
$$

Доказательство. Обозначим формы Пфаффа, составляющие базисное семейство кораспределения S, через $\Omega = dz^1$ и $\omega = \omega_i(z)dz^i$. Характеристическое кораспределение $\mathbf{C}S$ по определению порождается системой Пфаффа

$$
\begin{cases}
\omega'_{i[j}\omega_{j_1}\Omega_{j_2]}dz^i = 0, \quad 1 \leqslant j < j_1 < j_2 \leqslant m,\\
\omega_i dz^i = 0,\\
dz^1 = 0.
\end{cases}
\tag{5.59}
$$

Согласно доказательству теоремы 1.12, первая строка формулы (5.59) представляет собой группу уравнений, которые могут быть переписаны в виде

$$
\begin{vmatrix}
\omega'_{ji}dz^i & \omega'_{j_1 i}dz^i & \omega'_{j_2 i}dz^i\\
\omega_j & \omega_{j_1} & \omega_{j_2}\\
\Omega_j & \Omega_{j_1} & \Omega_{j_2}
\end{vmatrix} = 0, \quad 1 \leqslant j < j_1 < j_2 \leqslant m,
$$

т.е. эти уравнения получаются приравниванием нулю соответствующих миноров матрицы (1.118). Таким образом, строки матрицы

$$\left\| \begin{array}{cccc} \omega'_{1i}dz^i & \omega'_{2i}dz^i & \ldots & \omega'_{mi}dz^i \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_m \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\|$$

пропорциональны между собой, и ее первая строка является линейной комбинацией второй и третьей строк

$$\omega'_{ji}dz^i = \lambda\omega_j + \mu\Omega_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Поэтому система (5.59) может быть записана в виде

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} \omega'_{11}dz^1 & + & \omega'_{12}dz^2 & + & \ldots & + & \omega'_{1m}dz^m & \Leftrightarrow \omega_1\lambda & \Leftrightarrow \mu = 0, \\ \omega'_{21}dz^1 & + & \omega'_{22}dz^2 & + & \ldots & + & \omega'_{2m}dz^m & \Leftrightarrow \omega_2\lambda & = 0, \\ & & & & \ldots & & & & \\ \omega'_{m1}dz^1 & + & \omega'_{m2}dz^2 & + & \ldots & + & \omega'_{mm}dz^m & \Leftrightarrow \omega_m\lambda & = 0, \\ \omega_1 dz^1 & + & \omega_2 dz^2 & + & \ldots & + & \omega_m dz^m & & = 0, \\ dz^1 & & & & & & & & = 0. \end{array} \right. \tag{5.60}$$

Имеем $m+2$ линейных однородных уравнения с $m+2$ неизвестными dz^1, dz^2, …, dz^m, λ, μ, причем λ и μ являются вспомогательными величинами и подлежат исключению. Поскольку $\omega'_{ij} = \Leftrightarrow\omega'_{ji}$, то матрица коэффициентов системы (5.60) кососимметрическая и, следовательно, имеет четный ранг. Обозначим его $2l$. Таким образом, среди уравнений (5.60) имеется $2l$ линейно независимых. После исключения λ и μ их останется только $2l \Leftrightarrow 2$, так как λ и μ существенно входят в систему. Следовательно, ранг системы (5.59), являющийся по определению классом кораспределения S, равен $2l \Leftrightarrow 2$, т.е. $r = 2l \Leftrightarrow 2$. Далее исключим из системы (5.60) переменные μ и dz^1. Получим систему

$$\left\{ \begin{array}{llllll} \omega'_{22}dz^2 & + & \ldots & + & \omega'_{2m}dz^m & \Leftrightarrow \omega_2\lambda = 0, \\ & & \ldots & & & \\ \omega'_{m2}dz^2 & + & \ldots & + & \omega'_{mm}dz^m & \Leftrightarrow \omega_m\lambda = 0, \\ \omega_2 dz^2 & + & \ldots & + & \omega_m dz^m & = 0. \end{array} \right. \tag{5.61}$$

Матрица коэффициентов системы (5.61) имеет постоянный ранг, равный $2l \Leftrightarrow 2$. Система (5.61) является характеристической системой уравнения Пфаффа (см. пример 1.6)

$$(\omega_2 dz^2 + \ldots + \omega_m dz^m)\big|_{z_1 = C = \mathrm{const}} = 0, \tag{5.62}$$

причем λ подлежит исключению, и, следовательно, класс этого уравнения равен $2l \Leftrightarrow 3$. Поэтому найдется такая локальная замена координат

$$x^i = x^i(C, z^2, \ldots, z^m), \quad i = 2, \ldots, m,$$

что уравнение (5.62) запишется в новых координатах в виде

$$dx^2 \Leftrightarrow x^3 dx^4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{2l-3} dx^{2l-2} = 0.$$

Таким образом, система Пфаффа (5.57) при замене координат

$$x^1 = z^1, \quad x^i = x^i(z^1, \ldots, z^m), \quad i = 2, \ldots, m,$$

перейдет в систему (5.58) с $r = 2l \Leftrightarrow 2$. □

Пусть теперь аффинная управляемая система такова, что $q_1 = 0$ (как и прежде, $\dim K = 2$). Сопоставим системе (5.1) производный ряд

$$B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots, \tag{5.63}$$

построенный для кораспределения $\overline{K}$. Для каждого B_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, однозначно определено t-кораспределение $Q_i \subset K$, такое, что $B_i = \overline{Q_i}$. Будем считать, что в некоторой окрестности рассматриваемой точки все члены ряда (5.63) регулярны. Если кораспределение $B_0 = \overline{K}$ вполне интегрируемо, то K удовлетворяет условиям теоремы 3.10 и система (5.1) локально эквивалентна линейной системе. Пусть $\overline{K}$ не является вполне интегрируемым. Рассмотрим сначала случай, когда для аффинной системы выполняется равенство $\dim B_1 = \dim B_2 = 1$. Из леммы 5.1 следует, что t-кораспределение K в этом случае локально эквивалентно t-кораспределению, порождаемому t-системой вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^1 = dx^1 \Leftrightarrow f(x)dt = 0, \\ \omega^2 = dx^2 \Leftrightarrow x^3 dx^4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{r-1} dx^r \Leftrightarrow \varphi(x)dt = 0, \end{array} \right. \tag{5.64}$$

где $r = 2k$ — класс кораспределения $\overline{K}$.

Теорема 5.6. *Если аффинная система* (5.1), *для которой* $q_0 = 2$, $q_1 = 0$, $\dim B_1 = \dim B_2 = 1$, $\dim \mathbf{C}\overline{K} = r = \mathrm{const}$, $n \geqslant 4$, *имеет в окрестности точки* y_0 *линейную подсистему с ассоциированным* t-*кораспределением ранга* l, *то*

$$l \geqslant \frac{r+2}{2}.$$

Доказательство. Предположим противное: пусть существует t-кораспределение S, содержащее K и удовлетворяющее условиям теоремы 3.10, причем

$$\dim S = l < \frac{r+2}{2}. \tag{5.65}$$

Тогда褐распределение $\overline{S}$ вполне интегрируемо и содержит кораспределение $\overline{K}$, задаваемое в некоторых координатах $x = \varkappa(y)$ системой Пфаффа

$$\begin{cases} dx^1 = 0, \\ dx^2 \Leftrightarrow x^3 dx^4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{r-1} dx^r = 0. \end{cases} \tag{5.66}$$

В координатах x кораспределение $\overline{S}$ имеет полную систему интегралов вида

$$x^1, H^1(x), H^2(x), \ldots, H^{l-1}(x).$$

Без ограничения общности в точке $x_0 = \varkappa(y_0)$

$$\left| \frac{\partial H^i}{\partial x^j} \right|_{j=2,\ldots,l}^{i=1,\ldots,l-1} \neq 0.$$

Произведем замену координат

$$z^1 = x^1, \;\; z^i = H^{i-1}(x), \;\; i = 2, \ldots, l, \;\; z^j = x^j, \;\; j = l+1, \ldots, n.$$

В координатах z кораспределение $\overline{S}$ порождается системой Пфаффа

$$dz^i = 0, \quad i = 1, \ldots, l.$$

Так как $\overline{K} \subset \overline{S}$, то найдутся такие гладкие функции $\lambda_i(z)$, $i = 2, \ldots, l$, не обращающиеся одновременно в 0, что система Пфаффа (5.66) локально эквивалентна системе

$$\begin{cases} dz^1 = 0, \\ \lambda_2 dz^2 + \lambda_3 dz^3 + \ldots + \lambda_l dz^l = 0. \end{cases} \tag{5.67}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $\lambda_2 \neq 0$. Тогда можно положить $\lambda_2 = 1$. Характеристическая система системы (5.67), порождающая кораспределение $\mathbf{C}\overline{K}$ в координатах z, состоит из уравнений (5.67) и уравнений

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial z^i} \Leftrightarrow \frac{\partial \lambda_i}{\partial z^\alpha} + \lambda_\alpha \frac{\partial \lambda_i}{\partial z^2} \Leftrightarrow \lambda_i \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial z^2} \right) dz^i + \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial z^j} dz^j = 0, \quad \alpha = 3, \ldots, l, \\ \frac{\partial \lambda_i}{\partial z^\beta} dz^i = 0, \quad \beta = l+1, \ldots, n, \\ i = 3, \ldots, l, \quad j = l+1, \ldots, n. \end{gathered}$$

Таким образом, матрица характеристической системы для системы

Пфаффа (5.67) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \dots & \lambda_l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & * & \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial z^{l+1}} & \dots & \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial z^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * & \dfrac{\partial\lambda_l}{\partial z^{l+1}} & \dots & \dfrac{\partial\lambda_l}{\partial z^n} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial z^{l+1}} & \dots & \dfrac{\partial\lambda_l}{\partial z^{l+1}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial z^n} & \dots & \dfrac{\partial\lambda_l}{\partial z^n} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Ранг этой матрицы меньше или равен $2l \Leftrightarrow 2$ и в силу (5.65) строго меньше, чем r, т.е. мы получили, что $\dim \mathbf{C}\overline{K} < r$, а это противоречит условиям теоремы. $\square$

Теорема 5.7. *У аффинной системы* (5.1), *для которой* $q_0 = 2$, $q_1 = 0$, $\dim B_1 = \dim B_2 = 1$, $n \geqslant 4$, *в окрестности точки* y_0, *являющейся регулярной для кораспределений* $\mathbf{C}\overline{K}$ *и* $\mathbf{C}_t Q_1 \cap \mathbf{C}\overline{K}$, *существует линейная подсистема, удовлетворяющая условию Калмана, с ассоциированным* t-*кораспределением ранга* $l = \dfrac{r+2}{2}$, *где* $r = \dim \mathbf{C}\overline{K}$.

Доказательство. Соответствующее системе (5.1) t-кораспределение K порождается в некоторых координатах t-системой Пфаффа вида (5.64), причем выполняется

$$d\omega^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = dt \wedge df \wedge dx^1 \wedge (dx^2 \Leftrightarrow x^3 dx^4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{2k-1} dx^{2k}) \neq 0. \quad (5.68)$$

Рассмотрим кораспределение $\mathbf{C}_t Q_1$, задаваемое в координатах x системой Пфаффа

$$\begin{cases} dx^1 = 0, \\ df = 0, \end{cases}$$

и кораспределение $\mathbf{C}\overline{K}$, задаваемое системой

$$dx^i = 0, \quad i = 1, \ldots, 2k.$$

В силу регулярности $\mathbf{C}_t Q_1 \cap \mathbf{C}\overline{K}$ возможны два случая.

а) $\mathbf{C}_t Q_1 \cap \mathbf{C}\overline{K} \neq \mathbf{C}_t Q_1$. Это означает, что

$$df \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^{2k} \neq 0.$$

Примем функцию f за новую переменную x^{2k+1}. Пусть S — t-кораспределение, базисное семейство которого составляют t-формы Пфаффа

$$\begin{aligned}
&\theta_1^1 = dx^4 \Leftrightarrow (x^1 + C)dt, \quad \theta_2^1 = dx^1 \Leftrightarrow x^{2k+1}dt,\\
&\theta_1^i = dx^{2i+2} \Leftrightarrow x^{2i+1}dt, \quad i = 2, \ldots, k \Leftrightarrow 1,\\
&\theta_1^k = dx^2 \Leftrightarrow (\varphi + (x^1 + C)x^3 + (x^5)^2 + \ldots + (x^{2k-1})^2)dt.
\end{aligned}$$

Здесь C — некоторая константа, такая, что в точке $x_0 = \varkappa(y_0)$ (где $\varkappa$ задает переход от координат y к координатам x)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^3} + x^1 + C \neq 0.$$

Нетрудно видеть, что

$$\omega^1 = \theta_2^1, \quad \omega^2 = \theta_1^k \Leftrightarrow x^3\theta_1^1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^{2k-1}\theta_1^{k-1},$$

т.е. $K \subset S$. Производный ряд t-кораспределения S записывается в виде структуры из k блоков

$$\begin{array}{|cc|c|c|c|}
\theta_1^1 & \theta_2^1 & \theta_1^2 & \ldots & \theta_1^k\\
\theta_1^1 & & & &
\end{array}$$

и удовлетворяет условиям, приведенным в формулировке теоремы 3.10. Следовательно, t-кораспределение S соответствует некоторой линейной подсистеме системы (5.1), причем $\dim S = k + 1 = r + 2/2$.

