ОБ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ, ДОПУСКАЮЩИХ АЛГЕБРЫ ЛИ С L-СВОЙСТВОМ

В. И. Елкин

Рассматриваются аффинные управляемые системы, т.е. системы следующего вида:

$$\dot{y} = f_0(y) + f(y)u, \qquad y \in M \subset R^n, \quad u \in R^r; \tag{1}$$

здесь M — фазовое пространство, являющееся областью, f_0 — гладкое векторное поле, f — $(n \times r)$-матрица, столбцы которой f_α, $\alpha = 1, \dots, r$, — гладкие векторные поля. Предполагается, что $\operatorname{rank} f = \mathrm{const}$. Система (1) называется неприводимой, если $\operatorname{rank} f = r$.

Решением или фазовой траекторией системы (1) называется непрерывная функция $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, для которой существует такое кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, что $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют (1).

При изучении управляемых систем большую роль играют симметрии или, иначе говоря, допускаемые преобразования. С помощью допускаемых преобразований можно строить новые решения по известным решениям. Кроме того, допускаемые преобразования ответственны за определенные декомпозиции.

Условия существования допускаемых преобразований формулируются, как правило, в терминах допускаемых векторных полей, порождающих однопараметрические группы допускаемых диффеоморфизмов. Допускаемые векторные поля образуют алгебры Ли.

Допускаемые преобразования можно ввести в терминах категории AS аффинных управляемых систем, которая подробно описана в [1, с. 145].

В разделе 1 данной работы приводятся некоторые определения и утверждения, касающиеся категории AS. В разделе 2 рассматриваются управляемые системы (1), для которых допускаемые алгебры Ли обладают L-свойством.

1. Рассмотрим наряду с системой (1) аффинную систему

$$\dot{x} = g_0(x) + g(x)v, \qquad x \in N \subset R^m, \quad v \in R^s. \tag{2}$$

Гладкое отображение $\psi \colon M \to N$ называется морфизмом системы (1) в систему (2), если как только $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, — решение системы (1), то $x(t) = \psi(y(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, — решение системы (2). Заметим, что решения $y(t)$ и $x(t)$ соответствуют, вообще говоря, разным управлениям $u(t)$ и $v(t)$.

Управляемые системы (1) вместе с введенными морфизмами образуют категорию, которая обозначается через AS. Введем также подкатегорию ASP категории AS, объектами которой являются системы (1), а морфизмами — гладкие отображения фазовых пространств, переводящие решения в решения, соответствующие одинаковым управлениям.

Изоморфизмом системы (1) в систему (2) (в категории AS или категории ASP) называется диффеоморфизм $\psi\colon M \to N$, такой, что ψ, ψ^{-1} — морфизмы (в соответствующей категории). Если существует изоморфизм системы (1) в систему (2) то они называются изоморфными или эквивалентными. Ясно, что в категории ASP изоморфизмами являются по существу замены фазовых переменных. Изоморфизм системы в себя называется автоморфизмом или допускаемым преобразованием. Если $\psi\colon M' \to N'$ — изоморфизм системы, являющейся ограничением системы (1) на область $M' \subset M$ в систему, являющуюся ограничением системы (2) на область $N' \subset N$, то ψ называется локальным изоморфизмом (1) в (2). В случае существования локального изоморфизма системы называются локально эквивалентными. Локальный изоморфизм системы в себя называется локальным допускаемым преобразованием.

Для изучения морфизмов в категории AS удобно применять некоторые дифференциально-геометрические объекты, связанные с каждой системой (1). Напомним, что аффинным распределением W, заданным в области M, называется отображение, которое ставит в соответствие каждой точке $y \in M$ аффинное подпространство касательных векторов $W(y) \subset TM_y$, где TM_y — касательное пространство области M в точке y. Если $W(y)$ для каждой точки $y \in M$ является линейным подпространством, то W называется распределением. Запись $\xi \in W$, где ξ — векторное поле, заданное в области M, означает, что $\xi(y) \in W(y)\ \ \forall\, y \in M$.

