РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Д. Г. Ивашко

Трёхмерные аффинные управляемые системы

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА ⋄ 2000

Ответственный редактор
чл.-корр. РАН Ю. Н. Павловский

Монография содержит результаты исследований, направленные на развитие средств математического моделирования сложных динамических систем. Работа посвящена изучению инвариантных при изоморфизмах свойств управляемых динамических систем. Основное внимание уделено приведению трехмерных аффинных управляемых систем к наиболее простому виду. В качестве иллюстрации теоретических выводов, изложенных в монографии, рассмотрена задача терминального управления.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов, которые интересуются математической теорией управления.

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 99-01-00947, а также Совета программы поддержки ведущих научных школ (грант 00-15-96137).

Рецензенты: Г. Н. Яковенко,
Ю. А. Флеров

Научное издание

Введение

К настоящему времени в теории управления достаточно полно и подробно изучены линейные управляемые системы, т. е. системы вида

$$\dot{y} = Ay + Bu, \qquad y \in N \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \tag{1}$$

где A и B — постоянные матрицы. Для линейных моделей разработаны конструктивные алгоритмы решения многих практических задач теории управления, таких как задачи терминального, оптимального управления, и другие. Однако в практике моделирования чисто линейные задачи встречаются довольно редко. Нелинейные задачи для адекватного описания требуют применения нелинейных управляемых систем, но они оказались значительно более сложными математическими объектами, для которых пока не найдено эффективных методов анализа. Поэтому эти модели до сих пор не нашли широкого применения при решении сложных практических задач. Единственным методом исследования нелинейных управляемых систем является попытка приведения их к линейному виду. Очевидно, что это можно осуществить далеко не всегда.

В настоящей работе предпринята попытка проанализировать наиболее простые существенно нелинейные управляемые системы, т. е. системы, которые не сводятся к линейным. Рассмотрим управляемые системы, правые части которых линейно зависят от управлений

$$\dot{y} = f_0(y) + f(y)u, \qquad y \in N \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r. \tag{2}$$

Такие системы называются *аффинными* управляемыми системами. Среди одномерных и двумерных систем (2) ($n = 1$ или $n = 2$) существенно нелинейных систем нет. Они появляются уже среди трехмерных ($n = 3$) управляемых систем. Именно исследованию этих управляемых систем посвящена настоящая работа.

Для аффинных управляемых систем не существует общих методов решения прикладных задач теории управления. Выходом из ситуации представляется нахождение преобразования, которое бы приводило исходную систему к известной системе, для которой поставленная задача уже решена. Но вполне вероятна ситуация, когда невозможно свести конкретную управляемую систему к известным системам. Тогда для таких систем актуальной является задача редукции системы к простому виду и решения прикладных задач теории управления для редуцированной системы. При этом можно применять методы редукции, приводящие к более простой модели, или методы, приводящие к полностью эквивалентной модели более простого вида. Важные результаты в этом направлении изложены в работах [1–5].

Основной целью настоящего исследования является приведение трехмерных аффинных управляемых систем к эквивалентной системе максимально простого вида.

Согласно подходу, разработанному школой Ю. Н. Павловского [6–8], для формального определения понятия редукции управляемую систему необходимо погрузить в категорию, одним из объектов которой является исходная модель. В рамках этой категории редукция основана на сопоставлении исходному объекту изоморфного объекта, факторобъекта и подобъекта.

Чтобы определить категорию, для управляемых систем нужно определить понятие морфизма. При этом стремятся, с одной стороны, ввести морфизмы наиболее общего характера, чтобы уменьшить число неизоморфных систем. С другой стороны, желательно, чтобы существенные свойства управляемых систем, такие как управляемость, устойчивость, оптимальность решений, сохранялись при морфизмах.

Удачным компромиссом между этими противоречивыми требованиями является категория $\mathcal{AS}$ (аффинные системы), введенная в работе [4, с. 5] В. И. Елкиным. Эта категория предоставляет широкие возможности для редукции, тем не менее основные свойства управляемых систем при морфизмах сохраняются. Объектами этой категории являются системы вида (2), а морфизмы определяются следующим образом. Рассмотрим наряду с системой (2) некоторую другую управляемую систему

$$\dot{x} = g_0(x) + g(x)v, \qquad x \in M \subset \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R}^s. \tag{$2'$}$$

Гладкое отображение ψ фазового пространства N системы (2) в фазовое пространство M системы ($2'$) является морфизмом категории $\mathcal{AS}$ системы (2) в систему ($2'$), если оно переводит решения (фазовые траектории) системы (2) в решения системы ($2'$). Решением, или фазовой траекторией управляемой системы (2) называется гладкая функция $y(t)$, для которой существует такое управление $u(t)$, что функции $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют (2). Если морфизм ψ является изоморфизмом, то системы (2) и ($2'$) эквивалентны в категории $\mathcal{AS}$. Факторобъекты категории $\mathcal{AS}$ называются факторсистемами, а подобъекты — подсистемами.

Эквивалентные системы образуют непересекающиеся классы эквивалентности категории $\mathcal{AS}$. Для каждого такого класса можно выбрать представителей наиболее простого вида, которые называются каноническими формами. Канонические формы можно использовать в качестве простых управляемых систем, к которым сводится исходная управляемая система при решении прикладных задач теории управления.

Для аффинных управляемых систем задача классификации (т. е. установление класса эквивалентности для всех управляемых систем и нахождение канонической формы для каждого класса) не решена. Сейчас разработана классификация инволютивных систем и управляемых систем с числом управлений $r = n - 1$ [9]. В последнее время появились новые результаты по классификации управляемых систем с числом управлений $r = n - 2$ [10]. В книге представлены результаты автора по классификации трехмерных аффинных управляемых систем. Определен новый тип управляемых систем (C-системы), для которых установлена классификация и определены канонические формы.

Другим методом редукции является декомпозиция системы на независимые части меньшей размерности. Методологической основой декомпозиции является факторизация. Если управляемая система (2) эквивалентна декомпозированной системе

$$\dot{x} = g_0(x) + g(x)v, \qquad x \in M \subset \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R}^s, \tag{3, а}$$

$$\dot{z} = h_0(x,z) + h(x,z)v, \qquad z \in P \subset \mathbb{R}^{n-m}, \tag{3, б}$$

то система (3, а) образует факторсистему системы (2) в категории $\mathcal{AS}$. Таким образом, чтобы декомпозировать управляемую систему на независимые части, нужно найти соответствующие факторсистемы исходной системы. Декомпозиции управляемых систем посвящен обзор [11].

При таком подходе к редукции основной проблемой является поиск редуцированных объектов. Для этого в каждой категории используется свой математический аппарат. Его составляют понятия, которые имеют инвариантный характер относительно морфизмов. В категории $\mathcal{AS}$ эффективным инструментом анализа служит дифференциально-геометрическая теория аффинных распределений и t-кораспределений. Эта теория разработана В. И. Елкиным и изложена в учебных пособиях [12–14], а также суммирована в монографии [4].

Другой инструмент, активно используемый в книге, методы группового (симметрического) анализа и алгебр Ли [15–18]. Для задач теории управления методы группового анализа применялись в работах [4, 6, 19–25].

***

Скажем несколько слов о структуре и содержании монографии. Здесь изложены и обобщены результаты многолетних исследований автора по редукции трехмерных аффинных управляемых систем, опубликованные в работах [26–35]. Отметим, что в книге широко используются дифференциально-геометрические методы теории управления, разработанные В. И. Елкиным в монографии [4]. По сути данная книга является иллюстрацией применения этих общих методов для изучения трехмерных аффинных управляемых систем.

Книга состоит из шести разделов. Первый раздел носит справочный характер. В нем в соответствии с [4] собраны основные определения и термины, используемые на протяжении всего исследования. Второй раздел посвящен проблеме классификации трехмерных аффинных управляемых систем. Здесь определен новый тип управляемых систем (C-системы), для которого полностью определена классификация. В третьем разделе рассматриваются алгебры Ли, допускаемые трехмерными аффинными управляемыми системами. В разделе доказана теорема, что C-системы — это трехмерные аффинные управляемые системы, допускающие трехмерную алгебру Ли. В четвертом разделе рассмотрены структуры допускаемых алгебр Ли. Пятый раздел посвящен проблеме факторизации трехмерных аффинных управляемых систем. Особое внимание уделено декомпозиции управляемых систем на независимые уравнения. В шестом разделе для двух канонических C-систем рассмотрена задача терминального управления. Показано, что возможность решения задачи терминального управления для C-систем напрямую связана с возможностью их декомпозиции на независимые уравнения.

В заключение хочу выразить благодарность прежде всего моему научному руководителю В. И. Елкину за его неоценимую помощь в написании этой книги. Также хочу поблагодарить руководителя семинара ««Декомпозиция математических моделей»» Вычислительного центра Российской академии наук Ю. Н. Павловского, а также постоянных участников семинара

Г. Н. Яковенко, А. П. Крищенко, Т. Г. Смирнову, Л. Б. Коновалову за многочисленные обсуждения вопросов, затронутых в книге.

1. Основные определения

В настоящем разделе согласно работе [4] вводятся основные определения, математические методы и терминология, которые будут использованы автором в монографии для исследования трехмерных аффинных управляемых систем.

Категории аффинных управляемых систем. Чтобы определить категорию, нужно задать множество объектов и множество морфизмов. Объектами категории $\mathcal{AS}$ являются аффинные управляемые системы

$$\dot{y} = f_0(y) + \sum_{j=1}^{r} f_j(y)u^j, \qquad y \in N \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

где N — фазовое пространство, являющееся областью, а f_0 и f_j — гладкие векторные поля. *Решением*, или *фазовой траекторией* системы (1.1) называется непрерывная функция $y(t)$, для которой существуют такие кусочно-непрерывные управления $u^j(t)$, что функции $y(t)$ и $u^j(t)$ удовлетворяют системе (1.1).

Гладкое отображение $\psi(y) = x$ является *морфизмом* категории $\mathcal{AS}$ системы (1.1) в систему

$$\dot{x} = g_0(x) + \sum_{j=1}^{s} g_j(x)v^j, \qquad x \in M \subset \mathbb{R}^m, \tag{1.1$'$}$$

если из того, что $y(t)$ — решение системы (1.1) при некотором управлении $u(t)$, следует, что $x(t) = \psi(y(t))$ — решение системы (1.1$'$) при каком-то другом управлении $v(t)$.

Наряду с категорией $\mathcal{AS}$ часто рассматривают ее подкатегорию $\mathcal{ASP}$ [4, с. 7]. Объектами категории $\mathcal{ASP}$ также являются аффинные управляемые системы, а морфизмы определяются иначе. Гладкое преобразование $\psi(y) = x$ является морфизмом категории $\mathcal{ASP}$ системы (1.1) в систему (1.1$'$), если из того, что $y(t)$ — решение системы (1.1) при некотором управлении $u(t)$, следует, что $x(t) = \psi(y(t))$ — решение системы (1.1$'$) при этом же управлении $v(t) = u(t)$.

Если морфизм ψ является изоморфизмом, то системы (1.1) и (1.1$'$) *эквивалентны* в категории $\mathcal{AS}$. *Локально эквивалентными* в точках $y_0 \in N$ и $x_0 \in M$ называются системы (1.1) и (1.1$'$), если существуют такие окрестности этих точек, что системы (1.1) и (1.1$'$), будучи ограниченными на эти окрестности, эквивалентны. Все последующие рассуждения будут основываться именно на этом понятии эквивалентности.

Факторизация управляемых систем. Система (1.1$'$), заданная на фактормножестве $M = N/R$ ($\dim M = m$) по некоторому отношению эквивалентности R, называется *факторсистемой* системы (1.1), если каноническая проекция $\psi\colon N \to N/R$ является морфизмом. *Факторобъектом* управляемой системы (1.1) называется пара, состоящая из системы (1.1$'$) и морфизма ψ, если морфизм ψ является сюръективным отображением. Следуя [4, с. 210], будем также считать, что морфизм ψ является полным морфизмом и субмерсией. Морфизм $\psi\colon N \to M$ является гладким отображением, задаваемым функционально независимыми функциями $\psi^k(y)$, $k = \overline{1,m}$, $m \leqslant n$. Функции $\psi^k(y)$ в этом случае называются *агрегатами* системы (1.1).

Если для системы (1.1) существует факторобъект (1.1$'$), то будем говорить, что система (1.1) допускает *факторизацию* порядка $n - m$ в категории $\mathcal{AS}$. При $n = m$ система (1.1) эквивалентна факторсистеме (1.1$'$).

Говорят, что система (1.1) допускает *локальную* факторизацию в точке $y_0 \in N$, если управляемая система, получающаяся ограничением системы (1.1) на некоторую окрестность точки y_0, допускает факторизацию. Все дальнейшие результаты по факторизации относятся к локальной факторизации в некоторой точке, при этом явное упоминание о локальности будет опускаться.

Значение факторизации для редукции управляемых систем (1.1) заключается в том, что она порождает определенную декомпозицию исходной системы. Точнее говоря, если у системы (1.1) существует факторсистема (1.1′), заданная на некотором фактормножестве $M = N/R$, то система (1.1) эквивалентна системе, состоящей из следующих уравнений:

$$\dot{x} = g_0(x) + \sum_{j=1}^{s} g_j(x) v^j, \qquad x \in M \subset \mathbb{R}^m, \tag{1.2, а}$$

$$\dot{z} = h_0(x, z) + \sum_{j=1}^{s} h_j(x, z) v^j, \quad z \in P \subset \mathbb{R}^{n-m}. \tag{1.2, б}$$

Из вида системы (1.2) следует, что любое решение $x(t)$, $z(t)$ этой системы может быть получено следующим образом. Сначала нужно найти решение факторсистемы (1.2, а), соответствующее некоторому управлению $v(t)$, а затем, после подстановки $x(t)$ в (1.2, б) найти $z(t)$. На этом факте основана декомпозиция алгоритмов решения задач управления.

Распределения и кораспределения. С управляемой системой (1.1) естественным образом связываются различные дифференциально-геометрические объекты.

Любое семейство гладких векторных полей

$$S = \{\xi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_j^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad j \in J\},$$

задаваемое в области $N \subset \mathbb{R}^n$, порождает в этой области *распределение* Δ_S, которое является отображением точки $y \in N$ в линейное подпространство, натянутое на векторные поля $\xi_j(y)$ касательного пространства TN_y

$$\Delta_S\colon y \longrightarrow \operatorname{span}\{\,\xi_j(y), \quad j \in J\,\}.$$

Так, векторные поля $f_j(y) = \sum_{i=1}^n f_j^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}$, $j = \overline{1,r}$, порождают линейное подпространство $L_F(y) = \operatorname{span}\{\,f_j(y),\ \ j = \overline{1,r}\,\}$ касательного пространства TN_y. Отображение, ставящее в соответствие каждой точке y фазового пространства N линейное подпространство $L_F(y)$, называется *направляющим* распределением L_F, ассоциируемым с аффинной управляемой системой (1.1).

Векторные поля $f_j(y) = \sum_{i=1}^n f_j^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}$, $j = \overline{0,r}$, порождают аффинное подпространство $F(y) = f_0(y) + \operatorname{span}\{\,f_j(y),\ \ j = \overline{1,r}\,\}$ касательного пространства TN_y. Отображение $F\colon y \longmapsto F(y)$ является уже не распределением, а *аффинным распределением*, ассоциируемым с системой (1.1).

В дифференциальной геометрии известно, что для любого распределения существует двойственный объект — кораспределение. *Кораспределением* Q в области $N \subset \mathbb{R}^n$ называется отображение, ставящее в соответствие каждой точке $y \in N$ линейное подпространство ковекторов $Q(y)$ в кокасательном пространстве T^*N_y. Величина $\dim Q(y)$ называется *рангом* Q в точке $y \in N$. Если $\dim Q(y) = m$ $\forall y \in N$, то Q называют *регулярным* кораспределением ранга m и пишут просто $\dim Q = m$. Все встречающиеся в данной работе кораспределения предполагаются регулярными. Для кораспределений Q_1, Q_2, заданных в области N, на основе соответствующих понятий теории линейных пространств определяются отношение включения $Q_1 \subset Q_2$, а также операции суммы $Q_1 + Q_2$, прямой суммы $Q_1 \oplus Q_2$ и пересечения $Q_1 \cap Q_2$.

Кораспределение $\mathcal{T}^*N$, которое каждой точке $y \in N$ ставит в соответствие все кокасательное пространство T^*N_y, называется *кокасательным расслоением* ($\mathcal{T}^*N\colon y \to T^*N_y$). Кораспределение $\mathcal{O}$, которое каждой точке $y \in N$ ставит в соответствие множество, состоящее из одного нулевого ковектора кокасательного пространства, называется *нулевым* кораспределением ($\mathcal{O}\colon y \to \{0\} \subset T^*N_y$).