б) $\mathbf{C}_t Q_1 \cap \mathbf{C}\overline{K} = \mathbf{C}_t Q_1$. В этом случае

$$df \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^{2k} = 0,$$

т.е. $f = f(x^1, x^2, \ldots, x^{2k})$. Из соотношения (5.68) следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} \neq 0 \tag{5.69}$$

для некоторого $j > 1$. Покажем, что при подходящем выборе переменных x условие (5.69) будет выполняться для некоторого нечетного $j > 1$. Действительно, если $\partial f/\partial x^m \neq 0$, где m — четное, $2 < m \leqslant 2k$, то, сделав замену координат

$$x^2 \mapsto x^2 \Leftrightarrow x^{m-1}x^m, \quad x^{m-1} \mapsto \Leftrightarrow x^m, \quad x^m \mapsto x^{m-1},$$

получим, что K порождается t-системой Пфаффа вида (5.64), для которой $\partial f/\partial x^{m-1} \neq 0$, т.е. $j = m \Leftrightarrow 1$. Если же $\partial f/\partial x^2 \neq 0$, $\partial f/\partial x^i = 0$,

$i = 3, \ldots, 2k$, то из (5.68) следует, что $x^{m-1} \neq 0$ для некоторого четного m, $2 < m \leqslant 2k$. После замены переменных

$$x^2 \mapsto x^m, \quad \frac{1}{x^{m-1}} \mapsto -x^{m-1}, \quad x^m \mapsto -x^2,$$
$$\frac{x^i}{x^{m-1}} \mapsto x^i \qquad \text{для нечетных } i, \quad i \neq m-1,$$

придем к уже рассмотренной ситуации. Итак, не ограничивая общности, будем считать, что условие (5.69) выполняется для $j = 3$. Заменой переменных $f \mapsto x^3$ приведем t-систему (5.64) к виду

$$\begin{cases} \omega^1 = dx^1 - x^3 dt = 0, \\ \omega^2 = dx^2 - G(x^1, \ldots, x^{2k}) dx^4 - \ldots - x^{2k-1} dx^{2k} - H(x) dt = 0, \end{cases}$$

где $\partial G / x^3 \neq 0$. Пусть $r = 2k \geqslant 6$. Рассмотрим t-кораспределение S, базисное семейство которого состоит из t-форм

$$\begin{aligned} &\theta_1^1 = dx^6 - (x^4 + C) dt, \quad \theta_2^1 = dx^4 - x^1 dt, \quad \theta_3^1 = dx^1 - x^3 dt, \\ &\theta_1^i = dx^{2i+4} - x^{2i+3} dt, \quad i = 2, \ldots, k-2, \\ &\theta_1^{k-1} = dx^2 - (H(x) + G(x) x^1 + (x^4 + C) x^5 + (x^7)^2 + \ldots + (x^{2k-1})^2) dt. \end{aligned}$$

Константу C подберем из условия, что

$$\frac{\partial H}{\partial x^5} + \frac{\partial G}{\partial x^5} x^1 + x^4 + C \neq 0.$$

Поскольку

$$\omega^1 = \theta_3^1, \quad \omega^2 = \theta_1^{k-1} - G(x) \theta_2^1 - x^5 \theta_1^1 - \ldots - x^{2k-1} \theta_1^{k-2},$$

то $K \subset S$. Производный ряд t-кораспределения S записывается в виде $k-1$ блоков

$$\begin{array}{|ccc|c|c|c|} \theta_1^1 & \theta_2^1 & \theta_3^1 & \theta_1^2 & \ldots & \theta_1^{k-1} \\ \theta_1^1 & \theta_2^1 & & & & \\ \theta_1^1 & & & & & \end{array}$$

и удовлетворяет условиям теоремы 3.10, т.е. S определяет линейную подсистему системы (5.1), $\dim S = k + 1 = \dfrac{r+2}{2}$. Пусть теперь $r = 4$. Рассмотрим уравнение

$$dx^3 \wedge dx^1 \wedge (dx^2 - G(x^1, x^2, x^3, x^4) dx^4) \wedge d\chi = 0$$

относительно функции χ в пространстве переменных x^1, x^2, x^3, x^4:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x^4} + G \frac{\partial \chi}{\partial x^2} = 0.$$

Это уравнение имеет три функционально независимых решения: x^1, x^3 и некоторую функцию $\eta(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Нетрудно проверить, что t-кораспределение S ранга 3 с базисным семейством

$$\theta_1^1 = \omega^1, \quad \theta_2^1 = dx^3 \Leftrightarrow (\eta(x) + C)dt, \quad \theta_3^1 = \omega^2,$$

где константа C такова, что

$$d\theta_3^1 \wedge \theta_1^1 \wedge \theta_3^1 \wedge \theta_2^1 = d\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dx^3 \Leftrightarrow \eta dt) \Leftrightarrow d\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge C dt \neq 0,$$

имеет производный ряд, записываемый в виде структуры

$$\begin{array}{|ccc|} \theta_1^1 & \theta_2^1 & \theta_3^1 \\ \theta_1^1 & \theta_2^1 & \\ \theta_1^1 & & \end{array}\,,$$

и соответствует линейной подсистеме системы (5.1). □

Таким образом, аффинная система, для которой $q_0 = 2$, $q_1 = 0$, $\dim B_1 = \dim B_2 = 1$, всегда имеет линейные подсистемы, удовлетворяющие условию управляемости Калмана, причем ее инвариант, равный $r + 2/2$, где $r = \dim \mathbf{C}\overline{K}$, характеризует максимальную в некотором смысле линейную подсистему (не являющуюся единственной).

Рассмотрим теперь аффинные системы, которые характеризуются равенствами $q_0 = 2$, $q_1 = 0$, $\dim B_1 = 1$, $\dim B_2 = 0$.

Теорема 5.8. *Пусть для управляемой системы* (5.1) $q_0 = 2$, $q_1 = 0$, $\dim B_1 = 1$, $\dim B_2 = 0$. *Если в некоторой окрестности точки* y_0 *кораспределения* $\mathbf{C}B_1$ *и* $\mathbf{C}_t Q_1$ *регулярны и* $\dim \mathbf{C}_t Q_1 = 3$, *то у системы* (5.1) *существует (локально) линейная подсистема, удовлетворяющая условию Калмана и имеющая ассоциированное* t*-кораспределение ранга* 3.

Доказательство. Пусть ω^1 является базисной t-формой t-кораспределения Q_1, а ω^2 дополняет ω^1 до базисного семейства t-кораспределения K. Тогда B_1 порождается уравнением $\overline{\omega^1} = 0$, и так как $B_2 \neq B_1$, то

$$d\overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^1} \neq 0.$$

Поскольку $B_1 = \overline{K}_1$, то $d\overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^2} = 0, \left(d\overline{\omega^1}\right)^2 \wedge \overline{\omega^1} = 0$.

Согласно предложению 1.31 и теореме 1.16, B_1 в некоторых координатах задается уравнением

$$\overline{\omega^1} = dx^1 \Leftrightarrow x^2 dx^3 = 0.$$

Базисное t-уравнение t-кораспределения Q_1 в координатах x имеет вид

$$\omega^1 = dx^1 \Leftrightarrow x^2 dx^3 \Leftrightarrow f(x)dt = 0, \tag{5.70}$$

где f — некоторая функция. Соответственно кораспределение $\mathbf{C}_t Q_1$ порождается в координатах x системой Пфаффа

$$\begin{cases} dx^i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ df(x) = 0. \end{cases}$$

Так как $\dim \mathbf{C}_t Q_1 = 3$, то

$$df \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0,$$

т.е. $f = f(x^1, x^2, x^3)$. Так же, как в теореме 5.5, можно показать, что без ограничения общности t-форма ω^2 имеет вид

$$\omega^2 = dx^2 \Leftrightarrow \varphi dx^3 \Leftrightarrow \chi dt,$$

причем поскольку $\overline{\omega^2} \notin B_1$, то

$$d\overline{\omega^2} \wedge \overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^2} = dx^3 \wedge d\varphi \wedge dx^1 \wedge dx^2 \neq 0.$$

Примем функцию φ за новую переменную x^4. Рассмотрим t-кораспределение S с базисным семейством, состоящим из t-форм ω^1, ω^2 и

$$\Omega = dx^3 \Leftrightarrow (x^1 + C)dt,$$

где C — некоторая константа. S порождается t-системой Пфаффа

$$\begin{cases} \Omega = dx^3 \Leftrightarrow (x^1 + C)dt = 0, \\ \tilde{\omega}^1 = dx^1 \Leftrightarrow (f + x^2(x^1 + C))dt = 0, \\ \tilde{\omega}^2 = dx^2 \Leftrightarrow (\chi + x^4(x^1 + C))dt = 0. \end{cases}$$

Если выбрать константу C так, чтобы в рассматриваемой точке

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} + x^1 + C \neq 0,$$
$$\frac{\partial \chi}{\partial x^4} + x^1 + C \neq 0,$$

то t-кораспределение S будет (локально) иметь производный ряд, записываемый в виде

$$\begin{array}{|lll|} \Omega & \tilde{\omega}^1 & \tilde{\omega}^2 \\ \Omega & \tilde{\omega}^1 & \\ \Omega & & \end{array}$$

и соответствующий линейной подсистеме системы (5.1), приводимой к каноническому виду (5.47). □

Итак, для рассмотренных типов аффинных систем вопрос о существовании линейных подсистем, удовлетворяющих условию управляемости Калмана, может быть решен путем вычисления некоторых инвариантов системы (5.1), которые находятся с помощью алгебраических операций. Для построения какой-либо линейной подсистемы системы (5.1) необходимо решить некоторые системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вопрос о существовании и построении линейных подсистем аффинных систем с $q_0 = 2$, $q_1 = 0$, $\dim B_1 = 0$ не был рассмотрен и нуждается в дальнейшем исследовании. Однако если размерность фазового пространства системы (5.1) равна 4, то обязательно $\dim B_1 > 0$, т.е. случай $n = 4$ является полностью охваченным.

Пример 5.4. Найдем линейную подсистему для системы

$$
\begin{aligned}
\dot y^1 &= \Leftrightarrow y^5 \sin y^3, \\
\dot y^2 &= \Leftrightarrow (\sin y^4)^2 + (1 + (y^1)^2) u^2, \\
\dot y^3 &= y^3 (1 + (y^1)^2) u^1, \\
\dot y^4 &= y^2 u^1 + u^2, \\
\dot y^5 &= y^2 y^4 u^2 + u^3,
\end{aligned}
\tag{5.71}
$$

$$
y \in M = \{\mathbb{R}^5 \colon y^2 \neq 0\}, \quad u \in \mathbb{R}^3.
$$

Исключив из (5.71) управления и умножив полученные выражения на dt, получим t-систему Пфаффа

$$
\begin{cases}
\omega^1 = dy^1 + y^5 \sin y^3 dt = 0, \\
\omega^2 = y^3 dy^2 + y^2 dy^3 \Leftrightarrow y^3 (1 + (y^1)^2) dy^4 + y^3 (\sin y^4)^2 dt = 0.
\end{cases}
\tag{5.72}
$$

t-Система (5.72) порождает ассоциированное t-кораспределение K аффинной системы (5.71). Имеем

$$
\dim K_1 = 0, \quad \dim B_1 = \dim B_2 = 1.
$$

Запишем систему Пфаффа, являющуюся базисной системой характеристического кораспределения $\mathbf{C}\overline{K}$,

$$
\begin{cases}
dy^1 = 0, \\
y^3 dy^2 + y^2 dy^3 \Leftrightarrow y^3 (1 + (y^1)^2) dy^4 = 0, \\
(1 + (y^1)^2) dy^4 = 0, \\
\Leftrightarrow 2 y^1 y^3 dy^1 \Leftrightarrow (1 + (y^1)^2) dy^3 = 0, \\
2 y^1 y^3 dy^4 = 0.
\end{cases}
\tag{5.73}
$$

Ранг системы (5.73) равен 4. В силу теоремы 5.7 у системы (5.71) существует линейная подсистема с ассоциированным t-кораспределением Q ранга 3. Для того чтобы отыскать линейную подсистему, прежде всего следует в уравнении $\overline{\omega^2} = 0$ положить $y^1 = C^1 = \mathrm{const}$ и привести получившееся уравнение Пфаффа

$$\theta = \theta_i dy^i = y^3 dy^2 + y^2 dy^3 \Leftrightarrow y^3(1 + (C^1)^2) dy^4 = 0, \quad i = 2, 3, 4, \tag{5.74}$$

к каноническому виду

$$dx^2 \Leftrightarrow x^3 dx^4 = 0. \tag{5.75}$$

Замену переменных $x^i = \psi^i(C^1, y^2, y^3, y^4)$, $i = 2, 3, 4$, преобразующую (5.74) в (5.75), найдем, следуя алгоритму, описанному в [10]. Сначала строим систему дифференциальных уравнений $\dot{y}^i = f^i(C^1, y^2, y^3, y^4)$, $i = 2, 3, 4$, правые части которой удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &\theta_2 f^2 + \theta_f 3^3 + \theta_4 f^4 = 1, \\ &\theta_{2j} f^2 + \theta_{3j} f^3 + \theta_{4j} f^4 = 0, \quad j = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

где $\theta_{ij} = \partial\theta_j/\partial y^i \Leftrightarrow \partial\theta_i/\partial y^j$. Получаем

$$\dot{y}^2 = \frac{1}{y^2}, \quad \dot{y}^3 = 0, \quad \dot{y}^4 = 0. \tag{5.76}$$

Искомая замена переменных $x^i = \psi^i(C^1, y^2, y^3, y^4)$, $i = 2, 3, 4$, должна переводить систему (5.76) в систему

$$\dot{x}^2 = 1, \quad \dot{x}^3 = 0, \quad \dot{x}^4 = 0,$$

поэтому

$$\psi^2 = y^2 y^3, \quad \psi^3 = y^3(1 + (C^1)^2), \quad \psi^4 = y^4.$$

Далее, произведя замену переменных $x = \varkappa(y)$

$$x^1 = y^1, \quad x^2 = y^2 y^3, \quad x^3 = y^4(1 + (y^1)^2), \quad x^4 = y^4, \quad x^5 = y^5 \sin y^3,$$

преобразуем t-систему (5.72) к виду

$$\begin{cases} dx^1 \Leftrightarrow x^5 dt = 0, \\ dx^2 \Leftrightarrow x^3 dx^4 \Leftrightarrow \dfrac{x^3 (\sin x^4)^2}{1 + (x^1)^2} dt = 0. \end{cases}$$

Из доказательства теоремы 5.7 следует, что t-кораспределение S, порождающее линейную подсистему аффинной системы (5.71), можно получить, например, добавив к t-системе Пфаффа (5.72) t-уравнение $\Omega = 0$, где

$$\Omega = dx^4 \Leftrightarrow (C + x^1)dt = dy^4 \Leftrightarrow (C + y^1)dt,$$

а константа C такова, что в точке $x_0 = \varkappa(y_0)$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sin x^4)^2}{1 + (x^1)^2} + x^1 + C \neq 0.$$

Итак, одной из линеаризуемых подсистем системы (5.71) является система

$$\begin{aligned}
\dot{y}^1 &= \Leftrightarrow y^5 \sin y^3, \\
\dot{y}^2 &= \Leftrightarrow (\sin y^4)^2 + (C + y^1)(1 + (y^1)^2) \Leftrightarrow y^2 v^1, \\
\dot{y}^3 &= y^3 v^1, \\
\dot{y}^4 &= C + y^1, \\
\dot{y}^5 &= v^2.
\end{aligned} \tag{5.77}$$

Нетрудно видеть, что переходу от (5.71) к (5.77) соответствует следующая вырожденная замена управлений:

$$
\begin{aligned}
&u^1 = \frac{1}{1+(y^1)^2}v^1,\\
&u^2 = C + y^1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{1+(y^1)^2}v^1,\\
&u^3 = \Leftrightarrow y^2 y^4 (C + y^1) + \frac{(y^2)^2 y^4}{1+(y^1)^2}v^1 + v^2.
\end{aligned}
$$

Двойственный производный ряд системы (5.77) декомпозируется на два блока

$$
\begin{array}{|cc|c|}
\Omega & \omega^1 & \omega^2 \\
\Omega & &
\end{array}\ .
$$

Поэтому аффинная система (5.77) локально эквивалентна следующей системе канонического вида:

$$
\begin{aligned}
&\dot z_1^1 = z_2^1, \quad \dot z_2^1 = z_3^1, \quad \dot z_3^1 = w^1,\\
&\dot z_1^2 = z_2^2, \quad \dot z_2^2 = w^2.
\end{aligned}
$$

Полагая $z_1^1 = x^4 = y^4$, $z_1^2 = x^2 = y^2 y^3$ и учитывая (5.77), найдем замену переменных и управлений, соответствующую переходу к канонической форме:

$$
\begin{aligned}
&z_2^1 = (y^4)' = C + y^1,\\
&z_3^1 = (C + y^1)' = \Leftrightarrow y^5 \sin y^3,\\
&z_2^2 = (y^2 y^3)' = y^3(\Leftrightarrow(\sin y^4)^2 + (C + y^1)(1 + (y^1)^2)),\\
&w^1 = (\Leftrightarrow y^5 \sin y^3)' = \Leftrightarrow y^3 y^5 \cos y^3\ v^1 \Leftrightarrow \sin y^3\ v^2,\\
&w^2 = y^3(\Leftrightarrow(C + y^1)\sin 2y^4 \Leftrightarrow y^5 \sin y^3\ (1 + 2Cy^1 + 3(y^1)^2)) +\\
&\qquad\qquad + y^3(\Leftrightarrow(\sin y^4)^2 + (C + y^1)(1 + (y^1)^2))v^1.
\end{aligned}
$$

Глава 6

Некоторые задачи теории управления

6.1. О задаче терминального управления

Рассмотрим аффинную управляемую систему

$$\dot{y} = f_0(y) + f(y)u, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r. \tag{6.1}$$

Задача терминального управления заключается в следующем. Заданы точки $y_0, y_1 \in M$. Требуется определить такое управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, и соответствующее решение $y(t), t \in [t_0, t_1]$, что $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1$.

