УДК 517.5

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В. А. Горелик, В. А. Кондратьева

Введение

Задачи математического программирования, не имеющие решения в обычном смысле, называются неразрешимыми или несобственными [1]. Здесь мы рассмотрим несобственные задачи линейного программирования (ЛП). Среди несобственных задач ЛП выделим класс задач с несовместной системой ограничений. Практика моделирования и численного анализа показала, что противоречивость системы ограничений, скорее, правило, чем исключение. При этом несовместная модель может быть не менее содержательной, а в ряде случаев — и более, чем совместная, что позволяет считать противоречивость ограничений одним из наиболее важных в прикладном отношении проявлений свойств несобственности задач математического программирования.

Несовместность системы ограничений, безусловно, усложняет моделирование процессов, и решение такой задачи, казалось бы, теряет смысл. Но возникает вопрос, можно ли все-таки использовать построенную модель с целью решения возмущенной задачи.

Один из основных методов коррекции несобственной задачи заключается в ее параметризации, т. е. в погружении исходной задачи ЛП

$$L : \max\{\langle c, x\rangle | Ax = b, x \geqslant 0\}$$

в класс парметрических задач

$$L(\lambda) : \max\{\langle c(\lambda), x\rangle | A(\lambda)x = b(\lambda), x \geqslant 0\},$$

где λ — векторный параметр, при некотором значении которого $\lambda = \lambda_0$ задача $L(\lambda_0)$ является задачей L: $L(\lambda_0) \equiv L$. Поскольку среди несобственных задач мы рассматриваем только те, несобственность которых заключается в противоречивости ограничений, будем исследовать параметрические задачи $L(\lambda)$ с некорректируемой целевой функцией $\langle c(\lambda), x\rangle$, так как для устранения несобственности таких задач нет смысла варьировать критерий.

$$L(\lambda) : \max\{\langle c, x\rangle | A(\lambda)x = b(\lambda), x \geqslant 0\}.$$

Построим множество допустимых для возмущенной задачи параметров

$$\Lambda = \{\lambda | L(\lambda) \text{разрешима}\}$$

и определим функцию качества аппроксимации $\varphi(\lambda)$ на множестве Λ. Тогда возникает задача о нахождении наилучшего в смысле заданного критерия элемента $\lambda^* \in \Lambda$:

$$\min\{\varphi(\lambda) | \lambda \in \Lambda\} = \varphi(\lambda^*).$$

В общем случае решение задачи с параметрически заданным множеством допустимых планов — довольно сложная проблема, поскольку вариации матрицы приводят к нелинейной структуре ограничений.

В настоящей работе рассматриваются методы решения несобственных задач ЛП при некоторых способах параметризации, а также один из алгоритмов последовательной коррекции противоречивой системы ограничений.

1. Многопараметрическая оптимизация

Рассмотрим задачу ЛП с несовместной системой ограничений:

$$\begin{gathered} \max\{\langle c, x\rangle | x \in M\}, \\ M = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\} = \varnothing, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $c^T = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $b^T = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, A — матрица размерности $m \times n$.

Поставим в соответствие системе линейных уравнений $Ax = b$ систему уравнений

$$(A + H)x = b + h,$$

где H — матрица, h — вектор размерностей, соответствующих A и b. Сформулируем задачу коррекции следующим образом: минимизировать изменение исходной матрицы и правой части ограничений, т. е. минимизировать некоторую функцию $\Phi(H, h)$, зависящую от введенных в ограничения параметров H и h, при условии, что множество

$$M(H, h) = \{x \in \mathbb{R}^n | (A + H)x = b + h\} \neq \varnothing.$$

Если варьируется только правая часть ограничений, т. е. матрица H тождественно равна нулю: $H \equiv 0$, то, взяв в качестве критерия Φ различные нормы вектора h, можно получить классические методы. Например, метод Чебышева

$$\Phi = \|h\|_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |h_i| \to \min_{h: M(h) \neq \varnothing}$$

и метод наименьших квадратов

$$\Phi = \|h\|_2^2 = \langle h, h\rangle \to \min_{h: M(h) \neq \varnothing}.$$

Существенно более сложным и в теоретическом, и в вычислительном аспектах является случай параметризации матрицы ограничений.

Пусть варьируется только левая часть ограничений, а правая остается без изменений: $h \equiv 0$, т. е. возмущенная задача записывается в виде

$$\begin{gathered} \max\{\langle c, x\rangle | x \in M(H)\}, \\ M(H) = \{x \in \mathbb{R}^n | (A+H)x = b\} \neq \varnothing. \end{gathered} \tag{1.2}$$

В качестве функции Φ возьмем норму матрицы H. Тогда задача коррекции системы линейных уравнений заключается в минимизации нормы матрицы H:

$$\Phi = \|H\| \to \min_{H: M(H)\neq\varnothing}, \tag{1.3}$$

где $\|H\|$ — норма матрицы, соответствующая евклидовой норме векторов, определяемая следующим образом:

$$\|H\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|Hx\|_2.$$

Далее в этом разделе евклидову норму векторов $\|\cdot\|_2 = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ будем обозначать $\|\cdot\|$ без индекса.

Из линейной алгебры известно, что

$$\|H\| = \sqrt{\mu_{max}(H^T H)},$$

где T — знак транспонирования матрицы, $\mu_{max}(H^T H)$ — максимальное собственное число матрицы $H^T H$ (или HH^T), которое является действительным и неотрицательным, поскольку все собственные значения симметрических неотрицательно определенных матриц, каковыми являются $H^T H$ и HH^T, действительны и неотрицательны.

Для доказательства основной теоремы этого раздела сформулируем следующие две леммы.

