УДК 519.24

НЕПОЛНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ И ФАКТОРИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Т. Г. Смирнова

Настоящая статья посвящена обобщению понятия частичной декомпозиции управляемых динамических систем (УДС), которое было введено ранее в [5,6]. Свойство УДС допускать неполную декомпозицию (в частности частичную декомпозицию) позволяет более эффективно применять приближенные методы при исследовании математических моделей, описываемых управляемыми динамическими системами. С формальной точки зрения возможность неполной факторизации позволяет рассматривать УДС, как объект некоторой категории, морфизмами в которой являются отображения фазовых пространств и множеств управления, переводящие решения в решения.

Рассмотрим УДС

$$dy^i/dt = f^i(y^1,\ ...,\ y^n, u^1,\ ...u^r),\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n, \tag{1}$$

где правые части уравнений при каждом фиксированном u из множества $U \subset \mathbf{R}^r$, определены в независящей от u связной области $M \subset \mathbf{R}^n$ и являются гладкими; при каждом фиксированном $y \in M$ правые части (1) непрерывны по u. Решением системы (1) будет называться совокупность $(y^*(t), u^*(t))$ функций, где $y^*(t)$ — кусочно-дифференцируемы, $u^*(t)$ — кусочно непрерывны, $y^*(t) \in M$, $u^*(t) \in U$, обращающие (1) в тождество по t. Управление $u^*(t)$, фигурирующее в каком либо решении, называется допустимым, множество допустимых управлений обозначается через $\mathbf{U}$.

Определение 1 *Будем говорить, что система* (1) *допускает неполную декомпозицию порядка* $(n-m)$ *степени* p*, если существует невырожденная замена переменных* $z = (z^1, ..., z^n)$

$$z^k = I^k(y),\ k = 1, 2, ..., n, \tag{2}$$

$$rank\|\partial I^k/\partial y^i\| = n,\ i = 1, ...2, n, \tag{3}$$

такая, что система (1) *может быть представлена в виде*

$$dz^k/dt = \phi^k(z^1,\ ...,\ z^m, v^1(z),\ ..., v^p(z), u),\ k = 1,\ 2,\ ...,\ m. \tag{4}$$

$$dz^{m+a}/dt = \phi^{m+a}(z^1,\ ...,\ z^n, u),\ a = 1,\ 2,\ ...,\ n-m, \tag{5}$$

где функции

$$z^1,\ ...,\ z^m, v^1(z),\ ..., v^p(z),\ m + p < n \tag{6}$$

являются функционально независимыми по z*.*

В частности, определение 1 совпадает с введенным в [5,6] определением частичной декомпозиции, если $v^i(z) = z^{m+i}$, $i = 1, ..., p$. Тогда система (4) имеет вид

$$dz^k/dt = \phi^k(z^1,\ ...,\ z^m, z^{m+1},\ ..., z^{m+p}, u),\ k = 1,\ 2,\ ...,\ m. \tag{7}$$

При $p = 0$ система (4) имеет вид

$$dz^k/dt = \phi^k(z^1,\ ...,\ z^m, u),\ k = 1,\ 2,\ ...,\ m. \tag{8}$$

В этом случае система (8) является замкнутой, и это означает, что система (1) допускает полную (иерархическую) декомпозицию [4].

Заметим, что из условия функциональной независимости по z функций (6) следует функциональная независимость по y функций

$$I^1(y),\ ...,\ I^m(y), v^1(I(y)),\ ..., v^p(I(y)) \tag{9}$$

Предложение 1. Для того, чтобы система (1) допускала неполную декомпозицию порядка $n-m$ степени p, необходимо и достаточно, чтобы существовала полная система линейно несвязанных операторов

$$Z_a = b_a^i(y)/\partial y^i,\ a = 1, ..., n-m,\ i = 1, ..., n, \tag{10}$$

такая, что первые $n-m-p$ операторов также образуют полную систему

$$Z_\sigma = b_\sigma^i(y)/\partial y^i,\ \sigma = 1, ..., n-m-p,\ i = 1, ..., n, \tag{11}$$

и выполняется соотношение

$$(X_0, Z_\sigma) = H_\sigma^a(y,u) Z_a,\ \sigma = 1, ..., n-m-p,\ a = 1, ..., n-m, \tag{12}$$

где $X_0 = f^i(y,u)/\partial y^i$, по повторяющемуся индексу производится суммирование, а (X_0, Z_σ) — коммутатор операторов X_0 и Z_σ

Необходимость. Пусть существует замена переменных (2), такая что имеет место (4), (5), тогда уравнения (4) можно записать в виде

$$dI^k(y)/dt = \bar{\phi}^k(I^1(y),\ ...,\ I^m(y), \bar{v}^1(y),\ ..., \bar{v}^p(y), u),\ k = 1,\ 2,\ ...,\ m, \tag{13}$$