Данной задаче посвящены многочисленные исследования (см. обзор [38]).

Понятия эквивалентности, факторизации и сужения могут эффективно применяться для решения этой задачи. С помощью этих понятий задача терминального управления для исходной системы редуцируется к аналогичной задаче для одной или нескольких систем, имеющих более простой вид, в частности, меньшей размерности.

Рассмотрим эту редукцию подробнее. Начнем с понятия эквивалентности.

Пусть система (6.1) эквивалентна в категории $\mathcal{AS}$ системе

$$\dot{x} = g_0(x) + g(x)v, \quad x \in N \subset \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}^s. \tag{6.2}$$

Пусть ψ — соответствующий изоморфизм, являющийся диффеоморфизмом M на N, и пусть изоморфизму ψ соответствует замена управ-

лений
$$v = \lambda_0(y) + \lambda(y)u. \tag{6.3}$$

Задача терминального управления для системы (6.1) трансформируется в аналогичную задачу для системы (6.2), которая заключается в определении управления $v(t)$ и решения $x(t), t \in [t_0, t_1]$, для которого $x(t_0) = x_0 = \psi(y_0), x(t_1) = x_1 = \psi(y_1)$.

Пусть отображение
$$u = \mu_0(x) + \mu(x)v \tag{6.4}$$
является заменой управлений, соответствующей изоморфизму ψ^{-1}. Тогда, если пара $x(t), v(t)$ является решением задачи терминального управления для системы (6.2), то пара
$$y(t) = \psi^{-1}(x(t)), \quad u(t) = \mu_0(x(t)) + \mu(x(t))v(t)$$
является решением задачи терминального управления для системы (6.1).

Таким образом, задача терминального управления для системы (6.1) сводится к аналогичной задаче для эквивалентной системы. Разумеется, переход к эквивалентной системе целесообразен, если эта система имеет более простой вид или если для нее уже известно решение задачи терминального управления.

Из сказанного вытекает, что результаты главы 3 можно использовать в задаче терминального управления. В частности, классификация некоторых типов аффинных систем дает канонические формы, к исследованию которых сводится задача терминального управления, поставленная для систем, принадлежащих рассмотренным типам.

Пример 6.1. Рассмотрим систему
$$\begin{aligned} \dot y_1 &= e^{-y_2} + 2y_1^2 y_2 y_3 + 2y_1 y_2 y_3 u,\\ \dot y_2 &= 2y_1 y_2 y_3 \Leftrightarrow 2y_2 y_3 u,\\ \dot y_3 &= y_1(y_2^2 \Leftrightarrow y_3^2) + (y_2^2 \Leftrightarrow y_3^2)u, \end{aligned} \tag{6.5}$$
$$y \in M = \{y \in \mathbb{R}^3 \colon y_2^2 + y_3^2 \neq 0\}, \quad u \in \mathbb{R}^1.$$
Поставим задачу терминального управления по переводу точки $a = (0, 2, 4)$ в точку $b = (1, 1, 3)$ и в точку $c = (1, 3, 9)$. Вычисляя коммутатор линейно несвязанных полей
$$\begin{aligned} f_0 &= e^{-y_2}\frac{\partial}{\partial y^1} \Leftrightarrow 2y_1 y_2 y_3 \frac{\partial}{\partial y^2} + (y_2^2 \Leftrightarrow y_3^2) y_1 \frac{\partial}{\partial y^3},\\ f_1 &= 2y_1 y_2 y_3 \frac{\partial}{\partial y^1} \Leftrightarrow 2y_2 y_3 \frac{\partial}{\partial y^2} + (y_2^2 \Leftrightarrow y_3^2)\frac{\partial}{\partial y^3}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

получим, что $[f_0, f_1] = \Leftrightarrow 2y_1y_2y_3f_1$. Это означает, что семейство (6.6) (с отмеченным полем f_0) является аффинно полным, т.е. система (6.5) инволютивная. Согласно теореме 3.3, инволютивная система локально эквивалентна одной из канонических форм, число которых конечно. В данном случае в силу линейной несвязанности полей (6.6) можно сразу сказать, что соответствующей канонической формой является система вида (3.21)

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = 1, \quad \dot{x}_3 = u. \tag{6.7}$$

Согласно доказательству теоремы 1.20, для того чтобы преобразовать систему (6.5) в систему (6.7), нужно найти интегралы поля f_1. Таковыми являются функции

$$\varphi_1 = \frac{y_2}{y_2^2 + y_3^2}, \quad \varphi_2 = y_1 e^{y_2}.$$

Для построения замены переменных следует к функциям φ_1, φ_2 добавить произвольную функцию φ_3 с тем расчетом, чтобы функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ были функционально независимы. Положим

$$\varphi_3 = \frac{y_3}{y_2^2 + y_3^2}.$$

Итак, замена переменных имеет вид

$$x_1 = \frac{y_2}{y_2^2 + y_3^2}, \quad x^2 = y_1 e^{y_2}, \quad x_3 = \frac{y_3}{y_2^2 + y_3^2}. \tag{6.8}$$

Обратная замена координат имеет вид

$$y_1 = x_2 \exp\left(\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1^2 + x_3^2}\right), \quad y_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_3^2}, \quad y_3 = \frac{x_3}{x_1^2 + x_3^2}. \tag{6.9}$$

После замены координат (6.8) система (6.5) примет вид

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = 1, \quad \dot{x}_3 = x_2 \exp\left(\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1^2 + x_3^2}\right) + u. \tag{6.10}$$

Отсюда легко следует, что система (6.5) преобразуется в каноническую форму (6.7) заменой фазовых переменных (6.8) и заменой управлений. Точки a, b, c преобразуются в точки $\overline{a} = (0.1, 0, 0.2)$, $\overline{b} = (0.1, e, 0.3)$, $\overline{c} = (1/30, e^3, 0.1)$. Из вида системы (6.10) следует, что точку $\overline{a}$ невозможно перевести в точку $\overline{c}$, так как для любого решения $x(t)$ имеем $x_1(t) = \mathrm{const}$. Найдем решение $x(t), t \in [0, t_1]$, переводящее точку $\overline{a}$ в точку $\overline{b}$. Из вида (6.10) следует, что $x_2(t) = t + c_0, c_0 = \mathrm{const}$. Так как $x_2(0) = 0, x_2(t_1) = e$, то $c_0 = 0, t_1 = e$. Из первого уравнения (6.10) имеем $x_1(t) = 0.1$. Положим $v = \mathrm{const}$. Тогда из третьего уравнения (6.10) имеем $x_3(t) = vt + k, k = \mathrm{const}$. Так как $x_3(0) = 0.2$, $x_3(e) = 0.3$, то $v = 0.1e^{-1}, k = 0.2$. Итак, решение, соединяющее $\overline{a}$ и $\overline{c}$, существует и имеет вид

$$x_1(t) = 0.1, \quad x_2(t) = t, \quad x_3(t) = 0.2 + 0.1e^{-1}t, \quad t \in [0, e]. \tag{6.11}$$

Это решение соответствует постоянному управлению $v = 0.1e^{-1}$. Обратным преобразованием (6.9) решение (6.11) системы (6.10) переводится в решение системы (6.5), соединяющее точки a и b,

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= t \exp\left(\Leftrightarrow\frac{10}{1 + (2 + te^{-1})^2}\right),\\
y_2(t) &= \frac{10}{1 + (2 + te^{-1})^2},\\
y_3(t) &= \frac{10(2 + te^{-1})}{1 + (2 + te^{-1})^2}, \quad t \in [0, e].
\end{aligned}$$

Этому решению соответствует управление

$$u(t) = 0.1e^{-1} \Leftrightarrow t \exp\left(\Leftrightarrow\frac{10}{1 + (2 + te^{-1})^2}\right), \quad t \in [0, e].$$

Замечание 6.1. Если для системы (6.1) имеются ограничения на управления вида $u \in U(y), y \in M$, то при переходе к эквивалентной системе (6.2) эти ограничения преобразуются с помощью аффинного преобразования (6.3) в ограничения на управления для системы (6.2) вида $v \in V(x), x \in N$.

В рассмотренном примере задача терминального управления для исходной системы свелась к той же самой задаче для канонической формы. В данном случае это каноническая форма инволютивной системы. Канонические формы других типов систем, приведенные в разделе 3.2, имеют также довольно простой вид и допускают полное исследование задачи терминального управления. В частности, далее в этом разделе показано, как решается задача терминального управления для канонических форм управляемых систем (6.1), для которых $\operatorname{rank} f = n \Leftrightarrow 1$. Приведем еще известный алгоритм [38] для канонических форм Бруновского (3.95), т.е. для канонических форм нелинейных систем, которые эквивалентны линейным системам, удовлетворяющим условию Калмана.

Пусть линейная подсистема имеет вид

$$\begin{gathered}
\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = x^3, \quad \ldots, \quad \dot{x}^n = v,\\
x = (x^1, \ldots, x^n) \in R^n, \quad v \in R^1.
\end{gathered} \tag{6.12}$$

Нужно найти такое решение $x(t)$ системы (6.12), что

$$x(t_0) = x_0 = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n), \tag{6.13}$$

$$x(t_1) = x_1 = (\beta^1, \ldots, \beta^n). \tag{6.14}$$

Будем искать функцию $x^1(t)$ в виде

$$x^1(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha^{i+1}}{i!}(t \Leftrightarrow t_0)^i + \sum_{i=1}^{n} C_i (t \Leftrightarrow t_0)^{i+n-1}, \tag{6.15}$$

где C_i, $i = 1, \ldots, n$, — некоторые константы. Тогда в силу системы (6.12)

$$\begin{gathered} x^r(t) = (x^1)^{(r-1)} = \sum_{i=0}^{n-r} \frac{\alpha^{i+r}}{i!}(t \Leftrightarrow t_0)^i + \\ + \sum_{i=1}^{n} C_i \frac{(i+n \Leftrightarrow 1)!}{(i+n \Leftrightarrow r)!}(t \Leftrightarrow t_0)^{i+n-r}, \\ r = 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{6.16}$$

Нетрудно видеть, что $x^r(t_0) = \alpha^r$, $r = 1, \ldots, n$. Константы C_i нужно подобрать так, чтобы выполнялось условие (6.14). Положим в (6.15), (6.16) $t = t_1$, $x^r = \beta^r$, $r = 1, \ldots, n$. Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно величин C_i:

$$\begin{gathered} \beta^r = \sum_{i=0}^{n-r} \frac{\alpha^{i+r}}{i!}(t_1 \Leftrightarrow t_0)^i + \sum_{i=1}^{n} C_i \frac{(i+n \Leftrightarrow 1)!}{(i+n \Leftrightarrow r)!}(t_1 \Leftrightarrow t_0)^{i+n-r}, \\ r = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{6.17}$$

Решение системы (6.17) всегда существует и единственно. Определив C_i, получим фазовую траекторию системы (6.12), проходящую через точки x_0, x_1.

Каноническая форма Бруновского общего вида, зависящая от w управлений, распадается на w независимых систем с одним управлением каждая и с размерностями фазовых пространств $k_1, \ldots, k_w$. Процесс решения задачи терминального управления, очевидно, разбивается на решение соответствующих задач для w систем вида (6.12), но меньшей размерности.

Перейдем к рассмотрению роли подобъектов в задаче терминального управления.

Рассмотрим некоторый подобъект $(\overline{S}, \chi)$ системы (6.1). Пусть подсистема $\overline{S}$ имеет вид

$$\dot{x} = h_0(x) + h(x)v, \quad x \in L \subset \mathbb{R}^m, \quad v \in \mathbb{R}^s. \tag{6.18}$$

Данному подобъекту соответствует $\mathcal{P}$-многообразие $N = \chi(L)$, для которого пара (L, χ) является картой.

Пусть для системы (6.1) поставлена задача терминального управления по переводу точки $y_0 \in M$ в точку $y_1 \in M$. Если $y_0, y_1 \in N$, то эта задача допускает редукцию к аналогичной задаче для подсистемы (6.18). Действительно, пусть $x_0 = \chi^{-1}(y_0), x_1 = \chi^{-1}(y_1)$. Если $x(t), t \in [t_0, t_1]$ — такое решение системы (6.18), что $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$, то $y(t) = \chi(x(t)), t \in [t_0, t_1]$ — такое решение системы (6.1), что $y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1$. При этом управление $v(t)$ переводится в управление $u(t)$ с помощью соответствующей замены управлений.

Итак, если через точки y_0, y_1 проходит $\mathcal{P}$-многообразие системы (6.1), то задача терминального управления может упроститься (так как подсистема является, вообще говоря, более простой системой).

