УДК 519.4

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СНАБЖЕННЫХ СТРУКТУРОЙ МНОЖЕСТВ НА СВОБОДНУЮ СУММУ И ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Ю.Н. ПАВЛОВСКИЙ

1. Пусть $Y \subset X$, Q - отношение эквивалентности на X. $\omega_{YX}{:}Y \to X$ будет обозначать каноническую инъекцию ($\omega_{YX}(y){=}y$), $X_Q = X/Q$ - фактор-множество по Q, x_Q - содержащий x класс эквивалентности по Q, $\pi_{QX}{:}X_Q \to X$ -каноническую проекцию ($\pi_{QX}(x){=}x_Q$). Пусть $(E_i)_{i\in I}$ - семейство множеств. $\prod^p_{i\in I} E_i$ будет обозначать прямое произведение множеств E_i, $pr_i{:}\prod^p_{i\in I} E_i \to E_i$ - i-ую каноническую проекцию, $\sum^c_{i\in I} E_i$ - свободную сумму (т.е.$\bigcup_{i\in I}(E\times_i\{i\})$ множеств E_i, j_i: $E_i \to \sum^c_{i\in I} E_i$ - i-ую каноническую инъекцию.

Пусть Σ - некоторый род структуры в бурбаковской формальной системе B, более сильной, чем бурбаковская "теория множеств" [1] (для простоты полагается, что Σ содержит лишь одно базисное множество) - M терм в B, задающий M-морфизмы, B' - бурбаковская формальная система более сильная, чем B. Пара термов (E,τ) системы B' будет называться Σ-объектом в B', если τ - структура рода Σ на множестве E. В настоящей статье теория категорий совершенно не используется, однако, совокупность (B,Σ,M,B') будет именоваться категорией, что оправдано тем, что с этой совокупностью можно ассоциировать категорию, объекты которой - Σ - объекты в B', морфизмы - M-морфизмы.

Следующие необходимые для дальнейшего определения, легко выводятся из определений, содержащихся в [1].

О п р е д е л е н и е 1. Пусть (E, τ) - Σ-объект. Если множество

$Y \subset E$(множество $E_Q = E/Q$) можно снабдить структурой τ_Y (структурой τ_Q) рода Σ так, что для любого Σ-объекта (E', τ') и любого отображения $g : E' \to Y$ (и любого отображения $g : E_Q \to E'$) условие "g есть M-морфизм" и условие "$\omega_{YE} \circ g$ есть M-морфизм" ("$g \circ \pi_{QE}$ есть M-морфизм") эквивалентны, то структура τ_Y (τ_Q) называется подструктурой (фактор-структурой) структуры τ, объект (Y, τ_Y) ((E_Q, τ_Q)) называется подобъектом (фактор-объектом) или P-объектом (F-объектом) объекта (E, τ), множество Y называется P-множеством (отношение Q называется F-отношением). Далее для подобъекта (Y, τ_Y) объекта (E, τ) будет употребляться обозначение $(E, \tau)|_Y$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ - семейство Σ-объектов. Если прямое произведение $\prod_{i \in I}^p E_i$ множеств E_i можно снабдить структурой τ рода Σ так, что для любого Σ-объекта (E', τ') и любого отображения $g : E' \to \prod_{i \in I}^p E_i$ условие "g - M-морфизм" и условие "для любого i все отображения $pr_i \circ g$ - M-морфизмы" эквивалентны, то структура τ называется прямым произведением структур τ_i, Σ-объект $(\prod_{i \in I}^p E_i, \tau)$ называется прямым произведением семейства Σ-объектов $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$.

З а м е ч а н и е. В [1] то, что названо здесь "прямым произведением", называется просто "произведением". Предлагаемое изменение терминологии, введенной в [1], позволяет избежать недоразумений, связанных с наличием понятия "произведение" в теории категорий [2], имеющего в рамках используемых здесь языковых средств аналог, отличающийся от сформулированного выше "прямого произведения". По этой же причине вместо используемого в [1] понятия "сумма" здесь употребляется словосочетание "свободная сумма".

2. Естественно ввести также и следующее определение, не содержащееся в явном виде в [1].