Кораспределение Q, как правило, задается с помощью семейства форм Пфаффа

$$\omega^k = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^k(y)dy^i, \qquad k = \overline{1,m}, \tag{1.3}$$

где $\omega_i^k(y)$ — гладкие функции. Это означает, что для любой точки $y \in N$ линейное подпространство $Q(y)$ является линейной оболочкой ковекторов $\omega^k = (\omega_1^k(y), \ldots, \omega_n^k(y))$, $k = \overline{1,m}$. Также говорят, что Q порождается системой Пфаффа $\sum_{i=1}^n \omega_i^k(y)dy^i = 0$, $k = \overline{1,m}$. Каждая такая система Пфаффа называется *базисной* для кораспределения Q. Базисные системы Пфаффа определены локально и неоднозначно.

Гладкая функция $\Phi(y)$ называется *интегралом* кораспределения Q, если $(\frac{\partial\Phi}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial y^n}) \in Q(y)\ \forall y \in N$. Кораспределение Q ранга m называется *вполне интегрируемым*, если в окрестности каждой точки области N существует m функционально независимых интегралов кораспределения Q. Если сделать замену координат $x^i = \varphi^i(y)$, $i = \overline{1,n}$, где первые m функций являются интегралами кораспределения Q, то в новой системе координат для Q существует базисная система Пфаффа вида

$$\begin{cases} dx^1 = 0, \\ \quad \cdots \\ dx^m = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Для направляющего распределения L_F управляемой системы (1.1) двойственным объектом является кораспределение $L_F^\perp$. Оно порождается формами Пфаффа (1.3), которые анулируют векторные поля $f_j(y)$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^k f_j^i = 0, \qquad j = \overline{1, r}, \quad k = \overline{1, q}, \text{ где } q = n - r.$$

Для того чтобы определить двойственный объект для аффинного распределения, уравнения системы (1.1) умножим на dt и исключим из них переменные u. Тогда получим систему Пфаффа

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^k(y) dy^i + \omega_{n+1}^k(y) dt = 0, \qquad k = \overline{1, q}, \tag{1.5}$$

где функции $\omega_i^k(y)$ являются решениями уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^k f_0^i + \omega_{n+1}^k = 0, \qquad k = \overline{1, q},$$
$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^k f_j^i = 0, \qquad j = \overline{1, r}, \quad k = \overline{1, q}.$$

Про систему (1.5) будем говорить, что это управляемая система (1.1), которая записана в двойственном виде.

Уравнения (1.5) можно считать базисной системой Пфаффа кораспределения K, ассоциируемого с системой (1.1). Кораспределение K определено в расширенной области $N \times \mathbb{R}^1$, но компоненты системы Пфаффа (1.5) не зависят от переменной t, и для них выполняется равенство

$$\operatorname{rank} \|\omega_i^k(y)\|_{i=\overline{1, n}}^{k=\overline{1, q}} = \operatorname{rank} \|\omega_i^k(y)\|_{i=\overline{1, n+1}}^{k=\overline{1, q}}. \tag{1.6}$$

Кораспределения, порождаемые такими системами Пфаффа, называются *t-кораспределениями.* t-Кораспределение K является двойственным объектом к аффинному распределению F: $K = F_{\perp}$.

Если форма Пфаффа $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_{n+1})$ принадлежит t-кораспределению K, то через $\overline{\omega}$ обозначается ковектор $\overline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in T^*N_y$. Множество ковекторов $\{\overline{\omega},\ \omega \in K\}$ образует „обычное“ кораспределение $\overline{K}$, которое является двойственным кораспределением к распределению L_F: $\overline{K} = L_F^{\perp}$. Кораспределение $\overline{K}$ порождается системой Пфаффа

$$\overline{\omega^k} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^k(y)\, dy^i = 0, \qquad k = \overline{1, q}. \tag{1.7}$$

Для любого ковектора $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \overline{K}$ существует такой единственный ковектор $\omega' = (\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}) \in K$, для которого верно равенство $\omega = \overline{\omega'}$. Для любого кораспределения $S \subset \overline{K}$ обозначим через S' кораспределение $S' = \{\omega', \omega \in S\}$.

Каждому t-кораспределению K, заданному в $N \times \mathbb{R}^1$, ставится в соответствие *t-характеристическое* кораспределение $\mathsf{C}_t K$, заданное на множестве N. Если K порождается системой Пфаффа (1.5), то $\mathsf{C}_t K$ порождается системой Пфаффа, состоящей из уравнений (1.7) и уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \omega^k_{i[j} \omega^1_{j_1} \dots \omega^q_{j_q]}\, dy^i = 0, \qquad k = \overline{1, q}, \tag{1.8}$$
$$1 \leqslant j < j_1 < \dots < j_q \leqslant n + 1.$$

Здесь

$$\omega^k_{ij} = \frac{\partial \omega^k_j}{\partial y^i} - \frac{\partial \omega^k_i}{\partial y^j}, \qquad \omega^k_{i,n+1} = \frac{\partial \omega^k_{n+1}}{\partial y^i}, \qquad i, j = \overline{1, n},$$

а квадратные скобки означают, что произведено *альтернирование* по заключенным в них индексам. Эту операцию можно записать в виде формулы

$$\omega^k_{i[j}\omega^1_{j_1}\dots\omega^q_{j_q]} = \begin{vmatrix} \omega^k_{ij} & \omega^k_{ij_1} & \dots & \omega^k_{ij_q} \\ \omega^1_j & \omega^1_{j_1} & \dots & \omega^1_{j_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^q_j & \omega^q_{j_1} & \dots & \omega^q_{j_q} \end{vmatrix}.$$

Система Пфаффа (1.7), (1.8) называется *t-характеристической* для системы Пфаффа (1.5).

Отметим важное свойство t-характеристического кораспределения. Оно вполне интегрируемое и поэтому имеет в соответствующей системе координат $x^1, \dots, x^n$ базисную систему Пфаффа вида (1.5), если $\dim \mathsf{C}_t K = m$. Ранг $\mathsf{C}_t K$, называемый классом K, является очень важной характеристикой t-кораспределения K. Он определяет минимальное число переменных, от которых может зависеть базисная система Пфаффа t-кораспределения K. Таким образом, в упомянутой системе координат $x^1, \dots, x^n$ существует базисная система Пфаффа t-кораспределения K вида

$$\sum_{j=1}^{m} \Omega^k_j(x^1, \dots, x^m)dx^j + \Omega^k_{n+1}(x^1, \dots, x^m)dt = 0, \qquad (1.9)$$
$$k = \overline{1, q}, \qquad q = \dim K,$$

и не существует системы координат, в которой имелась бы базисная система Пфаффа t-кораспределения K, зависящая от меньшего, чем m, числа координат.

Алгебра Ли векторов и векторных полей. По определению векторное пространство $\mathfrak{a}$ над полем $\mathbb{R}$ называется *алгеброй Ли* над тем же полем, если на $\mathfrak{a}$ определена билинейная операция (*коммутатор*, который будем обозначать $[X, Y]$, где $X, Y \in \mathfrak{a}$), удовлетворяющая следующим соотношениям:

1) $[X, X] = 0$ (*антикоммутативность*),

2) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]] = 0$(*тождество Якоби*),

где $X, Y, Z \in \mathfrak{a}$. Размерностью алгебры называется размерность векторного пространства $\mathfrak{a}$. Если пространство $\mathfrak{a}$ конечномерно, то его базис называется базисом алгебры Ли.

Множество $\mathcal{T}(N)$ всевозможных векторных полей, заданных на многообразии N, является бесконечномерным линейным пространством. Это пространство можно превратить в алгебру Ли, если определить коммутатор следующим образом:

$$[\xi, \eta] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial y^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial y^j} \right) \frac{\partial}{\partial y^i},$$

где $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}$, $\eta = \sum_{i=1}^{n} \eta^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}$ — произвольные векторные поля из $\mathcal{T}(N)$.

Пусть семейство гладких векторных полей

$$\mathfrak{a} = \{\xi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_j^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad j \in J\}, \tag{1.10}$$

заданное в области $N \subset \mathbb{R}^n$, является конечномерной алгеброй Ли размерности p. Тогда согласно [36] будем говорить, что алгебра $\mathfrak{a}$ обладает *L-свойством*, если $\dim \Delta_{\mathfrak{a}}(y) = p \ \forall y \in N$, где $\Delta_{\mathfrak{a}}$ — распределение, порожденное векторными полями (1.10) алгебры $\mathfrak{a}$.

Допускаемые преобразования и допускаемые алгебры Ли. *Автоморфизмом* системы (1.1) называется изоморфизм системы (1.1) в эту же систему. В категориях, связанных с системами дифференциальных уравнений, автоморфизмы называются *симметриями* или преобразованиями, которые допускаются системами дифференциальных уравнений.

Итак, по определению диффеоморфизм $\varphi\colon N \to N$ *допускается* в категории $\mathcal{AS}$ системой (1.1), если из того, что $y(t)$ — решение системы (1.1) при некотором управлении $u(t)$, следует, что $\tilde{y}(t) = \varphi(y(t))$ — решение системы (1.1) при каком-то другом управлении $\tilde{u}(t)$. Далее в более общем смысле под допускаемыми преобразованиями понимаются также и локальные диффеоморфизмы, переводящие решения в решения. Если векторное поле $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}$, заданное в области $N \subset \mathbb{R}^n$, порождает локальную однопараметрическую группу $\{s^\tau, \tau \in \mathbb{R}^1\}$ локальных диффеоморфизмов, каждый из которых допускается системой (1.1), то о нем говорят, что векторное поле ξ допускается системой (1.1). Необходимые и достаточные условия того, что поле ξ допускается системой (1.1), получены в работе [37]. Их можно записать в следующем виде:

$$[f_j, \xi] = \sum_{i=1}^{r} \nu_j^i(y) f_i, \qquad j = \overline{0, r}, \tag{1.11}$$

где $\nu_j^i(y)$ — произвольные функции. Совокупность векторных полей, удовлетворяющих уравнениям (1.11), образуют алгебру Ли, которая в работе [4] обозначена как $\mathfrak{a}_1$. Именно эта алгебра и называется допускаемой алгеброй Ли системы (1.1) в категории $\mathcal{AS}$.

В категории $\mathcal{ASP}$ допускаемыми являются преобразования, которые переводят решения в решения, соответствующие одинаковым управлениям. Поле ξ допускается системой (1.1) тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет уравнениям

$$[f_j, \xi] = 0, \qquad j = \overline{0, r}. \tag{1.12}$$

Допускаемые поля в категории $\mathcal{ASP}$ также образуют алгебру Ли, которая обозначается $\mathfrak{a}_0$. Из уравнений (1.11) и (1.12) следует, что $\mathfrak{a}_0$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{a}_1$. Алгебра $\mathfrak{a}_0$ была введена Г. Н. Яковенко [24] для нелинейных систем общего вида.

Система (1.1) называется L_1-*системой*, если алгебра $\mathfrak{a}_1$ имеет n-мерную подалгебру, обладающую L-свойством. Если такая подалгебра совпадает со всей алгеброй $\mathfrak{a}_1$, то система (1.1) называется *строго* L_1-*системой*.

Если же система (1.1) допускает алгебру $\mathfrak{a}_0$, имеющую n-мерную подалгебру, обладающую L-свойством, то такая система называется L_0-*системой*. Если же такая подалгебра совпадает со всей алгеброй $\mathfrak{a}_0$, то система (1.1) называется *строго* L_0-*системой*.

В последующих разделах настоящей работы рассматриваются структуры алгебр $\mathfrak{a}_0$ и $\mathfrak{a}_1$, допускаемых трехмерными аффинными управляемыми системами.

Выводы раздела

Введенные в этом разделе основные математические определения и понятия, как указывалось выше, даны согласно монографии В. И. Елкина [4]. Они необходимы для изложения результатов исследования трехмерных аффинных управляемых систем.

2. Классификация трехмерных аффинных управляемых систем

Основные свойства управляемой системы, такие как управляемость, устойчивость, оптимальность решений, сохраняются при переходе к эквивалентной системе. Поэтому, если не удается решить ту или иную задачу управления для исходной управляемой системы, можно попытаться решить ее для более простой эквивалентной системы. Если в данной категории управляемых систем решена проблема классификации, то в качестве более простых систем рассматривают канонические формы. В этом случае исследование свойств произвольной управляемой системы сводится к исследованию канонических форм.

Проблема классификации управляемых систем состоит в описании классов эквивалентных систем. Она включает в себя следующие задачи: нахождение критериев эквивалентности систем; построение диффеоморфизмов, связывающих эквивалентные системы; построение канонических форм, т. е. поиск представителей классов эквивалентности наиболее простого вида. Поскольку для категории $\mathcal{AS}$ задача классификации полностью еще не решена, то даже полученные отдельные классификационные результаты могут оказаться весьма полезными.

§ 2.1. Существующая классификация

В проблеме классификации трехмерных управляемых систем существенную роль играют инварианты, т. е. величины, которые не меняются при изоморфизмах. В категории $\mathcal{AS}$ для каждой аффинной управляемой системы такими инвариантами являются ранги аффинных распределений и кораспределений, ассоциированных с управляемой системой. Используя эти инварианты, в работе [38] было найдено, что система (1.1) с трехмерным фазовым пространством ($n = 3$) эквивалентна одной системе из следующих 14 типов управляемых систем:

а) в обычном виде — б) в двойственном виде

$$\text{I.}\ \begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{z} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = 0, \\ dy = 0, \\ dz = 0. \end{cases}$$

$$\text{II.}\ \begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{z} = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = 0, \\ dy = 0, \\ dz - dt = 0. \end{cases}$$

$$\text{III.}\begin{cases}\dot x = 0,\\ \dot y = 0,\\ \dot z = u,\end{cases} \qquad \begin{cases} dx = 0,\\ dy = 0.\end{cases}$$

$$\text{IV.}\begin{cases}\dot x = 0,\\ \dot y = 1,\\ \dot z = u,\end{cases} \qquad \begin{cases} dx = 0,\\ dy - dt = 0.\end{cases}$$

$$\text{V.}\begin{cases}\dot x = 0,\\ \dot y = z,\\ \dot z = u,\end{cases} \qquad \begin{cases} dx = 0,\\ dy - z\,dt = 0.\end{cases}$$

$$\text{VI.}\begin{cases}\dot x = 1,\\ \dot y = z,\\ \dot z = u,\end{cases} \qquad \begin{cases} dx - dt = 0,\\ dy - z\,dt = 0.\end{cases}$$

$$\text{VII.}\begin{cases}\dot x = y,\\ \dot y = z,\\ \dot z = u,\end{cases} \qquad \begin{cases} dx - y\,dt = 0,\\ dy - z\,dt = 0.\end{cases}$$

$$\text{VIII.}\begin{cases}\dot x = 1 + zu,\\ \dot y = u,\\ \dot z = H(x,y,z)u,\end{cases} \qquad \begin{cases} dx - z\,dy - dt = 0,\\ dz - H(x,y,z)dy = 0,\end{cases} \quad H_x(x,y,z) \neq 0.$$

$$\text{IX.}\begin{cases}\dot x = 0,\\ \dot y = u,\\ \dot z = v,\end{cases} \qquad \big\{ dx = 0.$$

$$\text{X.}\begin{cases}\dot x = 1,\\ \dot y = u,\\ \dot z = v,\end{cases} \qquad \big\{ dx - dt = 0.$$

$$\text{XI.}\begin{cases}\dot x = y,\\ \dot y = u,\\ \dot z = v,\end{cases} \qquad \big\{ dx - y\,dt = 0.$$

$$\text{XII.}\begin{cases}\dot x = zu,\\ \dot y = u,\\ \dot z = v,\end{cases} \qquad \big\{ dx - z\,dy = 0.$$

$$\text{XIII.}\ \begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = v, \end{cases} \qquad \Big\{ dx - z\,dy - dt = 0.$$

$$\text{XIV.}\ \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = v, \\ \dot{z} = w, \end{cases} \qquad \Big\{ 0 = 0.$$

Из всех этих систем особый интерес представляет система под номером VIII. Как видно, система VIII зависит от произвольной функции $H(x, y, z)$, про которую известно только то, что она существенно зависит от x. Среди систем такого вида с разными функциями H существуют эквивалентные и неэквивалентные между собой системы. Поэтому системы I–VII и IX–XIV принято называть каноническими формами, а систему VIII — *приведенной* формой. Группу систем вида VIII с разными функциями H будем называть приведенными системами.

Классификация приведенных систем требует дополнительных исследований, на чем остановимся подробнее в следующем параграфе. Для таких систем имеется острая необходимость в дополнительных инвариантах, которые не являются рангами распределений и кораспределений.

