1999. Т.35, 11. С. 1473–1481

УДК 517.977

О ДЕКОМПОЗИЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

В. И. Елкин, Д. Г. Ивашко

Нелинейная управляемая динамическая система

$$\dot{y} = f_0(y) + f(y)u, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \tag{1}$$

(здесь f_0 — гладкое векторное поле, f — $(n \times r)$-матрица, столбцы которой f_α, $\alpha = \overline{1, r}$, — гладкие векторные поля в области M) представляет собой объект весьма сложной структуры. Поэтому для решения задач управления (например, задачи терминального управления) актуальной является проблема редукции исходной системы (1) к эквивалентной системе более простого вида.

Известно, что каждая система обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. система (1) при $f \equiv 0$, (локально, в окрестности любой точки M, в которой $f_0 \neq 0$) эквивалентна системе стандартного вида $\dot{x}^1 = 1$, $\dot{x}^k = 0$, $k = 2, \ldots, n$. Для нелинейных управляемых систем даже при условиях максимальной регулярности (т. е. при отсутствии всякого рода особых точек), начиная с размерности фазового пространства M, равной 3, уже нельзя указать даже конечного числа такого рода стандартных систем. Именно [1, 2 с. 167], каждая система (1) при $n = 3$ эквивалентна (в окрестности достаточно регулярной точки, в которой $f \neq 0$) одной из следующих систем:

$$\begin{array}{lllll} \dot{x} = 0, & \dot{x} = 0, & \dot{x} = 0, & \dot{x} = 1, & \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 0, & \dot{y} = 1, & \dot{y} = z, & \dot{y} = z, & \dot{y} = z, \\ \dot{z} = u, & \dot{z} = u, & \dot{z} = u, & \dot{z} = u, & \dot{z} = u, \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\dot{x} = 1 + zu, \\ &\dot{y} = u, \\ &\dot{z} = H(x, y, z)u, \end{aligned} \tag{3}$$

где H — произвольная функция, для которой $\partial H/\partial x \neq 0$,

$$\begin{array}{llllll} \dot{x} = 0, & \dot{x} = 1, & \dot{x} = zu, & \dot{x} = y, & \dot{x} = 1 + zu, & \dot{x} = u, \\ \dot{y} = u, & \dot{y} = u, & \dot{y} = u, & \dot{y} = u, & \dot{y} = u, & \dot{y} = v, \\ \dot{z} = v, & \dot{z} = v, & \dot{z} = v, & \dot{z} = v, & \dot{z} = v, & \dot{z} = w. \end{array} \tag{4}$$

В системах (2)–(4) x, y, z — фазовые переменные, а u, v, w — управления.

Эквивалентность для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и для управляемых систем определяется аналогично — это существование диффеоморфизма фазовых пространств, переводящего траектории в траектории. Таким образом, по определению, система (1) эквивалентна системе

$$\dot{x} = g_0(x) + g(x)v, \quad x \in N \subset \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}^s, \tag{5}$$

если существует такой диффеоморфизм $\varphi\colon M \to N$, что как только $y(t)$ — фазовая траектория системы (1), то $x(t) = \varphi(y(t))$ — фазовая траектория системы (5), и как только $x(t)$ — фазовая траектория системы (5), то $y(t) = \varphi^{-1}(x(t))$ — фазовая траектория системы (1). Здесь под фазовой траекторией управляемой системы (1) понимается непрерывная функция $y(t)$, для которой существует такое кусочно-непрерывное управление $u(t)$, что функции $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют (1). Заметим также, что факт эквивалентности систем (1) и (5), для которых $r = s$, равносилен (по крайней мере локально) существованию невырожденной замены переменных $x = \varphi(y)$, $v = \lambda_0(y) + \lambda(y)u$, $|\lambda| \neq 0$, переводящей системы (1), (5) друг в друга. Ясно, что решение любой задачи управления, поставленной для исходной системы (1), сводится к решению соответствующей задачи для эквивалентной системы (5).

Системы (2), (3), (4) составляют конечное число попарно неэквивалентных систем. Однако система (3), называемая приведенной формой (в отличие от систем (2), (4), называемых каноническими формами), содержит произвольную функцию $H(x, y, z)$, причем системы, соответствующие разным конкретным функциям H могут быть как эквивалентными, так и неэквивалентными. Известно, например, что системы, соответствующие функциям $H = x^k$ при различных натуральных числах k, неэквивалентны. Следовательно, имеется бесконечное подмножество попарно неэквивалентных систем (в любом локальном смысле). Итак, классификация (2)–(4) не является полной и редуцировать таким образом любую систему (1) к своей канонической форме не получается.

В данной работе рассматривается один из возможных способов редукции трехмерных управляемых систем, а именно декомпозиция на три независимые одномерные системы, т. е. возможность приведения системы (1) при $n = 3$ к эквивалентной системе вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_0(x) + a(x)v, \\ \dot{y} &= b_0(y) + b(y)v, \\ \dot{z} &= c_0(z) + c(z)v, \end{aligned} \tag{6}$$

где $a(x) \neq 0$, $b(y) \neq 0$, $c(z) \neq 0$. Полученные условия декомпозиции применимы для систем, заданных в общем виде (1). Однако, по-видимому, наибольший смысл декомпозиция имеет для систем (1), эквивалентных системе (3), ибо канонические формы (2), (4) сами имеют, в общем, довольно простой вид. Поэтому в работе рассмотрен отдельно также вопрос о декомпозиции системы (3).

