УДК 519.24

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕННОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Т. Г. Смирнова

В настоящей статье проблема приближенной декомпозиции управляемой динамической системы (УДС) рассматривается как задача построения УДС, которая аппроксимирует исходную систему и допускает полную декомпозицию. Определение полной декомпозиции УДС приведено в [1,2]. Получены условия, позволяющие в некоторых случаях конструктивно построить аппроксимирующую УДС. Понятие приближенной декомпозиции можно рассматривать с формальной точки зрения, используя методы нестандартного анализа [1,3] и теорию математических структур Н.Бурбаки [1,2]. Так же, как и в случае неполной факторизации [5], это дает возможность рассматривать УДС как объект некоторой категории, морфизмами в которой являются отображения фазовых пространств и множеств управления.

Рассмотрим УДС

$$dy^i/dt = f^i(y^1, ..., y^n, u^1, ...u^r), \ i = 1, 2, ..., n, \qquad (1)$$

где правые части уравнений при каждом фиксированном u из множества $U \subset \mathbb{R}^r$ определены в не зависящей от u связной области $M \subset \mathbb{R}^n$ и являются гладкими; при каждом фиксированном $y \in M$ правые части (1) непрерывны по u. Решением системы (1) будет называться совокупность $(y^*(t), u^*(t))$ функций, где $y^*(t)$ — кусочно-дифференцируемы,

$u^*(t)$ — кусочно непрерывны, $y^*(t) \in M$, $u^*(t) \in U$, обращающих (1) в тождество по t. Управление $u^*(t)$, фигурирующее в каком-либо решении, называется допустимым, множество допустимых управлений обозначается через $\mathbf{U}$.

Определение 1 . *Будем говорить, что система* (1) *допускает приближенную декомпозицию (ε-декомпозицию) порядка* $(n-m)$, *если существует невырожденная замена переменных* $z = (z^1, ..., z^n)$

$$z^k = I^k(y), \; k = 1, 2, ..., n, \tag{2}$$

такая что норма любого вектора $grad\, I^k(y), k = 1, 2, ..., n$, *равна* 1,

$$\|grad\, I^k(y)\| = 1, \; k = 1, ...2, n, \tag{3}$$

и система (1) *может быть представлена в виде*

$$dz^k/dt = \phi^k(z^1, \, ..., \, z^m, u) + \varepsilon\xi^k(z^1, \, ..., \, z^m, u), \; k = 1, \, 2, \, ..., \, m. \tag{4}$$

$$dz^{m+a}/dt = \phi^{m+a}(z^1, \, ..., \, z^n, u), \; a = 1, \, 2, \, ..., \, n-m, \tag{5}$$

где функции ξ^k *таковы, что норма любого вектора* $grad\, \xi^k(z, u), k = 1, 2, ..., m$, *не превосходит* 1,

$$\|grad\, \xi^k(z, u)\| \leq 1, \; k = 1, ...2, m. \tag{6}$$

При $\varepsilon = 0$ система (4) имеет вид

$$dz^k/dt = \phi^k(z^1, \, ..., \, z^m, u), \; k = 1, \, 2, \, ..., \, m. \tag{7}$$

В этом случае система (7) является замкнутой, и это означает, что система (1) допускает полную (иерархическую) декомпозицию [1].

Сформулированные ниже предложения 1 и 2 представляют собой необходимые и достаточные условия ε-декомпозиции и приводятся без доказательства (доказательство аналогично приведенному в [5] доказательству условий неполной декомпозиции).

Предложение 1 *(необходимые условия)*

Пусть система (1) *допускает* ε*-декомпозицию порядка* $n - m$. *Тогда существует полная система линейно несвязанных операторов*

$$Z_a = b_a^i(y)/\partial y^i,\ a = 1, ..., n - m,\ i = 1, ..., n, \tag{8}$$

такая, что

$$\|b_\alpha\| = 1,\ b_\alpha = (b_\alpha^1, ..., b_\alpha^n),\ \alpha = 1, 2, ..., n - m, \tag{9}$$

и выполняется соотношение

$$(X_0, Z_\alpha) = H_\alpha^\sigma(y, u)Z_\sigma + h_\alpha,\ \alpha, \sigma = 1, ..., n - m, \tag{10}$$