Лемма 1.1. *Уравнение $Hx = b - Ax$ относительно H разрешимо для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Решение H^* этого уравнения с минимальной нормой выражается формулой*

$$H^* = \frac{[b - Ax, x^T]}{\|x\|^2}, \tag{1.4}$$

где x^T — вектор-строка, $[\cdot,\cdot]$ — произведение матриц, а его норма

$$\|H^*\| = \frac{\|b - Ax\|}{\|x\|}.$$

Доказательство. Матрица H^*, данная формулой (1.4), удовлетворяет уравнению $Hx = b - Ax$, в чем убеждаемся путем непосредственной подстановки:

$$H^*x = \frac{[b - Ax, x^T]}{\|x\|^2}x = \frac{b - Ax}{\|x\|^2}\langle x, x\rangle = b - Ax.$$

Кроме того, норма матрицы H^* равна $\frac{\|b-Ax\|}{\|x\|}$, так как

$$\|H^*\| = \frac{\|[b - Ax, x^T]\|}{\|x\|^2} = \frac{\|b - Ax\| \cdot \|x\|}{\|x\|^2} = \frac{\|b - Ax\|}{\|x\|}.$$

С другой стороны, для произвольного решения уравнения H

$$\|b - Ax\| = \|Hx\| \leqslant \|H\| \cdot \|x\|,$$

следовательно,

$$\|H\| \geqslant \frac{\|b - Ax\|}{\|x\|}.$$

Таким образом,

$$\|H^*\| = \min_{H:Hx=b-Ax} \|H\| = \frac{\|b - Ax\|}{\|x\|}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.2. *При фиксированном $y \neq 0$*

$$\inf_{-\infty\leqslant\alpha\leqslant+\infty} \frac{\|b - \alpha y\|}{\|\alpha y\|} = \sin(\widehat{b, y}).$$

Если $(\widehat{b, y}) \neq 90^0$, то α_{min} может быть найдено из условия

$$b = Pr_b(\alpha y),$$

где Pr_b — проекция на вектор b, т. е.

$$\alpha_{min} = \frac{\|b\|}{\|y\| \cos(\widehat{b, y})};$$

если же $(\widehat{b, y}) = 90^0$, то

$$\inf_{-\infty \leqslant \alpha \leqslant +\infty} \frac{\|b - \alpha y\|}{\|\alpha y\|} = 1,$$

но не достигается ($\alpha \to \infty$).

Доказательство вытекает из теоремы синусов для треугольников, мы его опускаем.

Замечание 1.1. *При данном α_{min} очевидно справедливы следующие соотношения:*

$$b - \alpha_{min} y = Pr_b(\alpha_{min} y) - \alpha_{min} y = P_b \alpha_{min} y - \alpha_{min} y = -(E - P_b)\alpha_{min} y,$$

где P_b — матрица проектирования на вектор b.

Следующая теорема заключает в себе основной результат данного раздела. Первая часть утверждения дает значение исследуемой задачи (1.3) нахождения нижней грани нормы матрицы H, вторая — конструктивный способ построения искомой матрицы с минимальной нормой (которая, заметим, существует не всегда).

Теорема 1.1.

$$\inf_{(x,H):(A+H)x=b} \|H\| = \mu_{min}^{1/2}(A^T(E - P_b)A),$$

где μ_{min} — минимальное собственное значение матрицы $A^T(E-P_b)A$, а P_b — матрица проектирования на вектор b.

Если нижняя грань достигается, то

$$H^* = -[(E - P_b)Ae^*, e^{*^T}],$$

где e^* — единичный собственный вектор матрицы $A^T(E - P_b)A$, соответствующий μ_{min}.

Доказательство. Преобразуем выражение $\inf\limits_{(x,H):(A+H)x=b} \|H\|$, используя лемму 1.1.

$$\inf_{(x,H):(A+H)x=b} \|H\| = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|b - Ax\|}{\|x\|}. \tag{1.5}$$

Представим x в виде произведения αe, где e — единичный вектор, α — вещественное число, отличное от нуля, поскольку $x \neq 0$. Преобразуем выражение (1.5), беря нижнюю грань сначала по величине вектора x, т. е. по α, затем — по направлению, т. е. по e.

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|b - Ax\|}{\|x\|} = \inf_{(\alpha,e):\alpha e = x, \alpha \neq 0, \|e\|=1} \frac{\|b - \alpha Ae\|}{|\alpha|} = \inf_e \left[\inf_\alpha \frac{\|b - \alpha Ae\|}{|\alpha|} \right]. \tag{1.6}$$

Введем новую переменную $y = Ae$.

Если существует вектор $e : Ae = 0$, то $\inf\limits_{(x,H)} \|H\| = \inf\limits_e \inf\limits_\alpha \frac{\|b\|}{|\alpha|} = 0$ при $\alpha \to \pm\infty$. Тогда решения не существует.

Если для любого $e : Ae \neq 0$, то продолжаем преобразовывать выражение (1.6)

$$\inf_e \left[\inf_\alpha \frac{\|b - \alpha Ae\|}{|\alpha|} \right] = \inf_e \inf_\alpha \frac{\|b - \alpha y\|}{\|\alpha y\|} \cdot \|y\| = \inf_e \left[\|y\| \cdot \inf_\alpha \frac{\|b - \alpha y\|}{\|\alpha y\|} \right].$$

Применив лемму 1.2 к последнему выражению, получим

$$\inf_{(x,H):(A+H)x=b} \|H\| = \inf_e (\|Ae\| \sin(\widehat{b, Ae})).$$

Из леммы 1.2 следует, что выражение $\|y\| \sin(\widehat{b, y})$ равно длине вектора $b - y$, поскольку треугольник, составленный из векторов b, y и $b - y$, прямоугольный с гипотенузой y. Кроме того, используя замечание 1.1, можно утверждать, что $\|y\| \sin(\widehat{b, y}) = \|(E - P_b)y\|$, где P_b — матрица проектирования на вектор b. Итак,

$$\inf_{(x,H):(A+H)x=b} \|H\| = \inf_e \|(E - P_b)Ae\|.$$

Так как для произвольной матрицы Q справедливы соотношения

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{\|Qx\|^2}{\|x\|^2}=\min_{\|e\|=1}\|Qe\|^2=\min_{\|e\|=1}(Qe,Qe)=\min_{\|e\|=1}(Q^TQe,e),$$