В разделе 1 приведены некоторые сведения о дифференциально-геометрическом аппарате, применяемом для исследования вопроса о декомпозиции (подробности в [2, 3]). В разделе 2 выводятся условия существования декомпозиции вида (6) для системы общего вида (1). В разделе 3 дается алгоритм приведения системы (3) к виду (6) и рассматриваются примеры приведения частных случаев системы (3) (а именно C-систем) к виду (6).

1. Понятие декомпозиции управляемой системы тесно связано с понятием факторсистемы. Система

$$\dot{x} = g_0(x) + g(x)v, \quad x \in L \subset \mathbb{R}^m, \quad v \in \mathbb{R}^s, \tag{7}$$

называется факторсистемой системы (1), если существует гладкое отображение $\varphi\colon M \to L$, задаваемое функционально независимыми функциями

$$\varphi^k(y), \quad k = 1, \ldots, m \leqslant n, \tag{8}$$

которое переводит траектории системы (1) в траектории системы (7). Функции (8) в этом случае называются агрегатами системы (1).

Ясно, что если система (1) эквивалентна системе (5) и правые части первых m уравнений зависят только от m переменных $x^1, \ldots, x^m$, то эти m уравнений образуют факторсистему системы (1), причем первые m функций из набора n функций, задающих преобразование эквивалентности (диффеоморфизм), являются агрегатами. Верно и обратное утверждение:

если существует факторсистема (7), то агрегаты (8) можно дополнить до n независимых функций φ^k, $k = 1, \ldots, n$, определяющих (локальное) преобразование эквивалентности $x = \varphi(y)$ системы (1) в некоторую систему (5), в которой первые m уравнений совпадают с факторсистемой (7).

Итак, в (6) каждое из уравнений является факторсистемой. Кроме того, первое и второе, первое и третье, а также второе и третье уравнения образуют три двумерные факторсистемы.

Условия существования факторсистем удобно сформулировать в терминах теории кораспределений. Напомним, что кораспределением Q в области $M \subset \mathbb{R}^n$ называется отображение, ставящее в соответствие каждой точке $y \in M$ линейное подпространство ковекторов $Q(y)$ в кокасательном пространстве T^*M_y. Величина $\dim Q(y)$ называется рангом Q в точке $y \in M$. Если $\dim Q(y) = m$ $\forall y \in M$, то Q называют регулярным кораспределением (ранга m) и пишут просто $\dim Q = m$. Предполагается, что все встречающиеся в данной работе кораспределения являются регулярными. Для кораспределений Q_1, Q_2, заданных в области M, очевидным образом определяются отношение включения $Q_1 \subset Q_2$, а также операции суммы $Q_1 + Q_2$, прямой суммы $Q_1 \oplus Q_2$ и пересечения $Q_1 \cap Q_2$ (на основе соответствующих понятий теории линейных пространств).

Кораспределение Q обычно задается с помощью семейства форм Пфаффа $\omega^k = \sum_{i=1}^n \omega_i^k(y)dy^i$, $k = 1, \ldots, m$, компоненты которых $\omega_i^k(y)$ — гладкие функции. Это означает, что для любой точки $y \in M$ линейное подпространство $Q(y)$ является линейной оболочкой ковекторов $\omega^k = (\omega_1^k(y), \ldots, \omega_n^k(y))$, $k = 1, \ldots, m$. В этом случае часто говорят также, что Q порождается системой Пфаффа $\sum_{i=1}^n \omega_i^k(y)dy^i = 0$, $k = 1, \ldots, m$. Каждая такая система Пфаффа называется базисной для кораспределения Q. Базисные системы Пфаффа определены, вообще говоря, локально и, разумеется, неоднозначно. Гладкая функция $\Phi(y)$ называется интегралом кораспределения Q, если $(\partial\Phi/\partial y^1, \ldots, \partial\Phi/\partial y^n) \in Q(y)$ $\forall y \in M$. Кораспределение ранга m называется вполне интегрируемым, если в окрестности каждой точки области M существует m функционально независимых интегралов (8). Если сделать замену координат $x^i = \varphi^i(y)$, $i = 1, \ldots, n$, где первые m функций являются интегралами (8), то в новой системе координат для Q существует базисная система Пфаффа вида

$$dx^1 = 0, \ldots, dx^m = 0. \tag{9}$$

Обратимся к управляемым системам (1). Каждой системе (1), заданной в области M, можно поставить в соответствие ассоциированное кораспределение K, заданное в расширенной области $M \times \mathbb{R}^1$. Базисные системы Пфаффа

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^k(y)dy^i + \omega_{n+1}^k(y)dt = 0, \quad k = 1, \ldots, q, \tag{10}$$

кораспределения K формально получаются из соотношений (1) исключением переменных u и умножением на dt. Заметим, что $q = n - \operatorname{rank} f$. Таким образом, правые части системы (1) и компоненты ассоциированной системы Пфаффа (10) связаны соотношениями

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^k f_0^i + \omega_{n+1}^k = 0, \quad \sum_{i=1}^n \omega_i^k f_\alpha^i = 0, \quad k = 1, \ldots, q, \quad \alpha = 1, \ldots, r.$$