Отметим роль специальных типов $\mathcal{P}$-многообразий, введенных в разделе 5.2. Если известно интегральное многообразие системы (6.1), проходящее через точки y_0, y_1, то задачу терминального управления можно считать решенной. Действительно, в этом случае, согласно теореме 5.3, на этом многообразии существует тривиальная подсистема. Отсюда, согласно замечанию 3.3, вытекает, что любая непрерывная кусочно C^1-гладкая кривая, лежащая на интегральном многообразии N, является решением системы (6.1). Следовательно, для решения задачи терминального управления достаточно взять любую кривую (соответствующего класса гладкости), лежащую на многообразии N и проходящую через точки y_0, y_1.

Если известно почти интегральное многообразие системы (6.1), проходящее через точки y_0, y_1, то задача терминального управления также существенно упрощается (хотя и не в такой степени, как для интегрального многообразия). В этом случае, согласно теореме 5.4, на этом многообразии существует подсистема (6.18), являющаяся почти тривиальной системой. С другой стороны, из теоремы 3.4 следует, что каждая почти тривиальная система локально эквивалентна одной из канонических форм (3.26)–(3.29). Далее в этом разделе показано, что для каждой из этих систем вопрос о терминальном управлении полностью решается элементарными средствами.

Таким образом, если через точки y_0, y_1 проходит почти интегральное многообразие N, то нужно для некоторой карты (L, χ) построить почти тривиальную подсистему (6.18) (которая в данном случае, согласно замечанию 5.7, является индуцированной системой), затем привести ее к своей канонической форме и решить для нее задачу терминального управления по переводу точки $x_0 = \chi^{-1}(y_0)$ в точку $x_1 = \chi^{-1}(y_1)$.

Пример 6.2. Рассмотрим управляемую систему (5.28) из примера 5.2. Задача терминального управления заключается в переводе точки $a = (1, 1, 3, 3, 5)$ в точку $b = (2, 2, 9, 11, 13)$. В примере 5.2 для системы (5.28) найдено семейство интегральных многообразий

$$\begin{aligned}
&y_3 = 2y_1y_2 + c_1, \\
&y_4 = y_1(y_1y_2 + c_1) + c_2, \\
&y_5 = y_2(y_1y_2 + c_1) + c_3, \\
&c_i = \mathrm{const}\,.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Найдем многообразие из семейства (6.19), проходящее через точки a и b. Для постоянных c_i имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}
3 &= 2 + c_1, & 9 &= 8 + c_1, \\
3 &= 1 + c_1 + c_2, & 11 &= 2(4 + c_1) + c_2, \\
5 &= 1 + c_1 + c_3, & 13 &= 2(4 + c_1) + c_3.
\end{aligned}$$

Решением этой системы являются постоянные $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = 3$. Таким образом, через точки a и b проходит многообразие

$$\begin{aligned}
&y_3 = 2y_1y_2 + 1, \\
&y_4 = y_1(y_1y_2 + 1) + 1, \\
&y_5 = y_2(y_1y_2 + 1) + 3.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

В качестве кривой на многообразии (6.20), соединяющей точки a и b, можно взять кривую

$$\begin{aligned}
&y_1(t) = t, \\
&y_2(t) = t, \\
&y_3(t) = 2t^2 + 1, \\
&y_4(t) = t(t^2 + 1) + 1, \\
&y_5(t) = t(t^2 + 1) + 3.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Согласно теории интегральных многообразий, функции (6.21) составляют решение системы (5.28). Управление $u(t)$, соответствующее решению (6.21), можно найти из уравнений системы (5.28)

$$\begin{aligned}
&u_1 = 1 \Leftrightarrow \frac{(t^3 + t + 3)(t^3 + 5t + 1)}{1 + (t^3 + t + 1)^2}, \\
&u_2 = \frac{1 \Leftrightarrow 4t(t^3 + t + 1)}{1 + (t^3 + t + 1)^2}, \\
&u_3 = \frac{t^3 + 5t + 1}{1 + (t^3 + t + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Если система (6.1) не эквивалентна линейной системе, но имеет линейную подсистему, удовлетворяющую условию Калмана, то задачу терминального управления можно также эффективно решать. Приведем соответствующий пример.

Пример 6.3. Рассмотрим аффинную систему

$$\begin{gathered}\begin{aligned}&\dot{y}^1 = \Leftrightarrow y^2 y^4 + y^2 u^3,\\&\dot{y}^2 = \Leftrightarrow y^1 y^3 y^4 \Leftrightarrow y^2 u^2 + y^3 u^3,\\&\dot{y}^3 = 2y^2 y^3 y^4 + y^4 u^1 \Leftrightarrow 2y^3 u^2,\\&\dot{y}^4 = \Leftrightarrow y^2 (y^4)^2 + y^4 u^2,\\&\dot{y}^5 = \Leftrightarrow y^2 y^4 + u^2 + e^{-y^5} u^3,\end{aligned}\\ y \in M = \{y \in R^5 : y^4 \neq 0\}, \quad u \in R^3.\end{gathered} \tag{6.22}$$

Поставим задачу терминального управления по переводу точки $a = (2, 0, 0, 1, 0)$ в точку $b = (6, 1, 1, 2, \ln 10)$.

Решим эту задачу с помощью построения открытой линейной подсистемы (методы построения таких подсистем описаны в разделе 5.2).

Ассоциированное t-кораспределение K системы (6.22) порождается t-системой Пфаффа

$$\begin{aligned}&\omega^1 = dy^1 + \frac{y^2 e^{y^5}}{y^4} dy^4 \Leftrightarrow y^2 e^{y^5} dy^5 + y^2 y^4 dt = 0,\\&\omega^2 = dy^2 + \frac{y^2 + y^3 e^{y^5}}{y^4} dy^4 \Leftrightarrow y^3 e^{y^5} dy^5 + y^4 (y^1 y^3 + (y^2)^2) dt = 0.\end{aligned} \tag{6.23}$$

Вычислим инварианты системы (6.22), характеризующие ее тип. Поскольку $K_1 = \mathcal{O}$, то следует построить производный ряд для кораспределения $B = \overline{K}$. Так как

$$d\overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^2} = 0, \quad d\overline{\omega^2} \wedge \overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^2} \neq 0, \quad d\overline{\omega^1} \wedge \overline{\omega^1} \neq 0,$$

то B_1 порождается уравнением Пфаффа $\overline{\omega^1} = 0$, а B_2 является нулевым кораспределением. Итак,

$$\dim K = 2, \quad \dim K_1 = 0, \quad \dim B_1 = 1, \quad \dim B_2 = 0.$$

Для выяснения вопроса о возможности построения линейной подсистемы системы (6.22) нужно найти класс t-кораспределения Q_1, порождаемого t-уравнением $\omega^1 = 0$. Базисная система Пфаффа кораспределения $\mathbf{C}_t Q_1$ строится добавлением к уравнению

$$\overline{\omega^1} = dy^1 + \frac{y^2 e^{y^5}}{y^4} dy^4 \Leftrightarrow y^2 e^{y^5} dy^5 = 0 \tag{6.24}$$

уравнений

$$\omega^1_{ij}(y)dy^i = 0, \quad j = 1, \ldots, 6,$$

где $\omega^1_{ij} = (\partial\omega^1_j/\partial y^i) \Leftrightarrow (\partial\omega^1_i/\partial y^j)$. Легко убедиться, что ранг получаемой системы Пфаффа равен 3. В соответствии с теоремой 5.8 у системы (6.22) существует линейная подсистема. Чтобы ее построить, приведем уравнение Пфаффа (6.24) к каноническому виду. Сначала нужно записать это уравнение через минимальное число переменных, которые находятся с помощью интегралов его характеристической системы. Характеристическая система уравнения (6.24) (порождающая $\mathbf{C}B_1$) имеет вид

$$\begin{aligned}
&dy^1 + \frac{y^2 e^{y^5}}{y^4}dy^4 \Leftrightarrow y^2 e^{y^5} dy^5 = 0,\\
&dy^2 + \frac{y^2}{y^4}dy^4 = 0,\\
&\frac{1}{y^4}dy^4 \Leftrightarrow dy^5 = 0.
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Интегралами системы (6.25) являются функции

$$\Phi^1 = y^1, \quad \Phi^2 = y^2 y^4, \quad \Phi^3 = \frac{e^{y^5}}{y^4}.$$

Заменой переменных

$$x^1 = y^1, \quad x^2 = y^2 y^4, \quad x^3 = \frac{e^{y^5}}{y^4}, \quad x^4 = y^4, \quad x^5 = y^5$$

уравнение Пфаффа (6.24) сразу приводится к своему каноническому виду $dx^1 \Leftrightarrow x^2 dx^3 = 0$. (Отметим, что в общем случае после такой замены следует применить алгоритм приведения к каноническому виду, описанный в [10].) Перепишем систему Пфаффа (6.23) в переменных x

$$dx^1 \Leftrightarrow x^2 dx^3 + x^2 dt = 0, \tag{6.26}$$

$$dx^2 \Leftrightarrow \frac{x^4 e^{2x^5}}{(x^3)^3}dx^3 + \left(\frac{x^1 x^4 e^{2x^5}}{(x^3)^3} + (x^2)^2\right) dt = 0. \tag{6.27}$$

Примем функцию $(x^4 e^{2x^5})/((x^3)^3)$ за новую переменную x^4. Тогда уравнение (6.27) преобразуется к виду

$$dx^2 \Leftrightarrow x^4 dx^3 + \left(x^1 x^4 + (x^2)^2\right) dt = 0.$$

Из доказательства теоремы 5.8 следует, что t-кораспределение, определяющее линейную подсистему, можно получить, добавив к (6.23) t-уравнение Пфаффа

$$\Omega = dx^3 \Leftrightarrow (x^1 + C)dt = \Leftrightarrow \frac{e^{y^5}}{(y^4)^2} dy^4 + \frac{e^{y^5}}{y^4} dy^5 \Leftrightarrow (y^1 + C)dt = 0.$$

Константу C нужно выбрать так, чтобы $y^1 + C \Leftrightarrow 1 \neq 0$, $C \neq 0$. Положим $C = 1$. Тогда с помощью подсистемы мы сможем искать только такие фазовые траектории системы (6.22), для которых $y^1(t) \neq \neq 0$. Получаем следующую линеаризуемую подсистему по управлениям системы (6.22):

$$\begin{gathered} \begin{aligned} \dot{y}^1 &= y^1 y^2 y^4, \\ \dot{y}^2 &= (y^3 \Leftrightarrow (y^2)^2) y^4 \Leftrightarrow y^2 v^2, \\ \dot{y}^3 &= v^1, \\ \dot{y}^4 &= y^4 v^2, \\ \dot{y}^5 &= (y^1 + 1) y^4 e^{-y^5} + v^2, \end{aligned} \\ y \in L = \{y \in R^5 : y^1 \neq 0,\ y^4 \neq 0\}, \quad v \in R^2. \end{gathered} \tag{6.28}$$

Можно убедиться, что переход от (6.22) к (6.28) осуществляется вырожденной заменой управлений

$$u^1 = \frac{1}{y^4} v^1 + \frac{2y^3}{y^4} v^2, \quad u^2 = y^2 y^4 + v^2, \quad u^3 = (y^1 + 1) y^4. \tag{6.29}$$

Аффинной системе (6.28) соответствует двойственный производный ряд, записываемый в виде блока

$$\begin{array}{|lll|} \Omega & \omega^1 & \omega^2 \\ \Omega & \omega^1 & \\ \Omega & & \end{array}.$$

Поэтому система (6.28) эквивалентна линейной системе

$$\begin{gathered} \dot{z}^1_1 = z^1_2, \quad \dot{z}^1_2 = z^1_3, \quad \dot{z}^1_3 = z^1_4, \quad \dot{z}^1_4 = w^1, \quad \dot{z}^2_1 = w^2, \\ z \in L' \subset R^5, \quad w \in R^2. \end{gathered} \tag{6.30}$$

Действуя по алгоритму, описанному на с. 86, находим линеаризующую замену координат

$$\begin{aligned}
z_1^1 &= \frac{e^{y^5}}{y^4}, \\
z_2^1 &= y^1 + 1, \\
z_3^1 &= y^1 y^2 y^4, \\
z_4^1 &= y^1 y^3 (y^4)^2, \\
z_1^2 &= y^5,
\end{aligned} \tag{6.31}$$

и управлений

$$\begin{aligned}
w^1 &= y^1 y^2 y^3 (y^4)^3 + y^1 (y^4)^2 v^1 + 2y^1 y^3 (y^4)^2 v^2, \\
w^2 &= (y^1 + 1) y^4 e^{-y^5} + v^2.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Обратная замена координат имеет вид

$$\begin{aligned}
y^1 &= z_2^1 \Leftrightarrow 1, \\
y^2 &= \frac{z_1^1 z_3^1}{(z_2^1 \Leftrightarrow 1) e^{z_1^2}}, \\
y^3 &= \frac{(z_1^1)^2 z_4^1}{(z_2^1 \Leftrightarrow 1) e^{2 z_1^2}}, \\
y^4 &= \frac{e^{z_1^2}}{z_1^1}, \\
y^5 &= z_1^2.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Обратимся теперь непосредственно к построению требуемой фазовой траектории системы (6.22). Задача терминального управления для системы (6.22) преобразуется в задачу терминального управления для системы (6.30) по переводу точки $\overline{a} = (1, 3, 0, 0, 0)$ в точку $\overline{b} = (5, 7, 12, 24, \ln 10)$. Пусть $t_0 = 0$, $t_1 = 1$. В качестве $z_1^2(t)$ сразу можно взять функцию $z_1^2 = t \ln 10$. Функцию $z_1^1(t)$, в соответствии с изложенным на с. 285, ищем в виде

$$z_1^1(t) = 1 + 3t + C_1 t^4 + C_2 t^5 + C_3 t^6 + C_4 t^7.$$

Тогда для остальных искомых функций получим выражения

$$\begin{aligned}
z_2^1(t) &= \dot z_1^1(t) = 3 + 4C_1 t^3 + 5C_2 t^4 + 6C_3 t^5 + 7C_4 t^6, \\
z_3^1(t) &= \dot z_2^1(t) = 12C_1 t^2 + 20C_2 t^3 + 30C_3 t^4 + 42C_4 t^5, \\
z_4^1(t) &= \dot z_3^1(t) = 24C_1 t + 60C_2 t^2 + 120C_3 t^3 + 210C_4 t^4.
\end{aligned}$$

Условие прохождения фазовой траектории при $t = 1$ через точку $\bar{b}$ приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} C_1 &+& C_2 &+& C_3 &+& C_4 &=& 1,\\ 4C_1 &+& 5C_2 &+& 6C_3 &+& 7C_4 &=& 4,\\ 12C_1 &+& 20C_2 &+& 30C_3 &+& 42C_4 &=& 12,\\ 24C_1 &+& 60C_2 &+& 120C_3 &+& 210C_4 &=& 24. \end{array} \tag{6.34}$$

Системе (6.34) удовлетворяют $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Итак, решение, соединяющее $\bar{a}$ и $\bar{b}$, имеет вид

$$z_1^1 = 1 + 3t + t^4,\ \ z_2^1 = 3 + 4t^3,\ \ z_3^1 = 12t^2,\ \ z_4^1 = 24t,\ \ z_1^2 = t\ln 10.$$

Это решение соответствует постоянным управлениям $w^1 = 24$, $w^2 = \ln 10$. Преобразованием (6.33) полученное решение системы (6.30) переводится в решение системы (6.22), соединяющее точки a и b:

$$\begin{aligned} y^1(t) &= 2 + 4t^3,\\ y^2(t) &= \frac{12t^2(1+3t+t^4)}{10^t(2+4t^3)},\\ y^3(t) &= \frac{24t(1+3t+t^4)^2}{10^{2t}(2+4t^3)},\\ y^4(t) &= \frac{10^t}{1+3t+t^4},\\ y^5(t) &= t\ln 10,\\ & t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Из (6.32), (6.29) следует, что решению (6.35) соответствуют управления

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{48(1 \Leftrightarrow 4t)(1+3t+t^4)^3}{10^{3t}(2+4t^3)^2},\\ u^2 &= \ln 10 \Leftrightarrow \frac{3+4t^3}{1+3t+t^4},\\ u^3 &= \frac{10^t(3+4t^3)}{1+3t+t^4},\\ & t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к факторизации. Пусть система (6.1) допускает факторизацию порядка $n \Leftrightarrow m > 0$. Тогда, согласно главе 4, система

(6.1) допускает и определенную декомпозицию. Точнее, система (6.1) эквивалентна системе следующего вида:

$$\dot{z} = g_0(z) + g(z)v, \tag{6.36}$$
$$\dot{x} = h_0(x, z) + h(x, z)v, \tag{6.37}$$

$$z \in L \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in K \subset \mathbb{R}^{n-m}, \quad v \in \mathbb{R}^s,$$

где система (6.36) — факторсистема.