§ 2.2. Эквивалентные преобразования приведенной системы

Исследуем вопрос о том, когда приведенные системы с разными функциями H будут эквивалентны между собой. Для этого рассмотрим две различные приведенные системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = H(x, y, z)u, \end{cases} \qquad H_x(x, y, z) \neq 0, \tag{2.1}$$

$$
\begin{cases}
\dot{\tilde{x}} = 1 + \tilde{z}v, \\
\dot{\tilde{y}} = v, \\
\dot{\tilde{z}} = \widetilde{H}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})v,
\end{cases}
\qquad \widetilde{H}_{\tilde{x}}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \neq 0. \tag{$\widetilde{2.1}$}
$$

Согласно [4] вопрос об эквивалентности аффинных управляемых систем в категории $\mathcal{AS}$ сводится к эквивалентности базисных систем Пфаффа t-кораспределений, ассоциированных с управляемыми системами. Умножив каждое уравнение систем (2.1) и ($\widetilde{2.1}$) на dt и исключив управления, получим следующие t-системы Пфаффа:

$$
\begin{cases}
dx - z\,dy - dt = 0, \\
dz - H(x,y,z)dy = 0,
\end{cases}
\quad H_x(x,y,z) \neq 0,
$$

$$
\begin{cases}
d\tilde{x} - \tilde{z}\,d\tilde{y} - dt = 0, \\
d\tilde{z} - \widetilde{H}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})d\tilde{y} = 0,
\end{cases}
\quad \widetilde{H}_{\tilde{x}}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \neq 0.
$$

Эти системы эквивалентны только тогда, когда существует преобразование

$$
\begin{cases}
\tilde{x} = \alpha(x,y,z), \\
\tilde{y} = \beta(x,y,z), \\
\tilde{z} = \gamma(x,y,z),
\end{cases} \tag{2.2}
$$

и такая функция $\theta(x,y,z)$, что

$$
\begin{cases}
d\alpha - \gamma\,d\beta = dx - z\,dy, \\
d\gamma - \widetilde{H}(\alpha,\beta,\gamma)d\beta = (dz - H(x,y,z)dy)\,\theta(x,y,z).
\end{cases}
$$

Отсюда следует, что функции α, β, γ и θ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases}
\alpha_x = \gamma\beta_x + 1, \\
\alpha_y = \gamma\beta_y - z, \\
\alpha_z = \gamma\beta_z, \\
\gamma_x = \widetilde{H}(\alpha,\beta,\gamma)\beta_x, \\
\gamma_y = \widetilde{H}(\alpha,\beta,\gamma)\beta_y - \theta(x,y,z)H(x,y,z), \\
\gamma_z = \widetilde{H}(\alpha,\beta,\gamma)\beta_z + \theta(x,y,z).
\end{cases} \tag{2.3}
$$

Уравнения (2.3) являются системой уравнений с одинаковой главной частью относительно неизвестных функций α и γ. Решение таких систем уравнений рассматривалось в работе [39]. Для нее алгебраические условия совместности (равенство смешанных производных $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ и т. д. в силу системы (2.3)) приводят к дифференциальным уравнениям относительно β и θ. Равенство $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$ приводит к равенству $\beta_x = 0$ и, следовательно, к равенствам $\alpha_x = 1$, $\gamma_x = 0$. Эти равенства позволяют упростить преобразование (2.2) и систему (2.3) и записать их в следующем виде:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \alpha(x,y,z) = x + \bar{\alpha}(y,z), \\ \tilde{y} = \beta(y,z), \\ \tilde{z} = \gamma(y,z), \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_y = \gamma\beta_y - z, \\ \bar{\alpha}_z = \gamma\beta_z, \\ \gamma_y = \widetilde{H}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)\beta_y - \theta(x,y,z)H(x,y,z), \\ \gamma_z = \widetilde{H}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)\beta_z + \theta(x,y,z). \end{cases} \tag{2.5}$$

Далее из равенства $\bar{\alpha}_{yz} = \bar{\alpha}_{zy}$ следует, что $\beta_y\gamma_z - \beta_z\gamma_y = 1$, или

$$\theta(\beta_y + H(x,y,z)\beta_z) = 1. \tag{2.6}$$

Следовательно, якобиан преобразования (2.4) равен единице:

$$\frac{\partial\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}{\partial xyz} = \begin{vmatrix} 1 & \bar{\alpha}_y & \bar{\alpha}_z \\ 0 & \beta_y & \beta_z \\ 0 & \gamma_y & \gamma_z \end{vmatrix} = \beta_y\gamma_z - \beta_z\gamma_y = 1.$$

Так как γ не зависит от x, то из последних двух уравнений системы (2.5) получим

$$\beta_y = \frac{(\theta H(x,y,z))_x}{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}, \qquad \beta_z = -\frac{\theta_x}{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}. \tag{2.7}$$

Подставляя уравнения (2.7) в уравнение (2.6), получим соотношение для θ:

$$\theta^2 = \frac{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}{H_x(x,y,z)} > 0. \tag{2.8}$$

А присоединяя уравнения (2.7) к системе (2.5), получим „обычную“ систему дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковой главной частью относительно функций $\bar{\alpha}$, β и γ:

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_y = \gamma \dfrac{(\theta H(x,y,z))_x}{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)} - z, \\ \bar{\alpha}_z = -\gamma \dfrac{\theta_x}{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}, \\ \beta_y = \dfrac{(\theta H(x,y,z))_x}{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}, \\ \beta_z = -\dfrac{\theta_x}{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}, \\ \gamma_y = \widetilde{H}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)\dfrac{(\theta H(x,y,z))_x}{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)} - \theta(x,y,z)H(x,y,z), \\ \gamma_z = -\widetilde{H}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)\dfrac{\theta_x}{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)} + \theta(x,y,z), \end{cases} \tag{2.9}$$

где θ удовлетворяет соотношению (2.8).

На самом деле, имеются две системы (2.9), одна из которых соответствует условию

$$\theta = \sqrt{\frac{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}{H_x(x,y,z)}} > 0, \tag{2.10, а}$$

а другая — условию

$$\theta = -\sqrt{\frac{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}{H_x(x,y,z)}} < 0. \tag{2.10, б}$$

Уравнения вида (2.9), (2.10) впервые получены в работах [40] и [41].

Итак, вопрос об эквивалентности аффинных систем (2.1) и $(\widetilde{2.1})$ сводится к вопросу о совместности систем уравнений с одинаковой главной частью (2.9), (2.10). Согласно [4,39, с. 132], совместность таких систем проверяется с помощью элементарных алгебраических операций, а решение системы находится с помощью решений некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Каждое решение системы (2.9), (2.10, а) или (2.9), (2.10, б) определяет диффеоморфизм (2.4), осуществляющий эквивалентность системы (2.1) и $(\widetilde{2.1})$.

Исследование системы (2.9) начнем с проверки четырех условий совместности: $\beta_{yx} = 0$, $\beta_{zx} = 0$, $\beta_{yz} = \beta_{zy}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$. Из первых двух условий совместности следуют два равенства

$$\begin{aligned} &\frac{\widetilde{H}_{\tilde{x}\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)} = \frac{\theta_{xx}}{\theta_x},\\ &\frac{\widetilde{H}_{\tilde{x}\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)} = \frac{(\theta H(x,y,z))_{xx}}{(\theta H(x,y,z))_x}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Если из соотношения (2.8) найти производные функции θ и подставить их в уравнения (2.11), то оба уравнения дадут одно и то же равенство

$$2\frac{\widetilde{H}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)} - 3\frac{\widetilde{H}^2_{\tilde{x}\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}{\widetilde{H}^2_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)} = \\ = 2\frac{H_{xxx}(x,y,z)}{H_x(x,y,z)} - 3\frac{H^2_{xx}(x,y,z)}{H^2_x(x,y,z)},$$

после преобразования которого получим следующее уравнение:

$$2\left(\frac{\widetilde{H}_{\tilde{x}\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}\right)_{\tilde{x}} - \left(\frac{\widetilde{H}_{\tilde{x}\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}{\widetilde{H}_{\tilde{x}}(x+\bar{\alpha},\beta,\gamma)}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{H_{xx}(x,y,z)}{H_x(x,y,z)}\right)_x - \left(\frac{H_{xx}(x,y,z)}{H_x(x,y,z)}\right)^2. \quad (2.12)$$

Из вторых условий совместности $\beta_{yz} = \beta_{zy}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ следует только одно равенство

$$\widetilde{H}_{\tilde{z}}(x+\bar{\alpha}, \beta, \gamma) = z\theta_x + \theta_y + (\theta H(x,y,z))_z,$$

которое после подстановки производных функции θ из выражения (2.8) приобретет вид

$$\frac{1}{\sqrt{|\widetilde{H}_{\tilde{x}}|}}\Big(2\widetilde{H}_{\tilde{z}} - \frac{1}{\widetilde{H}_{\tilde{x}}}(\tilde{z}\widetilde{H}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \widetilde{H}_{\tilde{x}\tilde{y}} + \widetilde{H}\widetilde{H}_{\tilde{x}\tilde{z}})\Big) =$$
$$= \frac{\pm 1}{\sqrt{|H_x|}}\Big(2H_z - \frac{1}{H_x}(zH_{xx} + H_{xy} + HH_{xz})\Big). \quad (2.13)$$

В правой части выражения (2.13) знак плюс соответствует системе уравнений (2.9), (2.10, а), а минус — системе уравнений (2.9), (2.10, б).

Если ввести два дифференциальных оператора

$$I_1(H) = 2\left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)_x - \left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)^2, \quad (2.14,\ \text{а})$$
$$I_2(H) = \frac{1}{\sqrt{|H_x|}}\Big(2H_z - \frac{1}{H_x}(zH_{xx} + H_{xy} + HH_{xz})\Big), \quad (2.14,\ \text{б})$$

а функции, получающиеся в результате действия операторов, обозначить через $I_1(H)(x,y,z)$ и $I_2(H)(x,y,z)$ соответственно, то равенства (2.12) и (2.13) можно записать в виде

$$\begin{cases} I_1(\widetilde{H})(x+\bar{\alpha}, \beta, \gamma) = I_1(H)(x,y,z), \\ I_2(\widetilde{H})(x+\bar{\alpha}, \beta, \gamma) = \pm I_2(H)(x,y,z). \end{cases} \quad (2.15)$$

Итак, для совместности системы (2.9), (2.10) необходимо выполнение неравенства (2.8) и соотношений (2.15). Из полученных соотношений (2.15) видно, что если соотношения не выполняются в точках (x_0, y_0, z_0) и $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0)$, то ситемы (2.1) и $(\widetilde{2.1})$ локально не эквивалентны в этих точках. Таким образом доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Для локальной эквивалентности управляемой системы* (2.1) *в окрестности точки* (x_0, y_0, z_0) *системе* $(\widetilde{2.1})$ *в окрестности точки* $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0)$ *необходимо выполнение следующих условий:*

$$1)\ \operatorname{sign}(H_x(x_0, y_0, z_0)) = \operatorname{sign}(\widetilde{H}_{\tilde{x}}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0)),$$

$$2)\ I_1(H)(x_0, y_0, z_0) = I_1(\widetilde{H})(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0),$$

$$3)\ |I_2(H)(x_0, y_0, z_0)| = |I_2(\widetilde{H})(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0)|.$$

Если соотношения (2.15) выполняются тождественно, то по теореме Фробениуса [42] для любой пары точек (x_0, y_0, z_0) и $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) существует единственное решение $\bar{\alpha}(y, z)$, $\beta(y, z)$, $\gamma(y, z)$ системы (2.9), удовлетворяющее условию

$$\begin{cases} \tilde{x}_0 = x_0 + \bar{\alpha}(y_0, z_0), \\ \tilde{y}_0 = \beta(y_0, z_0), \\ \tilde{z}_0 = \gamma(y_0, z_0). \end{cases}$$

В этом случае аффинная система (2.1) локально эквивалентна системе $(\widetilde{2.1})$. Отметим, что если второе уравнение соотношений (2.15) тождественно выполняется со знаком плюс, то существует решение системы (2.9), (2.10, а), а если же со знаком минус, то существует решение системы (2.9), (2.10, б).

Если условия (2.15) не противоречивы и тождественно не выполняются, тогда, если они не содержат α, β, γ, система (2.9) будет несовместна. В противном случае — из условий (2.15) можно выразить одну из функций α, β, γ и подставить в систему (2.9). Тогда в этой системе останутся только две неизвестные функции. Эта редуцированная система аналогично исследуется на совместность дальше.

Таким образом, найдены необходимые условия локальной эквивалентности систем (2.1) и $\widetilde{(2.1)}$ и показано, что эти условия не являются достаточными.

В следующем параграфе среди приведенных систем будет определен новый тип систем, для которых условия теоремы 1 будут необходимыми и достаточными.

§ 2.3. C-Системы и их классификация

Неравенство (2.8) показывает, что управляемые системы, у которых функции H_x и $\widetilde{H}_{\tilde{x}}$ имеют разные знаки, не могут быть эквивалентными. Следовательно, знак функции H_x является инвариантом, который разбивает множество систем (2.1) на две группы: с положительной и с отрицательной функцией H_x. Инвариантный вид полученных соотношений (2.15) позволяет ввести новый тип систем, который назовем C-системами.

Система (2.1) по определению является *C-системой*, если выполняется

$$I_1(H)(x, y, z) = \text{const}, \tag{2.16, а}$$

$$I_2(H)(x, y, z) = \text{const}. \tag{2.16, б}$$

C-Системы можно разбить на непересекающиеся классы эквивалентности.

Теорема 2. *Каждой паре чисел (C_1, C_2) при $C_2 \geqslant 0$ соответствуют два класса эквивалентности C-систем. В первый класс $(C_1, C_2)^+$ входят C-системы вида* (2.1)*, где функция H удовлетворяет системе уравнений*

$$I_1(H)(x, y, z) = C_1, \tag{2.17, а}$$

$$I_2(H)(x,y,z) = \pm C_2 \tag{2.17, б}$$

и условию $H_x > 0$*. Во второй класс* $(C_1, C_2)^-$ *входят* C*-системы вида* (2.1) *с функцией* H*, удовлетворяющей системе уравнений* (2.17) *и условию* $H_x < 0$*.*

Для C-систем числа C_1 и C_2 являются инвариантами.

Доказательство. Если произвольные C-системы (2.1) и $(\widetilde{2.1})$ принадлежат одному классу $(C_1, C_2)^+$ или $(C_1, C_2)^-$, то для них справедливо неравенство (2.8) и соотношения (2.15) выполняются тождественно. Тогда, как уже отмечалось на с. 27, существует замена координат (2.4). Следовательно, системы (2.1) и $(\widetilde{2.1})$ локально эквивалентны.

Если две произвольные C-системы (2.1) и $(\widetilde{2.1})$ принадлежат разным классам, то или не справедливо неравенство (2.8), или соотношения (2.15) противоречивы. В любом случае система (2.9) несовместна, и системы (2.1), $(\widetilde{2.1})$ не являются локально эквивалентными. $\square$

Исследуя систему (2.17), найдем канонические формы для классов $(C_1, C_2)^+$ и $(C_1, C_2)^-$. Уравнение (2.17, а)

$$I_1(H)(x,y,z) = 2\left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)_x - \left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)^2 = C_1$$

полностью интегрируется и имеет следующие решения:

при $C_1 > 0$ $\quad H_1 = \beta(y,z)\,\mathrm{tg}\Big({}^1\!/\!_2\sqrt{C_1}\,x + \alpha(y,z)\Big) + \gamma(y,z),$ (2.18, а)

$$H_2 = \beta(y,z)\,\mathrm{ctg}\Big({}^1\!/\!_2\sqrt{C_1}\,x + \alpha(y,z)\Big) + \gamma(y,z); \tag{2.18, б}$$

при $C_1 = 0$ $\quad H_3 = \beta(y,z)\,x + \gamma(y,z),$ (2.18, в)

$$H_4 = \frac{\beta(y,z)}{\alpha(y,z) - x} + \gamma(y,z); \qquad (2.18,\ г)$$

при $C_1 < 0$
$$H_5 = \beta(y,z)\,\mathrm{th}\left({}^1\!/\!{}_2\sqrt{-C_1}\,x + \alpha(y,z)\right) + \gamma(y,z), \qquad (2.18,\ д)$$

$$H_6 = \beta(y,z)\,\mathrm{cth}\left({}^1\!/\!{}_2\sqrt{-C_1}\,x + \alpha(y,z)\right) + \gamma(y,z), \qquad (2.18,\ е)$$

$$H_7 = \beta(y,z)\,e^{\pm x\sqrt{-C_1}} + \gamma(y,z). \qquad (2.18,\ ж)$$

Во всех уравнениях α, β и γ — произвольные функции.

Теперь нужно подставить найденные решения в уравнение (2.17, б).