З а м е ч а н и е 1. Пусть в результате невырожденного преобразования переменных $x = \varphi(y)$ и линейного невырожденного преобразования уравнений базисная система Пфаффа (10) кораспределения K примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n \Omega_i^k(x)dx^i + \Omega_{n+1}^k(x)dt = 0, \quad k = 1, \ldots, q.$$

Рассмотрим в области изменения переменных x семейство векторных полей g_0, g_β, $\beta = 1, \dots, s = n - q$, таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} \Omega_i^k(x) g_0^i + \Omega_{n+1}^k(x) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \Omega_i^k(x) g_\beta^i = 0, \quad \beta = 1, \dots, s,\ k = 1, \dots, q,$$

причем поля g_β, $\beta = 1, \dots, s$, линейно независимы (в каждой точке x), т.е. образуют фундаментальную систему решений системы однородных линейных уравнений $\sum_{i=1}^{n} \Omega_i^k(x) g^i = 0$, $k = 1, \dots, q$, относительно неизвестных компонент поля $(g^1(x), \dots, g^n(x))$. Управляемая система (5), построенная с помощью полей g_0, g_β, $\beta = 1, \dots, s$, будет эквивалентна системе (1).

Отметим, что компоненты системы Пфаффа (10) не зависят от переменной t. Кроме того, выполняется равенство

$$\operatorname{rank} \|\omega_i^k(y)\|_{i=1,\dots,n}^{k=1,\dots,q} = \operatorname{rank} \|\omega_i^k(y)\|_{i=1,\dots,n+1}^{k=1,\dots,q}. \tag{11}$$

Кораспределения, порождаемые такими системами Пфаффа, называются t-кораспределениями.

Каждому t-кораспределению K, порождаемому в расширенной области $M \times \mathbb{R}^1$ системой Пфаффа (10), ставится в соответствие кораспределение $\overline{K}$, порождаемое в области M системой Пфаффа

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^k(y) dy^i = 0, \quad k = 1, \dots, q. \tag{12}$$

Из условия (11) вытекает, что каждому кораспределению $Q \subset \overline{K}$ взаимно однозначно соответствует такое t-кораспределение $Q' \subset K$, что $\overline{Q'} = Q$.

Каждому t-кораспределению K, заданному в $M \times \mathbb{R}^1$, сопоставляется t-характеристическое кораспределение $\mathbf{C}_t K$, заданное в M. Если K порождается системой Пфаффа (10), то $\mathbf{C}_t K$ порождается системой Пфаффа, состоящей из уравнений (12) и уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{i[j}^k \omega_{j_1}^1 \dots \omega_{j_q]}^q dy^i = 0,\ k = 1, \dots, q,\ 1 \leqslant j < j_1 < \dots < j_q \leqslant n+1. \tag{13}$$

Здесь $\omega_{ij}^k = \partial \omega_j^k / \partial y^i - \partial \omega_i^k / \partial y^j$, а квадратные скобки означают, что произведено альтернирование по заключенным в них индексам, т.е. над индексами $j, j_1, \dots, j_q$ в произведении $\omega_{ij}^k \omega_{j_1}^1 \dots \omega_{j_q}^q$ сделано $(q+1)!$ перестановок и взята сумма полученных выражений, причем выражения, полученные при помощи нечетных перестановок, взяты с обратным знаком. Эту операцию можно записать в виде формулы

$$\omega_{i[j}^k \omega_{j_1}^1 \dots \omega_{j_q]}^q = \begin{vmatrix} \omega_{ij}^k & \omega_{ij_1}^k & \dots & \omega_{ij_q}^k \\ \omega_j^1 & \omega_{j_1}^1 & \dots & \omega_{j_q}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_j^q & \omega_{j_1}^q & \dots & \omega_{j_q}^q \end{vmatrix}.$$

Система Пфаффа (12), (13) называется характеристической для системы Пфаффа (10).

Отметим важное свойство t-характеристического кораспределения — оно вполне интегрируемое и поэтому имеет в соответствующей системе координат $x^1, \dots, x^n$ базисную систему Пфаффа вида (9) (если $\dim \mathbf{C}_t K = m$). Кроме того, ранг $\mathbf{C}_t K$, называемый классом K, определяет минимальное число переменных, от которых может зависеть базисная система Пфаффа t-кораспределения K. Точнее, в упомянутой системе координат $x^1, \dots, x^n$ существует базисная система Пфаффа t-кораспределения K вида

$$\sum_{j=1}^{m} \Omega_j^k(x^1, \dots, x^m) dx^j + \Omega_{n+1}^k(x^1, \dots, x^m) dt = 0,\ k = 1, \dots, q = \dim K,$$

причем не существует системы координат, в которой имелась бы базисная система Пфаффа t-кораспределения K, зависящая от меньшего, чем m, числа координат.

Вернемся к вопросу о факторизации управляемых систем (1). Назовем вполне интегрируемое кораспределение Q, интегралы которого являются агрегатами системы (1), $\mathcal{F}$-кораспределением системы (1). Приведем условие факторизации в терминах $\mathcal{F}$-кораспределений.

