УДК 519.86

МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОУКЛАДНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ И ВЛИЯНИЕ ТРАНЗАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИННОВАЦИЙ.

© Я.М.Ташлицкая, А.А.Шананин[1]
МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва

В работе развивается подход В.М.Полтеровича, Г.М.Хенкина к моделированию технологических изменений. Удалось получить зависимость между скоростью распространения инноваций и транзакционными издержками. Предложено объяснение многоукладности технологической структуры, которое основано на анализе аттрактора цепочки Ленгмюра-Вольтерра.

Modeling of the stratification in technological structure and influence of transaction cost on the innovation diffusion.

A.A.Shananin, Y.M.Tashlitskaya

The paper contains some applications of V.M.Polterovich and G.M Henkin's approach in modeling of technological changes. It has been obtained a relationship between the rate of new technologies propagation and transaction cost. An explanation of stratification in the technological structure has been proposed. This explanation is based on analysis of the attractor for Langmuir-Volterra's equation.

1. Введение

Одним из центральных вопросов идеологических дискуссий последних десятилетий была проблема оценки влияния государственной политики на темпы научно-технического прогресса. Существуют полярные точки зрения. С одной стороны, либеральные экономисты, например Ф.А.Хайек, утверждают, что государственное вмешательство в экономические процессы нарушает таинство функционирования рынка и замедляет научно-технический прогресс, полагая, что только рынок может определить наиболее перспективные направления экономического развития. Это предположение используется как аргумент в критике социалистических доктрин. Его сторонники утверждают, что административное регулирование снижает экономические стимулы для распространения новых технологий. Такая проблема действительно существовала в советской экономике, и попытки стимулировать распространение новых технологий за счет внеэкономических стимулов, таких как социалистическое соревнование, оказались малоэффективными.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 99-01-01238, 96-15-96207)

С другой стороны, кейнсианская школа считает, что медленные процессы с характерными временами порядка десятилетий, к которым относятся процессы смены технологических укладов, плохо регулируются рыночными механизмами и что государственный спрос на инвестиции может способствовать научно-техническому прогрессу. Зависимость между внедрением научных открытий и большими циклами экономической конъюнктуры была обнаружена в работе Н.Д.Кондратьева "Большие циклы экономической конъюнктуры"(см. [6]). Крупные государственные программы, такие как программа высадки человека на Луну "Аполлон" или программа СОИ, оказывали косвенное влияние на научно-технический прогресс. Предполагают, что программа "Аполлон" способствовала разработке и широкому внедрению компьютерных технологий, а программа военных приготовлений в рамках проекта СОИ включала в себя элемент государственной политики США в области развития промышленных технологий [5]. Административные методы регулирования экономики позволяют легче перераспределять ресурсы, чем это допускают рыночные механизмы. Так в СССР в 30-ые годы была осуществлена программа индустриализации, которая позволила за счет ресурсов, накопленных в сельском хозяйстве, за короткий период времени создать военно-промышленный комплекс.

Разные точки зрения на эффективность государственного регулирования обусловлены разными представлениями о научно-техническом прогрессе. Сторонники либеральных экономических взглядов предполагают, что научно-технический прогресс - это распространение небольших нововведений и новых технологий на микроуровне. Динамика этого процесса определяется внутренними причинами и не требует крупных централизованных денежных вложений. Сторонники кейнсианских и социалистических взглядов склонны рассматривать научно-технический прогресс как крупные структурные сдвиги в технологическом укладе, обусловленные внедрением научных открытий. Такие сдвиги не являются спонтанными и происходят, как правило, при реализации крупных государственных программ. Попытки для реальных экономических систем установить с помощью эмпирических наблюдений какие представления о научно-техническом прогрессе оказываются более адекватными не приводят к однозначным результатам. Дело в том, что не вполне ясно как измерять научно-технический прогресс. Косвенные способы измерения могут приводить к ложным выводам. Например, в СССР в 70-ые годы официальная пропаганда говорила о высоких темпах научно-технического прогресса. Основанием для такого утверждения являлась регистрируемая статистическими службами динамика процесса замещения труда капиталом. Однако в реальности эти статистические наблюдения были вызваны снижением качества выпускаемой продукции (подробнее см. [7]). Поэтому в сложившейся ситуации темп замещения труда капиталом не являлся мерой темпа научно-технического прогресса.