то

$$\inf_e\|(E-P_b)Ae\|^2=\min_{\|e\|=1}\left(A^T(E-P_b)^T(E-P_b)Ae,e\right). \tag{1.7}$$

В силу свойств матрицы проектирования $(E-P_b)^T=(E-P_b)$ и $(E-P_b)^2=(E-P_b)$. Поэтому, введя обозначение для симметрической положительно полуопределенной матрицы $D=A^T(E-P_b)A$ и подставив его в (1.7), имеем

$$\inf_{(x,H):(A+H)x=b}\|H\|^2=\min_{\|e\|=1}(De,e)=\mu_{min}(D)\geqslant 0,$$

причем минимум достигается на единичном собственном векторе e^* матрицы D, соответствующем μ_{min}.

Таким образом,

$$\inf_{(x,H):(A+H)x=b}\|H\|=\sqrt{\mu_{min}(D)}$$

и достигается на матрице

$$H^*=-[(E-P_b)Ae^*,e^{*^T}].$$

Оба утверждения теоремы тем самым доказаны. □

Замечание 1.2. *Очевидно, что решение системы уравнений* $(A+H^*)x=b$ *есть* x^* *— собственный вектор матрицы* D*, соответствующий* μ_{min}*, с нормой* $\|x^*\|=\frac{\|b\|}{\|Ae^*\|\cdot|\cos(\widehat{Ae^*,b})|}$ *(при* $(\widehat{Ae^*,b})\neq 90^0$*).*

Кроме того, можно заметить, что $\inf\limits_{(x,H):(A+H)x=b}\|H\|=0$ *тогда и только тогда, когда* $\mu_{min}(D)=0$*, что равносильно условию:* $rangD<n$*.*

Исследуем теперь случай варьирования и левой, и правой части ограничений.

$$(A+H)x=b+h.$$

В качестве критерия рассмотрим функцию

$$\Phi = \|H\|^2 + \|h\|^2.$$

Вектор Hx теперь равен $b + h - Ax$, и по лемме 1.1 при фиксированных $x \neq 0$ и h имеем

$$\min_{H:(A+H)x=b+h} \Phi = \frac{\|b + h - Ax\|^2}{\|x\|^2} + \|h\|^2.$$

Обозначим данное выражение, зависящее от x и h, через $\varphi(x, h)$ и исследуем $\min\limits_{h:(A+H)x=b+h} \varphi(x, h)$ при фиксированном $x \neq 0$, представив h в виде произведения $h = \alpha e$, где e — единичный вектор, и рассматривая минимум сначала по направлению вектора h, т. е. по e, затем — по α.

$$\begin{gathered}\min_{h:(A+H)x=b+h} \varphi(x, h) = \min_{\alpha \geqslant 0, e:\|e\|=1} \tfrac{\|\alpha e-(Ax-b)\|^2}{\|x\|^2} + \alpha^2 = \\ = \min_{\alpha \geqslant 0} \min_{e:\|e\|=1} \tfrac{\|\alpha e-(Ax-b)\|^2}{\|x\|^2} + \alpha^2.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Очевидно, что данное выражение достигает своего минимума при $e = \frac{Ax-b}{\|Ax-b\|}$, поскольку числитель минимален в случае, если вектор e совпадает по направлению с вектором $Ax - b$. Подставив выражение для e в (1.8) и преобразовав его, получим

$$\min_{h:(A+H)x=b+h} \varphi(x, h) = \frac{1}{\|x\|^2} \min_{\alpha \geqslant 0} \left[(\alpha - \|Ax - b\|)^2 + \alpha^2\|x\|^2\right]. \tag{1.9}$$

Исследуем полученное выражение. Для этого вычислим его производную и приравняем ее нулю

$$\left((\alpha - \|Ax - b\|)^2 + \alpha^2\|x\|^2\right)'_\alpha = 2(\alpha - \|Ax - b\|) + 2\alpha\|x\|^2 = 0.$$

Таким образом,

$$\alpha = \frac{\|Ax - b\|}{1 + \|x\|^2}. \tag{1.10}$$

Подставим выражение (1.10) в соотношение (1.9). После необходимых преобразований может быть получено

$$\min_{h:(A+H)x=b+h} \varphi(x, h) = \frac{\|Ax - b\|^2}{1 + \|x\|^2}.$$

Итак, при фиксированном $x \neq 0$

$$\min_{(H,h):(A+H)x=b+h} \Phi = \frac{\|Ax-b\|^2}{1+\|x\|^2}.$$

Рассмотрим нижнюю грань полученного выражения, используя аналогичный прием представления вектора x в виде $x = \lambda e$.

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ax-b\|^2}{1+\|x\|^2} = \inf_{\lambda,e:\|e\|=1} \frac{\|b-\lambda Ae\|^2}{1+\lambda^2} = \min_{e:\|e\|=1} \inf_{-\infty\leqslant\lambda\leqslant+\infty} \frac{\|b-\lambda Ae\|^2}{1+\lambda^2}.$$

Возможны следующие случаи.

1. Нижняя грань не достигается (далее будет рассмотрен пример, соответствующий данному случаю), $\lambda \to \pm\infty$, при этом либо
   а) существует вектор e: $Ae = 0$, т. е. $\mu_{min}(A^TA) = 0$ и $rang(A^TA) < n$, тогда $\inf \Phi = 0$, но $x \to \infty$(решения нет);
   либо
   б) $Ae \neq 0$ $\forall e$, тогда $\inf \Phi = \mu_{min}(A^TA) > 0$, а решение может не существовать.