Теорема 1. *Вполне интегрируемое кораспределение Q, заданное в области M, тогда и только тогда является $\mathcal{F}$-кораспределением системы* (1), *когда кораспределение $\overline{K}\bigcap Q$ является регулярным и*

$$\mathbf{C}_t((\overline{K}\bigcap Q)') \subset Q. \tag{14}$$

Из (14) вытекает, что естественным образом выделяются два типа $\mathcal{F}$-кораспределений. Первый тип составляют такие $\mathcal{F}$-кораспределения Q, что

$$\overline{K}\bigcap Q = \mathcal{O},$$

где $\mathcal{O}\colon y \to \{0\} \subset T^*M_y$. Такие $\mathcal{F}$-кораспределения называются тривиальными. Они определяют факторсистемы (7), для которых $\operatorname{rank} g = m$. Такие факторсистемы назовем также тривиальными, ибо они эквивалентны системам вида $\dot{x}^k = v^k$, $k = 1, \dots, m$.

Введение второго типа $\mathcal{F}$-кораспределений обусловлено тем, что регулярное t-характеристическое кораспределение является вполне интегрируемым. Поэтому можно ввести такие $\mathcal{F}$-кораспределения Q, что

$$\mathbf{C}_t((\overline{K}\bigcap Q)') = Q. \tag{15}$$

Кораспределения Q, удовлетворяющие условию (15), будем называть базисными $\mathcal{F}$-кораспределениями системы (1) (не нужно путать это понятие с понятием базисной системы Пфаффа кораспределения).

Ясно, что кокасательное расслоение $T^*M\colon y \to T^*M_y$ является $\mathcal{F}$-кораспределением системы (1) (определяемые им факторсистемы суть системы, эквивалентные системе (1)). Если условиться считать, что антипод кокасательного расслоения — нулевое кораспределение $\mathcal{O}$ — является $\mathcal{F}$-кораспределением (хотя оно и не определяет никакой факторсистемы), то (при определенных условиях регулярности) для каждого $\mathcal{F}$-кораспределения Q справедливо представление

$$Q = Q_1 \oplus Q_2, \tag{16}$$

где Q_1 — некоторое базисное $\mathcal{F}$-кораспределение, Q_2 — некоторое тривиальное $\mathcal{F}$-кораспределение.

Согласно (16), вопрос о нахождении $\mathcal{F}$-кораспределений сводится к вопросу о нахождении тривиальных и базисных $\mathcal{F}$-кораспределений. Что касается тривиальных $\mathcal{F}$-кораспределений, то их описание является алгебраической задачей. Базисные $\mathcal{F}$-кораспределения находятся из дифференциальных соотношений (15). Заметим, что каждое базисное $\mathcal{F}$-кораспределение Q однозначно определяется t-кораспределением $S \subset K$, удовлетворяющим условию

$$\mathbf{C}_t S \bigcap \overline{K} = \overline{S}. \tag{17}$$

Действительно, если t-кораспределение $S \subset K$ удовлетворяет (17), то кораспределение $Q = \mathbf{C}_t S$ удовлетворяет (15). Обратно, если Q удовлетворяет (15), то t-кораспределение $S = (\overline{K}\bigcap Q)'$ удовлетворяет (17).

t-Кораспределения $S \subset K$, удовлетворяющие условию (17), будем называть факториальными t-кораспределениями системы (1).

В терминах систем Пфаффа условие (17) означает существование базисной системы Пфаффа ассоциированного t-кораспределения K системы (1) вида

$$\sum_{i=1}^{n} \Omega_i^k(y)dy^i + \Omega_{n+1}^k(y)dt = 0, \quad k = 1, \dots, d, \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Omega_i^l(y)dy^i + \Omega_{n+1}^l(y)dt = 0, \quad l = d+1, \dots, q, \tag{19}$$

в которой d уравнений (18) образуют такую систему Пфаффа, что уравнения ее характеристической системы должны быть линейно независимы (в каждой точке y) с уравнениями

$$\sum_{i=1}^{n} \Omega_i^l(y)dy^i = 0, \quad l = d+1, \dots, q.$$

Очевидно, что если такая система Пфаффа (18), (19) существует, то уравнения (18) порождают факториальное t-кораспределение, а уравнения характеристической системы Пфаффа, построенной для системы (18), порождают базисное $\mathcal{F}$-кораспределение.

Следовательно, для поиска факториальных t-кораспределений можно поступить следующим образом. Возьмем произвольную базисную систему Пфаффа (10) t-кораспределения K и рассмотрим систему Пфаффа

$$\Omega^k = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^k(y)\Big(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^j(y)dy^i + \omega_{n+1}^j(y)dt\Big), \quad k = 1, \dots, d, \tag{20}$$

где λ_j^k — неопределенные коэффициенты, причем $\operatorname{rank}\|\lambda_j^k\| = d$. Коэффициенты λ_j^k следует определить из условия, чтобы уравнения (20) порождали факториальное t-кораспределение. Из алгоритма построения характеристической системы вытекает, что это приводит к дифференциальным соотношениям, которым должны удовлетворять коэффициенты λ_j^k.

2. В этом и следующем разделах речь пойдет о системах (1), для которых $n = 3$, $\operatorname{rank} f = 1$. Условия существования декомпозиции вида (6) дает

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *существуют такие базисные $\mathcal{F}$-кораспределения Q_k, $k = 1, 2, 3$, ранга* 2, *что $\sum_{k=1}^{3} Q_k = T^*M$, $\overline{S_k} \cap \overline{S_j} = \mathcal{O}$, $k, j = 1, 2, 3$, где S_k — факториальные t-кораспределения, соответствующие $\mathcal{F}$-кораспределениям Q_k, и $Q_k \cap Q_j$, $k, j = 1, 2, 3$, — вполне интегрируемые кораспределения ранга* 1. *Тогда система* (1) (*локально*) *эквивалентна системе* (6).