Приведенный пример показывает насколько актуальной задачей является переход от общих идеологических дискуссий, происходящих на концептуальном уровне, к систематическим исследованиям на языке математических моделей.

2. Распространение инноваций в модели экономического роста при наличии транзакционных издержек

В [1-3] В.М.Полтерович и Г.М.Хенкин предложили подход к моделированию технологического развития отрасли, который формализует либеральные представления о научно-техническом прогрессе. В основе этого подхода лежат несколько известных фактов и идей. Прежде всего, речь идет о принадлежащей Дж.Шумпетеру идее представления механизма технологических изменений как взаимодействия двух эндогенных процессов: инновационного, т.е. создания новых технологий, и имитационного, т.е. их заимствования. Кроме того, согласно эмпирическим исследованиям даже в монопродуктовых отраслях эффективность разных предприятий неодинакова, причем характер распределения мощностей отрасли по уровням эффективности мало меняется со временем. Эти наблюдения нашли свое отражение в данном подходе.

В модели рассматривается производственная система, предприятия которой распределены по уровням технологической эффективности n, $n = 0, 1, \ldots$. Понятие уровня технологической эффективности может быть определено разными способами. Обозначим через $F_n(t)$ долю предприятий, находящихся в момент времени t на уровнях с номерами не выше n. Предполагается, что предприятие может переходить только на следующий более высокий уровень эффективности. Тогда убывание $F_n(t)$ происходит за счет перехода предприятий n-ого уровня, доля которых составляет $F_n - F_{n-1}$, на $(n+1)$-ый уровень. Скорость убывания складывается из двух элементов: инновационной составляющей $\alpha(F_{n-1} - F_n)$ и имитационной составляющей $\beta(1 - F_n)(F_{n-1} - F_n)$, которая пропорциональна доле более эффективных предприятий $(1 - F_n)$. Константы $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ характеризуют интенсивности соответственно инновационного и имитационного процессов и считаются одинаковыми для каждого уровня эффективности. Таким образом, эволюция распределения предприятий по эффективности описывается следующей системой дифференциально-разностных уравнений

$$\frac{dF_n}{dt} = -(\alpha + \beta(1 - F_n))(F_n - F_{n-1}) = \alpha(F_{n-1} - F_n) + \beta(1 - F_n)(F_{n-1} - F_n), \qquad (1)$$

с граничными и монотонными начальными условиями вида

$$F_0(t) \equiv 0;\ 0 < F_{k-1} < F_k(0) < 1, 1 < k < N;\ F_k(0) = 1, k \geq N. \qquad (2)$$

В [1] доказывается, что все решения задачи Коши (1), (2) асимптотически стремятся к частному решению следующего вида

$$F_n^*(t, A, \alpha, \beta) = \left(1 + A\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^n e^{\beta t}\right)^{-1}, \qquad (3)$$

где константа A зависит от начального распределения (2). При фиксированном t решение (3) представляет собой логистическую кривую, форма которой определяется только константами α и β. Эта кривая сдвигается в сторону увеличения эффективности с постоянной скоростью $\beta / \ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$, также не зависящей от начального распределения. Таким образом, с течением времени распределение предприятий по эффективности независимо от начальных условий приобретает устойчивую форму, что согласуется с эмпирическими наблюдениями. Кроме того, скорость волнового решения (3), к которому притягивается любое решение модели, можно интерпретировать как темп распространения новых технологий.

В [2] предложена интерпретация описанных выше переменных модели в терминах модели экономического роста. Кроме того, в указанной работе конкретизировано понятие уровня эффективности технологии. Пусть M_n - объем производственных мощностей, которые дают прибыль Λ_n с каждой единицы мощности в единицу времени. Обозначим через b_n фондоемкость создания единицы мощности на n-ом уровне эффективности. Показатель $\lambda_n = \dfrac{\Lambda_n}{b_n}$ принимается в качестве меры эффективности технологии уровня n,