2. Нижняя грань достигается, λ конечно и либо
   а) $\lambda = 0$, тогда $\inf \Phi = \|b\|^2$, $x^* = 0$, $H^* = 0$, $h^* = -b$;
   либо
   б) $\lambda \neq 0$, тогда введем в рассмотрение $(n+1)$-мерный вектор $z = (1, x)$ и запишем исходную систему уравнений в виде $(-b, A)z = -b + Ax$. Таким образом,

$$\inf \Phi = \inf_z \frac{\|(-b,A)z\|^2}{\|z\|^2}.$$

   Данное выражение равно $\mu_{min}(B^TB)$ (где $B = (-b, A)$) при условии, что существует собственный вектор z^* матрицы B^TB, соответствующий $\mu_{min}(B^TB)$, с первой компонентой, отличной от нуля (значит, и с равной 1), т. е. при условии, что $z^* = (1, x^*)$. В противном случае нижняя грань не достигается.

Пример 1.1. *Рассмотрим систему уравнений*

$$\begin{cases} 0 \cdot x &= \sqrt{2}, \\ 1 \cdot x &= 0. \end{cases}$$

Очевидно, что она не имеет решения. Имеем $B = (-b, A) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^T B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Минимальное собственное значение матрицы $B^T B$ *равно 1. Собственный вектор матрицы* $B^T B$ *, соответствующий 1, есть* $\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$, *где* x *— любое число.*

$A^T A = 1$, $\mu_{min}(A^T A) = 1$.

Следовательно, $\inf[\|H\|^2 + \|h\|^2] = 1$, *однако решения не существует.*

При этом случай 1 дает $h = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{1+x^2} \\ \frac{x}{1+x^2} \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}x}{1+x^2} \\ -\frac{x^2}{1+x^2} \end{pmatrix}$,

$$\|H\|^2 + \|h\|^2 = \frac{2 + x^2}{1 + x^2} \to 1 \text{ при } x \to \infty.$$

При этом $h \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $H \to \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, *но*

$$\begin{cases} 0 \cdot x &= \sqrt{2}, \\ 0 \cdot x &= 0 \end{cases}$$

не совместна. Тогда можно взять $H = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -1 \end{pmatrix}$, $h = 0$, *и при любом сколь угодно малом* ε *будет получено решение системы:* $x = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$. *Случай 2 дает*

$$(-h, H) = -\frac{[Bx, x^T]}{\|x\|^2} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $h = 0$, $H = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, *решения нет.*

2. Гиперболические преобразования для несобственных задач ЛП

По-прежнему, исходной считаем задачу ЛП с пустым множеством допустимых планов:

$$\begin{gathered} \max\{\langle c, x\rangle | x \in M\}, \\ M = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geqslant 0\} = \varnothing, \end{gathered} \tag{2.1}$$

Как и ранее, системе ограничений $Ax = b$ поставим в соответствие некоторую систему уравнений со специальным параметрическим изменением матрицы ограничений и столбца свободных членов.

Представим матрицу A в виде двух подматриц $A = \binom{A^1}{A^2}$ (соответственно $b = \binom{b^1}{b^2}$) таким образом, чтобы множество

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n | A^2 x = b^2, x \geqslant 0\}$$

не было пустым. Такое разбиение ограничений на две группы можно интерпретировать следующим образом: ограничения $A^2 x = b^2$ директивные (обязательные), которые должны выполняться строго, без коррекции (при этом необходимо соблюдение условия непротиворечивости этой системы), а ограничения $A^1 x = b^1$ факультативные, в которые могут быть внесены изменения для устранения несовместности. Кроме того, исследование задачи вариации матрицы ограничений с фиксированными, некорректирующимися строками может быть продиктовано следующими соображениями. Решая проблему устранения противоречивости системы ограничений в разд. 1, мы оставляли без внимания основную задачу (2.1) максимизации целевой функции $\langle c, x\rangle$. Этот пробел можно устранить, если в задачу коррекции вести дополнительное ограничение $\langle c, x\rangle \geqslant c_0$ (или ограничение в виде равенства, что не принципиально) с пороговым значением $c_0 \in \mathbb{R}$ для критерия $\langle c, x\rangle$. Изменяя значение c_0, можно добиться результатов, удовлетворяющих лицо, принимающее решения.

Таким образом, любая задача ЛП с несовместной системой ограничений может быть сведена к задаче коррекции противоречивой системы линейных уравнений (или неравенств) с фиксированными строками.

Вернемся к задаче аппроксимации несовместной системы. Параметризацию организуем следующим образом. Матрицу A^1 варьируем путем добавления к каждой i-й строке ($i = \overline{1, s}$) вектора $-\lambda_i a^0$, где $a^0 \in \mathbb{R}^n$ — фиксированный вектор, λ_i — $i-$я компонента вектора параметров λ, а правую часть — добавлением к элементу b_i числа $\lambda_i b^0$, где $b^0 \in \mathbb{R}^1$ — фиксированное число. Таким образом, может быть сформулирована задача

$$\begin{gathered} \max\{\langle c, x\rangle | x \in M(\lambda)\}, \\ M(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geqslant 0, (A^1 - \lambda a^{0^T})x = b^1 + \lambda b^0, A^2 x = b^2\}, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^s$, A^1 — матрица размерности $s \times n$, A^2 — параметрически независимая матрица размерности $(m - s) \times n$, $b^1 \in \mathbb{R}^s$, $b^2 \in \mathbb{R}^{m-s}$, $a^0 \in \mathbb{R}^n$, $b^0 \in \mathbb{R}^1$ и $0 < s \leqslant m < n$ — целые числа.

Содержательный смысл такого параметрического изменения матрицы ограничений заключается в следующем. Можно предположить, что отсутствие допустимых планов возникло вследствие того, что затраты на производство (вектор Ax) превысили запас некоторых ресурсов (вектор b). Введенеие параметра приводит к тому, что затраты на выпуск $j-$го товара уменьшаются на величину λa_j^0, где a_j^0 — элемент фиксированного вектора, то есть фиксированное число, соответствующее данному виду продукции; таким образом, изменения технологических коэффициентов и ресурсов пропорциональны параметру λ.