Доказательство. Каждое кораспределение Q_k, $k = 1, 2, 3$, имеет два функционально независимых интеграла, причем можно так выбрать эти интегралы, что каждая пара кораспределений Q_k, Q_j будет иметь общий интеграл, а именно интеграл кораспределения $Q_k \cap Q_j$. Пусть $\varphi^1(y^1, y^2, y^3)$ — интеграл кораспределения $Q_1 \cap Q_2$, $\varphi^2(y^1, y^2, y^3)$ — интеграл кораспределения $Q_2 \cap Q_3$, $\varphi^3(y^1, y^2, y^3)$ — интеграл кораспределения $Q_1 \cap Q_3$. Покажем, что эти функции являются искомыми агрегатами, т. е. определяют диффеоморфизм (или, иначе говоря, замену координат) $x = \varphi^1(y^1, y^2, y^3)$, $y = \varphi^2(y^1, y^2, y^3)$, $z = \varphi^1(y^1, y^2, y^3)$, задающий эквивалентность между системой (1) и некоторой системой вида (6). В новой системе координат x, y, z факториальные t-кораспределения S_1, S_2, S_3 порождаются уравнениями Пфаффа следующего вида:

$$\begin{aligned} \omega_1^1(x,y)dx + \omega_2^1(x,y)dy + \omega_3^1(x,y)dt = 0, \\ \omega_1^2(y,z)dy + \omega_2^2(y,z)dz + \omega_3^2(y,z)dt = 0, \\ \omega_1^3(x,z)dx + \omega_2^3(x,z)dz + \omega_3^3(x,z)dt = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

(В системе (21) первое уравнение порождает S_1, второе — S_2, третье — S_3.) Функции ω_1^k, ω_2^k, $k = 1, 2, 3$, не равны нулю ни в какой точке (x, y, z). Действительно, докажем, например, что $\omega_1^1 \neq 0$. Первая пара уравнений в (21), так же, как и любая другая пара уравнений в (21), образует базисную систему Пфаффа ассоциированного t-кораспределения K. Согласно определению факториального t-кораспределения (17), уравнения Пфаффа $dy = 0$, $dz = 0$, составляющие базисную систему Пфаффа кораспределения $Q_2 = \mathbf{C}_t S_2$, должны быть линейно независимы (в каждой точке) с уравнением $\omega_1^1(x,y)dx + \omega_2^1(x,y)dy = 0$. Следовательно, $\omega_1^1 \neq 0$.

Преобразуем уравнения (21) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
dx &= l_1(x,y)dy + l_2(x,y)dt,\\
dz &= q_1(y,z)dy + q_2(y,z)dt,\\
dx &= h_1(x,z)dz + h_2(x,z)dt.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Так как каждое из уравнений (22) линейно выражается через остальные два, то

$$l_1(x,y) = h_1(x,z)q_1(y,z), \tag{23}$$

$$l_2(x,y) - h_2(x,z) = h_1(x,z)q_2(y,z). \tag{24}$$

Из (23) следует, что

$$l_1(x,y) = \alpha_1(x)\beta_1(y), \qquad q_1(y,z) = \alpha_2(z)\beta_2(y),$$

где α_j, β_j — некоторые функции. Так как $\beta_1/\beta_2 = h_1(x,z)\alpha_2(z)/\alpha_1(x)$, то $\beta_1/\beta_2 = \mathrm{const}$. Поэтому можно положить $\beta_1(y) = \beta_2(y) = \beta(y)$. Следовательно, $\alpha_1(x) = h_1(x,z)\alpha_2(z)$. Из (24) имеем

$$\frac{l_2(x,y)}{\alpha_1(x)} = \frac{q_2(y,z)}{\alpha_2(z)} + \frac{h_2(x,z)}{\alpha_1(x)}.$$

Поэтому

$$\frac{l_2(x,y)}{\alpha_1(x)} = \mu_1(y) + \nu_1(x), \qquad \frac{q_2(y,z)}{\alpha_2(z)} = \mu_2(y) + \nu_2(z),$$

где μ_j, ν_j — некоторые функции. Так как

$$\mu_1(y) - \mu_2(y) = \nu_2(z) - \nu_1(x) + \frac{h_2(x,z)}{\alpha_1(x)},$$

то $\mu_1(y) - \mu_2(y) = \mathrm{const}$ и, следовательно, можно положить $\mu_1(y) = \mu_2(y) = \mu(y)$.

Итак, первые два уравнения в (22), составляющие базисную систему Пфаффа t-кораспределения K, линейным преобразованием приводятся к виду

$$
\begin{aligned}
dx &= \alpha_1(x)\beta(y)dy + \alpha_1(x)(\mu(y) + \nu_1(x))dt,\\
dz &= \alpha_2(z)\beta(y)dy + \alpha_2(z)(\mu(y) + \nu_2(z))dt.
\end{aligned}
$$

Определим в соответствии с замечанием 1 два векторных поля $g_0 = (\alpha_1(x)\nu_1(x), -\mu(y)/\beta(y), \alpha_2(z)\nu_2(z))$, $g_1 = (\alpha_1(x), 1/\beta(y), \alpha_2(z))$ и построим с их помощью управляемую систему

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \alpha_1(x)\nu_1(x) + \alpha_1(x)u,\\
\dot{y} &= -\frac{\mu(y)}{\beta(y)} + \frac{1}{\beta(y)}u,\\
\dot{z} &= \alpha_2(z)\nu_2(z) + \alpha_2(z)u,
\end{aligned} \tag{25}
$$

которая эквивалентна системе (1). Так как система (25) имеет вид (6), то теорема доказана.