$\lambda_{n+1}>\lambda_n$. Функция распределения мощностей по уровням эффективности определяется по следующим формулам

$$F_n = \left(\sum_{k=0}^{n} M_k\right)\Big/\left(\sum_{k=0}^{\infty} M_k\right),\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Предполагается, что вся прибыль расходуется на расширение мощностей. При этом прибыль $\Lambda_n M_n$, получаемая на n-ом уровне, разделяется на два потока капитальных вложений: доля φ_n этой прибыли идет на создание мощностей следующего $(n+1)$-го уровня, а другая часть объемом $(1-\varphi_n)\Lambda_n M_n$ тратится на расширение производства уровня n. Будем считать, что последовательность $\{b_n\}_0^\infty$ не возрастает и что фондоемкость создания единицы мощности на n-ом уровне предприятием с $(n-1)$-ого уровня равна b_{n-1}. С учетом этих предположений составляется уравнение экономического роста

$$\frac{dM_n}{dt} = (1-\varphi_n)\frac{\Lambda_n}{b_n}M_n + \varphi_{n-1}\frac{\Lambda_{n-1}}{b_{n-1}}M_{n-1} \tag{5}$$

с граничными и начальными условиями вида

$$M_0(t) \equiv 0;\ M_n(0) \geq 0, \sum_{n=1}^{N} M_n(0) > 0;\ M_n(0) = 0, n > N. \tag{6}$$

В соответствии с гипотезой Шумпетера $\varphi_n = \varphi(F_n) = \alpha_0 + \beta_0(1-F_n)$ с положительными инновационной α_0 и имитационной β_0 константами.

Если $\lambda_n \equiv \lambda, n = 1, 2, \ldots$, то систему (5) можно записать в виде (1) с $\alpha{=}\lambda\alpha_0$, $\beta{=}\lambda\beta_0$. Если же числа λ_n различны, то оказывается, что система (5) является возмущением системы (1). При дополнительных предположениях[2]

(a) $\{\lambda_n\}_0^\infty$ *положительна, строго возрастает и сходится к пределу* λ,

(b) $\{\lambda_n\}_0^\infty$ *удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda - \lambda_k) < \infty$$

в [1] доказано, что функция распределения мощностей по уровням эффективности, определяемая по решениям задачи (5), (6) согласно формуле (4), асимптотически притягивается к волновому решению (3) уравнения вида (1) с $\alpha = \lambda\alpha_0$, $\beta = \lambda\beta_0$. Таким образом, стабильность формы кривой распределения получает более глубокое обоснование.

Обсудим теперь вопрос о том, как транзакционные издержки влияют на скорость распространения новых технологий. Хотя природа этих издержек может быть различной[3], с точки зрения предприятия они означают утрату определенной доли прибыли. В связи с вопросами, сформулированными во введении, хотелось бы проанализировать как вмешательство государства в процессы на микроуровне может повлиять на развитие научно-технического прогресса на макроуровне. Рассмотрим случай, когда осуществление государством крупных проектов научно-технического развития оборачивается только налоговым бременем для "зрелых" отраслей. Чем больше масштабы проектов и чем больше

[2] Эти предположения соответствуют представлениям о распространении новых технологий в "зрелой" отрасли.

[3] В транзакционные издержки входят, например, государственные налоги, а также потери предприятий от рэкета и коррупции.

средств уже израсходовано на их осуществление, тем выше транзакционные издержки таких отраслей.

Рассмотрим модификацию модели роста, учитывающую транзакционные издержки. Введем в модель роста еще одну переменную. Обозначим через $Q(t)$ денежные средства, полученные от отрасли на осуществление государственных программ к моменту времени t. Будем считать, что для отрасли эти расходы являются чистыми транзакционными издержками и что взимаемая с предприятий отрасли доля прибыли в момент времени t пропорциональна величине $\frac{Q(t)}{Q(t)+M(t)}$, где $M(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} M_k(t)$ есть суммарная мощность всей отрасли. Модель роста запишется в следующем виде

$$\begin{cases} \frac{dM_n}{dt} = \left[(1-\varphi_n)-\left(\frac{Q}{Q+M}-\varphi_n\right)_+\right]\lambda_n M_n + \left(\varphi_{n-1}-\frac{Q}{Q+M}\right)_+ \lambda_{n-1} M_{n-1} \\ \frac{dQ}{dt} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{Q}{Q+M}\lambda_n M_n . \end{cases} \tag{7}$$

Здесь $(a)_+ \equiv \max(a,0)$. К начальному и граничному условиям (6) добавляется начальное условие $Q(0)=Q_0>0$.

