УДК 517.977

О ДЕКОМПОЗИЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НА ОДНОМЕРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ

В. И. ЕЛКИН

Рассматриваются нелинейные управляемые системы вида

$$\dot{y} = f(y, u), \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \tag{1}$$

Здесь $f(y, u)$, $\partial f/\partial y$ — гладкие функции по y и непрерывные по u.

Исследуется вопрос о декомпозиции управляемой системы (1) на n независимых управляемых систем. В данной работе мы ограничимся случаем $n = 3$, $r = 1$ и рассматрим вопрос о приведении системы такого вида к эквивалентной системе вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_0(x) + a(x)v, \\ \dot{y} &= b_0(y) + b(y)v, \\ \dot{z} &= c_0(z) + c(z)v, \end{aligned} \tag{2}$$

где $a(x) \neq 0$, $b(y) \neq 0$, $c(z) \neq 0$. Под эквивалентностью понимается существование диффеоморфизма фазовых пространств, переводящего фазовые траектории в фазовые траектории.

Условие декомпозиции сформулировано в теореме. В формулировке теоремы и в доказательстве используется терминология и результаты, приведенные в [Elkin V. I. *Reduction of Nonlinear Control Systems. Differential Geometric Approach.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1999].

Теорема. *Пусть для системы* (1) *существуют такие базисные* $\mathcal{F}$*-кораспределения* Q_k, $k = 1, 2, 3$, *ранга* 2, *что* $\sum_{k=1}^{3} Q_k = T^*M$, $\overline{S_k} \cap \overline{S_j} = \mathcal{O}$, $k, j = 1, 2, 3$, *где* S_k — *факториальные* t*-кораспределения, соответствующие* $\mathcal{F}$*-кораспределениям* Q_k, *и* $Q_k \cap Q_j$, $k, j = 1, 2, 3$, — *вполне интегрируемые кораспределения ранга* 1. *Тогда система* (1) (локально) эквивалентна системе (2).

Доказательство. Каждое кораспределение Q_k, $k = 1, 2, 3$, имеет два функционально независимых интеграла, причем можно так выбрать эти интегралы, что каждая пара кораспределений Q_k, Q_j будет иметь общий интеграл, а именно интеграл кораспределения $Q_k \cap Q_j$. Пусть $\varphi^1(y^1, y^2, y^3)$ — интеграл кораспределения $Q_1 \cap Q_2$, $\varphi^2(y^1, y^2, y^3)$ — интеграл кораспределения $Q_2 \cap Q_3$, $\varphi^3(y^1, y^2, y^3)$ — интеграл кораспределения $Q_1 \cap Q_3$. Покажем, что эти функции являются искомыми агрегатами, т. е. определяют диффеоморфизм (или, иначе говоря, замену координат) $x = \varphi^1(y^1, y^2, y^3)$, $y = \varphi^2(y^1, y^2, y^3)$, $z = \varphi^1(y^1, y^2, y^3)$, задающий эквивалентность между системой (1) и некоторой системой вида (2). В новой системе координат x, y, z факториальные t-кораспределения S_1, S_2, S_3 порождаются уравнениями Пфаффа следующего вида:

$$
\begin{aligned}
\omega_1^1(x,y)dx + \omega_2^1(x,y)dy + \omega_3^1(x,y)dt = 0,\\
\omega_1^2(y,z)dy + \omega_2^2(y,z)dz + \omega_3^2(y,z)dt = 0,\\
\omega_1^3(x,z)dx + \omega_2^3(x,z)dz + \omega_3^3(x,z)dt = 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

(В системе (3) первое уравнение порождает S_1, второе — S_2, третье — S_3.) Функции ω_1^k, ω_2^k, $k = 1, 2, 3$, не равны нулю ни в какой точке (x, y, z). Действительно, докажем, например, что $\omega_1^1 \neq 0$. Первая пара уравнений в (3), так же, как и любая другая пара уравнений в (3), образует базисную систему Пфаффа ассоциированного t-кораспределения K. Согласно определению факториального t-кораспределения, уравнения Пфаффа $dy = 0$, $dz = 0$, составляющие базисную систему Пфаффа кораспределения $Q_2 = \boldsymbol{C}_t S_2$, должны быть линейно независимы (в каждой точке) с уравнением $\omega_1^1(x,y)dx + \omega_2^1(x,y)dy = 0$. Следовательно, $\omega_1^1 \neq 0$.

Преобразуем уравнения (3) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
dx &= l_1(x,y)dy + l_2(x,y)dt,\\
dz &= q_1(y,z)dy + q_2(y,z)dt,\\
dx &= h_1(x,z)dz + h_2(x,z)dt.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Так как каждое из уравнений (4) линейно выражается через остальные два, то

$$l_1(x,y) = h_1(x,z)q_1(y,z), \tag{5}$$

$$l_2(x,y) - h_2(x,z) = h_1(x,z)q_2(y,z). \tag{6}$$

Из (5) следует, что

$$l_1(x,y) = \alpha_1(x)\beta_1(y), \qquad q_1(y,z) = \alpha_2(z)\beta_2(y),$$

где α_j, β_j — некоторые функции. Так как $\beta_1/\beta_2 = h_1(x,z)\alpha_2(z)/\alpha_1(x)$, то $\beta_1/\beta_2 = \mathrm{const}$. Поэтому можно положить $\beta_1(y) = \beta_2(y) = \beta(y)$. Следовательно, $\alpha_1(x) = h_1(x,z)\alpha_2(z)$. Из (6) имеем

$$\frac{l_2(x,y)}{\alpha_1(x)} = \frac{q_2(y,z)}{\alpha_2(z)} + \frac{h_2(x,z)}{\alpha_1(x)}.$$

Поэтому

$$\frac{l_2(x,y)}{\alpha_1(x)} = \mu_1(y) + \nu_1(x), \qquad \frac{q_2(y,z)}{\alpha_2(z)} = \mu_2(y) + \nu_2(z),$$

где μ_j, ν_j — некоторые функции. Так как

$$\mu_1(y) - \mu_2(y) = \nu_2(z) - \nu_1(x) + \frac{h_2(x,z)}{\alpha_1(x)},$$

то $\mu_1(y) - \mu_2(y) = \mathrm{const}$ и, следовательно, можно считать, что $\mu_1(y) = \mu_2(y) = \mu(y)$.

Итак, первые два уравнения в (4), составляющие базисную систему Пфаффа t-кораспределения K, линейным преобразованием приводятся к виду

$$
\begin{aligned}
dx &= \alpha_1(x)\beta(y)dy + \alpha_1(x)(\mu(y) + \nu_1(x))dt,\\
dz &= \alpha_2(z)\beta(y)dy + \alpha_2(z)(\mu(y) + \nu_2(z))dt.
\end{aligned}
$$

Определим векторных поля $g_0 = (\alpha_1(x)\nu_1(x), -\mu(y)/\beta(y), \alpha_2(z)\nu_2(z))$, $g_1 = (\alpha_1(x), 1/\beta(y), \alpha_2(z))$ и построим с их помощью управляемую систему

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \alpha_1(x)\nu_1(x) + \alpha_1(x)u,\\
\dot{y} &= -\frac{\mu(y)}{\beta(y)} + \frac{1}{\beta(y)}u,\\
\dot{z} &= \alpha_2(z)\nu_2(z) + \alpha_2(z)u,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

которая эквивалентна системе (1). Так как система (7) имеет вид (2), то теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00018).