Возможности использования декомпозиции могут быть различными в зависимости от вида уравнений (6.36), (6.37). Пусть, например, эти уравнения имеют вид

$$\dot{z} = g_0(z) + g(z)v, \tag{6.38}$$
$$\dot{x} = h_0(x, z) + h_1(x, z)v_1 + h_2(x, z)v_2, \tag{6.39}$$

$$z \in L \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in K \subset \mathbb{R}^{n-m}, \quad v_1 \in \mathbb{R}^{s_1}, \quad v_2 \in \mathbb{R}^{s_2},$$

т.е. факторсистема не зависит от некоторых компонент вектора управлений. В этом случае задача терминального управления для системы (6.38), (6.39) по переводу точки (z_0, x_0) в точку (z_1, x_1) также допускает следующую декомпозицию. Нужно найти такое управление $v_1(t)$ и такое решение $z(t), t \in [t_0, t_1]$ системы (6.38), что $z(t_0) = z_0, z(t_1) = z_1$. Затем функции $z(t), v_1(t)$ подставляются в уравнения (6.39), которые превращаются в замкнутую систему

$$\dot{x} = h_0(x, z(t)) + h_1(x, z(t))v_1(t) + h_2(x, z(t))v_2. \tag{6.40}$$

Теперь осталось решить задачу терминального управления для неавтономной системы (6.40) по переводу точки x_0 в точку x_1. Полученное решение $x(t)$ системы (6.40) и управление $v_2(t)$ в совокупности с функциями $z(t)$ и $v_1(t)$ составляют решение задачи терминального управления для системы (6.38), (6.39). Применяя обратный диффеоморфизм и соответствующую замену управлений, получим решение задачи терминального управления для исходной системы (6.1).

Если декомпозиция (6.38), (6.39) имеет вид

$$\dot{z} = g_0(z) + g(z)v_1, \tag{6.41}$$
$$\dot{x} = h_0(x) + h(x)v_2, \tag{6.42}$$

(т.е. система (6.42) сама является факторсистемой), то задача терминального управления разбивается на две независимые задачи для систем (6.41), (6.42). (Строго говоря, это не совсем так: имеется зависимость по времени переходного процесса.) Легко убедиться в том, что декомпозиция (6.41), (6.42) возможна тогда и только тогда, когда существуют такие $\mathcal{F}$-кораспределения X и Y системы (6.1) (которые порождают факторсистемы (6.41), (6.42)), что

$$X \oplus Y = T^*M. \tag{6.43}$$

Отметим важный случай декомпозиции (6.41), (6.42), а именно основную декомпозицию системы (6.1):

$$\dot{z} = v_1, \tag{6.44}$$

$$\dot{x} = h_0(x) + h(x)v_2. \tag{6.45}$$

Согласно разделу 4.2, основная декомпозиция порождается $\mathcal{F}$-кораспределением, являющимся t-характеристическим кораспределением $\mathbf{C}_t F_\perp$ ассоциированного t-кораспределения системы (6.1), т.е. в (6.43) $B_2 = \mathbf{C}_t F_\perp$, а B_1 — тривиальное $\mathcal{F}$-кораспределение. Согласно терминологии раздела 4.2, система (6.45) называется неразложимой. (Неразложимую систему уже нельзя представить в виде (6.44), (6.45), хотя она может допускать декомпозицию другого вида.) Фазовое пространство неразложимой системы имеет размерность, равную $q = \dim \mathbf{C}_t F_\perp$. Величина q характеризует степень нетривиальности системы (6.1). Можно сказать, что с помощью $\mathbf{C}_t F_\perp$ от системы отделяется максимально возможная тривиальная часть (см. замечание 4.9). Если $q = n$, то тривиальную часть из системы (6.1) выделить нельзя.

Подчеркнем, что система Пфаффа, порождающая $\mathbf{C}_t F_\perp$, строится с помощью только алгебраических средств (см. раздел 1.4). Система (6.44), (6.45) получается из системы (6.1) с помощью замены переменных $z^k = \psi^k(y)$, $x^i = \varphi^i(y)$, где функции φ^i составляют полный набор интегралов кораспределения $\mathbf{C}_t F_\perp$, а ψ^k — произвольные функции, такие, что функции ψ^k, φ^i в совокупности составляют n функционально независимых функций.

После приведения системы (6.1) к виду (6.44), (6.45) задача терминального управления по существу сводится к соответствующей задаче для неразложимой системы (6.45), т.е. размерность задачи снижается на величину $n \Leftrightarrow q$. (Действительно, для тривиальной системы (6.44) эта задача является тривиальной.)

Понятия эквивалентности, факторизации и сужения могут использоваться совместно для решения задачи терминального управления. Ясно также, что эти понятия могут применяться в различном порядке. Например, после сужения и построения подсистемы можно перейти с помощью основной декомпозиции к неразложимой факторсистеме подсистемы, затем перейти к канонической форме и т.д.

Покажем на примере одного типа аффинных управляемых систем, как совместное применение понятий эквивалентности, факторизации и сужения приводит к решению задачи терминального управления. Системы (6.1), принадлежащие к этому типу, характеризуются тем, что $\operatorname{rank} f = n \Leftrightarrow 1$.

Согласно теореме 3.4, произвольная система (6.1) данного типа эквивалентна одной из канонических форм (3.24)–(3.29). Доказательство этой теоремы основано на приведении уравнения Пфаффа или формы Пфаффа к канонической форме. Процесс приведения заключается в следующем [10]. Сначала делается замена переменных $z^k = \psi^k(y)$, $x^i = \varphi^i(y)$, где функции φ^i составляют полный набор интегралов характеристической системы уравнения или формы Пфаффа. Затем в пространстве переменных x^i производится преобразование к канонической форме. Для управляемой системы (6.1) этот процесс означает следующее. Сначала производится факторизация, приводящая к основной декомпозиции (6.44), (6.45). Затем неразложимая факторсистема (6.45) приводится к канонической форме.

Так как задача терминального управления для тривиальной системы является тривиальной, то дело сводится к решению такой задачи для неразложимой факторсистемы, приведенной к канонической форме.

Рассмотрим сначала случай симметрических систем. Для таких систем ранг характеристического кораспределения является нечетным числом. Отсюда, в частности, следует, что если n — четное число, то для системы (6.1) существует основная декомпозиция (и поэтому задача терминального управления допускает редукцию). Пусть $\dim \mathbf{C}F^{\perp} = s = 2k+1$. Если $s = 1$, то система (6.1) является инволютивной, а неразложимая факторсистема приводится к виду

$$\dot{z} = 0. \tag{6.46}$$

Здесь исследовать нечего. Пусть $s > 1$. Тогда неразложимая факторсистема эквивалентна системе вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= w, \\ \dot{p} &= v, \\ \dot{z} &= p_1 w_1 + \ldots + p_k w_k, \end{aligned} \tag{6.47}$$

$$p = (p_1, \ldots, p_k), \quad x = (x_1, \ldots, x_k), \quad v, w \in \mathbb{R}^k.$$

Рассмотрим задачу терминального управления по переводу некоторой точки (x^0, p^0, z_0) в точку (x^1, p^1, z_1). Решим эту задачу с помощью понятия сужения аффинных систем, точнее, с помощью понятия интегрального многообразия. Как отмечалось в примере 5.1, система (6.47) имеет интегральные многообразия размерности k, которые называются лежандровыми многообразиями. Эти многообразия описываются следующим образом. Для любого разбиения множества индексов $\{1, \ldots, k\}$ на непересекающиеся подмножества I, J и для любой функции $S(x_i, p_j)$ от k переменных $x_i, i \in I$, и $p_j, j \in J$, формулы

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad x_j = -\frac{\partial S}{\partial p_j}, \quad z = S - p_j \frac{\partial S}{\partial p_j} \tag{6.48}$$

задают лежандрово многообразие системы (6.47). Покажем, что через любые точки (x^0, p^0, z_0), (x^1, p^1, z_1), за исключением точек, для которых $x^0 = x^1$, $p^0 = p^1$, $z_0 \neq z_1$, проходит некоторое лежандрово многообразие. Задача состоит в отыскании подходящих подмножеств I, J и функции S.

Введем обозначения $x^0 = (b_1, \ldots, b_k)$, $x^1 = (d_1, \ldots, d_k)$, $p^0 = (m_1, \ldots, m_k)$, $p^1 = (n_1, \ldots, n_k)$.

Пусть J — множество индексов $j \in \{1, \ldots, k\}$, таких, что $b^j \neq d^j$. Предположим сначала, что J не пусто. Не ограничивая общности, считаем, что $k \in J$. В качестве S возьмем функцию

$$S = A + \sum_{j \in J} B_j p_j + \sum_{i \in I} B_i x_i + \sum_{j \in J} C_j p_j^2 + \, + \sum_{i \in I} C_i x_i^2 + D p_k^3, \tag{6.49}$$

где A, B_j, B_i, C_j, C_i, D — постоянные, подлежащие определению из граничных условий. Лежандрово многообразие, соответствующее функции S, согласно (6.48), имеет вид

$$\begin{aligned} p_i &= B_i + 2C_i x_i, \quad i \in I, \\ x_j &= -B_j - 2C_j p_j, \quad j \in J, \quad j \neq k, \\ x_k &= -B_k - 2C_k p_k - 3D p_k^2, \\ z &= A + \sum_{i \in I} B_i x_i + \sum_{i \in I} C_i x_i^2 - \sum_{j \in J} C_j p_j^2 - 2D p_k^3. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Граничные условия прохождения многообразия (6.50) через точки

(x^0, p^0, z_0), (x^1, p^1, z_1) представляют собой уравнения

$$
\begin{aligned}
b_i &= B_i + 2C_i m_i, \\
d_i &= B_i + 2C_i n_i, \quad i \in I, \\
m_j &= \Leftrightarrow B_j \Leftrightarrow 2C_j b_j, \\
n_j &= \Leftrightarrow B_j \Leftrightarrow 2C_j d_j, \quad j \in J, \quad j \neq k, \\
m_k &= \Leftrightarrow B_k \Leftrightarrow 2C_k b_k \Leftrightarrow 3Db_k^2, \\
n_k &= \Leftrightarrow B_k \Leftrightarrow 2C_k d_k \Leftrightarrow 3Dd_k^2, \\
z_0 &= A + \sum_{i \in I} B_i m_i + \sum_{i \in I} C_i m_i^2 \Leftrightarrow \sum_{j \in J} C_j b_j^2 \Leftrightarrow 2Db_k^3, \\
z_1 &= A + \sum_{i \in I} B_i n_i + \sum_{i \in I} C_i n_i^2 \Leftrightarrow \sum_{j \in J} C_j d_j^2 \Leftrightarrow 2Dd_k^3.
\end{aligned}
$$

Преобразуем эти уравнения следующим образом:

$$
\begin{aligned}
b_i &= B_i + 2C_i m_i, \\
b_i \Leftrightarrow d_i &= 2C_i(m_i \Leftrightarrow n_i), \quad i \in I, \\
m_j &= \Leftrightarrow B_j \Leftrightarrow 2C_j b_j, \\
m_j \Leftrightarrow n_j &= 2C_j(d_j \Leftrightarrow b_j), \quad j \neq k, \quad j \in J, \\
m_k &= \Leftrightarrow B_k \Leftrightarrow 2C_k b_k \Leftrightarrow 3Db_k^2, \\
m_k \Leftrightarrow n_k &= 2C_k(d_k \Leftrightarrow b_k) + 3D(d_k^2 \Leftrightarrow b_k^2), \\
z_0 &= A + \sum_{i \in I} B_i m_i + \sum_{i \in I} C_i m_i^2 \Leftrightarrow \sum_{j \in J} C_j b_j^2 \Leftrightarrow 2Db_k^3, \\
z_0 \Leftrightarrow z_1 &= \sum_{i \in I} B_i(m_i \Leftrightarrow n_i) + \sum_{i \in I} C_i(m_i^2 \Leftrightarrow n_i^2) \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow \sum_{j \in J} C_j(b_j^2 \Leftrightarrow d_j^2) \Leftrightarrow 2D(b_k^3 \Leftrightarrow d_k^3).
\end{aligned}
\tag{6.51}
$$

Из первых четырех уравнений (6.51) определяются $B_i, C_i, i \in I$, C_j, B_J, $j \in J, j \neq k$ (возможно, неоднозначно). Из шестого уравнения имеем

$$
C_k = \frac{m_k \Leftrightarrow n_k}{2(d_k \Leftrightarrow b_k)} \Leftrightarrow \frac{3}{2} D(d_k + b_k). \tag{6.52}
$$

Подставляя (6.52) в восьмое уравнение (6.51), получим

$$
\begin{aligned}
z_0 \Leftrightarrow z_1 = &\sum_{i \in I} B_i(m_i \Leftrightarrow n_i) + \sum_{i \in I} C_i(m_i^2 \Leftrightarrow n_i^2) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sum_{j \in J, j \neq k} C_j(b_j^2 \Leftrightarrow d_j^2) + \frac{(m_k \Leftrightarrow n_k)(b_k + d_k)}{2} + \frac{(d_k \Leftrightarrow b_k)^3}{3} D.
\end{aligned}
$$

Из этого уравнения получим

$$D = \frac{2}{(b_k \Leftrightarrow d_k)^3}\left(\sum_{i\in I} B_i(m_i \Leftrightarrow n_i) + \sum_{i\in I} C_i(m_i^2 \Leftrightarrow n_i^2)\Leftrightarrow\right.$$

$$\left.\Leftrightarrow \sum_{j\in J, j\neq k} C_j(b_j^2 \Leftrightarrow d_j^2) + z_1 \Leftrightarrow z_0 + \frac{(m_k \Leftrightarrow n_k)(b_k + d_k)}{2}\right).$$

Из (6.52) получим C_k. Подставляя C_k, D в седьмое уравнение (6.51), получим A. Подставляя C_k, D в пятое уравнение (6.51), получим B_k.