Можно покаазать, что отношение $\frac{Q(t)}{M(t)}$ является первым интегралом системы (7). Следовательно, доля прибыли $\frac{Q(t)}{Q(t)+M(t)}$, которую государство отнимает у предприятий отрасли, не меняется со временем, что соответствует принятой практике межотраслевого перераспределения ресурсов.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (a), (b) *и последовательность* $\{F_n\}$ *определяется по решениям задачи* (7), (6) *по формуле* (4). *Тогда*

1) *если* $\frac{Q}{Q+M}<\alpha_0$, *то найдется такая константа* d, *что последовательность* $\{F_n\}$, *выполняются соотношения*

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sup_n |F_n(t)-F_n^*(t,d,\lambda\left(\alpha_0-\frac{Q}{Q+M}\right),\lambda\beta_0)|\right)=0,$$

где F_n^* - *функция из* (3) ;

2) *если* $\alpha_0 \le \frac{Q}{Q+M}$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{M_N(t)}{M(t)}=1$. *Более того,* $M_k(t)\equiv 0$ при $k>N$.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Содержательно теорема означает, что транзакционные издержки снижают скорость распространения новых технологий. С течением времени она приближается к величине $\lambda\beta_0/\ln\left(1+\frac{\beta_0}{\alpha_0-Q/(M+Q)}\right)$. Если доля прибыли $\frac{Q}{M+Q}$, взимаемая с предприятий отрасли, превышает некоторое пороговое значение - размер инновационной константы α_0, то научно-технический прогресс на микроуровне останавливается.

3. Моделирование многоукладности технологической структуры

Изложенный выше подход позволил объяснить качественные особенности эволюции черной металлургии СССР в период с 1976 по 1988 года [4]. В то же время имеется ряд эмпирических фактов, которые не нашли отражения в рамках исходной модели. Известны случаи, когда в одной и той же отрасли могут независимо сосуществовать технологические уклады на разных уровнях эффективности так, что достижения более передового уклада практически не передаются менее эффективным[4].

Для объяснения этого явления требуется модифицировать исходную модель. В [2] В.М.Полтерович и Г.М.Хенкин предложили обобщение модели, в которой динамика распределения предприятий по уровням эффективности описывалась с помощью уравнения

$$\frac{dF_n}{dt} = -\phi(F_n)(F_n - F_{n-1}).$$

Здесь $\phi(F_n)$ - функция, описывающая интенсивность перехода на следующий уровень эффективности. В [2] доказано, что если $\phi(F_n)$ монотонно убывающая функция, то справедлива теорема об асимптотике решений, аналогичная случаю линейной функции $\phi(F_n) = \alpha + \beta(1 - F_n)$. Если же функция $\phi(F_n)$ не является монотонно убывающей функцией, то высказывается гипотеза, что асимптотика решений будет иметь несколько технологических укладов (подробнее см. в [3]).

В данной работе исследуется другая модификация, в которой сохраняется исходное предположение Дж.Шумпетера о разделении механизма технологических сдвигов на инновацию и имитацию, но модифицируется модельное описание имитационного процесса. Будем предполагать, что предприятия могут имитировать не любую более передовую технологию, а лишь технологии соседнего более высокого уровня эффективности. Тогда в введенных выше обозначениях имитационную составляющую можно записать в виде $\beta(F_{n+1} - F_n)(F_{n-1} - F_n)$, а система, описывающая эволюцию распределения предприятий по уровням эффективности, выписывается следующим образом

$$\frac{dF_n}{dt} = \alpha(F_{n-1} - F_n) + \beta(F_{n+1} - F_n))(F_{n-1} - F_n). \tag{8}$$

На больших временах численные решения модифицированной модели имеют качественно иное поведение, чем решения исходной модели. На рисунках 1, 2 приведены результаты расчетов для различных начальных условий. Форма кривой, которая устанавливается на больших временах при численном решении новой задачи Коши (8), (2) существенно зависит от начальных данных. На рисунке 3 изображены доли предприятий, находящихся на разных уровнях эффективности (плотности распределения ($f_n = F_n - F_{n-1}$)). В исходной модели В.М.Полтеровича, Г.М.Хенкина предприятия концентрируются около одного максимума. В модифицированной модели плотность распределения имеет несколько локальных максимумов, т.е. предприятия группируются в несколько технологических укладов.

[4] В этом случае можно говорить о многоукладности.