Система (1) порождает в области M аффинное распределение F, которое называется ассоциированным аффинным распределением системы (1) и определяется следующим образом:

$$F\colon y \to F(y) = f_0(y) + L_F(y),$$

где L_F — распределение, порожденное полями f_α, $\alpha = 1, \dots, r$, т.е.

$$L_F(y) = \mathrm{span}\{f_\alpha(y), \alpha = 1, \dots, r\}.$$

Системы (1), (2) (для которых $n = m$) эквивалентны относительно диффеоморфизма $\psi\colon M \to N$ тогда и только тогда, когда

$$\psi_*|_y F(y) = G(\psi(y)) \quad \forall y \in M, \tag{3}$$

где F, G — ассоциированные аффинные распределения систем (1), (2), $\psi_*|_y$ — дифференциал отображения ψ в точке y, т.е. линейное отображение касательных векторов, определяемое матрицей Якоби $\|\partial\psi/\partial y\|$.

Если для управляемой системы

$$\dot y = h_0(y) + h(y)v, \qquad y \in M \subset R^n, \quad v \in R^s, \tag{4}$$

фазовое пространство совпадает с фазовым пространством системы (1), то системы (1), (4) называются эквивалентными по управлениям, если тождественное отображение $e_M\colon M \to M$ является изоморфизмом системы (1) в систему (4). Таким образом, эквивалентные по управлениям системы имеют одинаковые множества решений. Согласно (3), системы (1), (4) эквивалентны по управлениям тогда и только тогда, когда они порождают одинаковые ассоциированные аффинные распределения в области M.

Ясно, что если система (4), для которой $s = r$, получается из системы (1) невырожденной заменой управлений $u = \lambda_0(y) + \lambda(y)v$, $|\lambda| \neq 0$, то системы (1), (4) эквивалентны по управлениям. Обратное утверждение неверно. Пусть, например, для системы (1) $\operatorname{rank} f = q < r$. Тогда, по крайней мере локально, система (1) эквивалентна по управлениям неприводимой системе, для которой ранг соответствующей матрицы равен q. Действительно, пусть в некоторой окрестности $U \subset M$ отличен от нуля минор матрицы f, порождаемый первыми q столбцами или, иначе говоря, векторными полями f_α, $\alpha = 1, \ldots, q$. Рассмотрим систему

$$\dot{y} = f_0(y) + f_\alpha(y)u^\alpha, \qquad y \in U \subset R^n, \quad u \in R^q. \tag{5}$$

(Здесь и далее применяется правило суммирования по повторяющемуся индексу. В данном случае $f_\alpha(y)u^\alpha = \sum_{\alpha=1}^q f_\alpha(y)u^\alpha$.) Система (5) порождает в области U то же самое аффинное распределение, что и система (1). Поэтому система (1), будучи ограничена на окрестность U, эквивалентна по управлениям системе (5). Однако, эти системы не могут быть получены друг из друга невырожденной заменой управлений.

Векторное поле ξ, заданное в фазовом пространстве M системы (1), называется допускаемым системой (1) (в категории AS или в категории ASP), если каждое преобразование локальной однопараметрической группы, порождаемой полем ξ, является локальным допускаемым преобразованием (в соответствующей категории).

Справедливы следующие утверждения:

Т е о р е м а 1. Поле ξ допускается системой (1) в категории ASP тогда и только тогда, когда

$$[f_\alpha, \xi] = 0, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, r. \tag{6}$$

Т е о р е м а 2. Поле ξ допускается системой (1) в категории AS тогда и только тогда, когда

$$[f_\alpha, \xi] \in L_F, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, r, \tag{7}$$

или, в другой записи,

$$[f_\alpha, \xi] = f\kappa_\alpha(y), \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, r,$$

где $\kappa_\alpha(y)$ — некоторые r-мерные функции.

Используя тождество Якоби, нетрудно вывести из (6) и (7), что множества векторных полей, допускаемых в категории ASP и AS, образуют алгебры Ли, которые обозначаются, соответственно, через A_0 и A_1. Теорема 1 доказана Г.Н.Яковенко, который также ввел алгебру A_0 [2].

Любое семейство гладких векторных полей

$$S = \{\xi_j = \xi_j^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}, j \in J\},$$

заданное в области $M \subset R^n$, порождает в этой области распределение $\Delta_S\colon y \to \operatorname{span}\{\xi_j(y), j \in J\}$. Если семейство S является конечномерной алгеброй Ли, то будем говорить, что она обладает L-свойством в случае, когда $\dim \Delta_D(y) = p\ \forall y \in M$, где p — размерность алгебры S. Ясно, что в этом случае $p \le n$.