Итак, если J — непустое множество, то лежандрово многообразие, проходящее через точки (x^0, p^0, z_0), (x^1, p^1, z_1), существует.

Пусть J — пустое множество. Предположим, не ограничивая общности, что $n_k \neq m_k$. В качестве S возьмем функцию

$$S = A + \sum_{i=1}^{k} B_i x_i + \sum_{i=1}^{k} C_i x_i^2 + D x_k^3.$$

Лежандрово многообразие, соответствующее этой функции, должно иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} p_i &= B_i + 2C_i x_i, \quad i \neq k, \\ p_k &= 2B_k + 2C_k x_k + 3D x_k^2, \\ z &= A + \sum_{i=1}^{k} B_i x_i + \sum_{i=1}^{k} C_i x_i^2 + D x_k^3. \end{aligned} \tag{6.53}$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} b_i &= B_i + 2C_i m_i, \\ b_i &= B_i + 2C_i n_i, \quad i \neq k, \\ b_k &= B_k + 2C_k m_k + 3D m_k^2, \\ b_k &= B_k + 2C_k n_k + 3D n_k^2, \\ z_0 &= A + \sum_{i=1}^{k} B_i m_i + \sum_{i=1}^{k} C_i m_i^2 + D m_k^3, \\ z_1 &= A + \sum_{i=1}^{k} B_i n_i + \sum_{i=1}^{k} C_i n_i^2 + D n_k^3. \end{aligned} \tag{6.54}$$

Из первых двух уравнений системы (6.54) имеем

$$C_i = 0, \quad B_i = b_i, \quad i \neq k.$$

Последнние четыре уравнения преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
&b_k = B_k + 2C_k m_k + 3Dm_k^2,\\
&0 = C_k + \frac{3}{2}D(m_k + n_k),\\
&z_0 = A + \sum_{i\neq k} b_i m_i + B_k m_k + C_k m_k^2 + Dm_k^3,\\
&z_0 \Leftrightarrow z_1 = \sum_{i\neq k} b_i(m_i \Leftrightarrow n_i) + B_k(m_k \Leftrightarrow n_k) +\\
&\qquad\qquad + C_k(m_k^2 \Leftrightarrow n_k^2) + D(m_k^3 \Leftrightarrow n_k^3).
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Из первых двух уравнений системы (6.55) получим

$$B_k = b_k + 3m_k n_k D, \quad C_k = \Leftrightarrow\frac{3}{2}(m_k + n_k)D. \tag{6.56}$$

Подставляя (6.56) в последнее уравнение системы (6.55), получим

$$z_0 \Leftrightarrow z_1 = \sum_{i=1}^{k} b_i(m_i \Leftrightarrow n_i) + \frac{(n_k \Leftrightarrow m_k)^3}{2}D.$$

Следовательно,

$$D = \frac{2}{(n_k \Leftrightarrow m_k)^3}\left(z_0 \Leftrightarrow z_1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} b_i(m_i \Leftrightarrow n_i)\right).$$

Подставляя D в (6.56), получим B_k и C_k.

Итак, доказано, что через любые точки (x^0, p^0, z_0), (x^1, p^1, z_1), за исключением точек, для которых $x^0 = x^1$, $p^0 = p^1$, $z_0 \neq z_1$, проходит интегральное многообразие N, имеющее вид (6.50) либо (6.53).

Взяв любую (достаточно гладкую) кривую $x(t)$, $p(t)$, $z(t)$ на многообразии N, соединяющую точки (x^0, p^0, z_0), (x^1, p^1, z_1), получим решение задачи терминального управления. Соответствующее управление определяется из уравнений (6.47).

Если $x^0 = x^1$, $p^0 = p^1$, $z_0 \neq z_1$, то из (6.48) следует, что не существует лежандровых многообразий, проходящих через точки (x^0, p^0, z_0), (x^1, p^1, z_1). Для того чтобы в этом случае решить задачу терминального управления, можно, например, перевести точку (x^0, p^0, z_0) в произвольную точку (x^2, p^2, z_2), не лежащую на линии $x = x^0, p = p^0$, и затем по лежандрову многообразию, проходящему через точки (x^2, p^2, z_2), (x^1, p^1, z_1), добраться до точки (x^1, p^1, z_1).

Пример 6.4. Рассмотрим систему

$$
\begin{aligned}
&\dot y_1 = 1 + u_1 + y_4 u_3,\\
&\dot y_2 = u_2 + y_1 u_3,\\
&\dot y_3 = -y_1 u_2 + u_3,\\
&\dot y_4 = -\frac{y_2 + y_1 y_3^2}{y_2 y_3} u_2 + \frac{y_2 - y_1^3 y_3^2}{y_1 y_2 y_3} u_3,
\end{aligned}
\tag{6.57}
$$

$$y \in M = \{y \in \mathbb{R}^4 \colon y_i > 0, i = 1, 2, 3, 4\}, \quad u \in \mathbb{R}^3.$$

Задача терминального управления заключается в перводе точки $y^0 = (1, 1, 1, 1)$ в точку $y^1 = (2, 1, 1/8, 2)$. Приведем систему (6.57) к канонической форме. Исключая переменные u из (6.57), найдем уравнение Пфаффа

$$\omega = -\frac{y_1 y_3}{y_2} dy_2 + \frac{1}{y_1 y_3} dy_3 - dy_4 = 0. \tag{6.58}$$

Из вида уравнения Пфаффа (6.58) следует, что система (6.57) является симметрической системой. Уравнение (6.58) является базисным уравнением ассоциированного кораспределения $F^\perp$ системы (6.57). Найдем систему Пфаффа, порождающую характеристическое кораспределение $\mathbf{C}F^\perp$. В примере 1.6 показано, что если $F^\perp$ порождается уравнением Пфаффа

$$\omega = \omega^i(y) dy_i = 0, \tag{6.59}$$

то такая система Пфаффа состоит из уравнения (6.59) и уравнений, которые получаются из соотношений

$$\omega^{ij} dy_j = \lambda \omega^i, \tag{6.60}$$

где $\omega^{ij} = \dfrac{\partial \omega^j}{\partial y_i} - \dfrac{\partial \omega^i}{\partial y_j}$, исключением вспомогательного параметра λ. Для уравнения (6.58) соотношения (6.60) выглядят так:

$$
\begin{aligned}
-\frac{y_3}{y_2} - \frac{1}{y_1^2 y_3} dy_3 - \lambda \cdot 0 &= 0,\\
\frac{y_3}{y_2} dy_1 + \frac{y_1}{y_2} dy_3 + \lambda \frac{y_1 y_3}{y_2} &= 0,\\
\frac{1}{y_1^2 y_3} dy_1 - \frac{y_1}{y_2} dy_2 - \lambda \frac{1}{y_1 y_3} &= 0,\\
\lambda \cdot 1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Из этих соотношений и из (6.58) вытекает, что в качестве базисной системы Пфаффа кораспределения $\mathbf{C}F^{\perp}$ можно взять систему Пфаффа следующего вида:

$$
\begin{aligned}
y_3 dy_1 + y_1 dy_3 &= 0,\\
\frac{2}{y_1 y_3} dy_3 \Leftrightarrow dy_4 &= 0,\\
\frac{y_3}{y_2} dy_2 + \frac{1}{y_1^2 y_3} dy_3 &= 0.
\end{aligned}
\tag{6.61}
$$

Итак, $\dim \mathbf{C}F^{\perp} = 3$ и, следовательно, уравнение Пфаффа (6.58) эквивалентно уравнению Пфаффа

$$
dz \Leftrightarrow p dx = 0. \tag{6.62}
$$

Найдем замену переменных, приводящую (6.58) к (6.62). В соответствии с алгоритмом, приведенным в [10], для этой цели следует сначала определить интегралы вполне интегрируемой системы Пфаффа (6.61). Из первого уравнения (6.61) находим интеграл

$$
l_1 = y_1 y_3.
$$

Из второго уравнения находим интеграл

$$
l_2 = \frac{2y_3}{l_1} \Leftrightarrow y_4 = \frac{2}{y_1} \Leftrightarrow y_4.
$$

Из третьего уравнения находим интеграл

$$
l_3 = l_1 \ln y_2 + \frac{1}{l_1} y_3 = y_1 y_3 \ln y_2 + \frac{1}{y_1}.
$$

Добавим к функциям l_1, l_2, l_3 функцию $l_4 = y_1$ и сделаем замену переменных $y_i' = l_i(y)$ $i = 1, 2, 3, 4$. В результате уравнение Пфаффа (6.58) преобразуется в уравнение

$$
dy_2' \Leftrightarrow dy_3' + \frac{y_3'}{y_1'} dy_1' = 0. \tag{6.63}
$$

Заметим, что управляемая система (6.57) приобретает при этом вид основной декомпозиции, причем функции l_1, l_2, l_3 являются агрегатами неразложимой факторсистемы.

Для приведения уравнения (6.63) к виду (6.62) достаточно (в соответствии с алгоритмом, описанным в [10]) привести форму

$$
\theta = dy_3' \Leftrightarrow \frac{y_3'}{y_1'} dy_1'
$$

к форме pdx. Это осуществляется заменой переменной, в которую входят интегралы характеристической системы уравнения $\theta = 0$. В данном случае характеристическая система совпадает с уравнением $\theta = 0$ и имеет интеграл, равный y_3'/y_1'. После замены переменных $x = y_3'/y_1'$, $p = y_1'$ форма θ приобретает вид pdx. Итак, уравнение Пфаффа (6.58) приводится к уравнению Пфаффа (6.62) заменой переменных

$$x = \ln y_2 + \frac{1}{y_1^2 y_3}, \quad p = y_1 y_3, \quad z = \frac{2}{y_1} - y_4, \quad q = y_1. \tag{6.64}$$

Обратная замена переменных имеет вид

$$y_1 = q, \quad y_2 = \exp\left(x - \frac{1}{pq}\right), \quad y_3 = \frac{p}{q}, \quad y_4 = \frac{2}{q} - q. \tag{6.65}$$

Система (6.57) эквивалентна системе

$$\dot{q} = s, \tag{6.66}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = w, \\ \dot{p} = v, \\ \dot{z} = pw. \end{cases} \tag{6.67}$$

Система (6.66), (6.67) представляет собой основную декомпозицию на неразложимую систему (6.67) и тривиальную систему (6.66). Неразложимая факторсистема (6.67) приведена к канонической форме. Задача терминального управления для исходной системы преобразуется в задачу терминального управления для системы (6.66), (6.67) по переводу точки $(q_0, x_0, p_0, z_0) = (1, 1, 1, 1)$ в точку $(q_1, x_1, p_1, z_1) = (2, 2, 1/4, -1)$. Эта задача по существу сводится к задаче терминального управления для системы (6.67) по переводу точки $(x_0, p_0, z_0) = (1, 1, 1)$ в точку $(x_1, p_1, z_1) = (2, 1/4, -1)$. Построим лежандрово многообразие, проходящее через эти точки. В качестве функции S можно взять функцию вида

$$S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3.$$

Лежандрово многообразие (6.53) имеет вид

$$\begin{aligned} p &= B + 2Cx + 3Dx^2, \\ z &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3. \end{aligned} \tag{6.68}$$

Постоянные A, B, C, D определяются из граничных условий (6.54), которые в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} 1 &= B + 2C + 3D, \\ 1/4 &= B + 4C + 12D, \\ 1 &= A + B + C + D, \\ -1 &= A + 2B + 4C + 8D. \end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$A = -\frac{54}{4}, \quad B = \frac{133}{4}, \quad C = -24, \quad D = \frac{21}{4}.$$

Лежандрово многообразие, которое проходит через точки (x_0, p_0, z_0), (x_1, p_1, z_1), имеет вид

$$\begin{aligned} p &= \frac{133}{4} - 48x + \frac{63}{4}x^2, \\ z &= -\frac{54}{4} + \frac{133}{4} - 24x^2 + \frac{21}{4}x^3. \end{aligned} \tag{6.69}$$

Построим кривую $x(t), p(t), z(t)$, проходящую через точки (x_0, p_0, z_0), (x_1, p_1, z_1) и лежащую на многообразии (6.69). Заметим, что кривая $x(t) = t + 1$, $t \in [0, 1]$, проходит через точки $x_0 = 1$, $x_1 = 2$. Отсюда и из (6.68) сразу следует, что кривая

$$\begin{aligned} &x(t) = t + 1, \\ &p(t) = \frac{133}{4} - 48(t+1) + \frac{63}{4}(t+1)^2, \\ &z(t) = -\frac{54}{4} + \frac{133}{4}(t+1) - 24(t+1)^2 + \frac{21}{4}(t+1)^3, \quad t \in [0, 1], \end{aligned} \tag{6.70}$$

является решением задачи терминального управления для системы (6.67). Очевидно, что кривая

$$q(t) = t + 1 \tag{6.71}$$

является решением задачи терминального управления для системы (6.66). Для того чтобы получить решение задачи терминального управления для исходной системы (6.57), следует произвести обратную замену переменных (6.65). Кривая $q(t)$, $x(t)$, $p(t)$, $z(t)$ преобразуется в кривую

$$
\begin{aligned}
&y_1 = t+1,\\
&y_2 = \exp\left(t+1 \Leftrightarrow \left(\frac{133}{4}(t+1) \Leftrightarrow 48(t+1)^2 + \frac{63}{4}(t+1)^3\right)^{-1}\right),\\
&y_3 = \frac{1}{t+1}\left(\frac{133}{4} \Leftrightarrow 48(t+1) + \frac{63}{4}(t+1)^2\right),\\
&y_4 = \frac{2}{t+1} + \frac{54}{4} \Leftrightarrow \frac{133}{4}(t+1) + 24(t+1)^2 \Leftrightarrow \frac{24}{4}(t+1)^3,
\end{aligned}
\tag{6.72}
$$

$$t \in [0,1],$$

которая является решением системы (6.57), проходящим через точки $(1,1,1,1)$, $(2,1,1/8,2)$. Соответствующие управления вычисляются из уравнений системы (6.57):

$$
\begin{aligned}
&u_1 = \dot y_1 \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow \frac{y_1 y_4}{1+y_1^2}\dot y_2 \Leftrightarrow y_4 \frac{\dot y_3}{1+y_1^2},\\
&u_2 = \frac{\dot y_2 \Leftrightarrow y_1 \dot y_3}{1+y_1^2},\\
&u_3 = \frac{y_1 \dot y_2 + \dot y_3}{1+y_1^2}.
\end{aligned}
$$

Итак, поставленная задача терминального управления для системы (6.57) решена.