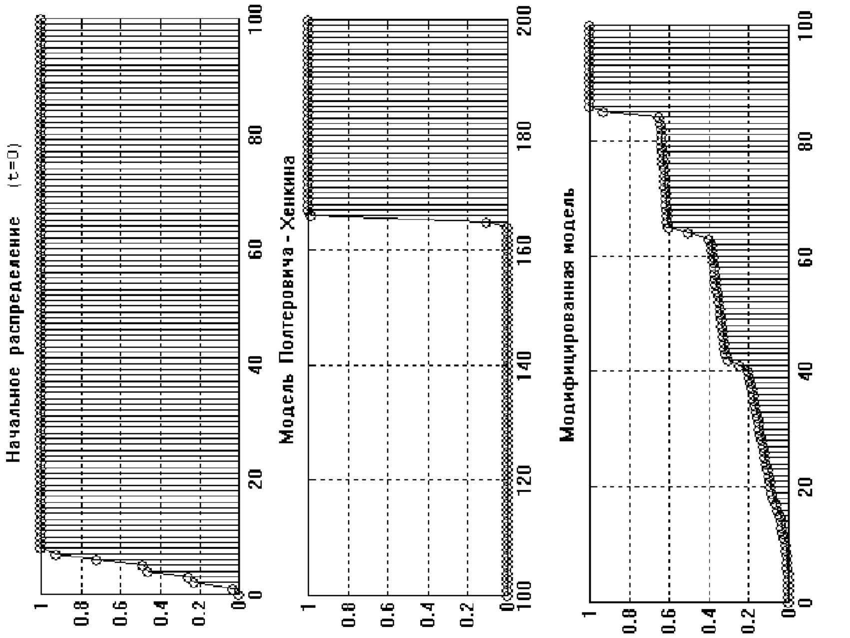
Начальное распределение (t=0)
Модель Полтеровича - Хенкина
Модифицированная модель
α=0.01, β=5, t=200

рис. 1

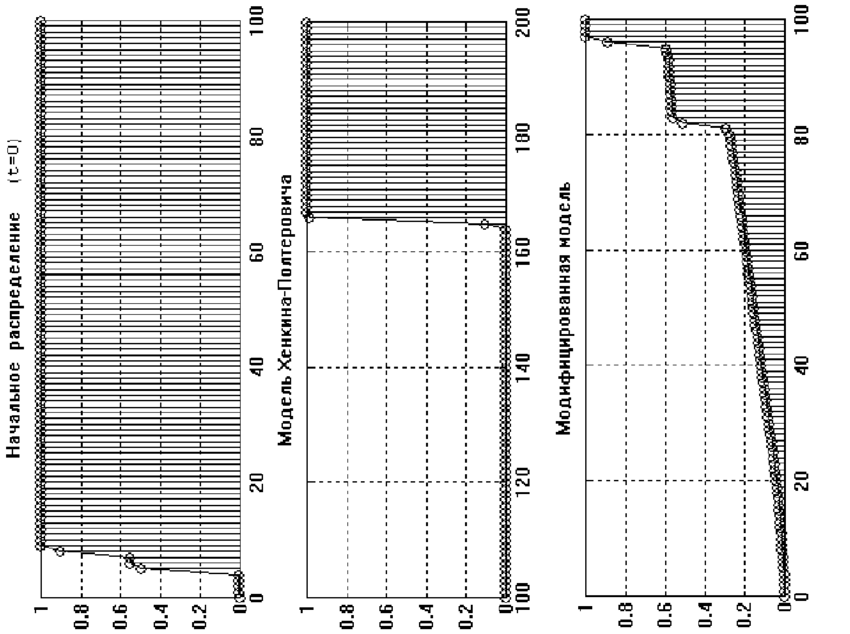
Начальное распределение (t=0)
Модель Хенкина-Полтеровича
Модифицированная модель
α=0.01, β=5, t=200

рис. 2

Для объяснения этих различий сравним асимптотическое поведение решений исходной (1), (2) и новой (8), (2) задач Коши при $\alpha = 0$, т.е. когда технологии распространяются только за счет имитации. В этом случае задача Коши (1), (2) переходит в конечную систему дифференциальных уравнений N-ого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{dt} &= -\beta(1 - F_1)F_1 \\ \frac{dF_n}{dt} &= -\beta(1 - F_n)(F_n(t) - F_{n-1}),\ n = 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Все остальные переменные, начиная с F_{N+1}, тождественно равны единице. Эта система имеет неподвижные точки

$$(0, \ldots, 0), (0, \ldots, 0, 1), (0, \ldots, 0, 1, 1), \ldots, (1, \ldots, 1).$$

По теореме о линейном приближении устойчивой является только точка $(0, \ldots, 0)$, следовательно, процесс имитации технологий трансформирует кривую распределения исходной модели в единичную "ступеньку", т.е., последовательно копируя более передовые технологии, все предприятия постепенно собираются на самом высоком уровне эффективности.