где $X_0 = f^i(y, u)/\partial y^i$, *по повторяющемуся индексу производится суммирование, а* (X_0, Z_α) *— коммутатор операторов* X_0 *и* Z_α,

$$h_\alpha = a_\alpha^i(y, u)/\partial y^i,\ i = 1, ..., n, \tag{11}$$

$$\|a_\alpha\| \leq (\varepsilon(n - m)\sqrt{m}C)/\sqrt{\lambda_0},\ \alpha = 1, 2, ..., n - m, \tag{12}$$

$$C = max \mid \partial\xi^k/\partial z^{m+l} \mid,\ k = 1, ...m,\ l = 1, ..., n - m, \tag{13}$$

а λ_0 *есть оценка минимального характеристического числа матрицы Грама от векторов*

$$g^k = (\partial I^k/\partial y^1, ..., \partial I^k/\partial y^n), k = 1, ..., m, \tag{14}$$

функции ξ^k *входят в правые части уравнений (4).*

Предложение 2 *(достаточные условия)*

Пусть существует полная система операторов вида (8) , удовлетворяющая условиям (10), (11), причем

$$\|a_\alpha\| \leq \delta,\ \alpha = 1, 2, ..., n - m. \tag{15}$$

Пусть $\hat{y} = (y^{m+1}, ..., y^n)$, $\hat{y} \in D_2$, *причем множество* D_2 *является выпуклым и* d *— его диаметр. Тогда система (1) допускает* ε-*декомпозицию порядка* $n-m$, *причем первые* m *функций из (2) являются корнями операторов (8);*

$$\varepsilon = (\delta(n-m)^{3/2} dV)/\sqrt{\nu}, \tag{16}$$

где ν *— оценка минимального характеристического числа матрицы Грама от векторов (9),* V *— оценка длины столбцов матрицы* Φ^{-1}, *где* Φ *есть матрица Якоби преобразования:*

$$z^k = I^k(y),\ k = 1, ..., m,\ z^{m+a} = y^{m+a},\ a = 1, ..., n-m. \tag{17}$$

Итак, если удалось приближенно решить операторное уравнение

$$(X_0, Z_\alpha) = H_\alpha^\sigma(y, u) Z_\sigma,\ \ \alpha, \sigma = 1, ..., n-m, \tag{18}$$

с некоторой точностью, определяемой малой величиной δ, и найти операторы $Z_\alpha, \alpha = 1, ..., n-m$, то набор из функционально независимых корней этой системы операторов даст первые m функций замены переменных, с помощью которой удается осуществить ε-декомпозицию системы (1), причем для ε получена оценка ($\varepsilon = \delta K$, где K — некоторая константа, определяемая условиями задачи).

Предполагается, что норма функции $\xi^j(z, u)$ определена как максимум модуля в области определения переменных z, u, норма векторной функции $grad\, I^i(y)$ определена как максимум модуля вектора в области определения переменных y.

Таким образом, система (7), (5) является аппроксимирующей для системы (4), (5). Пусть $(\psi(t), u(t))$ — решение системы (4), (5), $(\hat{\psi}(t), u(t))$ — решение системы (7), (5), проходящие через точку t_0. Тогда

$$\mid \psi(t) - \hat{\psi}(t) \mid \leq \varepsilon\, M, \tag{19}$$

где M — некоторая константа, определяемая условиями задачи.

Отсюда следует возможность приближенного решения сложной УДС путем замены ее соответствующим образом подобранной приближенной УДС, допускающей ε-декомпозицию.

Вопросы приближенной декомпозиции рассмотрены также в [2,5,6].

Заметим, что объекты, с которыми мы имеем дело в настоящей статье, могут рассматриваться как множества, снабженные структурой в бурбаковском смысле [1,4], возможна также категорная интерпретация приближенной факторизации УДС.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00018).

Литература

[1] Павловский Ю. Н., Смирнова Т. Г. *Проблема декомпозиции в математическом моделировании.* М.: Фазис. 1998. 266 с.

[2] Смирнова Т. Г. *Приближенная декомпозиция динамических систем.* // М.: ВЦ АН СССР. 1987. 23 с.

[3] Девис М. *Прикладной нестандартный анализ.* М.: Мир, 1980. 247 с.

[4] Бурбаки Н. *Начала математики. Ч.I. Основные структуры анализа. Теория множеств.* Пер. с франц. М.: Мир. 1965. 425 с.

[5] Смирнова Т. Г. *Неполная декомпозиция и факторизация управляемых динамических систем.* // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 1998. С. 22–28.

[6] Б о р о в и к о в И. А. *Приближенная факторизация в линейно-квадратичном оптимальном управлении.* // Математические методы обработки информации и управления. М.: МФТИ. 1988.

С. 88–93.