3. Рассмотрим вопрос о факторизации и декомпозиции приведенной формы (3). Базисная система Пфаффа (10) ассоциированного t-кораспределения K системы (3) имеет вид

$$\begin{aligned} &dx - zdy - dt = 0, \\ &dz - H(x,y,z)dy = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

а кораспределение $\overline{K}$ порождается системой Пфаффа

$$\begin{aligned} &dx - zdy = 0, \\ &dz - H(x,y,z)dy = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Тривиальные $\mathcal{F}$-кораспределения порождаются любыми уравнениями Пфаффа, независимыми от уравнений системы (27).

Чтобы найти базисные $\mathcal{F}$-кораспределения будем искать факториальные t-кораспределения $S \subset K$ в соответствии с алгоритмом, изложенным в разделе 1. Так как $\dim K = 2$, то ранг t-кораспределения S равен 1 или 2. Если он равен 2, то $S = K$, а соответствующее $\mathcal{F}$-кораспределение $Q = \mathbf{C}_t K$ совпадает с T^*M. Поскольку $\dim Q = 3$, то Q определяет трехмерную факторсистему, эквивалентную исходной системе (3). Чтобы найти базисные $\mathcal{F}$-кораспределения Q ранга 2, которые фигурируют в теореме 2, ранг t-кораспределения S должен быть равен 1, т. е. его базисная система состоит из одного уравнения.

В соответствии с алгоритмом поиска факториальных t-кораспределений строим систему Пфаффа (20) при $d = 1$

$$\lambda_1(x,y,z)(dx - z\,dy - dt) + \lambda_2(x,y,z)(dz - H\,dy) = 0. \tag{28}$$

t-Кораспределение S, порожденное уравнением (28), будет факториальным, если его характеристическая система линейно независима с одним из уравнений системы (27). Следовательно, $\dim \mathbf{C}_t S < 3$. Очевидно, что второе уравнение Пфаффа системы (26) не является факториальным, так как ранг характеристической системы (т.е. максимальное число линейно независимых уравнений системы) этого уравнения равен 3, поэтому $\lambda_1 \neq 0$. Разделим уравнение (28) на λ_1 и обозначим $\lambda_2/\lambda_1 = \nu$. Тогда

$$dx - z\,dy - dt + \nu(dz - H\,dy) = 0, \tag{29}$$

где ν — неизвестная функция. Найдем характеристическую систему этого уравнения:

$$\begin{aligned} &dx - (z + \nu H)dy + \nu\,dz = 0, \\ &(H\nu)_x dy - \nu_x dz = 0, \\ &(H\nu)_x dx + (1 + \nu_y + (H\nu)_z)dz = 0, \\ &\nu_x dx + (1 + \nu_y + (H\nu)_z)dy = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

В системе (30) одно из уравнений линейно зависит от остальных уравнений, поэтому его необходимо исключить из системы. Если $\nu_x \neq 0$, то система (30) будет равносильна системе

$$\begin{aligned} &dx - (z + \nu H)dy + \nu\,dz = 0, \\ &(H\nu)_x dy - \nu_x dz = 0, \\ &(1 + \nu_y + z\nu_x + (H\nu)_z - H_x\nu^2)dy = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Если же $\nu_x = 0$, то система (31) будет равносильна системе

$$\begin{aligned} &dx - (z + \nu H)dy + \nu\,dz = 0, \\ &H_x\nu\,dy = 0, \\ &H_x\nu\,dx + (1 + \nu_y + (H\nu)_z)dz = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Чтобы существовало $\mathcal{F}$-кораспределение ранга 2, системы (31), (32) должны иметь ранг равный 2. Для этого необходимо и достаточно, чтобы компонента третьего уравнения системы (31) была равна 0. Следовательно, уравнение

$$z\nu_x + \nu_y + H\nu_z + (1 + \nu H_z - H_x\nu^2) = 0 \tag{33}$$

является условием факторизации приведенной системы.

Это уравнение является квазилинейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка и имеет бесконечно много решений. Каждое решение ν уравнения (33) определяет факториальное t-кораспределение S_ν ранга 1, порождаемое (29). Его характеристическое кораспределение $Q_\nu = \mathbf{C}_t S_\nu$ является $\mathcal{F}$-кораспределением ранга 2 и его интегралы, будучи агрегатами приведенной системы, определяют двумерную факторсистему. Кораспределение Q_ν порождается системой (30), в которой только два уравнения являются независимыми.

Если приведенная форма (3) обладает свойством $H_y = 0$, то уравнение (29) имеет следующее решение: $\nu = -z/H$. Соответствующее факториальное t-кораспределение S_ν определяет очевидную факторсистему

$$\dot{x} = 1 + zu, \quad \dot{z} = H(x, z)u.$$

Теперь проиллюстрируем на примере различных типов C-систем возможность декомпозиции управляемых систем на независимые уравнения.

В работе [4] во множестве систем, порождаемых приведенной формой, выделен тип систем, для которых установлена классификация и найдены канонические формы. Такие системы называются C-системами.