Положим $\alpha = 0$ в модифицированной задаче (8), (2). Замена переменных $\tau = \beta t$, $c_n(t) = F_{N+1-n}(t) - F_{N-n}(t)$ приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений N-ого порядка

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= c_1 c_2 \\ \dot{c}_n &= c_n(c_{n+1} - c_{n-1}), \quad n = 2, \ldots, N-1, \\ \dot{c}_N &= -c_N c_{N-1} \\ \\ c_n(0) &= \gamma_n > 0, \quad n = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{9}$$

Цепочка уравнений $\dot{c}_n = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}), \quad -\infty < n < +\infty$ первоначально возникла в физике при изучении тонкой структуры спектров ленгмюровских колебаний в плазме. В [9] показано, что она является дискретным аналогом уравнения КдФ. В [8] конечная цепочка Ленгмюра называется моделью Вольтерра, при этом она интерпретируется как иерархическая экосистема хищников - жертв. Поэтому будем называть ее цепочкой Ленгмюра-Вольтерра.

В [10] Ю.Мозер описал как устроен аттрактор цепочки Ленгмюра-Вольтерра:

$$\lim_{t\to\infty} c_{2k-1}(t) = \lambda_k^2, \quad k = 1, \ldots, \left[\tfrac{N+1}{2}\right],$$
$$\lim_{t\to\infty} c_{2k}(t) = 0, \qquad k = 1, \ldots, \left[\tfrac{N}{2}\right],$$

где $\lambda_1^2 > \ldots > \lambda^2_{\left[\frac{N+1}{2}\right]}$ являются упорядоченными по возрастанию квадратами различных положительных собственных значений матрицы

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma_1} & & & \\ \sqrt{\gamma_1} & 0 & \sqrt{\gamma_2} & & \mathbf{O} \\ & \sqrt{\gamma_2} & 0 & & \\ \mathbf{O} & & \ddots & 0 & \sqrt{\gamma_N} \\ & & & \sqrt{\gamma_N} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, все переменные цепочки Ленгмюра-Вольтерра с четными индексами стремятся к нулю, а все переменные с нечетными индексами стремятся к положительным числам, которые можно найти, вычислив собственные числа матрицы L, составленной по начальным данным.

Структура аттрактора цепочки Ленгмюра-Вольтерра объясняет наличие нескольких локальных максимумов у плотности распределения предприятий по уровням эффективности, их упорядоченность по величине, которые наблюдались в численных экспериментах (см. рис. 3). Кроме того, структура этого аттрактора позволяет предсказать асимптотическое поведение системы (8), (2). По начальным данным мы можем вычислить число локальных максимумов и их величины для плотности распределения, которые устанавливаются на характерных временах порядка $\frac{1}{\beta\nu} \ll t \ll \frac{1}{\alpha}$, где $\nu = \min\{\lambda_k^2 - \lambda_{k+1}^2 | k = 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right]\}>0$. Для строгого обоснования последнего утверждения нужно исследовать скорость сходимости к аттрактору решений задачи Коши (9) цепочки Ленгмюра-Вольтерра.

Приложение

Доказательство теоремы. Пусть $\dfrac{Q}{Q+M} < \alpha_0$. Тогда

$$\frac{dM_k}{dt} = (1 - \alpha_0 - \beta_0(1-F_k))\lambda_k M_k + (\alpha_0 - \frac{Q}{Q+M} + \beta_0(1 - F_{k-1}))\lambda_{k-1} M_{k-1} =$$