• Рассмотрим подробно решения (2.18) при $C_1 > 0$. Подставив решение (2.18, а) в уравнение (2.17, б), получим равенство

$$\pm\, C_2 = I_2(H_1) = \frac{1}{\sqrt{|{}^1\!/\!{}_2\sqrt{C_1}\,\beta|}} \times$$
$$\times \left(\sin\left({}^1\!/\!{}_2\sqrt{C_1}\,x + \alpha\right)\left(\beta_z - \sqrt{C_1}\,z - 2\alpha_y - 2\alpha_z\gamma\right) + \right.$$
$$\left. + \cos\left({}^1\!/\!{}_2\sqrt{C_1}\,x + \alpha\right)\left(2\gamma_z - \frac{\beta_y}{\beta} - \frac{\gamma\beta_z}{\beta} + 2\beta\alpha_z\right)\right). \qquad (2.19)$$

Это равенство может выполняться только при $C_2 = 0$. Следовательно, классы эквивалентности $(C_1, C_2)^+$ и $(C_1, C_2)^-$ при $C_2 \neq 0$ пусты. При $C_1 > 0$ к классу эквивалентности $(C_1, 0)^+$ принадлежат все управляемые системы (2.1) с функцией H, равной (2.18, а), где $\alpha(y,z)$, $\beta(y,z)$ и $\gamma(y,z)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} \beta_z - \sqrt{C_1}\,z - 2\alpha_y - 2\alpha_z\gamma = 0, \\ 2\gamma_z - \dfrac{\beta_y}{\beta} - \dfrac{\gamma\beta_z}{\beta} + 2\beta\alpha_z = 0, \end{cases} \qquad \beta(y,z) > 0. \qquad (2.20)$$

Исследуя таким же образом решение (2.18, б), получим, что при $C_1 > 0$ к классу эквивалентности $(C_1, 0)^+$ также принадлежат все управляемые системы вида (2.1) с функцией H, равной (2.18, б), где $\alpha(y,z)$, $\beta(y,z)$ и $\gamma(y,z)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} \beta_z + \sqrt{C_1}\, z + 2\alpha_y + 2\alpha_z\gamma = 0, \\ 2\gamma_z - \dfrac{\beta_y}{\beta} - \dfrac{\gamma\beta_z}{\beta} - 2\beta\alpha_z = 0, \end{cases} \qquad \beta(y,z) < 0. \tag{2.21}$$

Условия принадлежности системы (2.1) к классу $(C_1, 0)^-$ такие же, только в (2.20) вместо условия $\beta(y,z) > 0$ будет условие $\beta(y,z) < 0$, а в (2.21) вместо условия $\beta(y,z) < 0$ будет условие $\beta(y,z) > 0$.

Из систем, принадлежащих классу $(C_1, 0)^+$ при $C_1 > 0$, выберем каноническую систему с наиболее простой функцией $H(x,y,z)$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = az^2 \operatorname{tg}(ax)\, u, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/\!_2\sqrt{C_1}, \quad C_1 > 0. \tag{2.22}$$

Для класса $(C_1, 0)^-$ при $C_1 > 0$ каноническую систему найти пока не удалось.

• Рассмотрим решения (2.18) при $C_1 = 0$. Подставим решение (2.18, в) в уравнение (2.17, б) и получим

$$I_2(H_3) = \frac{1}{\sqrt{|\beta|}} \left(\beta_z x + 2\gamma_z - \frac{\beta_y}{\beta} - \frac{\gamma\beta_z}{\beta} \right) = \pm C_2, \quad C_2 \geqslant 0.$$

Это равенство может выполняться, только если

$$\begin{cases} \beta_z = 0, \\ 2\gamma_z - \dfrac{\beta_y}{\beta} - \dfrac{\gamma\beta_z}{\beta} = \pm\sqrt{|\beta|}\, C_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что к классу $(0, C_2)^+$ принадлежат управляемые системы (2.1) с функцией

$$H(x,y,z) = \beta(y)x + {}^1\!/\!_2\left(\pm\sqrt{\beta(y)}\, C_2 + \frac{\beta_y(y)}{\beta(y)} \right) z + \gamma(y),$$

где $\beta(y) > 0$. Здесь $\beta(y)$ и $\gamma(y)$ — произвольные функции.

Исследуя решение (2.18, г), находим, что к классу $(0, C_2)^+$ также принадлежат и управляемые системы (2.1) с функцией H вида (2.18, г), где $\alpha(y,z)$, $\beta(y,z)$ и $\gamma(y,z)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} \beta_z - 2z + 2\alpha_y + 2\alpha_z\gamma = \pm\sqrt{\beta}\,C_2, \\ 2\gamma_z - \dfrac{\beta_y}{\beta} - \dfrac{\gamma\beta_z}{\beta} = 0, \end{cases} \qquad \beta(y,z) > 0.$$

К классу $(0, C_2)^-$ принадлежат управляемые системы (2.1) с функцией H двух типов. Первый тип имеет вид

$$H(x,y,z) = \beta(y)x + {}^1\!/_2\Big(\pm\sqrt{-\beta(y)}\,C_2 + \frac{\beta_y(y)}{\beta(y)}\Big)z + \gamma(y),$$

где $\beta(y)$ и $\gamma(y)$ — произвольные функции, но $\beta(y) < 0$. Второй тип функции H имеет вид (2.18, г), где $\alpha(y,z)$, $\beta(y,z)$ и $\gamma(y,z)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} \beta_z - 2z + 2\alpha_y + 2\alpha_z\gamma = \pm\sqrt{-\beta}\,C_2, \\ 2\gamma_z - \dfrac{\beta_y}{\beta} - \dfrac{\gamma\beta_z}{\beta} = 0, \end{cases} \qquad \beta(y,z) < 0.$$

Для классов $(0, C_2)^+$ и $(0, C_2)^-$ при $C_2 \geqslant 0$ в качестве канонических форм выберем следующие системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = (x + az)u, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/_2 C_2, \quad C_2 \geqslant 0. \tag{2.23}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = (-x + az)u, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/_2 C_2, \quad C_2 \geqslant 0. \tag{2.24}$$

• Рассмотрим решения (2.18) при $C_1 < 0$. Здесь, аналогично случаю при $C_1 > 0$, уравнение (2.16, б) имеет решения только при условии $C_2 = 0$. Следовательно, классы эквивалентности $(C_1, C_2)^+$ и $(C_1, C_2)^-$ пусты, если одновременно $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$.

К классу $(C_1, 0)^+$ при $C_1 < 0$ принадлежат все управляемые системы (2.1) с функцией H следующих четырех типов.

Первый тип функции H имеет вид (2.18, д), где $\alpha(y,z)$, $\beta(y,z)$ и $\gamma(y,z)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} \beta_z + \sqrt{-C_1}\, z + 2\alpha_y + 2\alpha_z\gamma = 0, \\ 2\gamma_z - \dfrac{\beta_y}{\beta} - \dfrac{\gamma\beta_z}{\beta} + 2\beta\alpha_z = 0, \end{cases} \qquad \beta(y,z) > 0.$$

Второй тип функции H имеет вид (2.18, е), где $\alpha(y,z)$, $\beta(y,z)$ и $\gamma(y,z)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} \beta_z + \sqrt{-C_1}\, z + 2\alpha_y + 2\alpha_z\gamma = 0, \\ 2\gamma_z - \dfrac{\beta_y}{\beta} - \dfrac{\gamma\beta_z}{\beta} + 2\beta\alpha_z = 0, \end{cases} \qquad \beta(y,z) < 0.$$

Третий тип функции H имеет вид

$$H(x,y,z) = \beta(y)\, e^{\,x\sqrt{-C_1}} + {}^1\!/_4 \sqrt{-C_1}\, z^2 + {}^1\!/_2 \frac{\beta_y(y)}{\beta(y)}\, z + \gamma(y),$$

где $\beta(y)$ и $\gamma(y)$ — произвольные функции, при $\beta(y) > 0$.

Четвертый тип функции H имеет вид

$$H(x,y,z) = \beta(y)\, e^{\,-x\sqrt{-C_1}} - {}^1\!/_4 \sqrt{-C_1}\, z^2 + \frac{\beta_y(y)}{2\beta(y)}\, z + \gamma(y),$$

где $\beta(y)$ и $\gamma(y)$ — произвольные функции, а $\beta(y) < 0$.

Класс $(C_1, 0)^-$ описывается точно так же, только нужно везде знаки «$>$» и «$<$» заменить на обратные.

Для каждого рассмотренного типа функций H можно найти наиболее простую функцию, с помощью которой построить представителя класса эквивалентности. При этом для одних задач управления удобно, чтобы функция H была представлена в виде суммы $H = \varphi(x) + \psi(z)$, а для других — в виде произведения $H = \varphi(x)\psi(z)$. Для каждого класса функций приведем два представителя, каждый из которых можно выбрать за каноническую систему.

Для класса $(C_1, 0)^+$ при $C_1 < 0$ в качестве представителей выберем следующие системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = \left(e^{\,2ax} + {}^1\!/_2\, az^2\right) u, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/_2 \sqrt{-C_1}, \quad C_1 < 0. \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = 1 + \tilde{z}v, \\ \dot{\tilde{y}} = v, \\ \dot{\tilde{z}} = -a\tilde{z}^2 \operatorname{cth}(a\tilde{x})v, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/_2 \sqrt{-C_1}, \quad C_1 < 0. \tag{$\widetilde{2.25}$}$$

Так как эти системы принадлежат одному классу эквивалентности, то существует преобразование фазовых координат и управления

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - \dfrac{1}{a} \ln \left| \sqrt{\dfrac{a}{2}} \, \dfrac{2 + ayz}{-ay} \right|, \\ \tilde{y} = \dfrac{1}{ay(2 + ayz)} - \dfrac{1}{ay}, \\ \tilde{z} = y(2 + ayz), \end{cases} \qquad v = \frac{(2 + ayz)^2 - 2ay^2 e^{2ax}}{2ay^2(2 + ayz)^2}\, u$$

из системы (2.25) в систему $(\widetilde{2.25})$.

Для класса $(C_1, 0)^-$ при $C_1 < 0$ в качестве представителей выберем следующие системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = \left(-e^{\,2ax} + {}^1\!/_2\, az^2\right) u, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/_2 \sqrt{-C_1}, \quad C_1 < 0. \tag{2.26}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = 1 + \tilde{z}v, \\ \dot{\tilde{y}} = v, \\ \dot{\tilde{z}} = -a\tilde{z}^2 \operatorname{th}(a\tilde{x})v, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/_2 \sqrt{-C_1}, \quad C_1 < 0. \tag{$\widetilde{2.26}$}$$

Представленные системы принадлежат также одному классу эквивалентности, и для них существует преобразование фазовых координат и управления

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - \dfrac{1}{a}\ln\left|\sqrt{\dfrac{a}{2}}\,\dfrac{2+ayz}{ay}\right|, \\ \tilde{y} = \dfrac{1}{ay(2+ayz)} - \dfrac{1}{ay}, \\ \tilde{z} = y(2+ayz), \end{cases} \qquad v = \frac{(2+ayz)^2 + 2ay^2e^{2ax}}{2ay^2(2+ayz)^2}\,u$$

из системы (2.26) в систему $(\widetilde{2.26})$.

Выводы раздела

Итак, в разд. 2 приведена существующая на момент исследований классификация трехмерных аффинных управляемых систем и найдены необходимые условия локальной эквивалентности приведенных систем. Среди приведенных систем определен новый тип C-систем, для которых установлена классификация и найдены канонические формы.

3. Допускаемые алгебры канонических систем

Допускаемые преобразования и допускаемые алгебры Ли являются мощным инструментом изучения нелинейных управляемых систем. Знание допускаемых преобразований систем позволяет по известным решениям находить новые решения управляемых систем. Допускаемые алгебры играют важную роль в вопросах факторизации управляемых систем. Каждая подалгебра допускаемой алгебры Ли порождает некоторую факторизацию управляемой системы. Допускаемые алгебры Ли оказываются действенным инструментом при классификации управляемых систем. Допускаемая алгебра Ли является инвариантом управляемых систем, поэтому трехмерные аффинные управляемые системы, в зависимости от размерности допускаемой алгебры, разбиваются на группы. В данном разделе будут описаны управляемые системы, у которых допускаемая алгебра Ли бесконечномерная, конечномерная и, в частности, трехмерная. С помощью допускаемых алгебр можно дать инвариантное определение C-системам не сводя их к приведенной форме: если допускаемая алгебра трехмерная, то управляемая система — C-система.

Для исследованной раннее приведенной системы (2.1) преобразование (2.4) является допускаемым, если оно является решением системы (2.5), где $\widetilde{H}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = H(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Поэтому в вопросе о существовании допускаемых преобразований для приведенной системы (2.1) верны выводы, полученные в разд. 2. Среди допускаемых преобразований особый интерес представляют допускаемые преобразования, образующие локальную однопараметрическую группу. Это связано с тем, что локальная однопараметрическая группа порождается векторным полем, которое найти легче.

§ 3.1. Трехмерные канонические системы

В категории $\mathcal{AS}$ алгеброй, допускаемой управляемой системой (1.1), является алгебра $\mathfrak{a}_1$. Чтобы найти эту алгебру необходимо решить уравнения (1.11). При нахождении алгебры $\mathfrak{a}_1$ полезно перейти от исходной управляемой системы к ее канонической форме, найти алгебру Ли, а затем с помощью обратного преобразования вернуться назад к исходной системе.

Рассмотрим канонические системы I–VII и IX–XIV на с. 19, полученные в работе [38]. Решая уравнения (1.11), найдем алгебру $\mathfrak{a}_1$, допускаемую этими системами:

$$\text{I. } \mathfrak{a}_1 = \varphi(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + \psi(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + \chi(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

$$\text{II. } \mathfrak{a}_1 = \varphi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \psi(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \chi(x,y)\frac{\partial}{\partial z}.$$

$$
\begin{aligned}
&\text{III. } \mathfrak{a}_1 = \varphi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \psi(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \chi(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}.\\
&\text{IV. } \mathfrak{a}_1 = \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \psi(x)\frac{\partial}{\partial y} + \chi(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}.\\
&\text{V. } \mathfrak{a}_1 = \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \psi(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + z\psi_y\frac{\partial}{\partial z}.\\
&\text{VI. } \mathfrak{a}_1 = C\frac{\partial}{\partial x} + \psi(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + (z\psi_y + \psi_x)\frac{\partial}{\partial z}.\\
&\text{VII. } \mathfrak{a}_1 = \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x} + y\varphi_x\frac{\partial}{\partial y} + (y^2\varphi_{xx} + z\varphi_x)\frac{\partial}{\partial z}.\\
&\text{IX. } \mathfrak{a}_1 = \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \psi(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + \chi(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}.\\
&\text{X. } \mathfrak{a}_1 = C\frac{\partial}{\partial x} + \psi(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + \chi(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}.\\
&\text{XI. } \mathfrak{a}_1 = \varphi(x)\frac{\partial}{\partial x} + y\varphi_x\frac{\partial}{\partial y} + \chi(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}.\\
&\text{XII. } \mathfrak{a}_1 = (\varphi(x,y,z) - z\varphi_z)\frac{\partial}{\partial x} - \varphi_z\frac{\partial}{\partial y} + (\varphi_y + z\varphi_x)\frac{\partial}{\partial z}.\\
&\text{XIII. } \mathfrak{a}_1 = (\varphi(y,z) - z\varphi_z)\frac{\partial}{\partial x} - \varphi_z\frac{\partial}{\partial y} + \varphi_y\frac{\partial}{\partial z}.\\
&\text{XIV. } \mathfrak{a}_1 = \varphi(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + \psi(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + \chi(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Здесь φ, ψ, χ — произвольные функции, а C — произвольная константа. Для всех перечисленных выше канонических систем, алгебры Ли зависят от произвольных функций, следовательно, они бесконечномерны.

В следующем параграфе покажем, что для приведенной системы VIII (см. с. 19) допускаемая алгебра $\mathfrak{a}_1$ является конечномерной.

§ 3.2. Приведенная система

Для приведенной системы VIII верна следующая теорема.

Теорема 3. *Для управляемой системы* (2.1)

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, & \qquad H_x(x,y,z) \neq 0, \\ \dot{z} = H(x,y,z)u, \end{cases}$$

допускаемая алгебра $\mathfrak{a}_1$ *конечномерна, и размерность ее не выше* 3.