Дадим точное определение. Система (3) по определению является C-системой, если

$$I_1(H)(x, y, z) = \text{const}, \qquad I_2(H)(x, y, z) = \text{const},$$

где I_1, I_2 — дифференциальные операторы, определяемые следующими выражениями:

$$I_1(H) = 2\left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)_x - \left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)^2,$$
$$I_2(H) = \frac{1}{\sqrt{|H_x|}}\left(2H_z - \frac{1}{H_x}\left(zH_{xx} + H_{xy} + HH_{xz}\right)\right).$$

C-Системы разбиваются на классы локально эквивалентных систем, которые описываются следующей теоремой.

Теорема 3. *Каждой паре чисел (C_1, C_2) при $C_2 \geqslant 0$ соответствуют два класса эквивалентности. В первый класс $(C_1, C_2)^+$ входят C-системы вида* (3), *где функция H удовлетворяет уравнениям*

$$I_1(H)(x, y, z) = C_1, \qquad I_2(H)(x, y, z) = \pm C_2 \tag{34}$$

и условию $H_x > 0$. Во второй класс $(C_1, C_2)^-$ входят C-системы того же вида с функцией H, удовлетворяющей уравнениям (34) *и условию $H_x < 0$.*

Для C-систем числа C_1 и C_2 являются инвариантами. Известно, что классы эквивалентности $(C_1, C_2)^+$ и $(C_1, C_2)^-$ являются пустыми, если одновременно $\mathrm{C}_1 \neq 0$ и $\mathrm{C}_2 \neq 0$.

Рассмотрим каноническую форму для класса $(C_1, 0)^+$ при $C_1 > 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 + zu, \\ \dot{y} &= u, \\ \dot{z} &= az^2 \operatorname{tg}(ax)u, \end{aligned} \tag{35}$$

где $a = \sqrt{C_1}/2$, для которой $H(x,y,z) = az^2 \operatorname{tg}(ax)$. Запишем условие факторизации (33) для этой системы:

$$z\nu_x + \nu_y + az^2 \operatorname{tg}(ax)\nu_z + 1 + 2az \operatorname{tg}(ax)\nu - \frac{a^2z^2}{\cos^2(ax)}\,\nu^2 = 0. \tag{36}$$

Так как функция H не зависит от y, то (как отмечалось выше) функция $\nu_1 = -z/H = -1/(az \operatorname{tg}(ax))$ является решением уравнения (36).

Соответствующее факториальное t-кораспределение S_{ν_1} порождается уравнением Пфаффа

$$dx - \frac{dz}{az \operatorname{tg}(ax)} - dt = 0.$$

Характеристическое кораспределение Q_{ν_1} порождается системой Пфаффа

$$dx = 0, \qquad dz = 0,$$

и следовательно, интегралами его являются x и z. Кораспределение Q_{ν_1} определяет уже известную факторсистему

$$\dot{x} = 1 + zu, \qquad \dot{z} = az^2 \operatorname{tg}(ax)u.$$

В соответствии с теоремой 2 для построения декомпозиции (6) требуется найти еще два $\mathcal{F}$-кораспределения Q_{ν_2} и Q_{ν_3}, такие, что Q_{ν_1}, Q_{ν_2}, Q_{ν_3} имеют попарно один общий интеграл.

Легко проверить, что функция $\nu_2 = \cos(ax)/(az)$ является решением уравнения (36). Факториальное t-кораспределение S_{ν_2} порождается уравнением Пфаффа

$$dx - z(1 + \sin(ax))dy + \frac{\cos(ax)}{az}\,dz - dt = 0.$$

Подставим ν_2 в систему (30) и построим систему Пфаффа, порождающую $\mathcal{F}$-кораспределение Q_{ν_2},

$$\begin{aligned}
&dx - z(1 + \sin(ax))dy + \frac{\cos(ax)}{az}\,dz = 0,\\
&az\cos(ax)dx + (1 + \sin(ax))dz = 0.
\end{aligned}$$

Интегралами Q_{ν_2} являются функции

$$\Phi_1 = z(1 + \sin(ax)), \qquad \Phi_2 = yz(1 + \sin(ax)) + \cos(ax)/a.$$

Интеграл Φ_1 не зависит от y, поэтому он является интегралом также кораспределения Q_{ν_1}.

Теперь необходимо найти третье кораспределение Q_{ν_3}, которое бы удовлетворяло условию теоремы 2, т. е. кораспределение, одним из интегралов которого должна быть функция Φ_2, а другим — любой интеграл кораспределения Q_{ν_1}.

Среди $\mathcal{F}$-кораспределений будем искать такие, интегралами которых являются x и Φ_2, т. е. среди кораспределений, порождаемых системами Пфаффа вида (30) нужно найти кораспределение, порождаемое системой Пфаффа

$$dx = 0, \qquad z\,dy + y\,dz = 0. \tag{37}$$

Для этой цели уравнения (37) подставим в систему (30) и получим, что функция ν_3 должна удовлетворять следующему условию:

$$\nu_3 = \frac{-yz}{z + yH} = \frac{-y}{1 + ayz \operatorname{tg}(ax)}.$$

Легко проверить, что ν_3 является решением уравнения (36), т. е. t-кораспределение S_{ν_3}, порождаемое уравнением Пфаффа

$$dx - \frac{z}{1 + ayz\operatorname{tg}(ax)}\,dy - \frac{y}{1 + ayz\operatorname{tg}(ax)}\,dz - dt = 0,$$

является факториальным.