Рассмотрим теперь случай несимметрических систем (6.1), для которых $\operatorname{rank} f = n \Leftrightarrow 1$. Такие системы по определению, данному в разделе 5.2, называются почти тривиальными. Для таких систем задача терминального управления также сводится к исследованию неразложимой факторсистемы, приведенной к канонической форме. Согласно теореме 3.4, эти канонические формы имеют вид

$$\dot z = 1, \tag{6.73}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\dot p = v,\\
&\dot z = p, \quad v \in \mathbb{R}^1,
\end{aligned}
\right.
\tag{6.74}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\dot x = w,\\
&\dot p = v,\\
&\dot z = 1 + p_1 w_1 + \ldots + p_k w_k,
\end{aligned}
\right.
\tag{6.75}
$$

$$v = (v_1, \ldots, v_k),\, w = (w_1, \ldots, w_k) \in \mathbb{R}^k,$$

$$\begin{cases} \dot{x} = w, \\ \dot{p} = v, \\ \dot{\overline{p}} = \overline{v}, \\ \dot{z} = \overline{p} + p_1 w_1 + \ldots + p_k w_k, \end{cases} \tag{6.76}$$

$$\overline{v}, \overline{p} \in \mathbb{R}^1, \quad w = (w_1, \ldots, w_k), v = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Система (6.73) соответствует значению $\dim \mathbf{C}_t F_\perp$. Система (6.73) является канонической формой инволютивной системы, и задача терминального управления для нее является тривиальной.

Система (6.74) соответствует значению $\dim C_t F_\perp$ и является линейной системой.

Система (6.75) соответствует нечетным значениям величины

$$\dim \mathbf{C}_t F_\perp = 2k + 1, k > 0.$$

Пусть для системы (6.75) поставлена задача терминального управления по переводу точки (x^0, p^0, z_0) в точку (x^1, p^1, z_1). Сопоставим системе (6.75) систему (6.73) и симметрическую систему

$$\begin{array}{l} \dot{x} = w, \\ \dot{p} = w, \\ \dot{z} = p_1 w_1 + \ldots + p_k w_k. \end{array} \tag{6.77}$$

Для произвольного отрезка $[t_0, t_1]$ задача терминального управления может быть решена следующим образом. Возьмем два произвольных числа $\overline{z}_0$ и $\overline{\overline{z}}_0$, таких, что $z_0 = \overline{z}_0 + \overline{\overline{z}}_0$. Функция $\overline{z}(t) = \overline{z}_0 + t$ является решением системы (6.73). Пусть $\overline{z}_1 = \overline{z}(t_1) = \overline{z}_0 + t_1$. Положим $\overline{\overline{z}}_1 = z_1 \Leftrightarrow \overline{z}_1$. Решим задачу терминального управления для системы (6.77) по переводу точки $(x^0, p^0, \overline{\overline{z}}_0)$ в точку $(x^1, p^1, \overline{\overline{z}}_1)$ (с помощью построения подходящего лежандрова многообразия). Пусть функции $x(t), p(t), \overline{\overline{z}}(t)$ составляют соответствующее решение системы (6.77). Очевидно, что функции $x(t), p(t), z(t) = \overline{z}(t) + \overline{\overline{z}}(t)$ составляют решение системы (6.75), проходящее через точки (x^0, p^0, z_0), (x^1, p^1, z_1) в моменты времени t_0, t_1.

Рассмотрим теперь систему (6.76), которая соответствует четному значению величины $\dim \mathbf{C}_t F_\perp = 2k + 2, k > 0$. Задачу терминального управления по переводу точки $(x^0, p^0, \overline{p}_0, z_0)$ в точку $(x^1, p^1, \overline{p}_1, z_1)$ можно решить аналогичным образом. Сопоставим системе (6.76) линейную систему

$$\begin{array}{l} \dot{\overline{p}} = \overline{v}, \\ \dot{z} = \overline{p} \end{array} \tag{6.78}$$

и симметрическую систему (6.77). Возьмем отрезок $[t_0, t_1]$ и два числа $\overline{z}_0$ и $\overline{\overline{z}}_0$, такие, что $z_0 = \overline{z}_0 + \overline{\overline{z}}_0$. Рассмотрим некоторое решение системы

(6.78) $\overline{z}(t), \overline{p}(t), t \in [t_0, t_1]$, причем

$$\overline{z}(t_0) = \overline{z}_0, \quad \overline{p}(t_0) = \overline{p}_0, \quad \overline{p}(t_1) = \overline{p}_1.$$

Положим $\overline{z}(t_1) = \overline{z}_1$. Построим решение системы (6.77)

$$x(t), \quad p(t), \quad \overline{\overline{z}}(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

для которого

$$\begin{array}{lll} x(t_0) = x^0, & p(t_0) = p^0, & \overline{\overline{z}}(t_0) = \overline{\overline{z}}_0, \\ x(t_1) = x^1, & p(t_1) = p^1, & \overline{\overline{z}}(t_1) = \overline{\overline{z}}_1 = z_1 \Leftrightarrow \overline{\overline{z}}_1. \end{array}$$

Очевидно, что функции $x(t), p(t), \overline{p}(t), z(t) = \overline{z}(t) + \overline{\overline{z}}(t)$ составляют решение системы (6.76), проходящее через точку $(x^0, p^0, \overline{p}_0, z_0)$ и через точку $(x^1, p^1, \overline{p}_1, z_1)$.

6.2. О задачах управления с ограничениями на фазовые переменные типа равенств

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{y} = f_0(y) + f(y)u, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r. \tag{6.79}$$

При постановке той или иной задачи управления, связанной с системой (6.79), из практических соображений на фазовые переменные могут быть наложены ограничения вида

$$\varphi^k(y) = 0, \quad k = 1, \ldots, b. \tag{6.80}$$

Такая ситуация может быть, например, в задаче терминального управления, рассмотренной в предыдущем разделе, в задаче оптимального управления [26] и в других.

В этом разделе развивается подход, основанный на использовании понятия подсистемы системы (6.79), согласно которому вопрос об исследовании системы (6.79) с ограничениями (6.80) сводится к вопросу об исследовании некоторой системы

$$\dot{x} = g_0(x) + g(x)v, \quad x \in V \subset \mathbb{R}^m, \quad m < n, \quad v \in \mathbb{R}^s \tag{6.81}$$

без ограничений типа равенств на фазовые переменные x.

Заметим, что в рамках традиционных методов решения задач ограничениями вида (6.80) последние вносят усложнения по сравнению с задачами без ограничений такого вида. Скажем, формулировка принципа максимума Понтрягина безусловно усложняется [26]. С другой стороны, с помощью методов, разрабатываемых в этом разделе, производится редукция к системе, имеющей меньшую размерность и не имеющей ограничений на фазовые переменные типа равенств. Таким образом, здесь налицо явное упрощение.

Указанная редукция основана на решении следующей задачи. Рассмотрим множесто N, состоящее из точек $y \in M$, удовлетворяющих равенствам (6.80). Введем также множество подсистем системы (6.79), $\mathcal{P}$-многообразия которых принадлежат N. Если это множество не пусто, то система, которая описывается соотношениями (6.81) и к исследованию которой сводится исследование системы (6.79) с ограничениями (6.80), является в определенном смысле максимальной подсистемой такого вида. Точнее, это индуцированная подсистема, соответствующая максимальному $\mathcal{P}$-многообразию $\hat{N}$, принадлежащему N. Задача заключается в нахождении такой подсистемы. Если $\mathcal{P}$-многообразия, принадлежащие N, не существуют, то система (6.79) не имеет фазовых траекторий, принадлежащих N.

Построение многообразия $\hat{N}$ осуществляется с помощью следующего итерационного процесса, который назовем индуцирующим процессом.

Пусть N — многообразие. Рассмотрим ограничение ассоциированного аффинного распределения F на N, т.е. отображение

$$F|_N\colon y \in N \mapsto F|_N(y) = F(y) \cap TN_y.$$

Рассмотрим множество точек $N_1 = \{y \in N\colon F|_N(y) \neq \emptyset\}$. Если $N_1 = \emptyset$, то $\mathcal{P}$-многообразий, принадлежащих N, не существует. Предположим, что $N_1 \neq \emptyset$. Если $N_1 = N$ и $F|_N$ — регулярное аффинное распределение, то $\hat{N} = N$. Пусть $N_1 \neq N$ и пусть N_1 — многообразие. Тогда с N_1 производится та же процедура, т.е. рассматривается отображение F_{N_1}, множество $N_2 = \{y \in N_1\colon F|_{N_1} \neq \emptyset\}$ и т.д.

В результате возникает конечная последовательность многообразий, которую будем называть индуцирующим рядом системы (6.79) для ограничений (6.80),

$$N_0 \supset \ldots \supset N_d, \tag{6.82}$$

где $N_0 = N$. Индуцирующий процесс заканчивается на некотором шаге $d+1$ в одном из двух случаев. В первом $N_{d+1} = \emptyset$ и, следовательно, $\mathcal{P}$-многообразий, принадлежащих N, не существует. В этом случае будем говорить, что $\hat{N} = \emptyset$. Во втором случае $N_d = N_{d+1} = \hat{N}$. (Если

N_d состоит из изолированной точки, то запись $N_d = N_{d+1}$ означает, что эта точка является фазовой траекторией системы (6.79), т.е. $\mathcal{P}$-многообразием нулевой размерности.)

Индуцирующий процесс выполним, вообще говоря, локально в некоторой окрестности точки $y_0 \in M$, обладающей достаточной степенью регулярности. Для того чтобы определить эту степень, рассмотрим индуцирующий процесс подробнее.

Предположим, во-первых, что точка y_0 является регулярной точкой множества функций $\varphi^k(y)$, т.е ранг матрицы $\|\partial\varphi^k/\partial y^i\|_{i=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,b}$ в окрестности точки y_0 постоянен. Если $\operatorname{rank}\|\partial\varphi^k/\partial y^i\|_{i=1,\ldots,n}^{k=1,\ldots,b} = n \Leftrightarrow m_0$ и равенства (6.80) непротиворечивы, то в некоторой окрестности точки y_0 множество N представляет собой многообразие размерности m_0, которое, не ограничивая общности, можно задать в виде

$$y^l \Leftrightarrow \theta_0^l(y^1, \ldots, y^{m_0}) = 0, \quad l = m_0 + 1, \ldots, n. \tag{6.83}$$

Первый шаг индуцирующего процесса заключается в построении множества N_1. Для этой цели, согласно разделу 5.1, следует рассмотреть систему алгебраических уравнений относительно u вида (5.19), построенную для многообразия (6.83):

$$C(y^1, \ldots, y^{m_0})u = b(y^1, \ldots, y^{m_0}). \tag{6.84}$$

Считаем, что $y_0 = (y_0^1, \ldots, y_0^n)$ является регулярной точкой многообразия N относительно системы (6.79), т.е. ранг матрицы C постоянен в некоторой окрестности точки $(y_0^1, \ldots, y_0^{m_0})$. Пусть $\operatorname{rank} C = e$. Тогда условия совместности системы (6.84) заключаются в равенстве нулю всех миноров порядка $e+1$ расширенной матрицы $(C|b)$ и выглядят так:

$$\psi^j(y^1, \ldots, y^{m_0}) = 0, \quad j = 1, \ldots, J. \tag{6.85}$$

Если равенства (6.85) удовлетворяются тождественно, то $N = \hat{N}$. Предположим теперь, что равенства (6.85) не удовлетворяются тождественно. Пусть точка $(y_0^1, \ldots, y_0^{m_0})$ является регулярной точкой множества функций $\psi^j, j \in J$. Тогда, если равенства (6.85) выполняются в точке $(y_0^1, \ldots, y_0^{m_0})$, то они задают некоторое многообразие в пространстве переменных $(y^1, \ldots, y^{m_0})$. В совокупности с равенствами (6.83) равенства (6.85) определяют многообразие N_1. Не ограничивая общности, можно считать, что оно представимо в виде

$$y^l \Leftrightarrow \theta_1^l(y^1, \ldots, y^{m_1}) = 0, \quad l = m_1 + 1, \ldots, n. \quad m_1 < m_0. \tag{6.86}$$

Если равенства (6.85) не выполняются в точке $(y_0^1, \ldots, y_0^{m_0})$, то они не выполняются в точках некоторой окрестности этой точки. Отсюда вытекает, что в некоторой окрестности точки $y_0 = (y_0^1, \ldots, y_0^n) \in N$ не существует $\mathcal{P}$-многообразий, принадлежащих N, т.е. в этой окрестности $\hat{N} = \emptyset$ и индуцирующий процесс на этом заканчивается.

Если N является многообразием вида (6.86), то аналогично проводится второй шаг индуцирующего процесса, и т.д.

Точку y_0, для которой выполнимы все рассмотренные операции, будем называть регулярной точкой индуцирующего процесса.

После выполнения некоторого шага $d \leqslant m_0$ индуцирующий процесс заканчивается. При этом возможны два варианты: либо $\hat{N} = \emptyset$, либо $N_d = N_{d+1} = \hat{N}$.

Пусть $\hat{N}$ является многообразием размерности $m > 0$ вида

$$y^a \Leftrightarrow \theta^a(y^1, \ldots, y^m), \quad a = m+1, \ldots, n, \quad (y^1, \ldots, y^m) \in V \subset \mathbb{R}^m. \quad (6.87)$$

Согласно разделу 5.1, аффинному $\mathcal{P}$-распределению $F|_{\hat{N}}$ соответствует индуцированная подсистема на многообразии. Пусть эта система имеет вид (6.81), где $x = (y^1, \ldots, y^m)$. Морфизмом $\varkappa$ системы (6.81) в систему (6.79) является отображение

$$y^i = x^i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad y^a = \theta^a(x^1, \ldots, x^m), \quad a = m+1, \ldots, n.$$

Покажем, что любое решение $y(t)$ системы (6.79), принадлежащее N, принадлежит $\hat{N}$. Действительно, пусть $y(t) \in N_j$, где N_j — многообразие из индуцирующего ряда (6.82). Следовательно, $\dot{y}(t) \in TN_{y(t)}$. С другой стороны, $\dot{y}(t) \in F(y(t))$. Так как множество N_{j+1} состоит из точек $y \in N_j$, в которых $F(y) \cap T(N_j)_y \neq \emptyset$, то $y(t) \in N_{j+1}$.