Доказательство. Запишем уравнения (1.11) применительно к приведенной системе (2.1)

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial x}, \xi\right] = \nu_0(x,y,z)\left(z\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} + H\dfrac{\partial}{\partial z}\right), \\ \left[z\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} + H\dfrac{\partial}{\partial z}, \xi\right] = \nu_1(x,y,z)\left(z\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} + H\dfrac{\partial}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Раскрывая коммутаторы и приводя подобные члены, получим систему

$$\begin{cases} \xi^1_x = z\nu_0(x,y,z), \\ \xi^2_x = \nu_0(x,y,z), \\ \xi^3_x = H\nu_0(x,y,z), \\ z\xi^1_x + \xi^1_y + H\xi^1_z - \xi^3 = z\nu_1(x,y,z), \\ z\xi^2_x + \xi^2_y + H\xi^2_z = \nu_1(x,y,z), \\ z\xi^3_x + \xi^3_y + H\xi^3_z - H_x\xi^1 - H_y\xi^2 - H_z\xi^3 = H\nu_1(x,y,z). \end{cases}$$

После исключения неизвестных функций ν_0 и ν_1 и некоторых упрощений эту систему запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \xi^1_x = z\xi^2_x, \\ \xi^3_x = H\xi^2_x, \\ \xi^1_y + H\xi^1_z - \xi^3 = z\xi^2_y + zH\xi^2_z, \\ \xi^3_y + H\xi^3_z - H_x\xi^1 - H_y\xi^2 - H_z\xi^3 = H\xi^2_y + H^2\xi^2_z. \end{cases} \tag{3.1}$$

Проинтегрируем первое уравнение системы (3.1) и получим равенство $\xi^1 = z\xi^2 - \varphi(y,z)$, где $\varphi(y,z)$ — произвольная функция. Подставляя ξ^1 в третье уравнение, определим из него ξ^3, которое в свою очередь подставим во второе уравнение. Получим равенство $(\xi^2 - \varphi_z)H_x = 0$. Так как $H_x \neq 0$, то в итоге имеем систему

$$\begin{cases} \xi^1 = z\varphi_z - \varphi(y,z), \\ \xi^2 = \varphi_z, \\ \xi^3 = -\varphi_y. \end{cases} \tag{3.2}$$

Далее, подставив ξ^1, ξ^2 и ξ^3 в четвертое уравнение системы (3.1), получим равенство

$$\varphi_{yy} + 2H\varphi_{yz} + H^2\varphi_{zz} - H_z\varphi_y + H_y\varphi_z - H_x(\varphi - z\varphi_z) = 0. \tag{3.3}$$

Мы видим, что размерность алгебры $\mathfrak{a}_1$ зависит от мощности множества решения уравнения (3.3). Так как функция φ не зависит от x, то по переменной x уравнение (3.3) расщепляется. Продифференцируем уравнение (3.3) по x и разделим его на $H_x \neq 0$. Получим второе уравнение. Поступая с ним аналогично первому (т. е. дифференцируя его), получаем третье уравнение.

Итак, имеем систему из трех уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \varphi_{yy} + 2H\varphi_{yz} + H^2\varphi_{zz} - H_z\varphi_y + H_y\varphi_z - H_x(\varphi - z\varphi_z) = 0, \\ 2\varphi_{yz} + 2H\varphi_{zz} - (H_{zx}/H_x)\varphi_y + (H_{yx}/H_x)\varphi_z - \\ \qquad\qquad - (H_{xx}/H_x)(\varphi - z\varphi_z) = 0, \\ 2\varphi_{zz} - ((H_{zx}/H_x)_x/H_x)\varphi_y + ((H_{yx}/H_x)_x/H_x)\varphi_z - \\ \qquad\qquad - ((H_{xx}/H_x)_x/H_x)(\varphi - z\varphi_z) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Дальнейшее решение системы (3.4) сильно зависит от вида функции H. Если коэффициенты в третьем уравнении системы (3.4) зависят от x, то процесс расщепления системы уравнений продолжается дальше и к системе (3.4) добавляются новые уравнения. Тогда к системе (3.4) могут добавится четвертое, пятое и шестое уравнения.

Разрешим систему (3.4) относительно старших производных φ_{yy}, φ_{yz}, φ_{zz} и получим систему уравнений примерно следующего вида:

$$\begin{cases} \varphi_{yy} = \alpha_1\varphi_y + \beta_1\varphi_z + \gamma_1(\varphi - z\varphi_z), \\ \varphi_{yz} = \alpha_2\varphi_y + \beta_2\varphi_z + \gamma_2(\varphi - z\varphi_z), \\ \varphi_{zz} = \alpha_3\varphi_y + \beta_3\varphi_z + \gamma_3(\varphi - z\varphi_z), \end{cases} \tag{3.5}$$

где α_1, $\alpha_2, \ldots, \gamma_2$, γ_3 — известные функции от независимых переменных, которые выражаются через функцию H следующим образом:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2H_x^3}\big(2H_zH_x^3 - 2HH_{xz}H_x^2 + H^2H_{xxz}H_x - H^2H_{xx}H_{xz}\big),\\
\beta_1 &= \frac{1}{2H_x^3}\big(2HH_{xy}H_x^2 - 2H_yH_x^3 - H^2H_{xxy}H_x + H^2H_{xx}H_{xy}\big),\\
\gamma_1 &= \frac{-1}{2H_x^3}\big(-2H_x^4 + 2HH_{xx}H_x^2 - H^2H_{xxx}H_x + H^2H_{xx}^2\big),\\
\alpha_2 &= \frac{-1}{2H_x^3}\big(-H_{xz}H_x^2 + HH_{xxz}H_x - HH_{xx}H_{xz}\big),\\
\beta_2 &= \frac{1}{2H_x^3}\big(H_{xy}H_x^2 - HH_{xxy}H_x + HH_{xx}H_{xy}\big),\\
\gamma_2 &= \frac{1}{2H_x^3}\big(H_{xx}H_x^2 - HH_{xxx}H_x + HH_{xx}^2\big),\\
\alpha_3 &= \frac{1}{2H_x^3}\left(H_{xxz}H_x - H_{xx}H_{xz}\right),\\
\beta_3 &= \frac{1}{2H_x^3}\left(-H_{xxy}H_x + H_{xx}H_{xy}\right),\\
\gamma_3 &= \frac{1}{2H_x^3}\left(-H_{xxx}H_x + H_{xx}^2\right).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Нетрудно показать, что если коэффициенты α_3, β_3, γ_3 третьего уравнения системы (3.5) не зависят от x, то и все остальные коэффициенты (3.6) не зависят от x.

Введем вспомогательные функции $p(y,z) = \varphi_y$ и $q(y,z) = \varphi_z$, тогда имеем следующие равенства $\varphi_{yy} = p_y$, $\varphi_{zz} = q_z$, $\varphi_{yz} = p_z = q_y$. Система (3.5) преобразуется в систему дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковой главной частью относительно трех неизвестных функций φ, p и q:

$$\begin{cases} \varphi_y = p, \\ \varphi_z = q, \\ p_y = \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1(\varphi - zq), \\ p_z = \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2(\varphi - zq), \\ q_y = \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2(\varphi - zq), \\ q_z = \alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3(\varphi - zq). \end{cases} \tag{3.7}$$

Если в процессе расщепления к системе (3.4) добавляются новые уравнения, то, используя уравнения (3.7), их можно преобразовать в конечные соотношения

$$\lambda_j \varphi + \theta_j p + \mu_j q = 0, \quad j \in J, \tag{3.8}$$

где λ_j, θ_j, μ_j — функции от независимых переменных.

Соотношения (3.7), (3.8) представляют собой смешанную линейную систему уравнений с одинаковой главной частью [17]. Если конечные уравнения (3.8) отсутствуют и условия совместности системы дифференциальных уравнений (3.7) $\varphi_{yz} = \varphi_{zy}$, $p_{yz} = p_{zy}$, $q_{yz} = q_{zy}$ тождественно выполняются в силу (3.7), то по теореме Фробениуса [17, с. 10] система (3.7) вполне интегрируема, ее решение зависит от трех констант (по числу неизвестных функций) и размерность алгебры $\mathfrak{a}_1$ равна 3. В противном случае размерность алгебры $\mathfrak{a}_1$ будет меньше 3. Теорема доказана. $\square$

§ 3.3. C-Системы

Теперь определим алгебры $\mathfrak{a}_1$ для канонических C-систем, найденных в разд. 2.

• Рассмотрим систему (2.22), для которой функция H равна выражению

$$H(x,y,z) = az^2 \operatorname{tg}(ax),$$

где $a = \sqrt{C_1}/2$. Подставив H в систему (3.5), получим систему

$$\begin{cases} \varphi_{yy} = a^2z^2(\varphi - z\varphi_z), \\ \varphi_{yz} = \dfrac{1}{z}\varphi_y, \\ \varphi_{zz} = \dfrac{1}{z^2}(\varphi - z\varphi_z). \end{cases} \tag{3.9}$$

Для этой системы условия совместности выполняются тождественно, и ее общее решение имеют следующий вид:

$$\varphi = B_1z + B_2yz + B_3(a^2y^2z + \frac{1}{z}).$$

Если эту функцию φ подставить в систему (3.2), получим все векторные поля, принадлежащие алгебре $\mathfrak{a}_1$. Чтобы получить базис допускаемой алгебры для системы (2.22), подставим в систему (3.2) независимые частные решения системы (3.9).

Базис допускаемой алгебры $\mathfrak{a}_1$ для системы (2.22) будет следующий:

$$\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \\ &X_2 = y\frac{\partial}{\partial y} - z\frac{\partial}{\partial z}, \\ &X_3 = -\frac{1}{a^2z}\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2a^2z^2}\right)\frac{\partial}{\partial y} - yz\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

• Для канонической системы (2.23) функция H имеет вид:

$$H(x, y, z) = x + az,$$

где $a = C_2/2$. Подставив эту функцию H в систему (3.5), получим систему

$$\begin{cases} \varphi_{yy} = a\varphi_y + (\varphi - z\varphi_z), \\ \varphi_{yz} = 0, \\ \varphi_{zz} = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Из последних двух уравнений системы (3.11) следует, что функцию $\varphi(y, z)$ можно представить в виде $\varphi(y, z) = B_1 z + \psi(y)$, где $\psi(y)$ — произвольная функция. Функцию $\varphi(y, z)$ подставим в первое уравнение системы (3.11) и получим обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\psi_{yy} - a\psi_y - \psi = 0. \tag{3.12}$$

Решая это уравнение, находим общее решение системы (3.11)

$$\varphi(y, z) = B_1 z + B_2 e^{\lambda_1 y} + B_3 e^{\lambda_2 y}, \tag{3.13}$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения $\lambda^2 - a\lambda - 1 = 0$ для уравнения (3.12). Подставим в систему (3.2) независимые частные решения системы (3.11) и получим базис допускаемой алгебры $\mathfrak{a}_1$:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2 &= e^{\lambda_1 y}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ X_3 &= e^{\lambda_2 y}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{3.14}$$

• Для канонической системы (2.24) функция H имеет вид

$$H(x,y,z) = -x + az,$$

где $a = C_2/2$. Действуя аналогично предыдущему пункту, получим систему

$$\begin{cases} \varphi_{yy} = a\varphi_y - (\varphi - z\varphi_z), \\ \varphi_{yz} = 0, \\ \varphi_{zz} = 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

решая которую получим обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\psi_{yy} - a\psi_y + \psi = 0. \tag{3.16}$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$ при $a > 2$ ($C_2 > 4$) имеет два различных действительных корня λ_1 и λ_2. Соответствующее решение системы (3.15) совпадает с равенством (3.13), а базис допускаемой алгебры $\mathfrak{a}_1$ совпадает с базисом (3.14).

При $0 \leqslant a < 2$ ($0 \leqslant C_2 < 4$) система (2.24) допускает алгебру $\mathfrak{a}_1$ с базисом

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2 &= e^{ay/2}\left(\cos by\frac{\partial}{\partial x} + \left({}^1\!/\!{}_2\, a\cos by - b\sin by\right)\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ X_3 &= e^{ay/2}\left(\sin by\frac{\partial}{\partial x} + \left({}^1\!/\!{}_2\, a\sin by + b\cos by\right)\frac{\partial}{\partial z}\right), \end{aligned} \tag{3.17}$$

где $a = C_2/2$, $b = \sqrt{1 - C_2^2/16}$.

Базис допускаемой алгебры $\mathfrak{a}_1$ для системы (2.24) при $a = 2$

($C_2 = 4$) следующий:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},$$
$$X_2 = e^y\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{3.18}$$
$$X_3 = e^y\left(y\frac{\partial}{\partial x} + (y+1)\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

• Для канонических систем (2.25) и (2.26) с функциями

$$H(x, y, z) = \pm e^{2ax} + {}^1\!/\!_2\, az^2,$$

где $a = {}^1\!/\!_2\sqrt{-C_1}$, поиск допускаемых алгебр аналогичен поиску алгебры для системы (2.22) и приводит к одной и той же алгебре с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},$$
$$X_2 = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}, \tag{3.19}$$
$$X_3 = \frac{2y}{a}\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y} + 2\left(zy + \frac{1}{a}\right)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Мы видим, что для всех найденных нами канонических систем алгебра $\mathfrak{a}_1$ получилась трехмерной. Так как алгебра $\mathfrak{a}_1$ инвариантна относительно изоморфизмов категории $\mathcal{AS}$, то для всех управляемых систем, эквивалентных каноническим системам (2.22), (2.23), (2.24), (2.25), (2.26), допускаемая алгебра $\mathfrak{a}_1$ будет также трехмерная.

В следующем параграфе будет доказано более сильное утверждение, что приведенная управляемая система (2.1) допускает трехмерную алгебру тогда и только тогда, когда она является C-системой.

§ 3.4. Связь между C-системами и L_1-системами

Теорема 4. *Приведенная система* (2.1) *допускает трехмерную алгебру* $\mathfrak{a}_1$ *тогда и только тогда, когда система* (2.1) *является* C*-системой.*

Доказательство. Согласно выводам, полученным при доказательстве теоремы 3 (на с. 41), для того чтобы размерность алгебры $\mathfrak{a}_1$ равнялась трем, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) коэффициенты третьего уравнения системы (3.4) не зависят от x (в этом случае отсутствуют дополнительные конечные уравнения (3.8));

2) условия совместности системы (3.7) выполняются тождественно.

Докажем, что выполнение первого условия эквивалентно выполнению равенства (2.16, а) из определения C-систем. Обозначим $H_{xx}/H_x = P(x,y,z)$. Тогда уравнение (2.16, а) можно записать в виде

$$2P_x - P^2 = \text{const}. \tag{3.20}$$

Используя очевидные тождества

$$\left(\frac{H_{yx}}{H_x}\right)_x = \left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)_y = P_y, \qquad \left(\frac{H_{zx}}{H_x}\right)_x = \left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)_z = P_z,$$

запишем третье уравнение системы (3.4) в виде

$$2\varphi_{zz} - (P_z/H_x)\varphi_y + (P_y/H_x)\varphi_z - (P_x/H_x)(\varphi - z\varphi_z) = 0.$$

Согласно первому условию коэффициенты этого уравнения не должны зависеть от x, поэтому получаем следующую систему:

$$\begin{cases} (P_x/H_x)_x = 0, \\ (P_y/H_x)_x = 0, \\ (P_z/H_x)_x = 0. \end{cases}$$

Раскрывая производные, получим

$$\begin{cases} (P_{xx} - PP_x)/H_x = 0, \\ (P_{yx} - PP_y)/H_x = 0, \\ (P_{zx} - PP_z)/H_x = 0. \end{cases} \tag{3.21}$$

С другой стороны, продифференцировав уравнение (3.20) по x, y, z, получим

$$\begin{cases} 2(P_{xx} - PP_x) = 0, \\ 2(P_{yx} - PP_y) = 0, \\ 2(P_{zx} - PP_z) = 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Так как системы (3.21) и (3.22) эквивалентны, то первое условие трехмерности алгебры $\mathfrak{a}_1$ эквивалентно уравнению (2.16, а) из определения C-системы.

Уравнение (2.17, а)

$$2\left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)_x - \left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)^2 = C_1,$$

где C_1 — произвольная константа, рассматривавшееся в § 2.3, полностью интегрируется и имеет решения (2.18).

Докажем, что из второго условия трехмерности алгебры $\mathfrak{a}_1$ на с. 46, т. е. из условий совместности системы (3.7), для каждого решения (2.18) следует уравнение (2.16, б). Для этого запишем условия совместности системы (3.7)

$$\alpha_{2z} + \alpha_z^2 + \alpha_3\beta_2 - z\alpha_3\gamma_2 = \alpha_{3y} + \gamma_3 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\beta_3 - z\alpha_2\gamma_3, \tag{3.23, а}$$

$$\beta_{2z} + \alpha_2\beta_2 - z\beta_3\gamma_2 = \beta_{3y} + \alpha_3\beta_1 - z\beta_2\gamma_3, \tag{3.23, б}$$

$$\gamma_{2z} + \alpha_2\gamma_2 + \beta_2\gamma_3 = \gamma_{3y} + \alpha_3\gamma_1 + \beta_3\gamma_2, \tag{3.23, в}$$

$$\alpha_{1z} + \beta_1\alpha_3 - z\alpha_3\gamma_1 = \alpha_{2y} + \alpha_2\beta_2 + \gamma_2 - z\alpha_2\gamma_2, \tag{3.23, г}$$

$$\beta_{1z} + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 - z\beta_3\gamma_1 = \beta_{2y} + \alpha_2\beta_1 + \beta_2^2 - z\beta_2\gamma_2, \tag{3.23, д}$$

$$\gamma_{1z} + \beta_1\gamma_3 + \alpha_1\gamma_2 - z\gamma_1\gamma_3 = \gamma_{2y} + \beta_2\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1 - z\gamma_2^2, \tag{3.23, е}$$

где α_1, $\alpha_2, \ldots, \gamma_2$, γ_3 — известные функции от независимых переменных, которые выражаются через функцию H уравнениями (3.6).