где $\bar{v}^i(y) = v^i(I(y)),\ i = 1,\ 2,\ ...,\ p$. По известным функциям

$$I^1(y),\ ...,\ I^m(y), \bar{v}^1(y), ..., \bar{v}^p(y) \tag{14}$$

построим полную систему операторов (10), корнями которой являются функции $I^1(y),\ ...,\ I^m(y)$. Построить такую систему операторов можно таким образом, что функции (14) будут корнями первых $n-m-p$ операторов системы (10), т.е. корнями системы (11). Следовательно,

$$X_0 I^k(y) = \bar{\phi}^k(I^1(y), ..., I^m(y), \bar{v}^1(y), ..., \bar{v}^p(y), u),\ k = 1, 2, ..., m,$$

$$(X_0, Z_\sigma) I^k(y) = X_0 Z_\sigma I^k(y) - Z_\sigma X_0 I^k(y) = 0,\ \sigma = 1, ..., n-m-p.$$

Это означает, что выполнено условие (12).

Достаточность. Пусть существует полная система операторов (10), имеющая подсистему (11), такая что выполнено соотношение (12). Тогда существуют функции $I^1(y)$, ..., $I^m(y)$, являющиеся корнями операторов (10) и функции $\bar{v}^1(y), ..., \bar{v}^p(y)$, такие что $I^1(y)$, ..., $I^m(y)$, $\bar{v}^1(y)$, ..., $\bar{v}^p(y)$ являются корнями операторов (11). Перейдем к новым переменным

$$z^k = I^k(y),\ k = 1, ..., m$$

$$z^{m+a} = I^{m+a}(y),\ a = 1, ..., n-m,$$

где функции I^{m+a} выбраны произвольно, но так, что $I^1(y)$, ..., $I^n(y)$ определяют невырожденную замену переменных. Тогда

$$dI^k(y)/dt = \psi^k(y, u),\ k = 1, ..., m,$$

$$Z_\sigma X_0 I^k = Z_\sigma \psi^k(y, u),\ \sigma = 1, ..., n-m-p,$$

$$Z_\sigma X_0 I^k = -(X_0, Z_\sigma) I^k = -H^a_\sigma(y, u) Z_a I^k = 0,\ a = 1, ..., n-m$$

Следовательно, $Z_\sigma \psi^k(y, u) = 0$ и

$$\psi^k(y, u) = \bar{\phi}^k(I^1, ..., I^m, \bar{v}^1(y),\ ..., \bar{v}^p(y), u)$$

В новых переменных получим

$$dI^k/dt = \phi^k(z^1, ..., z^m, v^1(z), ..., v^p(z), u)$$

Определение 2 *Будем говорить, что система* (1) *допускает неполную факторизацию порядка* $(n-m)$ *степени* p, *если существуют функционально независимые функции*

$$z^1 = I^1(y),\ ...,\ z^m = I^m(y), \bar{v}^1(y), ..., \bar{v}^p(y) \tag{15}$$

такие что в силу системы (1) *выполняются соотношения*

$$dz^k/dt = \phi^k(z^1,\ ...,\ z^m, \bar{v}^1,\ ..., \bar{v}^p, u),\ \ k = 1,\ 2,\ ...,\ m,\ \ m+p < n. \tag{16}$$

Вопрос о том, допускает ли система (1) неполную факторизацию в некотором смысле аналогичен задаче о существенных параметрах системы функций.

Свойство УДС допускать неполную декомпозицию позволяет эффективно применить методы приближенного решения дифференциальных уравнений и таким образом является некоторым специальным случаем приближенной декомпозиции УДС. Вопросы приближенной декомпозиции рассмотрены также в [1,3,6].

Заметим, что объекты, с которыми мы имеем дело в настоящей статье, могут рассматриваться как множества, снабженные структурой в бурбаковском смысле [2,4], возможна также категорная интерпретация неполной факторизации УДС.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 96-01-00556.

Литература

[1] Боровиков И.А. *Приближенная факторизация в линейно-квадратичном оптимальном управлении.* Математические методы

обработки информации и управления. М.: МФТИ, 1988. С.88-93.

[2] Б у р б а к и Н. *Начала математики. Ч.I. Основные структуры анализа. Теория множеств.* Пер. с франц. М.: Мир, 1965. 425 с.

[3] И о н о в а И.В., С м и р н о в а Т.Г. *Некоторые задачи приближенного агрегирования.* М.: ВЦ АН СССР, 1987. 35 с.

[4] П а в л о в с к и й Ю.Н. *Проблема декомпозиции в математическом моделировании.* Математическое моделирование. 1991.Т. 3, N4. С. 93-122.

[5] С м и р н о в а Т.Г. *О частичном агрегировании и частично допускаемых группах.* Кибернетика и вычислительная техника 1982, N54. С. 31-35.

[6] С м и р н о в а Т.Г. *Приближенная декомпозиция динамических систем.* М.: ВЦ АН СССР. 1987. 23 с.