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ - семейство Σ-объектов. Если свободную сумму $\sum_{i\in I}^{c} E_i$ множеств E_i можно снабдить структурой τ рода Σ так, что для любого Σ-объекта (E', τ') и любого отображения $g : \sum_{i\in I}^{c} E_i \to E'$ условие "g-M-морфизм" и условие "для любого i отображения $g \circ j_i$ являются M-морфизмами" эквивалентны, то структура τ называется свободной суммой структур τ_i, Σ-объект $(\sum_{i\in I}^{c} E_i,\tau)$ называется свободной суммой семейства Σ-объектов $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ (или их свободным копроизведением). Если для любого семейства Σ-объектов категории (B,Σ,M,B') свободная сумма (прямое произведение) существует, то эта категория называется категорией со свободой суммой (с прямым произведением).

В [1] доказано, что если прямое произведение семейства объектов существует, то оно единственно. Аналогичное утверждение имеет место, естественно, и для свободной суммы.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть (E,τ), (E',τ') - произвольные Σ-объекты в категории (B,Σ,M,B'), $f : E \to E'$ - произвольный M-морфизм, $f = \omega_f \circ b_f \circ \pi_f-$ каноническое разложение этого морфизма на проекцию π_f:$E \to E_Q$=E/Q_f, биекцию $b_f : E_Q \to Y' = f(E)$ и инъекцию $\omega_f : Y' \to E'$, где Q_f - отношение эквивалентности на E, ассоциированное с f: $(x,x') \in Q_f \iff f(x)$=$f(x')$. Если всегда на E_Q существует фактор-структура τ_Q структуры τ, на Y' существует подструктура $\tau\acute{Y}$ структуры τ' и биекция b_f является изоморфизмом объекта (E_Q, τ_Q) на объект $(Y', \tau\acute{Y})$, то категорию (B,Σ,B',M) будем называть HPF-категорией.

Примерами HPF-категорий являются множества (морфизмы - произвольные отображения), отображения (морфизмы - отображения, сохраняющие график), всюду определенные алгебраические структуры (морфизмы - гоморфизмы), в частности, абстрактные группы (где HPF-свойство устанавливается классической теоремой о гомоморфизмах), действия фиксированной абстрактной группы на множествах. Отношения эквивалентности (морфизмы - отображения, сохраняющие график), топологические пространства (морфизмы - непрерывные отображения), напротив, не являются HPF-категориями. (В этих и последующих примерах подразумевается, что B - бурбаковская "теория множеств", B' - некоторая более сильная система).

Из определения 4 сразу вытекают следующие утверждения.

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть (B,Σ,M,B') - HPF-категория, (E,τ) - Σ-объект в B', $Y \subset E$, (Y, τ_Y) - Σ-объект такой, что ω_{YE} - M-морфизм. Тогда (Y, τ_Y) - P-объект объекта (E,τ). Пусть Q - отношение эквивалентности на E, (E_Q, τ_Q) - Σ-объект, такой, что π_{QE} - M-морфизм. Тогда (E_Q, τ_Q) - F-объект объекта (E,τ).

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть (B,Σ,M,B') - HPF-категория, $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ - семейство Σ-объектов, $(\sum_{i\in I}^c E_i,\tau^c)$ - их свободная сумма ($(\prod_{i\in I}^p E_i,\tau^p)$ - их прямое произведение). Подмножество $E_i\times \{i\}$ является P-множеством и подобъект, индуцируемый объектом $(\sum_{i\in I}^c E_i,\tau^c)$ на множестве $E_i\times \{i\}$ изоморфен объекту (E_i,τ_i). (Отношение эквивалентности Q_i, ассоциированное с канонической проекцией pr_i:$\prod_{i\in I}^p E_i \to E_i$ является F-отношением и фактор-объект объекта $(\prod_{i\in I}^p E_i,\tau^p)$ по этому отношению изоморфен объекту (E_i,τ_i)).

П р е д л о ж е н и е 3. В HPF-категориях биективный морфизм является изоморфизмом.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть (E,τ) - Σ-объект, $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ - се- мейство Σ-объектов, $(\sum_{i\in I}^c E_i,\tau^c)$ - их свободное копроизведение ($(\prod_{i\in I}^p E_i,\tau^p)$ - их прямое произведение). Если существует изоморфизм объекта (E,τ) в объект $(\sum_{i\in I}^c E_i,\tau^c)((\prod_{i\in I}^p E_i,\tau^p))$, то будем говорить, что объект (E,τ) допускает декомпозицию на свободное копроизведение (прямое произведение) семейства $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ и писать $(E,\tau) \approx (\sum_{i\in I}^c E_i,\tau^c)((E,\tau) \approx (\prod_{i\in I}^p E_i,\tau^p))$.

Простыми следствиями этого определения, обобщающего определение, данное в [3], являются следующие двойственные друг другу предложения.