• Рассмотрим функцию H_1 (2.18, а). Если подставить ее в систему (3.23), то уравнения (3.23, в) и (3.23, е) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{C_1}}{4\beta^2}(-\beta_y - \gamma\beta_z + 2\beta^2\alpha_z + 2\gamma_z\beta) = 0, \\ -\dfrac{\sqrt{C_1}}{4}\left(-\beta_z - \dfrac{2\gamma_z\gamma}{\beta} + \dfrac{\beta_z\gamma^2}{\beta^2} + 2\alpha_y + z\sqrt{C_1} + \dfrac{\beta_y\gamma}{\beta^2}\right) = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Эти соотношения позволяют упростить выражение $I_2(H_1)$ (2.19) и в итоге получаем $I_2(H_1) = 0$. Следовательно, если система (2.1) с функцией H_1 (2.18, а) допускает трехмерную алгебру и условия совместности (3.23) системы (3.7) выполняются тождественно, то система (2.1) является C-системой.

• Изложенное выше справедливо и для функции H_2 (2.18, б), так как любую функцию H_2 можно выразить через функцию H_1 (2.18, а).

• Доказательства для функций H_5–H_7 (2.18, д)–(2.18, ж) аналогичны доказательству для функции H_1 (2.18, а). Только для них условия совместности (3.23, в) и (3.23, е) системы (3.7) имеют вид

– для функций H_5 (2.18, д) и H_6 (2.18, д)

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{-C_1}}{4\beta^2}(-\beta_y - \gamma\beta_z + 2\beta^2\alpha_z + 2\gamma_z\beta) = 0, \\ \dfrac{\sqrt{-C_1}}{4}\left(\beta_z - \dfrac{2\gamma_z\gamma}{\beta} + \dfrac{\beta_z\gamma^2}{\beta^2} + 2\alpha_y + z\sqrt{-C_1} + \dfrac{\beta_y\gamma}{\beta^2}\right) = 0, \end{cases} \tag{3.25}$$

– для функции H_7 (2.18, ж)

$$\begin{cases} \pm\dfrac{\sqrt{-C_1}}{4\beta}\beta_z = 0, \\ \pm\dfrac{\sqrt{-C_1}}{4}\left(-2\gamma_z \pm z\sqrt{-C_1} + \dfrac{\beta_y}{\beta}\right) = 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

• Рассмотрим функцию H_3 (2.18, в). Для нее условия совместности (3.23) системы (3.7) имеют вид

$$\frac{2\beta_{zz}\beta - \beta_z^2}{4\beta^2} = 0, \tag{3.27, а}$$

$$-\frac{2\beta_{yz}\beta - \beta_y\beta_z}{4\beta^2} = 0, \tag{3.27, б}$$

$$0 = 0, \tag{3.27, в}$$

$$\begin{split}\frac{1}{4\beta^2}(3\beta_y\beta_z - 2\beta_{yz}\beta + 4\gamma_{zz}\beta^2 - 4\beta\beta_{zz}\gamma - \\ - 4\beta_z\gamma_z\beta + 4\beta_z^2\gamma) = 0,\end{split} \tag{3.27, г}$$

$$\begin{split}-\frac{1}{4\beta^2}(4\gamma_{yz}\beta^2 - 2\beta\gamma_y\beta_z - 4\beta\beta_{yz}\gamma - 2\beta\beta_y\gamma_z + \\ + 4\beta_y\beta_z\gamma - 2\beta_{yy}\beta + 3\beta_y^2) = 0,\end{split} \tag{3.27, д}$$

$$\frac{\beta_z}{2} = 0. \tag{3.27, е}$$

Уравнение (3.27, е) позволяет значительно упростить условия совместности (3.27). После упрощения системы (3.27) останется только три условия совместности

$$\gamma_{zz} = 0, \tag{3.28, г}$$

$$-\frac{1}{4\beta^2}(4\gamma_{yz}\beta^2 - 2\beta\beta_y\gamma_z - 2\beta_{yy}\beta + 3\beta_y^2) = 0, \tag{3.28, д}$$

$$\beta_z = 0. \tag{3.28, е}$$

Если умножить уравнение (3.28, д) на $2\sqrt{\beta}$, то его можно представить в виде $\left(\frac{2\gamma_z}{\sqrt{\beta}} - \frac{\beta_y}{\beta\sqrt{\beta}}\right)_y = 0$. А так как $\beta_z = 0$, то уравнение (3.28, г) можно записать так: $\left(\frac{2\gamma_z}{\sqrt{\beta}} - \frac{\beta_y}{\beta\sqrt{\beta}}\right)_z = 0$. Следовательно, $\frac{2\gamma_z}{\sqrt{\beta}} - \frac{\beta_y}{\beta\sqrt{\beta}} = \text{const} = C_2$. Таким образом, система (3.28) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} &\beta_z = 0, \\ &2\gamma_z - \beta_y/\beta = C_2\sqrt{\beta}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

С другой стороны, если подставить функцию H_3 (2.18, в) в уравнение (2.16, б), то получим уравнение следующего вида:

$$I_2(H_3) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(x\beta_z + 2\gamma_z - \frac{\beta_y}{\beta} - \frac{\gamma\beta_z}{\beta}\right).$$

В силу системы (3.29) $I_2(H_3) = C_2 = \text{const}$. Следовательно, приведенная система (2.1) с функцией H_3 (2.18, в) и трехмерной алгеброй $\mathfrak{a}_1$ является C-системой.

• Рассмотрим функцию H_4 (2.18, г). Для нее условия совместности (3.23, в) и (3.23, е) системы (3.7) дадут одно и то же уравнение

$$2\gamma_z\beta - \beta_y - \gamma\beta_z = 0. \tag{3.30}$$

С помощью уравнения (3.30), условия совместности (3.23, а) и (3.23, б) можно записать в виде

$$\left(\frac{\beta_z - 2z + 2\alpha_y + 2\alpha_z\gamma}{\sqrt{\beta}}\right)_z = 0,$$

$$\Big(\frac{\beta_z - 2z + 2\alpha_y + 2\alpha_z\gamma}{\sqrt{\beta}}\Big)_y = 0.$$

Следовательно, эти условия эквивалентны уравнению

$$\frac{\beta_z - 2z + 2\alpha_y + 2\alpha_z\gamma}{\sqrt{\beta}} = \mathrm{const} = C_2. \tag{3.31}$$

С другой стороны, если подставить функцию H_4 (2.18, г) в уравнение (2.16, б), то получим уравнение

$$I_2(H_4) = \frac{1}{\beta\sqrt{\beta}}\Big(x(2\gamma_z\beta - \beta_y - \beta_z\gamma) + \\ + \beta(-\beta_z + 2z - 2\alpha_y - 2\gamma\alpha_z)\Big).$$

С учетом уравнений (3.30) и (3.31), получим равенство $I_2(H_4) = C_2 = \mathrm{const}$. Следовательно, приведенная система (2.1) с функцией H_4 (2.18, г) и трехмерной алгеброй $\mathfrak{a}_1$ также является C-системой.

Мы рассмотрели все решения уравнения (2.17, а), следовательно, приведенная система (2.1) с произвольной функцией H и трехмерной алгеброй $\mathfrak{a}_1$ является C-системой. Теорема в одну сторону доказана. Теперь докажем обратное утверждение: любая C-система допускает трехмерную алгебру Ли.

В предыдущем параграфе были получены допускаемые алгебры $\mathfrak{a}_1$ для канонических систем (2.22), (2.23), (2.24), (2.25), (2.26). Все алгебры $\mathfrak{a}_1$ оказались трехмерными. Следовательно, алгебра $\mathfrak{a}_1$ для любой трехмерной управляемой системы, эквивалентной одной из указанных канонических систем, также будет трехмерной. Однако для C-систем одна каноническая форма для класса $(C_1, 0)^-$ при $C_1 > 0$ не была найдена. Поэтому далее докажем, что для систем этого класса допускаемая алгебра $\mathfrak{a}_1$ также трехмерная.

Классу $(C_1, 0)^-$ при $C_1 > 0$ принадлежат управляемые системы вида (2.1), для которых функция H имеет вид (2.18, а), где $\alpha(y,z)$, $\beta(y,z) < 0$, $\gamma(y,z)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\beta_z - z\sqrt{C_1} - 2\alpha_y - 2\alpha_z\gamma = 0, \qquad (3.32,\ \text{а})$$

$$2\gamma_z - \beta_y/\beta - \gamma\beta_z/\beta = 0. \qquad (3.32,\ \text{б})$$

Для C-систем этого класса алгебра $\mathfrak{a}_1$ будет трехмерной, если условия совместности (3.23) системы (3.7) выполняются тождественно. Покажем, что они являются следствиями уравнений (3.32, а) и (3.32, б). Далее уравнения (3.32, а) и (3.32, б) будем обозначать (I) и (II) соответственно.

Шесть условий совместности (3.23) (после переноса всех членов в левую часть равенства) можно выразить через уравнения системы (3.32) следующим образом:

$$\left(\frac{(\mathrm{I})}{\sqrt{\beta}}\right)_z/(2\sqrt{\beta}) - (\mathrm{II})\frac{\alpha_z}{2\beta},$$

$$-\left(\frac{(\mathrm{I})}{\sqrt{\beta}}\right)_y/(2\sqrt{\beta}) + (\mathrm{II})\frac{\alpha_y}{2\beta},$$

$$(\mathrm{II})/\beta,$$

$$\left(\frac{(\mathrm{II})}{\sqrt{\beta}}\right)_z\frac{\sqrt{\beta}}{2} - \left(\frac{(\mathrm{I})}{\sqrt{\beta}}\right)_z\frac{\gamma}{2\sqrt{\beta}} + (\mathrm{II})\frac{\alpha_z\gamma}{2\beta} + (\mathrm{I})\frac{\alpha_z}{2},$$

$$-\left(\frac{(\mathrm{II})}{\sqrt{\beta}}\right)_y\frac{\sqrt{\beta}}{2} + \left(\frac{(\mathrm{I})}{\sqrt{\beta}}\right)_y\frac{\gamma}{2\sqrt{\beta}} - (\mathrm{II})\frac{\alpha_y\gamma}{2\beta} - (\mathrm{I})\frac{\alpha_y}{2},$$

$$(\mathrm{I}) - (\mathrm{II})\gamma/\beta.$$

Следовательно, если выполняются уравнения (I), (II) системы (3.32), то условия совместности выполняются тождественно. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. *C-Системами будем называть не только приведенные системы, функции H которых удовлетворяют условиям* (2.16), *но и системы произвольного вида* (1.1), *локально* *эквивалентные им. Доказанная теорема 4 позволяет инвариантно определить C-системы: трехмерная аффинная управляемая система является C-системой, если ее алгебра $\mathfrak{a}_1$ трехмерная.*

Докажем основное утверждение этого параграфа.

Теорема 5. *Приведенная система* (2.1) *является строго L_1-системой тогда и только тогда, когда она является C-системой.*

В теореме 4 было доказано, что приведенная система (2.1) допускает трехмерную алгебру $\mathfrak{a}_1$ тогда и только тогда, когда она является C-системой. Поэтому осталось показать, что алгебра $\mathfrak{a}_1$ обладает L-свойством.

Доказательство. Множество решений системы (3.7) линейных дифференциальных уравнений в частных производных является линейным пространством, причем каждый базис этого пространства состоит из векторных полей, которые линейно независимы в каждой точке (y, z). Этот факт аналогичен линейной независимости фундаментальной системы решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Подставляя эти базисные векторные поля в систему (3.2), получим базисные векторы алгебры $\mathfrak{a}_1$, линейно независимые в каждой точке (x, y, z). Следовательно, допускаемая алгебра $\mathfrak{a}_1$ обладает L-свойством. $\square$

Замечание 2. *Среди приведенных систем строго L_1-системы — это в точности C-системы. А поскольку среди трехмерных аффинных управляемых систем только C-системы допускают трехмерную алгебру, то любая трехмерная строго L_1-система является C-системой.*

Таким образом, классификация C-систем справедлива для всех трехмерных строго L_1-систем.

Выводы раздела

В данном разделе для всех канонических систем I–VII и IX–XIV найдены допускаемые алгебры Ли. Поскольку эти алгебры зависят от произвольных функций, следовательно, они бесконечномерны. Для приведенной системы VIII доказана теорема 3 о конечномерности допускаемой алгебры Ли. Найдены допускаемые алгебры для канонических C-систем. Дано инвариантное определение C-систем, не зависящее от приведенной формы: трехмерная аффинная управляемая система является C-системой, если она допускает трехмерную алгебру Ли. Доказана теорема 5, что C-системы это трехмерные строго L_1-системы.

4. Структуры допускаемых алгебр

В этом разделе трехмерные алгебры, допускаемые трехмерными управляемыми системами, распределены по существующей классификации трехмерных алгебр Ли. Классификацию алгебр Ли над полем комплексных чисел размерностью не более четырех дал еще С. Ли [16, § 137]. Над полем действительных чисел классификация алгебр размерностью не более трех дана Л. Бианки в [43]. Доказательство классификации алгебр Ли над полем комплексных чисел размерностью не более трех можно найти в [44, 45]. А в книге [46, с. 72–73] классификация алгебр Ли над полем действительных чисел размерностью не более четырех приведена без доказательства.

Автор позволил себе в § 4.1 привести классификацию трехмерных алгебр Ли над полем действительных чисел с доказательством, так как попутно с ним найдены инварианты, помогающие классификации алгебр Ли допускаемых управляемыми системами. Приведенное доказательство несколько отличается от существующего.

§ 4.1. Классификация трехмерных алгебр Ли

В параграфе исследуется структура конечномерных алгебр Ли над полем действительных чисел, допускаемых трехмерными аффинными управляемыми системами. В разд. 3 было доказано (теорема 3), что если трехмерная аффинная управляемая система допускает конечномерную алгебру $\mathfrak{a}_1$, то ее размерность будет не больше трех. Для алгебры $\mathfrak{a}_0$ этот факт доказан в [24]. Поэтому здесь рассмотрим, на какие классы эквивалентности разбиваются алгебры Ли над полем действительных чисел размерностью не больше трех.

Для начала введем определения. Алгебру $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ будем называть *производной алгеброй* алгебры $\mathfrak{a}$ и будем обозначать $\mathfrak{a}'$. Если $\mathfrak{a}' = 0$, что означает для любых двух векторов $X_1, X_2 \in \mathfrak{a}$ коммутатор $[X_1, X_2] = 0$, то алгебра $\mathfrak{a}$ называется *абелевой*. Все абелевые алгебры одной размерности изоморфны друг другу. Аналогично определим и последующие производные: $\mathfrak{a}^{(i)} = [\mathfrak{a}^{(i-1)}, \mathfrak{a}^{(i-1)}]$. Если существует такой номер i, что i-я производная равна нулю ($\mathfrak{a}^{(i)} = 0$), то алгебра $\mathfrak{a}$ называется *разрешимой*.

Для алгебр Ли размерности не более двух верна следующая теорема.

Теорема 6 ([44, с. 32]). *Любая алгебра Ли размерности не больше двух изоморфна одной из следующих алгебр:*

$$
\begin{aligned}
&\dim \mathfrak{a} = 1: && \text{I. } \mathfrak{a}' = 0,\ \mathfrak{a} \text{ — \textit{абелевая алгебра},}\\
&\dim \mathfrak{a} = 2: && \text{I. } \mathfrak{a}' = 0,\ \mathfrak{a} \text{ — \textit{абелевая алгебра},}\\
& && \text{II. } \mathfrak{a} = \operatorname{span}\{X_1, X_2\}, \quad [X_1, X_2] = X_1.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Предположим, что $\dim \mathfrak{a} = 2$ и $\mathfrak{a}' \neq 0$. Для произвольного базиса X_1, X_2 алгебры $\mathfrak{a}$ мы имеем $\mathfrak{a}' = \operatorname{span}\{[X_1, X_2]\}$. Выбираем вектор X_1 так, чтобы выполнялось равенство $\mathfrak{a}' = \operatorname{span}\{X_1\}$. Тогда $[X_1, X_2] = aX_1$, где $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Заменяя X_2 вектором $a^{-1}X_2$, придем к равенству $[X_1, X_2] = X_1$. Что и требовалось доказать. □

Классы эквивалентности трехмерных алгебр описываются следующей теоремой.

Теорема 7. *Любая трехмерная алгебра Ли над полем* $\mathbb{R}$ *изоморфна алгебре* $\mathfrak{a}$ *с базисом* $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{a}$*, имеющей одну из нижеследующих структур:*

$$\begin{array}{rlll}
\text{I.} & [X_1, X_2] = 0, & [X_2, X_3] = 0, & [X_3, X_1] = 0, \\
\text{II.} & [X_1, X_2] = 0, & [X_2, X_3] = X_1, & [X_3, X_1] = 0, \\
\text{III.} & [X_1, X_2] = 0, & [X_2, X_3] = 0, & [X_3, X_1] = X_1, \\
\text{IV.} & [X_1, X_2] = 0, & [X_2, X_3] = X_1 + X_2, & [X_3, X_1] = -X_1, \\
\text{V.} & [X_1, X_2] = 0, & [X_2, X_3] = X_2, & [X_3, X_1] = -X_1, \\
\text{VI.} & [X_1, X_2] = 0, & [X_2, X_3] = qX_2, & [X_3, X_1] = -X_1, \\
& & \qquad\quad |q| > 1, & \\
\text{VII.} & [X_1, X_2] = 0, & [X_2, X_3] = -X_1 + qX_2, & [X_3, X_1] = -X_2, \\
& & \qquad\quad q^2 < 4, & \\
\text{VIII.} & [X_1, X_2] = -X_3, & [X_2, X_3] = X_1, & [X_3, X_1] = X_2, \\
\text{IX.} & [X_1, X_2] = X_3, & [X_2, X_3] = X_1, & [X_3, X_1] = X_2.
\end{array}$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится доказать несколько вспомогательных лемм.