Будем говорить также, что система (1) находится в общем положении, если $\dim \Delta_C(y) = n\ \forall y \in M$, где C — алгебра Ли, порождаемая векторными полями f_α, $\alpha = 0, 1, \ldots, r$ (т.е. C — минимальная алгебра Ли, содержащая f_α, $\alpha = 0, 1, \ldots, r$).

2. В данном разделе рассмотрена ситуация, когда допускаемая алгебра A_1 содержит подалгебры, обладающие L-свойством. Известно, что если управляемая система допускает алгебру A_0, содержащую подалгебры с L-свойством, то эта система обладает некоторыми свойствами, касающимися приведения ее с помощью эквивалентных преобразований (изоморфизмов) в рамках категории ASP (т.е. с помощью замен фазовых переменных) к специальному виду [2]. Оказывается, что аналогичные свойства справедливы и в общем случае (т.е. в случае алгебры A_1 и категории AS). Этот факт основан на следующем утверждении.

Т е о р е м а 3. *Если существует подалгебра A алгебры A_1 управляемой системы* (1)*, причем A обладает L-свойством, то существует локально эквивалентная по управлениям система, для которой A (в некоторой окрестности) является подалгеброй соответствующей алгебры A_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, не ограничивая общности, что система (1) неприводима, т.е. $\operatorname{rank} f = r$ (ибо, как было показано выше, каждая система локально эквивалентна по управлениям неприводимой системе). Пусть система (1) допускает p-мерную алгебру $A \subset A_1$, обладающую L-свойством, причем поля ξ_a, $a = 1, \ldots, p$, составляют базис алгебры A. Следовательно,

$$[f_0, \xi_a] = f\nu_a, \qquad a = 1, \ldots, p, \tag{8}$$

$$[f, \xi_a] = f\mu_a, \qquad a = 1, \ldots, p, \tag{9}$$

$$[\xi_a, \xi_b] = c_{ab}^d \xi_d, \qquad a, b, d = 1, \ldots, p, \tag{10}$$

где $\nu_a(y)$ — r-мерные вектор-функции; μ_a — функциональные $(r\times r)$-матрицы; $c_{ab}^d = \mathrm{const}$. (В (9) применена матричная запись: выражение $[f, \xi_a]$ означает матрицу, столбцами которой являются коммутаторы $[f_\beta, \xi_a]$, $\beta = 1, \ldots, r$.)

С помощью невырожденной замены управлений

$$u = \lambda_0(y) + \lambda(y)v, \qquad |\lambda| \ne 0, \tag{11}$$

построим управляемую систему

$$\dot{y} = \tilde{f}_0 + \tilde{f}v, \tag{12}$$

для которой

$$[\tilde{f}_0, \xi_a] = 0, \qquad a = 1, \ldots, p, \tag{13}$$

$$[\tilde{f}, \xi_a] = 0, \qquad a = 1, \ldots, p. \tag{14}$$

Имеем $\tilde{f}_0 = f_0 + f\lambda_0$, $\tilde{f} = f\lambda$. Поэтому замена управлений (11) должна удовлетворять условиям

$$[f_0 + f\lambda_0, \xi_a] = 0, \qquad a = 1, \ldots, p, \tag{15}$$

$$[f\lambda, \xi_a] = 0, \qquad a = 1, \ldots, p. \tag{16}$$

Раскроем выражения (15), используя (8),(9):

$$[f_0, \xi_a] + [f, \xi_a]\lambda_0 - f\xi_a(\lambda_0) = f(\nu_a + \mu_a\lambda_a - \xi_a(\lambda_0)).$$

Отсюда и из линейной независимости (в каждой точке y) полей f_α, $\alpha = 1, \ldots, r$, вытекает, что равенства (15) выполняются тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\xi_a(\lambda_0) = \nu_a + \mu_a\lambda_0, \qquad a = 1, \ldots, p. \tag{17}$$

Аналогично показывается, что равенства (16) равносильны равенствам

$$\xi_a(\lambda) = \mu_a\lambda, \qquad a = 1, \ldots, p. \tag{18}$$

Соотношения (17) и (18) представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковой главной частью относительно $\lambda_0^\beta(y)$, $\beta = 1, \ldots, r$, и $\lambda_\alpha^\beta(y)$, $\alpha = 1, \ldots, r$, $\beta = 1, \ldots, r$. Теория таких систем разработана в [3]. Рассмотрим систему (17). Докажем, что условия совместности, приведенные в [3], выполняются тождественно. Согласно теории дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью, полям ξ_a, $a = 1, \ldots, p$, определенным в пространстве переменных y^i, следует поставить в соответствие поля

$$\xi'_a = \xi_a + (\nu_a + \mu_a\lambda_0)\frac{\partial}{\partial\lambda_0}, \tag{19}$$