Обозначим через

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^s | M(\lambda) \neq \varnothing\} \tag{2.3}$$

множество допустимых для возмущенной задачи параметров. Тогда исследуемую проблему можно сформулировать следующим образом: минимизировать изменение исходной матрицы ограничений и столбца свободных членов на множестве Λ, допустимых для возмущенной задачи параметров. Формально эта задача может быть описана несколькими способами. Например:

$$\sum_{i=1}^{s} |\lambda_i| \to \min_{\lambda \in \Lambda}; \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{s} \mu_i \lambda_i \to \min_{\lambda \in \Lambda}; \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^2 \to \min_{\lambda \in \Lambda}. \tag{2.6}$$

где λ — векторный параметр размерности s, λ_i — компоненты вектора λ, μ_i — некоторые фиксированные положительные числа (весовые коэффициенты).

Для решения любой из сформулированных задач (2.4)–(2.6) необходимо охарактеризовать множество Λ. Введем обозначения. Пусть

$$L^+ = \{x \in L | a^{0^T} x + b^0 > 0\}, L^- = \{x \in L | a^{0^T} x + b^0 < 0\} \text{ —}$$

два множества, на которые разбивается множество L, порожденное параметрически независимой матрицей A^2, гиперплоскостью $a^{0^T} x + b^0 = 0$. Точки, лежащие на этой гиперплоскости, не рассматриваются, т. к. если одновременно справедливо, что $x \in M(\lambda)$ и $a^{0^T} x + b^0 = 0$, то условие $(A^1 - \lambda a^{0^T})x = b^1 + \lambda b^0$ влечет выполнение равенства $A^1 x = b^1$, что в совокупности с условием $A^2x = b^2$ противоречит тому, что множество M пусто. Таким образом, $\forall x \in M(\lambda)$ $a^{0^T}x + b^0 \neq 0$.

Поэтому если определить гиперболическое преобразование H_p следующим образом:

$$H_p(x) = \frac{A^1x - b^1}{a^{0^T}x + b^0} \in \mathbb{R}^s, \tag{2.7}$$

то оно описывает множество Λ, поскольку $H_p(x)$ есть параметр λ, соответствующий элементу x таким образом, что $M(\lambda) \neq 0$, т. е. является допустимым параметром. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Множество допустимых для задачи (2.2) параметров есть объединение множеств $H_p(L^+)$ и $H_p(L^-)$:*

$$\Lambda = H_p(L^+) \bigcup H_p(L^-).$$

Согласно свойствам гиперболических преобразований множества $H_p(L^+)$ и $H_p(L^-)$ являются выпуклыми и имеют явные линейные выражения [2], которые дают возможность описания множества допустимых параметров для возмущенной задачи (2.2). Таким образом, сформулированные задачи (2.4)–(2.6) могут быть сведены соответственно к задачам линейного и квадратичного программирования с линейными ограничениями.

Решение задачи (2.5)

Если исходить из содержательного смысла задачи с пустым множеством допустимых планов, то, как уже отмечалось, можно предполагать, что отсутствие допустимых планов вызвано недостатком некоторых ресурсов, т. е. справедливо неравенство $Ax \geqslant b$. Тогда $A^1x \geqslant b^1$, и знак параметра λ, определяемого по формуле (2.7), зависит только от знака знаменателя.

Возможны следующие случаи:

1)$a^{0^T}x + b^0 > 0$.

Тогда $x \in L^+$, а $\lambda \geqslant 0$.

2)$a^{0^T}x + b^0 < 0$.

Тогда $x \in L^-$, а $\lambda \leqslant 0$.

Тогда есть смысл рассматривать две оптимизационные задачи (2.5) на множествах $H_p(L^+)$ и $H_p(L^-)$ соответственно:

$$\min\{\sum_{i=1}^{s} \mu_i\lambda_i | \lambda \in H_p(L^+), \mu_i > 0\} \text{ и } \max\{\sum_{i=1}^{s} \mu_i\lambda_i | \lambda \in H_p(L^-), \mu_i > 0\},$$

каждая из которых является задачей ЛП и может быть решена симплекс-методом. Далее выбираем из решений этих двух задач λ_1 и λ_2 тот параметр, который доставляет меньшее по модулю значение своей целевой функции.

В том же предположении $Ax \geqslant b$, множество $M(\lambda)$ можно задать таким образом, что фиксированные вектор a^0 и число b^0 неотрицательны: $a^0 \geqslant 0$, $b^0 \geqslant 0$. Тогда λ непременно является неотрицательным вектором, т. е. затраты на производство уменьшаются, а ресурсы пополняются. Тогда рассматривается только множество $H_p(L^+)$ и решается первая из двух линейных задач.

Решение задачи квадратичного программирования (2.6)

Квадратичная задача (2.6) может быть решена, например, методом условного градиента. Пусть λ_k — приближение, полученное на k−м шаге. Градиент целевой функции задачи (2.6) $\frac{1}{2}\lambda^2$ в точке λ_k равен λ_k.

Решим вспомогательную задачу

$$\min\{\langle\lambda_k, \lambda - \lambda_k\rangle | \lambda \in \Lambda = H_p(L^+) \bigcup H_p(L^-)\}, \tag{2.8}$$

где минимизируемая линейная функция представляет собой главную часть приращения функции $\frac{1}{2}\lambda^2$ в точке λ_k.

Задача (2.8) может быть представлена двумя задачами линейного программирования с ограничениями $\lambda \in H_p(L^+)$ и $\lambda \in H_p(L^-)$ соответственно. Применив итеративный процесс дважды с начальными точками из этих двух множеств, найдем два глобальных экстремума на соответствующих множествах (каждое из этих множеств выпукло, функция λ^2 на них выпукла, следовательно, экстремумы глобальные). Решая вспомогательную задачу (2.8) симплекс-методом, можно найти λ_k^*, тогда следующее приближение для задачи (2.6) строится по формуле

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha_k(\lambda_k^* - \lambda_k),$$

α_k — длина шага, выбираемая из условия уменьшения целевой функции λ^2. Поскольку каждое из множеств $H_p(L^+)$, $H_p(L^-)$ выпукло, следующее приближение λ_{k+1} принадлежит соответствующему множеству.