П р е д л о ж е н и е 4. В HPF-категориях со свободой суммой Σ-объект (E,τ) допускает декомпозицию на свободную сумму некоторого семейства Σ-объектов тогда и только тогда, когда на E существует отношение эквивалентности Q, такое, что на любом классе эквивалентности по этому отношению существует подобъект объекта (E,τ).

П р е д л о ж е н и е 5. В HPF-категориях с прямым произведением объект (E,τ) допускает декомпозицию на прямое произведение $(\prod_{i\in I}^p E_i,\tau^p)$ семейства Σ-объектов $(E_i,\tau_i)_{i\in I}$ тогда и только тогда, когда существует семейство $(Q_i)_{i\in I}F$-отношений для объекта (E,τ), такое, что пересечение любого семейства $(x_{Qi})_{i\in I}$ классов эквивалентности, где $x_{Qi} \in E/Q_i$, содержит единственный элемент множества E.

О п р е д е л е н и е 6. Пусть (B,Σ,M,B') - HPF-категория со свободой суммой, (E,τ) — Σ-объект. Множество отношений эквивалентности на E, удовлетворяющее условиям предложения 4, будем обозначать $D(E,\tau)$. Множество $D(E,\tau)$ естественным образом снабжается структурой $S(E,\tau)$ частичного порядка: для всяких Q_1, Q_2 из $D(E,\tau)$ $(Q_1,Q_2)\in S(E,\tau) \Longleftrightarrow Q_1 \supset Q_2$. Поскольку в силу предложения 4 каждому элементу $Q \in D(E,\tau)$ соответствует декомпозиция

$$(E,\tau) \approx \textstyle\sum^{c}_{x_Q\in X}(E,\tau)|_{x_Q}$$

объекта (E,τ) в свободную сумму семейства $((E,\tau)|_{x_Q})_{x_Q\in X_Q}$ своих P-объектов, то множество $D(E,\tau)$ будем называть множеством декомпозиций объекта (E,τ) в свободную сумму, а объект $(D(E,\tau),(S(E,\tau)))$ - декомпозиционной структурой для (E,τ).

П р и м е р ы 1) В категории произвольных отображений $f{:}X \to Y$ (морфизмы - пары отображений, сохраняющие график) множество $D(f)$ составляют F-пары отношений эквивалентности на X и Y (здесь соответствующий род структуры содержит два базисных множества!), такие, что соответствующий им F-объект является биекцией, и только они. 2) В категории отображений в себя $f{:}X \to X$ множество $D(f)$ составляют F-отношения, такие, что фактор-объект объекта f является тождественным отображением, и только они. 3) В категории действия $T_G(X)\subset G \times X \times X$ фиксированной группы G на множестве X множество $D(T_G(X))$ составляют F-отношения такие, что соответствующий фактор-объект состоит лишь из тождественного преобразования, и только они. 5) С эквивалентным (изоморфным) представлением системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t,x), \quad i = 1,2,...,n,$$

с гладкими в некоторой области $N \subset \mathbb{R}^{n+1}$ правыми частями, имеющем вид

$$\frac{dz^k}{dt} = \phi^k(t,\, z), \quad k = 1, 2, ...m,$$
$$\frac{dy^l}{dt} = \psi(t, z, y), \quad l = 1, 2, ...n - m,$$

можно ассоциировать декомпозицию объекта

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

на свободную сумму семейства своих P-объектов

$$\frac{dy^l}{dt} = \psi(t, z^*(t), y), \quad l = 1, 2, ...n - m,$$

где $z^*(t)$ - всевозможные решения системы

$$\frac{dz^k}{dt} = \phi^k(t,\, z), \quad k = 1, 2, ...m,$$

являющейся для системы

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

F-объектом. Если правые части системы

$$\frac{dy^l}{dt} = \psi(t, z, y), \quad l = 1, 2, ...n - m,$$

не зависят от z, с рассматриваемым представлением можно ассоциировать декомпозицию системы

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

на прямое произведение двух своих F-объектов. В данном примере морфизмами в соответствующей категории являются сохраняющие t гладкие отображения расширенного фазового пространства одной системы в фазовое пространство другой, имеющие полный и постоянный в N ранг, переводящие решения в решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-012-615).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1966. 425 с.

2. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории 1. М.:Мир, 1977. 688 с.

3. Павловский Ю.Н. Проблема декомпозиции в математическом моделировании. Математическое моделирование. 1991, т.3, N 6, с.93-122.