$=\frac{M}{Q+M}\left[\left(1-(\alpha_0-\frac{Q}{Q+M})\frac{Q+M}{M}-\beta_0\frac{Q+M}{M}(1-F_k)\right)\lambda_k M_k+\right.$
$\left.+\left((\alpha_0-\frac{Q}{Q+M})\frac{Q+M}{M}+\beta_0\frac{Q+M}{M}(1-F_{k-1})\right)\lambda_{k-1}M_{k-1}\right].$
Если обозначить $\alpha_0'=(\alpha_0-\frac{Q}{Q+M})\frac{Q+M}{M}$, $\beta_0'=\beta_0\frac{Q+M}{M}$ и изменить масштаб времени $t_{new}=\frac{M}{Q+M}t$, то получим уравнение (5) с $\varphi_n=\alpha_0'+\beta_0'(1-F_n)$, для которого справедлива теорема 2 из [2] (стр. 522). Переходя к исходному временному масштабу, получаем 1).
Доказательство утверждения 2) распадается на два случая.
1. Пусть $\frac{Q}{Q+M}\geq\alpha_0+\beta_0$. Тогда $\frac{dM_k}{dt}=\left(1-\frac{Q}{Q+M}\right)\lambda_k M_k$. Отсюда следует справедливость 2) в этом случае.
2. Пусть $\alpha_0+\beta_0>\frac{Q}{Q+M}\geq\alpha_0$.
Учитывая, что $F_k(0)=1, k\geq N, M_n(0)=0, n>N$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{dM_n}{dt}&=0, \text{ при } n>N;\\ \frac{dM_N}{dt}&=\frac{M}{Q+M}\lambda_N M_N+\left(\alpha_0+\beta_0(1-F_{N-1})-\frac{Q}{Q+M}\right)_+\lambda_{N-1}M_{N-1}.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{M_N}{M}\right)=\frac{1}{M}\frac{dM_N}{dt}-\frac{M_N}{M^2}\frac{dM}{dt}\geq\frac{M}{Q+M}\lambda_N\frac{M_N}{M}-\frac{M_N}{M}\frac{1}{M}\frac{M}{Q+M}\sum_{k=1}^{N}\lambda_k M_k=$$

$$=\frac{M_N}{M}\frac{1}{Q+M}\left[\sum_{k=1}^{N}(\lambda_N-\lambda_k)M_k\right]=\frac{M_N}{M}\frac{M}{Q+M}\left[\sum_{k=1}^{N-1}(\lambda_N-\lambda_k)\frac{M_k}{M}\right]\geq 0.$$

Обозначим $\delta=\min(\lambda_N-\lambda_k|k{=}1,\ldots,N{-}1)>0$. Допустим противное. Предположим, что $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{M_N(t)}{M(t)}<1$. Тогда

$$\frac{d(M_N/M)}{dt}\geq\frac{M_N}{M}\frac{M}{M+Q}(1-\frac{M_N}{M})\delta\geq c\frac{M_N}{M},\ \text{где } c=\delta\frac{M(0)}{M(0)+Q_0}\min_{t\geq 0}\left(1-\frac{M_N(t)}{M(t)}\right)>0.$$

По лемме Гроннуола-Беллмана

$$\frac{M_N(t)}{M(t)}\geq\frac{M_N(0)}{M(0)}e^{ct}.$$

Значит, начиная с некоторого момента времени, $\frac{M_N(t)}{M(t)}>1$. Противоречие. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Полтерович В. М., Хенкин Г. М.* Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий. //Экономика и математические методы, 1988. T.XXIV, вып.6.

[2] *Полтерович В. М., Хенкин Г. М.* Эволюционная модель экономического роста. //Экономика и математические методы, 1989. T.XXV, вып.3.

[3] *Henkin G.M., Polterovich V.M.* A difference - differential analogue of the Burgers equation and some models of economic development. //Universites Paris VI et VII, CNRS, 1997.

[4] *Гельман Л.М., Левин М.И., Полтерович В. М., Спивак В.А.* Моделирование динамики распределения предприятий отрасли по уровням эффективности (на примере черной металлургии).//Экономика и мат. методы, 1993. Т.29, вып.3.

[5] *Зегвельд В., Энцинг К.* СОИ: технологический прорыв или экономическая авантюра? //М.: Прогресс, 1989.

[6] *Кондратьев Н.Д., Опарин Д.И.* Большие циклы конъюнктуры: Доклады и их обсуждение в институте экономики. //М., 1928.

[7] *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* Опыт математического моделирования экономики. //М.: Энергоатомиздат, 1996.

[8] *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. //М.: Наука, 1986.

[9] *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. //М.: Наука, 1980.

[10] *Moser J.* Three integrable hamiltonian systems connected with isospectral deformations. //Advances in mathematics, 1975, v.16, 2.