Сначала определим матрицу структурных констант C трехмерной алгебры Ли. Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли, $\dim \mathfrak{a} = 3$, и X_1, X_2, X_3 образуют в алгебре $\mathfrak{a}$ базис. Определим векторы $X^1 = [X_2, X_3]$, $X^2 = [X_3, X_1]$, $X^3 = [X_1, X_2]$ и разложим их по базису алгебры:

$$X^1 = [X_2, X_3] = c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + c_{13}X_3,$$
$$X^2 = [X_3, X_1] = c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + c_{23}X_3,$$
$$X^3 = [X_1, X_2] = c_{31}X_1 + c_{32}X_2 + c_{33}X_3.$$

Полученные равенства можно представить в матричной записи

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Матрица $C = (c_{ij})$ структурных констант алгебры Ли полностью определяет структуру алгебры. Для краткости будем записывать уравнение (4.1) в виде $X^i = CX_i$. Однако не любая матрица C определяет алгебру Ли.

Лемма 1. *Антикоммутативная алгебра* $\mathfrak{a}$, *определяемая соотношениями* (4.1), *является алгеброй Ли тогда и только тогда, когда присоединенная матрица* C^* *матрицы* C *является симметрической матрицей* ($C^{*T} = C^*$).

Доказательство. Для того чтобы $\mathfrak{a}$ была алгеброй Ли, достаточно показать, что для базисных векторов X_1, X_2, X_3 выполняется тождество Якоби

$$[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0.$$

Нетрудно видеть, что это равенство эквивалентно равенству

$$[X_1, X^1] + [X_2, X^2] + [X_3, X^3] = 0.$$

Раскрывая коммутаторы и приводя подобные члены, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} &\big((c_{23}c_{11} - c_{13}c_{21}) - (c_{32}c_{11} - c_{31}c_{12})\big)X_1 + \\ +&\big((c_{23}c_{12} - c_{13}c_{22}) - (c_{32}c_{21} - c_{31}c_{22})\big)X_2 + \\ +&\big((c_{31}c_{23} - c_{21}c_{33}) - (c_{13}c_{32} - c_{12}c_{33})\big)X_3 = 0. \end{aligned}$$

Так как векторы X_1, X_2, X_3 — базис алгебры $\mathfrak{a}$, то каждый коэффициент при базисном векторе равен нулю. Следовательно, матрица алгебраических дополнений симметрическая, а значит, и присоединенная матрица C^* симметрическая. Лемма доказана. □

Найдем, как при переходе от одного базиса алгебры к другому, изменяется матрица структурных констант C. Пусть $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$, $\widetilde{X}_3$ — новый базис алгебры $\mathfrak{a}$, для которого

$$\widetilde{X}^i = \widetilde{C}\widetilde{X}_i. \tag{4.2}$$

Обозначим через P невырожденную матрицу перехода от старого базиса к новому $\widetilde{X}_i = PX_i$, тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}^1 = [\widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3] = (p_{22}p_{33} - p_{23}p_{32})X^1 + (p_{23}p_{31} - p_{21}p_{33})X^2 + \\
+ (p_{21}p_{32} - p_{22}p_{31})X^3, \\
\widetilde{X}^2 = [\widetilde{X}_3, \widetilde{X}_1] = (p_{32}p_{13} - p_{33}p_{12})X^1 + (p_{33}p_{11} - p_{31}p_{13})X^2 + \\
+ (p_{31}p_{12} - p_{32}p_{11})X^3, \\
\widetilde{X}^3 = [\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2] = (p_{12}p_{23} - p_{13}p_{22})X^1 + (p_{13}p_{21} - p_{11}p_{23})X^2 + \\
+ (p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21})X^3.
\end{aligned}$$

Коэффициенты при X^i образуют матрицу алгебраических дополнений матрицы P. Заменяя ее на выражение $\det P(P^{-1})^T$, получим

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}^i = \det P(P^{-1})^T X^i = \det P(P^{-1})^T C X_i = \\
= \det P(P^{-1})^T C P^{-1} \widetilde{X}_i.
\end{aligned}$$

Следовательно, при переходе от старого базиса к новому матрица структурных констант C алгебры Ли преобразуется так:

$$\widetilde{C} = \det P(P^{-1})^T C P^{-1}.$$

Итак, мы доказали следующую лемму:

Лемма 2. *Две алгебры Ли, заданные соотношениями* (4.1) *и* (4.2), *изоморфны тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица* Q, *такая что*

$$\widetilde{C} = \frac{Q^T C Q}{\det Q}. \tag{4.3}$$

Здесь $Q = P^{-1}$.

Замечание 3. *По построению матрицы C $\dim \mathfrak{a}' = \operatorname{rank} C$ (см. (4.1)). Так как при переходе к новому базису преобразование (4.3) не меняет ранга матрицы C, то $\dim \mathfrak{a}'$ является инвариантом алгебры Ли.*

Лемма 3. *Пусть матрицы C и $\widetilde{C}$ связаны соотношением (4.3) и Q невырожденная матрица. Тогда матрица $\widetilde{C}$ симметрическая тогда и только тогда, когда C — симметрическая матрица.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{C}$ — симметрическая матрица, т. е. $\widetilde{C}^T = \widetilde{C}$. Тогда

$$\left(\frac{Q^T C Q}{\det Q}\right)^T = \frac{Q^T C Q}{\det Q},$$

или, применяя формулу транспонирования произведения матриц, получим

$$\frac{Q^T C^T Q}{\det Q} = \frac{Q^T C Q}{\det Q}.$$

Следовательно, $C^T = C$. Что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *Симметричность или несимметричность матрицы структурных констант является инвариантным свойством алгебры Ли.*

Теперь приступим к доказательству теоремы 7.

Доказательство теоремы 7. Если $\dim \mathfrak{a}' = 0$, то в этом случае $\mathfrak{a}$— абелевая алгебра. Ей соответствует первая структура из условия теоремы.

Пусть $\dim \mathfrak{a}' = 1$. Выберем X_1 так, чтобы $\mathfrak{a}' = \operatorname{span}\{X_1\}$. Тогда структурная матрица алгебры $\mathfrak{a}$ будет имеет вид $C =$

$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Согласно лемме 3 симметрическая и несимметрическая структурные матрицы определяют неизоморфные алгебры Ли. Если матрица C — симметрическая ($c_{21} = c_{31} = 0$, $c_{11} \neq 0$), то, преобразуя эту матрицу по формуле (4.3) с помощью матрицы $Q = \begin{pmatrix} c_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ее можно привести к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Алгебре с такой матрицей структурных коэффициентов соответствует вторая структура из условия теоремы 7.

Рассмотрим случай несимметрической матрицы C. Если $c_{21} \neq 0$, то, применяя матрицу $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c_{11}/c_{21} & 1 & -c_{31} \\ 0 & 0 & c_{21} \end{pmatrix}$, преобразуем C к виду $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Алгебре с такой матрицей структурных коэффициентов соответствует третья структура из условия теоремы 7. Если же $c_{21} = 0$, то $c_{31} \neq 0$ (так как C несимметрическая). В этом случае C с помощью матрицы $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{31} \\ -c_{11}/c_{31} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ преобразуется к тому же виду $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Итак, при $\dim \mathfrak{a}' = 1$, если матрица структурных коэффициентов симметрическая, алгебра Ли изоморфна алгебре второго типа из условия теоремы 7, а иначе алгебра Ли изоморфна алгебре третьего типа.

Рассмотрим случай когда $\dim \mathfrak{a}' = 2$. Пусть векторы X_1 и X_2 образуют базис алгебры $\mathfrak{a}'$, а вектор X_3 дополняет их до базиса в алгебре $\mathfrak{a}$. Как следует из теоремы 6, алгебра $\mathfrak{a}'$ может быть абелевой или неабелевой. Пусть она имеет структуру второго типа из теоремы 6, тогда матрица структурных коэффициентов будет выглядеть так: $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Из леммы 1 следует, что матрица структурных коэффициентов должна удовлетворять уравнению $C^{*T} = C^*$. Присоединенная матрица имеет вид $C^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -c_{22} & c_{12} & d \end{pmatrix}$, где $d = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$. Следовательно, $c_{12} = c_{22} = 0$. Но тогда $\operatorname{rank} C = 1$, что противоречит предположению $\dim\mathfrak{a}' = 2$. Значит, $\mathfrak{a}'$ — абелева алгебра. Следовательно, мы можем выбрать базис X_1, X_2, X_3, для которого

$$\begin{aligned} &[X_1, X_2] = 0, \\ &[X_1, X_3] = \alpha X_1 + \beta X_2, \\ &[X_2, X_3] = \gamma X_1 + \delta X_2, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где матрица $T = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ является невырожденной матрицей. Запишем два последних уравнения в матричном виде:

$$\left[\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_3 \\ X_3 \end{pmatrix}\right] = T \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Если базис X_1, X_2, X_3 алгебры $\mathfrak{a}$ удовлетворяет соотношениям (4.4), то матрица структурных коэффициентов будет иметь вид $C = \left(\begin{smallmatrix} \gamma & \delta & 0 \\ -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Нетрудно видеть, что матрица C^* является симметрической матрицей. Следовательно, матрица C определяет алгебру Ли.

Покажем, что при переходе к новому базису матрица T меняется следующим образом:

$$\widetilde{T} = \rho M T M^{-1}, \tag{4.6}$$

где M — невырожденная матрица, а $\rho \in \mathbb{R}^1$ и $\rho \neq 0$.

Переход к новому базису будем осуществлять в два приема. Сначала меняем базис алгебры $\mathfrak{a}'$: $\left(\begin{smallmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{smallmatrix}\right) = M \left(\begin{smallmatrix} X_1 \\ X_2 \end{smallmatrix}\right)$, где M — невырожденная матрица. При этом равенство (4.5) перейдет в

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_3 \\ X_3 \end{pmatrix}\right] = M \left[\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_3 \\ X_3 \end{pmatrix}\right] = MT \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \\ = MTM^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Затем меняем вектор X_3 на $Y_3 = \rho X_3 + Z$, где $Z \in \mathfrak{a}'$. Тогда получим, что

$$\left[\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_3 \\ Y_3 \end{pmatrix}\right] = \rho \left[\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_3 \\ X_3 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z \\ Z \end{pmatrix}\right] = \\ = \rho M T M^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}.$$

Итак, мы доказали, что алгебры Ли, определенные матрицами T и $\widetilde{T}$, изоморфны тогда и только тогда, когда существуют невырожденная матрица M и число $\rho \in \mathbb{R}$ и $\rho \neq 0$ такие, что верно равенство (4.6).

Равенство (4.6) позволяет для классификации алгебр Ли использовать классификацию подобных матриц второго порядка над полем $\mathbb{R}$. Любую невырожденную матрицу T с помощью преобразования подобия MTM^{-1}, где M не вырождена, можно привести к одной из следующих канонических форм (см. [47, гл. VII, §8]):

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Чтобы определить, какому именно виду подобна исходная матрица T, нужно найти корни характеристического уравнения $\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} T + \det T = 0$. Если корни λ_1 и λ_2 действительны и различны ($\operatorname{tr}^2 T > 4 \det T$), то T подобна первой матрице (4.7). Если корни комплексные ($\lambda = \mu \pm i\nu$), тогда T подобна последней матрице (4.7). Третью и четвертую матрицы (4.7) лучше записать в других канонических видах $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & |\lambda_1| \\ -|\lambda_1| & \lambda_1+\lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$ соответственно. Если же корни совпадают ($\operatorname{tr}^2 T = 4 \det T$), тогда надо найти их геометрическую кратность ($n - \operatorname{rank}(T - \lambda E)$), где $n = 2$ — порядок матрицы T. Если геометрическая кратность корня λ равна 2, то матрица T подобна второй матрице, иначе — третьей матрице (4.7). Третья матрица является Жордановой клеткой второго порядка. Умножив матрицы (4.7) на ρ, мы можем привести их к виду

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & q\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & q\end{pmatrix}. \qquad (4.8)$$

Различным значениям q соответствуют неизоморфные матрицы T, за исключением первой матрицы ряда (4.8). Эти матрицы изоморфны, если коэффициенты q и $\tilde{q}$ связаны соотношением $q\tilde{q} = 1$. Поэтому для первой матрицы (4.8) нужно ограничить значение параметра q: $|q| > 1$.

Матрицам T (4.8) соответствуют следующие матрицы структурных коэффициентов:

$$\begin{pmatrix}0 & q & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & q & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \qquad (4.9)$$

Структурные матрицы (4.9) определяют алгебру Ли со структурами следующих типов из условия теоремы 7: первая — шестого типа, вторая — пятого типа, третья — четвертого типа, а четвертая — седьмого типа.

Осталось рассмотреть случай $\dim \mathfrak{a}' = 3$. В этом случае матрица C невырожденная, и из равенства $C^{*T} = C^*$ следует, что и сама матрица C симметрическая. Вспомним, что при переходе к другому базису матрица C преобразуется по формуле (4.3). Невырожденную матрицу Q можно представить в виде произведения ортогональной матрицы O на симметрическую S (см. [47, с. 233] ««полярное разложение»»). Тогда формула (4.3) примет вид $\widetilde{C} = \det^{-1}(S)\, S^T O^T C O S$. Как известно [47, с. 251], симметрическую матрицу ортогональным преобразованием $O^T C O$ можно свести к диагональному виду, причем диагональные элементы являются собственными числами симметрической матрицы $C = \begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$. Конгруэнтное преобразование $S^T C S$ не меняет сигнатуры матрицы C, не может ее изменить и умножение на $\det^{-1}(S)$. Следовательно, сигнатура матрицы C является инвариантом.

Пусть все собственные числа матрицы C будут одного знака, тогда, применяя матрицу $S = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix}$, преобразуем C к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Алгебре с такой матрицей структурных коэффициентов соответствует девятая структура из условия теоремы 7.

Если собственные числа матрицы C разных знаков, то (без ограничения общности) можем считать α, β числами одного знака, а γ — другого. Тогда, применяя матрицу

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{-\beta\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-\gamma\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

преобразуем C к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Алгебре с такой матрицей структурных коэффициентов соответствует восьмая структура из условия теоремы 7. Теорема доказана. $\square$

Замечание 4. *Число неизоморфных структур над полем комплексных чисел будет меньше, чем над полем действительных чисел. Алгебры типа* VII *изоморфны алгебрам типа* VI, *а типа* VIII *— алгебрам типа* IX.

Замечание 5. *Алгебры типов* I–VII *из теорем 6 и 7 являются либо абелевыми* ($\mathfrak{a}' = 0$), *либо для них верно условие* $\mathfrak{a}'' = 0$. *Следовательно, эти алгебры разрешимые. Алгебры типа* VIII *и* IX *удовлетворяют соотношению* $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, *поэтому они являются неразрешимыми алгебрами. Алгебра* VIII *изоморфна алгебре* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, *а алгебра* IX *—* $\mathfrak{o}(3,\mathbb{R})$.

§ 4.2. Структуры допускаемых алгебр Ли

Как отмечалось выше, среди аффинных трехмерных управляемых систем только системы, локально эквивалентные приведенной системе (2.1), допускают конечномерную алгебру $\mathfrak{a}_1$. А среди таких систем только C-системы допускают трехмерную алгебру $\mathfrak{a}_1$ (теорема 4). Для канонических C-систем в § 3.3 были найдены допускаемые алгебры. Теперь исследуем их структуры.

• Каноническая система (2.22)

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = az^2 \operatorname{tg}(ax)\, u, \end{cases} \qquad \text{где } a = \frac{\sqrt{C_1}}{2}, \quad C_1 > 0,$$

допускает алгебру $\mathfrak{a}_1$ со следующим базисом:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},$$
$$X_2 = y\frac{\partial}{\partial y} - z\frac{\partial}{\partial z},$$
$$X_3 = -\frac{1}{a^2 z}\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2a^2z^2}\right)\frac{\partial}{\partial y} - yz\frac{\partial}{\partial z}.$$

Эта алгебра Ли имеет структурные соотношения

$$[X_1, X_2] = X_1, \qquad [X_2, X_3] = X_3, \qquad [X_3, X_1] = -X_2.$$

Алгеброй $\mathfrak{a}_0$ для системы (2.22) является следующая одномерная подалгебра: $\mathfrak{a}_0 = \operatorname{span}\{\, X_1 \,\}$. Структурным соотношениям соответствует структурная матрица $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ранг матрицы равен трем, а собственные числа имеют разные знаки. Следовательно, в соответствии с доказательством теоремы 7, эта алгебра изоморфна алгебре типа VIII.