Сравнение двух найденных на множествах $H_p(L^+)$, $H_p(L^-)$ решений позволит указать глобальный для Λ минимум.

Квадратичную задачу (2.6) с линейными ограничениями можно решить специальным методом, основанным на методе сопряженных направлений безусловной оптимизации. На каждом из множеств $H_p(L^+)$ и $H_p(L^-)$ она имеет вид

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^2 \to \min_{\lambda : Q\lambda = r}, \tag{2.9}$$

где Q — матрица, r — вектор.

Пусть ранг матрицы Q равен числу ее строк. Обозначим через P оператор ортогонального проектирования $P = Q^T(QQ^T)Q$, а через E — единичную матрицу.

Теорема 2.2. *Задача минимизации (2.9), если известна начальная точка λ_0, удовлетворяющая ограничениям, решается за конечное* *число шагов следующим процессом:*

$$p_1 = -(E-P)\lambda_0,$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \alpha_k p_{k+1},$$
$$p_{k+1} = -(E-P)\lambda_k + \frac{\|(E-P)\lambda_k\|^2}{\|(E-P)\lambda_{k-1}\|^2} p_k,$$
$$\alpha_{k+1} = -\frac{(\lambda_{k+1}, p_{k+1})}{(p_{k+1}, p_{k+1})},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Решение задачи (2.4)

Задача (2.4) может быть сведена к линейной путем введения новых переменных и дополнительных ограничений. Пусть u_i (где $i = \overline{1,s}$) — вещественные неотрицательные числа такие, что одновременно выполняются условия

$$u_i \geqslant \lambda_i, u_i \geqslant -\lambda_i, i = \overline{1,s}.$$

Тогда задача (2.4) сводится к двум задачам ЛП:

$$\min\{\sum_{i=1}^{s} u_i | \lambda \in H_p(L^+), u_i - \lambda_i \geqslant 0, u_i + \lambda_i \geqslant 0, i = \overline{1,s}\},$$

$$\min\{\sum_{i=1}^{s} u_i | \lambda \in H_p(L^-), u_i - \lambda_i \geqslant 0, u_i + \lambda_i \geqslant 0, i = \overline{1,s}\}.$$

Установим связь между двумя рассматриваемыми способами параметризации в разд. 1 и 2.

Запишем для единообразия задачу разд. 2 в виде

$$\min\{\Phi(\lambda) | M(\lambda) \neq \varnothing\}, \tag{2.10}$$

где $\Phi(\lambda)$ — некоторая функция параметра λ, а

$$M(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geqslant 0, (A - \lambda a^{0^T})x = b\}$$

(без фиксированных строк и без вариации вектора b).

Существенным отличием множества $M(\lambda)$ от множества $M(H)$ является специальный вид матрицы параметров в случае (2.10). Выпишем параметрическую матрицу множества $M(\lambda)$:

$$-\begin{pmatrix} \lambda_1 a_1^0 & \lambda_1 a_2^0 & \dots & \lambda_1 a_n^0 \\ \lambda_2 a_1^0 & \lambda_2 a_2^0 & \dots & \lambda_2 a_n^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m a_1^0 & \lambda_m a_2^0 & \dots & \lambda_m a_n^0 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Дополнительные ограничения на вид аппроксимирующей матрицы (пропорциональность строк и столбцов) выводят задачу (2.10) за рамки более общего, на первый взгляд, случая (1.2) и не позволяют воспользоваться результатами теоремы (1.1). Встает вопрос, есть ли смысл решать задачу для более узкого класса матриц коррекции H.

Для ответа на этот вопрос изучим некоторые свойства решений задачи (1.3). По теореме (1.1) матрицу H с минимальной нормой можно представить в виде

$$-\begin{pmatrix} e_1^* \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{1j} e_j^* & e_2^* \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{1j} e_j^* & \dots & e_n^* \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{1j} e_j^* \\ e_1^* \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{2j} e_j^* & e_2^* \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{2j} e_j^* & \dots & e_n^* \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{2j} e_j^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1^* \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{mj} e_j^* & e_2^* \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{mj} e_j^* & \dots & e_n^* \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{mj} e_j^* \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

где $\beta_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ — элементы матрицы $(E - P_b)A$ размерности $m \times n$.

Видно, что решение задачи (1.3) на самом деле также обладает свойством пропорциональности строк и столбцов. Сравнивая структуру матриц (2.11) и (2.12), фиксированному вектору $a^0 = (a_1^0, \dots, a_n^0)^T$ можно поставить в соответствие единичный собственный вектор $e^0 = (e_1^0, \dots, e_n^0)^T$ матрицы $D = A^T(E - P_b)A$, соответствующий минимальному собственному значению, а параметрам $\lambda_i, i = \overline{1, m}$ — числа $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} e_j^*, i = \overline{1, m}$.

Таким образом, интересным является тот факт, что если в задаче (2.10) с множеством допустимых планов типа $M(\lambda)$ вектор a^0 — собственный вектор матрицы D, соответствующий μ_{min}, то компоненты векторного параметра λ рассчитываются по формулам

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} e_j^*, i = \overline{1, m}.$$

С другой стороны, если вектор a^0 в задаче (2.10) не фиксирован, а его требуется найти из условия минимизации нормы матрицы (2.11), то задача (2.10) есть ни что иное, как задача (1.3).