определенные в пространстве переменных y^i, λ_0^β. Условия совместности системы (17) заключаются в выполнении равенств $[\xi'_a, \xi'_b] = c_{ab}^d\xi'_d$, что равносильно выполнению равенств

$$\xi'_a(\nu_b + \mu_b\lambda_0) - \xi'_b(\nu_a + \mu_a\lambda_0) = c_{ab}^d(\nu_d + \mu_d\lambda_0). \tag{20}$$

Распишем (20) подробнее:

$$\begin{aligned}&\xi_a(\nu_b) + \xi_a(\mu_b)\lambda_0 + \nu_a\mu_b + \mu_a\mu_b\lambda_0 - \\ &\xi_b(\nu_a) - \xi_b(\mu_a)\lambda_0 - \nu_b\mu_a - \mu_b\mu_a\lambda_0 = \\ &c_{ab}^d(\nu_d + \mu_d\lambda_0).\end{aligned} \tag{21}$$

Для доказательства (21) воспользуемся тождеством Якоби

$$[[f_0, \xi_a]\xi_b] - [[f_0, \xi_b]\xi_a] = [f_0, [\xi_a, \xi_b]].$$

Учитывая (8)–(10), получим

$$[f\nu_a, \xi_b] - [f\nu_b, \xi_a] = [f_0, c_{ab}^d\xi_d].$$

Раскроем эти выражения:

$$[f,\xi_b]\nu_a - f\xi_b(\nu_a) - [f,\xi_a]\nu_b + f\xi_a(\nu_b) = [f_0,\xi_d]c^d_{ab}.$$

Далее,

$$f\mu_b\nu_a - f\xi_b(\nu_a) - f\mu_a\nu_b + f\xi_a(\nu_b) = f\nu_d c^d_{ab}.$$

Это равносильно равенствам

$$\mu_b\nu_a - \xi_b(\nu_a) - \mu_a\nu_b + \xi_a(\nu_b) = \nu_d c^d_{ab}. \tag{22}$$

Аналогично, из тождества Якоби

$$[[f,\xi_a],\xi_b] - [[f,\xi_b],\xi_a] = [f,[\xi_a,\xi_b]]$$

получим равенства

$$\mu_b\mu_a - \xi_b(\nu_a) - \mu_a\mu_b + \xi_a(\mu_b) = \mu_d c^d_{ab}. \tag{23}$$

Из (22), (23) следует, что выполняются равенства (21). Совместность системы (18) доказывается так же. Так как условия совместности выполняются тождественно, то, согласно [3], для любой точки $(\overline{y},\overline{\lambda})$ найдется такое решение $\lambda(y)$ системы (18), определенное в окрестности точки $\overline{y}$, что $\lambda(\overline{y}) = \overline{\lambda}$. Этим можно воспользоваться, чтобы выбрать такое решение системы (18), что $|\lambda(y)| \neq 0$ в окрестности точки $\overline{y}$. Итак, искомая замена управлений (11) существует в окрестности произвольной точки области M и, следовательно, теорема доказана.

Следующие далее теорема 4 и теорема 5 вытекают из теоремы 3, а также из того факта, что они справедливы в категории ASP [2].

Т е о р е м а 4. *Система* (1) *локально эквивалентна в категории* AS *системе вида*

$$\begin{aligned} &\dot z = g_0(z) + g(z)v, \qquad z \in N \subset R^{n-p},\\ &\dot x = h(x)(\nu_0(z) + \nu(z)v), \qquad x \in K \subset R^p, \end{aligned} \tag{24}$$

где h — $(p\times p)$*-матрица, столбцы которой составляют базис* p*-мерной алгебры Ли, обладающей* L*-свойством в области* K*, тогда и только тогда, когда локально существует* p*-мерная подалгебра алгебры* A_1 *системы* (1), причем эта подалгебра обладает L-свойством.

Т е о р е м а 5. *Система* (1) *локально эквивалентна в категории* AS *системе вида*

$$\dot x = h(x)(\nu_0 + \nu v), \qquad x \in K \subset R^n, \tag{25}$$

где h — $(n\times n)$*-матрица, столбцы которой составляют базис* n*-мерной алгебры Ли, обладающей* L*-свойством в области* K*,* ν_0 — *постоянный вектор,* ν — *постоянная матрица, тогда и только тогда, когда существует локально* n*-мерная подалгебра алгебры* A_1 *системы* (1), причем эта подалгебра обладает L-свойством.