Таким образом, мы имеем три t-кораспределения S_{ν_1}, S_{ν_2} и S_{ν_3}, которые удовлетворяют условию теоремы 2. Следовательно, систему (35) можно декомпозировать на независимые уравнения. Для этого необходимо сделать следующую замену переменных:

$$\begin{aligned}
&x' = x, && \text{интеграл кораспределения } Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_3},\\
&y' = yz(1 + \sin(ax)) + \cos(ax)/a, && \text{интеграл кораспределения } Q_{\nu_2} \cap Q_{\nu_3},\\
&z' = z(1 + \sin(ax)), && \text{интеграл кораспределения } Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}.
\end{aligned}$$

В новых координатах факториальные t-кораспределения S_{ν_1}, S_{ν_2} и S_{ν_3} порождаются следующими уравнениями Пфаффа:

$$\frac{dx'}{\sin(ax')} - \frac{\cos(ax')dz'}{az'\sin(ax')} - dt = 0,$$

$$-dy' + \frac{y'\,dz'}{z'} - dt = 0,$$

$$\frac{ay'\,dx'}{\cos(ax')(1 + ay'\operatorname{tg}(ax'))} - \frac{dy'}{1 + ay'\operatorname{tg}(ax')} - dt = 0.$$

В соответствии с алгоритмом, приведенным в доказательстве теоремы 2, получим систему, которая эквивалентна исходной системе (35) и имеет вид (6),

$$\begin{aligned}
&\dot{x}' = \sin(ax') + (\cos(ax')/a)v,\\
&\dot{y}' = -1 + y'v,\\
&\dot{z}' = z'v,
\end{aligned}$$

где

$$v = \frac{a\cos(ax)}{1 + \sin(ax)} + \frac{az}{\cos(ax)}\,u.$$

Для представителей классов $(C_1, 0)^+$ и $(C_1, 0)^-$ при $C_1 < 0$

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = 1 + zu, && \dot{x} = 1 + zu,\\
&\dot{y} = u, && \dot{y} = u,\\
&\dot{z} = -az^2\operatorname{cth}(ax)u, && \dot{z} = -az^2\operatorname{th}(ax)u,
\end{aligned}$$

где $a = \sqrt{-C_1}/2$, декомпозиция на независимые уравнения осуществляется аналогично, и декомпозированные управляемые системы будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}' = -\operatorname{ch}(ax') + (\operatorname{sh}(ax')/a)v, && \dot{x}' = -1 + (\operatorname{cth}(ax')/a)v,\\
&\dot{y}' = -1 + y'v, && \dot{y}' = -1 + y'v,\\
&\dot{z}' = z'v, && \dot{z}' = z'v.
\end{aligned}$$

Рассмотрим каноническую форму для класса $(0, C_2)^+$, $C_2 \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = 1 + zu,\\
&\dot{y} = u,\\
&\dot{z} = (x + az)u,
\end{aligned} \tag{38}$$

где $a = C_2/2$. Условие факторизации (33) для этой системы имеет вид

$$z\nu_x + \nu_y + (x + az)\nu_z + (1 + \nu a - \nu^2) = 0. \tag{39}$$

Первое факториальное t-кораспределение S_{ν_1} образуется функцией $\nu_1 = -z/H = -z/(x+az)$, для других — ищется решение уравнения (39) в виде $\nu = \text{const}$. Тогда ν является решением квадратного уравнения

$$1 + a\nu - \nu^2 = 0,$$

которое всегда имеет два различных действительных корня

$$\nu_{2/3} = a/2 \pm \sqrt{1 + (a/2)^2}.$$

Факториальные t-кораспределения S_{ν_1}, S_{ν_2}, S_{ν_3} удовлетворяют условию теоремы 2. Замена переменных

$$\begin{aligned}
x' &= x + \nu_2 z, && \text{интеграл кораспределения } Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2},\\
y' &= y, && \text{интеграл кораспределения } Q_{\nu_2} \cap Q_{\nu_3},\\
z' &= x + \nu_3 z, && \text{интеграл кораспределения } Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_3},
\end{aligned}$$

приводит к декомпозированной управляемой системе

$$\begin{aligned}
\dot{x}' &= 1 + \nu_2 x' u,\\
\dot{y}' &= u,\\
\dot{z}' &= 1 + \nu_3 z' u.
\end{aligned}$$

Каноническая форма класса $(0, C_2)^-$ при $C_2 \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 1 + zu,\\
\dot{y} &= u,\\
\dot{z} &= (-x + az)u,
\end{aligned}$$

где $a = C_2/2$, декомпозируется на независимые уравнения аналогично управляемой системе (38) если $a > 2$ ($C_2 > 4$). В новых переменных система принимает вид:

$$\begin{aligned}
\dot{x}' &= 1 - \nu_2 x' u,\\
\dot{y}' &= u,\\
\dot{z}' &= 1 - \nu_3 z' u,
\end{aligned}$$

где ν_2 и ν_3 являются корнями квадратного уравнения $1 + a\nu + \nu^2 = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00947)

Литература

1. Елкин В. И. //Докл. АН СССР. 1988. Т. 302, 1. С. 18–20.

2. Елкин В. И. Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход. М., 1997.

3. Елкин В. И. //Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, 11. С. 1852–1862.

4. Ивашко Д. Г. О классификации трехмерных управляемых систем //Моделирование процессов управления и обработки информации. Междувед. сб. / МФТИ. М. 1996. С. 142–153.