Замечание 2.1. *Критерий $\Phi(\lambda)$, соответствующий норме матрицы (2.11), не рассматривался. Без дополнительных исследований нельзя утверждать, что какая-либо из сформулированных задач (2.4)–(2.6) эквивалентна задаче (1.3).*

Другой аспект сравнения матриц вида (2.11) и (2.12), соответствующих задачам (2.10) и (1.3), заключается в том, что при решении задачи (1.3) с использованием теоремы 1.1 всегда получаем матрицу вида (2.11) с пропорциональными строками и столбцами. Но тогда нет смысла делать акцент на произвольности корректирующей матрицы H в задаче (1.3), поскольку в ходе решения все-таки будет получена матрица специальной структуры.

Кроме того, если вектор a^0 не является собственным вектором матрицы D, соответствующим значению μ_{min}, то при решении любой из задач типа (2.10), например (2.4)–(2.6), будут получены матрицы, отличные от (2.12). Таким образом, множество решений задачи (2.10) в некотором смысле шире множества решений задачи (1.3), что может оказаться более выгодным для лица, принимающего решения.

3. Многошаговый процесс вариации ограничений

Рассмотрим один из методов последовательной коррекции несобственной задачи ЛП.

Пусть, как и ранее, рассматривается задача ЛП с пустым множеством допустимых планов $M = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geqslant 0\} = \varnothing$. Представим матрицу ограничений A в виде двух подматриц $A = \left(\begin{smallmatrix} A^1 \\ A^2 \end{smallmatrix}\right)$ таких, что множество $\{x \in \mathbb{R}^n | A^2 x = b^2, x \geqslant 0\} \neq \varnothing$.

Задача заключается в поиске такой матрицы

$$\widetilde{A}^1 : \widetilde{a}_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)} + \alpha_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, \tag{3.1}$$

полученной из исходной A^1, что, во-первых, множество

$$\widetilde{X} = \{x \in \mathbb{R}^n | \widetilde{A}^1 x = b^1, A^2 x = b^2, x \geqslant 0\} \neq \varnothing \tag{3.2}$$

не пусто, и, во-вторых, матрица $\widetilde{A}^1$ является оптимальной в смысле некоторого критерия, например минимакса

$$\min_{\widetilde{A}^1 : \widetilde{X} \neq \varnothing} \max_{i,j} |\alpha_{ij}| = \rho. \tag{3.3}$$

Таким образом, матрица, составленная из абсолютных величин $|\alpha_{ij}|$, должна обладать наименьшим из всех допустимых матриц максимальным элементом.

Такая матрица может быть получена в результате изложенного ниже многошагового процесса.

На первом шаге вносятся изменения в первый столбец матрицы A^1:

$$\begin{cases} (a_{i1}^{(1)} + \alpha_{i1})x_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} a_{ij}^{(1)} x_j & = b_i^{(1)}, i = \overline{1,m}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(2)} x_j & = b_i^{(2)}, i = \overline{1,k}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Очевидно, что найдется пара векторов $(\overline{\alpha}, \overline{x})$ такая, что система (3.4) будет совместна. Кроме того, первая компонента $\overline{x}_1$ произвольного такого вектора $\overline{x}$ отлична от нуля: $\overline{x}_1 \neq 0$, поскольку в противном случае из равенства $\overline{x}_1 = 0$ следует, что $\sum\limits_{j=2}^{n} a_{ij}^{(1)} x_j = b_i^{(1)}, i = \overline{1,m}$, то есть вектор $\overline{x}$ удовлетворяет исходной системе: $A\overline{x} = b$, что невозможно ($M = \varnothing$). Таким образом, $x_1 > 0$. Тогда компоненты вектора α_1 могут быть найдены из соотношений

$$\alpha_{i1} = -a_{i1}^{(1)} + \frac{b_i^{(1)}}{x_1} - \sum_{j=2}^{n} a_{ij}^{(1)} \frac{x_j}{x_1}.$$

Путем замены переменных $y_1 = 1/x_1$, $y_j = x_j/x_1$, $j = \overline{2,n}$, данные ограничения можно привести к линейному виду

$$\begin{cases} \alpha_{i1} - b_i^{(1)} y_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} a_{ij}^{(1)} y_j & = -a_{i1}^{(1)}, i = \overline{1,m}, \\ -b_i^{(2)} y_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} a_{ij}^{(2)} y_j & = -a_{i1}^{(2)}, i = \overline{1,k}, \end{cases} \tag{3.5}$$

где $y_j \geqslant 0$, а α_{i1} может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

На множестве, описываемом данными ограничениями, рассмотрим задачу

$$\min\{\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |\alpha_{i1}| : \alpha_1 \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, y \geqslant 0, \widetilde{X} \neq \varnothing\}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим два способа сведения задачи (3.6) к линейной модели.

Представим каждую компоненту вектора α_1 в виде разности

$$\alpha_1 = z_{i1} - z_{i2},$$

где $z_{i1} \geqslant 0$, $z_{i2} \geqslant 0$, $i = \overline{1,m}$. Тогда уравнения (3.5) примут вид

$$z_{i1} - z_{i2} - b_i^{(1)} y_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{ij}^{(1)} y_j = -a_{i1}^{(1)}, i = \overline{1,m}.$$

Введем целевую функцию $\langle c, x \rangle$ в задачу коррекции в виде ограничения $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \geqslant c_0$ с пороговым значением c_0. Сделаем замену переменных и приведем неравенство к уравнению. Получим новое ограничение

$$c_0 y_1 - \sum_{j=2}^{n} c_j y_j + y_{n+1} = c_1,$$

$$y_{n+1} \geqslant 0.$$

Введем в рассмотрение вектор

$$z = (z_{11}, \ldots, z_{m1}, z_{12}, \ldots, z_{m2}, y_1, \cdots, y_n, y_{n+1})^T \geqslant 0,$$

на который наложены ограничения $Dz = d$, где

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & -b_1^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & -b_2^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & . & \ddots & . & . & . & \ddots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 & -b_m^{(1)} & a_{m2}^{(1)} & \ldots & a_{mn}^{(1)} & 0 \\ 0 & & & & \ldots & & & 0 & -b_1^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} & 0 \\ 0 & & & & \ldots & & & 0 & -b_2^{(2)} & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & 0 \\ . & & & & \ddots & & & . & . & . & \ddots & . & . \\ 0 & & & & \ldots & & & 0 & -b_k^{(2)} & a_{k2}^{(2)} & \ldots & a_{kn}^{(2)} & 0 \\ 0 & & & & \ldots & & & 0 & c_0 & -c_2 & \ldots & -c_n & 1 \end{pmatrix},$$

$d = (-a_{11}^{(1)}, \ldots, -a_{m1}^{(1)}, -a_{11}^{(2)}, \ldots, -a_{k1}^{(2)}, c_1)^T$.