Если $y(t)$ — произвольное решение системы (6.79), принадлежащее $\hat{N}$, то $x(t) = \varkappa^{-1}(y(t))$ — решение системы (6.81). Действительно, $\dot{x}(t) = \varkappa_*^{-1}|_{y(t)}\dot{y}(t)$. С другой стороны, ассоциированным аффинным распределением индуцированной системы (6.81) является индуцированное аффинное распределение $\overline{F} = \varkappa_*^{-1}F|_{\hat{N}}$. Следовательно, $\dot{x}(t) \in \overline{F}(x(t))$. Поэтому $x(t)$ — решение системы (6.81). Итак, доказана

Теорема 6.1. *Пусть точка y_0 является регулярной точкой индуцирующего процесса. Тогда существует окрестность этой точки, в которой выполнимо построение индуцирующего ряда* (6.82) *и справедливы следующие утверждения. Если $\hat{N} = \emptyset$, то не существует решений системы* (6.79), *удовлетворяющих равенствам* (6.80). *Если $\hat{N} \neq \emptyset$, то $\hat{N}$ является многообразием, на котором лежат все решения системы* (6.79), *удовлетворяющие равенствам* (6.80), *и которое является максимальным $\mathcal{P}$-многообразием системы* (6.79), *принадлежащим N. Если $\dim \hat{N} = m > 0$, то соответствующая индуцированная система* (6.81) *обладает следующим свойством: если $y(t)$*

— решение системы (6.79), *принадлежащее* $\hat{N}$, *то* $x(t) = \varkappa^{-1}(y(t))$ *— решение системы* (6.81), *и наоборот, если* $x(t)$ *— решение системы* (6.81), *то* $y(t) = \varkappa(x(t))$ *— решение системы* (6.79) *(где* $\varkappa$ *— параметризация многообразия* $\hat{N}$, *являющаяся морфизмом системы* (6.81) *в систему* (6.79)*).*

Из этой теоремы вытекает, что задачи управления, поставленные для системы (6.79) с ограничениями на фазовые переменные типа равенств (6.80), сводятся к аналогичным задачам для системы (6.81) без ограничений на фазовые переменные типа равенств.

Пример 6.5. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned}
&\dot y_1 = u_1 + (1 - y_2 + 2y_3 + y_4 - 2y_1^2)u_2,\\
&\dot y_2 = (2 + y_1 - 2y_2 + y_4)u_1 + (4 - y_1 - 3y_2 + 2y_3 + 4y_4 - 2y_1^2)u_2,\\
&\dot y_3 = y_5 + 3y_1u_1 + (1 + 2y_1 - 2y_1y_2 + 2y_1y_4 + 4y_1y_3 - 4y_1^3)u_2,\\
&\dot y_4 = (2 + 2y_1 - 2y_2 + y_4)u_1 + (5 - y_1 - 3y_2 + 2y_3 + 4y_4 - 2y_1^2)u_2,\\
&\dot y_5 = (y_2 - y_1)^2 + y_1u_1 + u_2, \quad y \in \mathbb{R}^5,
\end{aligned} \tag{6.88}$$

$$y_3 - y_1^2 = 0, \quad y_4 - y_2 + 1 = 0, \tag{6.89}$$

$$|u_1| \leqslant 1, \quad |u_2| \leqslant 1. \tag{6.90}$$

Поставим для системы (6.88) задачу оптимального быстродействия по переводу точки $(0, 0, 0, -1, 1)$ в точку $(2, 2, 4, 1, 1)$ при ограничениях на фазовые переменные (6.89) и на управления (6.90).

Равенства (6.89) задают трехмерное многообразие N в $\mathbb{R}^5$. Построим $\hat{N}$. На первом шаге индуцирующего процесса следует рассмотреть систему алгебраических уравнений (6.84) для многообразия N, которая в данном случае имеет вид

$$y_1u_1 + u_2 = 0, \quad y_1u_1 + u_2 = -y_5. \tag{6.91}$$

Условие совместности системы (6.91) имеет вид

$$y_5 = 0. \tag{6.92}$$

Равенства (6.89), (6.92) задают двумерное многообразие N_1 индуцирующего ряда (6.82).

Переходим ко второму шагу. Система алгебраических уравнений вида (6.84) для многооообразия N_1 имеет вид

$$y_1u_1 + u_2 = 0, \quad y_1u_1 + u_2 = -(y_2 - y_1)^2. \tag{6.93}$$

Условие совместности системы (6.93) имеет вид

$$y_2 - y_1 = 0. \tag{6.94}$$

Равенства (6.89), (6.92), 6.94) задают одномерное многообразие N_1, которое запишем в следующем виде:

$$y_2 = y_1, \quad y_3 = y_1^2, \quad y_4 = y_1 \Leftrightarrow 1, \quad y_5 = 0. \tag{6.95}$$

На третьем шаге индуцирующего процесса следует рассмотреть соответствующую систему алгебраических уравнений для многообразия N_2, которая имеет вид

$$y_1 u_1 + u_2 = 0. \tag{6.96}$$

Условия совместности выполняются тождественно. Следовательно, $N_2 = \hat{N}$. Индуцированная система на $\hat{N}$ (которая строится с помощью алгоритма, приведенного в разделе 5.1) имеет вид

$$\dot{y}_1 = u_1, \quad y_1 \in \mathbb{R}^1. \tag{6.97}$$

Задача оптимального управления для исходной системы (6.88) сводится к задаче оптимального управления для системы (6.97) по переводу точки $y_1 = 0$ в точку $y_1 = 2$ при ограничениях на управление $|u_1| \leqslant 1$. Эта задача является тривиальной. Оптимальным управлением является функция $u_1 = 1, t \in [0, 2]$, а оптимальным решением — функция $y_1 = t, t \in [0, 2]$.

Из (6.95), 6.96) следует, что оптимальным управлением для исходной системы являются функции $u_1 = 1$, $u_2 = \Leftrightarrow t$, а оптимальным решением — кривая

$$y_1 = t, \quad y_2 = t, \quad y_3 = t^2, \quad y_4 = t \Leftrightarrow 1, \quad y_5 = 0, \quad t \in [0, 2].$$

Литература

[1] Елкин В.И. Методы алгебры и геометрии в теории управления. Векторные поля и группы диффеоморфизмов. М.: ВЦ АН СССР, 1982. 62 с.

[2] Елкин В.И. Методы алгебры и геометрии в теории управления. Управляемые динамические системы. М.: ВЦ АН СССР, 1984. 66 с.

[3] Елкин В.И. Методы алгебры и геометрии в теории управления. Аффинные распределения и аффинные системы. М.: МФТИ, 1996. 111 с.

[4] Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г. Проблема декомпозиции в математическом моделировании. М.: Фазис, 1996. 300 с.

[5] Елкин В.И., Павловский Ю.Н. Декомпозиция моделей управляемых процессов //Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Оптимизация и управление–1 /ВИНИТИ. 1996. Т. 29. С. 185–238.

[6] Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1973. 259 с.

[7] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987. 478 с.

[8] Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188 с.

[9] Гриффитс П.А. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. М.: Мир, 1986. 260 с.

[10] Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 354 с.

[11] Андреев Ю.Н. Дифференциально-геометрические методы в теории управления //Автоматика и телемеханика. 1982. 10. С. 5–46.

[12] Аграчев А.А., Вахрамеев С.А., Гамкрелидзе Р.В. Дифференциально-геометрические методы в теории оптимального управления //Итоги науки и техн. Проблемы геометрии /ВИНИТИ 1983. Т. 14. С. 3–56.

[13] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.

[14] Понтрягин Л.С. Непрерывные группы преобразований. М.: Наука, 1973. 520 с.

[15] Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947. 359 с.

[16] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.

[17] Елкин В.И. К вопросу о классификации и канонических формах нелинейных управляемых систем //Автоматика и телемеханика. 1985. 9. С. 31–41.

[18] Елкин В.И. О классификации аффинных управляемых систем с фазовым пространством размерности $n < 4$ //Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. 1. С. 18–20.

[19] Елкин В.И. Автоморфизмы и декомпозиция аффинных управляемых систем //Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. 1. С. 30–32.

[20] Елкин В.И. Факторизация и декомпозиция аффинных управляемых систем //Докл. РАН. 1993. Т. 332. 5. С. 560–562.

[21] Елкин В.И. Подсистемы управляемых систем и задачи управления с ограничениями на фазовые переменные типа равенств //Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1994. Т. 34. 11. С. 1585–1596.

[22] Елкин В.И. Аффинные управляемые системы, аффинные распределения и t-кораспределения //Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. 11. С. 1869–1879.

[23] Елкин В.И. Подсистемы управляемых систем и задача терминального управления //Автоматика и телемеханика. 1995. 1. С. 21–29.

[24] Елкин В.И. Декомпозиция аффинных управляемых систем //Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. 11. С. 1852–1862.

[25] Елкин В.И. Эквивалентность, классификация, факторсистемы и подсистемы аффинных управляемых систем //Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Оптимизация и управление–1 /ВИНИТИ. 1996. Т. 29. С. 121–184.

[26] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. Наука, 1976. 392 с.

[27] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982. 304 с.

[28] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.

[29] Шилов Г.Е. Математический анализ. М.: Наука, 1972. Ч. 1–2. 624 с.

[30] Елкин В.И. Об условиях агрегирования управляемых динамических систем //Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1978. Т. 18. . 4. С. 928–934.

[31] Елкин В.И. Общее решение уравнений в частных производных с одинаковой главной частью //Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. . 8. С. 1389–1398.

[32] Елкин В.И., Леонова М.М. Классификация некоторых типов управляемых систем //М., 1989. 14 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ 15.02.89. 1002–1389. Деп.

[33] Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез управления //ДАН СССР. 1981. Т. 258. 4, С. 805–809.

[34] Крищенко А.П. Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления //Автоматика и телемеханика. 1984. 6. С. 30–36.

[35] Елкин В.И., Коновалова Л.Б. Линейные подсистемы нелинейных управляемых систем //Моделирование процессов управления и обработки информации: Междувед. сб. М.: МФТИ. 1994. С. 152–168.

[36] Коновалова Л.Б. О построении линейных подсистем аффинных управляемых систем //Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 1996. С. 20–36.

[37] Малаховский В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград: КГУ, 1978. 83 с.

[38] Жевнин А.А., Колесников К.С., Крищенко А.П., Толокнов В.И. Синтез алгоритмов терминального управления на основе концепций задач обратной динамики (обзор) //Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1985. 4. С. 180-188.

[39] Павловский Ю.Н. Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры //Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1974. Т. 14. 4. С. 862–872. Т. 14. 5. С. 1093–1193.

[40] Павловский Ю.Н. Управление декомпозиционными структурами // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наукова думка, 1982. Вып. 58. С. 11–16.

[41] Павловский Ю.Н. Теория факторизации и декомпозиции управляемых динамических систем //Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. . 2. С. 45–47.

[42] Яковенко Г.Н. Декомпозиция управляемых нелинейных систем с группой симметрий //Механика гироскопических систем/Киев: Вища школа, 1986. Вып. 5. С. 131–137.

[43] Яковенко Г.Н. Симметрии по состояниям в системах с управлением //Прикладная механика и математика: Междувед. сб. М.: МФТИ. 1992. С. 155–176.

[44] Павловский Ю.Н., Яковенко Г.Н. Группы, допускаемые динамическими системами //Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск: Наука. 1982. С. 155–189.

[45] Лобри К. Динамические полисистемы и теория управления // Математические методы в теории систем. М.: Мир. С. 134–173.

[46] Ивашко Д.Г. О классификации и допускаемых группах трехмерных управляемых систем //Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики: Междувед. сб. М.: МФТИ. 1996. С. 50–57.

[47] Коновалова Л.Б. О приведении аффинных управляемых систем к линейному виду //Проблемы математики в физико-технических и экономических задачах: Междувед. сб. М.: МФТИ. 1993. С. 75–89.

[48] Елкин В.И. Реализация, инвариантность и автономность нелинейных управляемых систем //Автоматика и телемеханика. 1981. 7. С. 36-44.

[49] Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1966. 319 с.

[50] Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2. Геометрия. М.: Наука, 1987. 416 с.

[51] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971. 343 с.

[52] Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 352 с.

[53] Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970. 400 с.

[54] Рашевский П.К. О соединимости любых двух точек неголономного пространства допустимой линией //Уч. зап. Моск. пед. ин-та им. Либкнехта, сер. физ.-мат. наук. 1968. 2. С. 83–94.

[55] Brunjvsky P. A classification of linear controllable systems //Kibernetika. 1970. V. 3. P. 173–187.

[56] Schouten I.A., Kulk W.v.d. Pfaff's problem and its generalizations. Oxford: Clarendon press, 1949. 384 p.

[57] Nagano T. Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras //J. Math. 1966. V. 18. P. 398–404.

[58] Sussmann H.J. Existence and uniqueness of minimal realizations of nonlinear systems // Math. Syst. Theory. 1977. V. 10. No. 3. P. 263–284.

[59] Hermann R., Krener A.J. Nonlinear controllability and observability //IEEE Trans. Aut. Contr. 1977. V. AC–22. No. 5. P. 728–740.

[60] Hirschorn R.M. (A,B)-invariant distributions and the disturbance decoupling of nonlinear systems //SIAM J. Control and Optimiz. 1981. V. 19. No. 1. P. 1–19.

[61] Nymeijer H. Feedback decjmposition of nonlinear control systems //IEEE Trans. Aut. Contr. 1983. V. AC-28. No. 8. P. 861–863.

[62] Su R. On the linear equivalents of nonlinear systems //Syst. Control Lett. 1982. V. 2. P. 48–50.

[63] Hunt L.R., Su R., Meyer G. Global transformations of nonlinear systems // IEEE Trans. Aut. Contr. 1983. V. 28. No. 1. P. 24–31.

[64] Bryant R.L., Chern S.S., Gardner R.B., Goldschmidt H.L., Griffits P.A. Exterior differential systems. N.Y.: Math. Sci. Res. Inst. Publ-s, V. 19, 1991. 354 c.

[65] Chow W.L. Über systems von linearen partieller Differentialeichungenerster orddnung //Math. Ann. 1940. V. 117. No. 1. P. 98–105.

[66] Sussmann H.J. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions //Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 180. P. 171–188.

[67] Hermann R. The GS algorithm for exact linearization to Brunovsry normal form //IEEE Trans. Aut. Contr. 1992. V. 37. No. 2. P. 224–236.