Система вида (25), описанная в теореме 5, называется, по предложению Г.Н.Яковенко, L-системой. Назовем L_1-системой управляемую систему (1), допускающую n-мерную подалгебру алгебры A_1, причем эта подалгебра обладает L-свойством. Таким образом, теорему 5 можно сформулировать следующим образом: L_1-система локально эквивалентна L-системе.

Если для системы (25) $\operatorname{rank}\nu = q$ и она находится в общем положении, то очевидно, что эта система локально эквивалентна по управлениям неприводимой системе вида

$$\dot{x} = \tilde{h}_0(x) + \tilde{h}(x)w, \qquad w \in R^q,$$

где векторное поле $\tilde{h}_0$ и векторные поля $\tilde{h}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, q$, (являющиеся столбцами матрицы g) порождают ту же алгебру Ли, что и поля h_β, $\beta = 1, \ldots, n$, (являющиеся столбцами матрицы h). Заметим, что этой алгебре Ли соответствует просто транзитивная группа Ли, являющаяся взаимной к группе Ли, соответствующей алгебре A_0. Взаимные группы и соответствующие алгебры Ли изоморфны [4, с. 187].

З а м е ч а н и е. Согласно работе [5], инволютивное распределение D, заданное в фазовом пространстве управляемой системы (1), называется (f_0, f)-инвариантным, если существует такая невырожденная замена управлений (11), что для полученной системы (12) (которая эквивалентна по управлениям системе (1)) выполняются соотношения $[\tilde{f}_\alpha, D] \subset D$, $\alpha = 0, 1, \ldots, r$. В соответствии с работой [6] эти соотношения являются условием приведения системы (12) с помощью замены фазовых координат (т.е. с помощью эквивалентных преобразований в категории ASP) к системе вида

$$\begin{array}{ll} \dot{z} = g_0(z) + g(z)v, & z \in N \subset R^{n-p}, \\ \dot{x} = l_0(z, x) + l(z, x)v, & x \in K \subset R^p, \end{array} \tag{26}$$

где p — ранг распределения D (т.е. величина $\dim D(y)$). Таким образом, в случае существования (f_0, f)-инвариантного распределения система (1) эквивалентна в категории AS системе вида (26). В работе [5] показано, что инволютивное распределение D тогда и только тогда является (f_0, f)-инвариантным распределением системы (1), когда выполняются соотношения $[f_\alpha, D] \subset L_F + D$, $\alpha = 0, 1, \ldots, r$. (Отметим, что доказательство теоремы 3 аналогично по форме доказательству эого утверждения). Отсюда и из теоремы 2 настоящей работы вытекает, что распределение Δ_A, порождаемое подалгеброй A алгебры A_1, является (f_0, f)-инвариантным распределением. Следовательно, каждая такая подалгебра определяет некоторую декомпозицию вида (26). По существу теорема 4 уточняет вид декомпозиции в случае, когда подалгебра обладает L-свойством. Знание струтуры этой алгебры влечет дальнейшее уточнение вида декомпозиции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–00556).

Литература

1. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем: Дифференциально-геометрический подход. М.: Наука. Физматлит, 1997. 320 с.

2. *Яковенко Г.Н.* Декомпозиция управляемых нелинейных систем с группой симметрий //Механика гироскопических систем/Киев: Вища школа, 1986. Вып. 5. С. 131–137.

3. *Елкин В.И.* Общее решение уравнений в частных производных с одинаковой главной частью //Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. N 8. С. 1389–1398.

4. *Чеботарев Н.Г.* Теория групп Ли. М.–Л.: Гостехиздат, 1940. 396 с.

5. *Isidori A., Krener A.I., Gori-Giorgi C., Monako S.* Locally (f, g)-invariant distributions //Syst. Control Lett. 1981. No. 1. P. 12–15.

6. *Павловский Ю.Н.* Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры //Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1974. Т. 14. N 4. С. 862–872. Т. 14. N 5. С. 1093-1193.

Елкин Владимир Иванович. 119270 г. Москва. 3-я Фрунзенская ул., д.1, кв. 185. Вед. науч. сотр. ВЦ РАН.