Получим задачу

$$\min\{\sum_{i=1}^{m} (z_{i1} + z_{i2}) | Dz = d, z \geqslant 0\},$$

которая эквивалентна задаче (3.6) и является линейной.

Иной способ замены задачи (3.6) задачей ЛП предполагает введение новой переменной u_1и дополнительных ограничений

$$u_1 \geqslant \alpha_{i1}, u_1 \geqslant -\alpha_{i1}, i = \overline{1, m}.$$

Тогда задача (3.6) сводится к линейной задаче

$$\begin{aligned} &\min\{u_1 | u_1 \in \mathbb{R}^n, \alpha_1 \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, \\ &u_1 \geqslant \alpha_{i1}, u_1 \geqslant -\alpha_{i1}, i = \overline{1, m}, y \geqslant 0, \widetilde{X} \neq \varnothing\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Полученное на данном этапе решение, очевидно, удовлетворяет условию (3.2), но, вообще говоря, не оптимально. Поэтому далее поступаем следующим образом.

Пусть α_i^* — решение задачи (3.6), а $u_1^* = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |\alpha_{i1}|$ (либо решение задачи (3.7)). Очевидно, справедливо соотношение $0 < \rho \leqslant u_1^*$. Зададим некоторое положительное число ε_1, положим оценку u_0 равной $u_0 = u_1^* - \varepsilon_1$ и уменьшим компоненты вектора $|\alpha_1^*|$, используя алгоритм

$$\widetilde{\alpha_{i1}^*} := \begin{cases} \alpha_{i1}^*, & \text{если } |\alpha_{i1}^*| \leqslant u_0, \\ u_0, & \text{если } \alpha_{i1}^* > u_0, \\ -u_0, & \text{если } \alpha_{i1}^* < -u_0, \end{cases} \tag{3.8}$$

т. е. "срежем" те элементы вектора α_{i1}^*, которые не попали в ε_1 - полосу точки u_1^*. Тем самым снова нарушим условие (3.2), но при этом "приблизим" к нулю вектор параметров. Таким образом, преобразуем первый столбец:

$$\widetilde{a_{i1}^{(1)}} := a_{i1}^{(1)} + \widetilde{\alpha_{i1}^*}, i = \overline{1, m}. \tag{3.9}$$

Далее, поскольку множество $\widetilde{X}$ по-прежнему пусто, варьируем второй столбец матрицы A^1, решая аналогичную задачу поиска α_{i2}^*.

Выпишем задачу вариации j-го столбца матрицы A^1 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в общем случае:

$$\min u_j$$

при условии

$$\begin{cases} \alpha_{ij} - b_i^{(1)} y_j + \sum\limits_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} a_{is}^{(1)} y_s &= -a_{ij}^{(1)}, \quad i = \overline{1, m}, \\ -b_i^{(2)} y_j + \sum\limits_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} a_{is}^{(2)} y_s &= -a_{ij}^{(2)}, \quad i = \overline{1, k}, \\ c_0 y_j - \sum\limits_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} c_s y_s &\leqslant c_j, \\ \alpha_{ij} &\leqslant u_j, \qquad i = \overline{1, m}, \\ -\alpha_{ij} &\leqslant u_j, \qquad i = \overline{1, m}, \\ y \geqslant 0, \ \ u_j \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Решим задачу (3.10) для $j = 2$ и получим оценку u_2^*. Если u_2^* окажется больше оценки u_0, это свидетельствует о том, что ε_1 задано слишком большим и в пределах данной ε_1-полосы улучшения оценки не происходит. Тогда полагаем ε_1 равным $\varepsilon_1/2$: $\varepsilon_1 := \varepsilon_1/2$, $u_0 := u_1^* - \varepsilon_1$ и возвращаемся к алгоритму (3.8), т. е. корректируем изменение предыдущего столбца.

Если оценка u_2^* не хуже $u_1^* - \varepsilon_1$, т. е. $u_2^* \leqslant u_0$, то полагаем новую оценку u_0 равной $u_2^* - \varepsilon_2$: $u_0 := u_2^* - \varepsilon_2$ и преобразуем два столбца по соотношениям, аналогичным формулам (3.8), (3.9):

$$\widetilde{a_{ij}^{(1)}} := \begin{cases} a_{ij}^{(1)} + \alpha_{ij}^*, & \text{если } |\alpha_{ij}^*| \leqslant u_0, \\ a_{ij}^{(1)} + u_0, & \text{если } \alpha_{i1}^* > u_0, \\ a_{ij}^{(1)} - u_0, & \text{если } \alpha_{i1}^* < -u_0, \end{cases} \qquad j = \overline{1, 2}, i = \overline{1, m}.$$

Далее варьируем третий столбец и т.д.

После того как проведена вариация n-го столбца, возвращаемся к первому, и процесс продолжается.

Очевидно, данный процесс сходится, так как последовательность оценок $\{u_0\}$ является убывающей, ограниченной снизу ρ. Однако не при всяком выборе шага, вообще говоря, она сходится к оптимальному значению ρ.

Литература

1. Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н. *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.* М.: Наука. Физматлит., 1983.

2. Голлимер Р. *Линейная мультипараметрическая оптимизация с параметрически зависимой матрицей ограничения.* АН ГДР, институт информации и ВТ. Пер. с англ. Гратвол А. А. Алма-Ата, 1987.