• Для канонических систем (2.25) и (2.26)

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = \left(\pm e^{2ax} + {}^1\!/\!_2 az^2\right) u, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/\!_2\sqrt{-C_1}, \quad C_1 < 0,$$

базис допускаемой алгебры $\mathfrak{a}_1$ такой:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},$$
$$X_2 = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$
$$X_3 = \frac{2}{a}y\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y} + 2\left(zy + \frac{1}{a}\right)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Алгебра имеет структурные соотношения

$$[X_1, X_2] = -X_1, \qquad [X_2, X_3] = -X_3, \qquad [X_3, X_1] = -2X_2,$$

которым соответствует структурная матрица $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ранг матрицы C равен трем, а собственные числа имеют разные знаки. Следовательно, в соответствии с доказательством теоремы 7, эта алгебра изоморфна той же алгебре типа VIII. Эта неразрешимая алгебра является простой, т. е. у нее нет идеалов, отличных от нуля и ее самой. Она имеет нетривиальные, только одномерные подалгебры, которые в соответствии с теорией факторизации в категории $\mathcal{AS}$ [4] определяют факторизацию первого порядка управляемой системы.

• Для канонической системы (2.23)

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = (x + az)u, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/\!_2 C_2, \quad C_2 \geqslant 0,$$

базис допускаемой алгебры $\mathfrak{a}_1$ следующий:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_2 = e^{\lambda_1 y}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial z}\right),$$
$$X_3 = e^{\lambda_2 y}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

где λ_1, λ_2 — корни уравнения $\lambda^2 - a\lambda - 1 = 0$. Алгебра Ли имеет структурные соотношения

$$[X_1, X_2] = \lambda_1 X_2, \qquad [X_2, X_3] = 0, \qquad [X_3, X_1] = -\lambda_2 X_3,$$

и им соответствует структурная матрица $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$. Ранг этой матрицы равен двум. Выделим из нее матрицу $T = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$. Собственные числа матрицы T действительные и различные, следовательно, алгебра Ли изоморфна алгебре VI типа.

• Для канонической системы (2.24)

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = (-x + az)u, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/\!{}_2 C_2, \quad C_2 \geqslant 0,$$

при $C_2 > 4$ допускаемая алгебра $\mathfrak{a}_1$ имеет тот же вид, что и для (2.23), только λ_1, λ_2 являются корнями уравнения $\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$. Эта алгебра также изоморфна алгебре Ли VI типа.

При условии $0 \leqslant C_2 < 4$ каноническая система (2.24) допускает алгебру $\mathfrak{a}_1$ с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y},$$
$$X_2 = e^{ay/2}\left(\cos by \frac{\partial}{\partial x} + \big((a/2)\cos by - b \sin by\big)\frac{\partial}{\partial z}\right),$$
$$X_3 = e^{ay/2}\left(\sin by \frac{\partial}{\partial x} + \big((a/2)\sin by + b \cos by\big)\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

где $a = C_2/2$, $b = \sqrt{1 - C_2^2/16}$. Алгебра $\mathfrak{a}_1$ в этом случае имеет такие структурные соотношения

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = (a/2)\, X_2 - bX_3,\\
&[X_2, X_3] = 0,\\
&[X_3, X_1] = -bX_2 - (a/2)\, X_3,
\end{aligned}
$$

которым соответствует структурная матрица $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & -a/2 \\ 0 & a/2 & -b \end{pmatrix}$. Ранг этой матрицы равен двум. Выделим из нее матрицу $T = \begin{pmatrix} -a/2 & b \\ -b & -a/2 \end{pmatrix}$. Собственные числа матрицы T комплексные, следовательно, алгебра Ли изоморфна алгебре VII типа из условия теоремы 7.

При условии $C_2 = 4$ каноническая система (2.24) допускает алгебру $\mathfrak{a}_1$ с базисом следующего вида:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial y},\\
&X_2 = e^{\,y} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right),\\
&X_3 = e^{\,y} \left(y \frac{\partial}{\partial x} + (y+1) \frac{\partial}{\partial z} \right).
\end{aligned}
$$

Алгебра $\mathfrak{a}_1$ в этом случае имеет такие структурные соотношения

$$
[X_1, X_2] = X_2, \qquad [X_2, X_3] = 0, \qquad [X_3, X_1] = -X_2 - X_3,
$$

которым соответствует структурная матрица $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ранг этой матрицы равен двум. Выделим из нее матрицу $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Матрица T имеет единственное собственное число кратности два, а геометрическая кратность собственного числа равна единице. Следовательно, в соответствии с доказательством теоремы 7, эта алгебра Ли изоморфна алгебре IV типа.

Для канонических форм (2.23) и (2.24) допускаемая алгебра $\mathfrak{a}_0$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{a}_1$ и имеет ту же структуру. Эти алгебры разрешимые и имеют подалгебру, базисом которой являются векторы X_2, X_3. В соответствии с теорией факторизации в категории $\mathcal{AS}$ [4] эти векторы определяют факторизацию второго порядка управляемой системы.

Выводы раздела

Исследована классификация алгебр Ли над полем действительных чисел размерностью не более трех. Найдены соответствующие инварианты, с помощью которых исследованы структуры допускаемых алгебр для найденных автором канонических C-систем.

5. Факторизация канонических систем

При изучении управляемых систем актуальной представляется задача декомпозиции их на системы меньшей размерности. Формальной реализацией такой задачи является факторизация управляемой системы на факторобъекты.

Прежде чем применять методы факторизации к исходной системе, целесообразно перейти от нее к эквивалентной более простой системе. В случае трехмерных систем в качестве простых систем можно использовать канонические или приведенную системы.

Канонические системы I–VII, IX–XIV (с. 19–21) уже имеют простой вид и достаточно хорошо изучены. Применение к ним методов факторизации не дает ничего нового, в то время как применение методов факторизации к приведенной системе может существенно помочь в изучении этого типа систем. В этом разделе рассмотрим задачу факторизации приведенной системы (2.1). При этом будем стремиться к максимальной декомпозиции управляемой системы, а именно исследуем возможность приведения системы (2.1) к декомпозированному на три независимые уравнения виду:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0(x) + a_1(x)v, \\ \dot{y} = b_0(y) + b_1(y)v, \\ \dot{z} = c_0(z) + c_1(z)v, \end{cases} \tag{5.1}$$

где $a_1(x) \neq 0$, $b_1(y) \neq 0$, $c_1(z) \neq 0$. Для достижения поставленной цели используем аппарат t-кораспределений, разработанный В. И. Елкиным [4].

§ 5.1. Условия факторизации управляемых систем

Чтобы управляемая система (1.1) допускала факторизацию порядка $n-m$ в категории $\mathcal{AS}$, необходимо и достаточно существование регулярного инволютивного распределения D ранга $p = n - m$, для которого справедливы соотношения

$$[f_i, D] \subset D + L_F, \qquad i = \overline{0, r}, \tag{5.2}$$

где L_F — направляющее распределение ассоциированного аффинного распределения системы (1.1) [4, с. 226]. Эти соотношения можно записать с помощью семейства векторных полей

$$[f_i, Z_j] = \sum_{k=1}^{p} h_{ij}^k(y) Z_k + \sum_{k=1}^{r} \varkappa_{ij}^k(y) f_k, \quad i = \overline{0, r},\ j = \overline{1, p}, \tag{5.3}$$

где h_{ij}^k и $\varkappa_{ij}^k$ — неизвестные функции, подлежащие исключению. Семейство векторных полей Z_k, $k = \overline{1, p}$, должно быть инволютивным, так как оно порождает инволютивное распределение D. Уравнение (5.3) представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одинаковой главной частью относительно компонент векторов

Z_k. В эту систему входят также неизвестные параметрические функции h_{ij}^k и $\varkappa_{ij}^k$, которые сильно затрудняют поиск факторсистем. В работе [4] рекомендуется вести поиск факторсистем в двойственной форме.

Для того чтобы найти факторсистему системы (1.1), необходимо найти агрегаты этой системы. Двойственный подход к вопросу факторизации заключается в том, что ведется поиск краспределения, интегралами которого являются агрегаты исходной системы. Вполне интегрируемое кораспределение Q, интегралами которого являются агрегаты системы (1.1), называется *факторизующим* кораспределением или *$\mathcal{F}$-кораспределением* системы (1.1).

В терминах $\mathcal{F}$-кораспределений условие факторизации можно записать в следующем виде [4, с. 227]: вполне интегрируемое кораспределение Q является $\mathcal{F}$-кораспределением системы (1.1) тогда и только тогда, когда кораспределение $\overline{K} \cap Q$ является регулярным и

$$\mathsf{C}_t((\overline{K} \cap Q)') \subset Q. \tag{5.4}$$

Если ранг $\mathcal{F}$-кораспределения Q равен m, то Q определяет m-мерную факторсистему. В этом случае говорят, что система (1.1) допускает факторизацию порядка $n - m$.

Из (5.4) вытекает, что естественным образом выделяются два типа $\mathcal{F}$-кораспределений. Первый тип составляют $\mathcal{F}$-кораспределения Q, которые удовлетворяют уравнению

$$\overline{K} \cap Q = \mathcal{O}, \tag{5.5}$$

где $\mathcal{O}$ — нулевое кораспределение. Такие $\mathcal{F}$-кораспределения называются *тривиальными*, так как они определяют факторсистемы, эквивалентные тривиальной системе вида $\dot{z}^k = v^k$, $k = \overline{1, m}$.

Введение второго типа $\mathcal{F}$-кораспределений обусловлено тем, что регулярное t-характеристическое кораспределение является вполне интегрируемым. Поэтому можно ввести такие $\mathcal{F}$-кораспределения Q, что

$$\mathsf{C}_t((\overline{K} \cap Q)') = Q. \tag{5.6}$$

Кораспределения Q, удовлетворяющие условию (5.6), называются *базисными $\mathcal{F}$-кораспределениями* системы (1.1). Это понятие не нужно путать с понятием базисной системы Пфаффа кораспределения.

Легко убедиться, что кокасательное расслоение $\mathcal{T}^*N\colon y \to T^*N_y$ является $\mathcal{F}$-кораспределением системы (1.1). Определяемые им факторсистемы суть системы, эквивалентные системе (1.1). Условимся считать, что антипод кокасательного расслоения — нулевое кораспределение $\mathcal{O}$ — является $\mathcal{F}$-кораспределением, хотя оно и не определяет никакой факторсистемы. Тогда для каждого $\mathcal{F}$-кораспределения Q справедливо представление

$$Q = Q_1 \oplus Q_2, \tag{5.7}$$

где Q_1 — некоторое базисное $\mathcal{F}$-кораспределение, Q_2 — некоторое тривиальное $\mathcal{F}$-кораспределение.

Согласно (5.7) вопрос о нахождении $\mathcal{F}$-кораспределений сводится к вопросу о нахождении тривиальных и базисных $\mathcal{F}$-кораспределений. Что касается тривиальных $\mathcal{F}$-кораспределений, то их описание является алгебраической задачей. Базисные $\mathcal{F}$-кораспределения находятся из дифференциальных соотношений (5.6). Заметим, что каждое базисное $\mathcal{F}$-кораспределение Q однозначно определяется t-кораспределением $S \subset K$, удовлетворяющим условию

$$\mathsf{C}_t S \cap \overline{K} = \overline{S}. \tag{5.8}$$

Действительно, если t-кораспределение $S \subset K$ удовлетворяет (5.8), то кораспределение $Q = \mathsf{C}_t S$ удовлетворяет (5.6).

Обратно, если Q удовлетворяет (5.6), то t-кораспределение $S = (\overline{K} \cap Q)'$ удовлетворяет (5.8).

t-Кораспределения $S \subset K$, удовлетворяющие условию (5.8), будем называть *факториальными* t-кораспределениями системы (1.1).

В терминах систем Пфаффа условие (5.8) означает существование базисной системы Пфаффа ассоциированного t-кораспределения K системы (1.1) вида

$$\sum_{i=1}^{n} \Omega_i^k(y)dy^i + \Omega_{n+1}^k(y)dt = 0, \qquad k = \overline{1,d}, \tag{5.9, а}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Omega_i^j(y)dy^i + \Omega_{n+1}^j(y)dt = 0, \qquad j = \overline{d+1,q}, \tag{5.9, б}$$

в которой d уравнений (5.9, а) образуют такую систему Пфаффа, что уравнения ее характеристической системы должны быть линейно независимы (в каждой точке y) с уравнениями

$$\sum_{i=1}^{n} \Omega_i^j(y)dy^i = 0, \qquad j = \overline{d+1,q}.$$

Очевидно, что если такая система Пфаффа (5.9) существует, то уравнения (5.9, а) порождают факториальное t-кораспределение, а уравнения характеристической системы Пфаффа, построенной для системы (5.9, а), порождают базисное $\mathcal{F}$-кораспределение. Следовательно, для поиска факториальных t-кораспределений можно поступить следующим образом.

Возьмем произвольную базисную систему Пфаффа (1.5) t-кораспределения K и рассмотрим систему Пфаффа

$$\Omega^k = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^k(y)\Big(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^j(y)dy^i + \omega_{n+1}^j(y)dt\Big), \ k = \overline{1,d}, \tag{5.10}$$

где λ_j^k — неопределенные коэффициенты, причем $\operatorname{rank}\|\lambda_j^k\| = d$. Коэффициенты λ_j^k следует определить из условия, чтобы уравнения (5.10) порождали факториальное t-кораспределение. Из алгоритма построения характеристической системы вытекает, что это приводит к дифференциальным соотношениям, которым должны удовлетворять коэффициенты λ_j^k.

Используя приведенный алгоритм, приступим к факторизации изучаемых систем.

§ 5.2. Факторизация приведенной системы

Ассоциированное t-кораспределение K для приведенной системы (2.1)

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = H(x,y,z)u, \end{cases} \qquad H_x(x,y,z) \neq 0,$$

порождается базисной системой Пфаффа

$$\begin{cases} dx - z\,dy - dt = 0, \\ dz - H(x,y,z)dy = 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

А кораспределение $\overline{K}$ порождается системой Пфаффа

$$\begin{cases} dx - zdy = 0, \\ dz - H(x,y,z)dy = 0. \end{cases} \tag{5.12}$$

Тривиальное $\mathcal{F}$-кораспределение Y порождается любой дифференциальной формой Пфаффа, не зависимой от уравнений системы (5.12).

Для того чтобы найти базисное кораспределение Q, будем искать факториальные t-кораспределения S среди уравнений системы (5.11).

Так как $S \subset K$, то размерность t-кораспределения S равна единице или двум. Пусть $\dim S = 2$, следовательно, $S = K$. Найдем характеристическое распределение $\mathsf{C}_t S$:

$$\begin{cases} dx = 0, \\ dy = 0, \\ dz = 0. \end{cases} \tag{5.13}$$

Поскольку $\dim \mathsf{C}_t S = n = 3$, то S определяет факторизацию нулевого порядка. А чтобы найти факторизацию первого порядка, необходимо, чтобы ранг факториального t-кораспределения был равен единице и его базисная система Пфаффа состояла из одного уравнения.

Будем искать это уравнение в виде линейной комбинации уравнений системы (5.11)

$$\lambda_1(x, y, z)(dx - z\,dy - dt) + \lambda_2(x, y, z)(dz - H\,dy) = 0. \tag{5.14}$$

t-Кораспределение S, порожденное уравнением (5.14), будет факториальным, когда его характеристическая система уравнений линейно несвязна с одним из уравнений системы (5.12), т. е. $\operatorname{rank} \mathsf{C}_t S < 3$. Очевидно, что второе уравнение Пфаффа системы (5.11) не является факториальным, так как характеристическая система этого уравнения эквивалентна системе (5.13), следовательно, $\lambda_1 \neq 0$. Поэтому разделим уравнение (5.14) на λ_1 и обозначим $\lambda_2/\lambda_1 = \nu$. Тогда

$$dx - z\,dy - dt + \nu(dz - H\,dy) = 0, \tag{5.15}$$

где ν — неизвестная функция. Найдем характеристическую систему этого уравнения

$$\begin{cases} dx - (z + \nu H)\,dy + \nu\,dz = 0, \\ (H\nu)_x\,dy - \nu_x\,dz = 0, \\ (H\nu)_x\,dx + (1 + \nu_y + (H\nu)_z)\,dz = 0, \\ \nu_x\,dx + (1 + \nu_y + (H\nu)_z)\,dy = 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

В системе (5.16) одно из уравнений функционально зависит от остальных уравнений, поэтому его необходимо исключить из системы. Если $\nu_x \neq 0$, то система (5.16) будет эквивалентна системе

$$\begin{cases} dx - (z + \nu H)\,dy + \nu\,dz = 0, \\ (H\nu)_x\,dy - \nu_x\,dz = 0, \\ (1 + \nu_y + z\nu_x + (H\nu)_z - H_x\nu^2)\,dy = 0. \end{cases} \tag{5.17}$$

Если же $\nu_x = 0$, то система (5.16) будет эквивалентна системе

$$\begin{cases} dx - (z + \nu H)\,dy + \nu\,dz = 0, \\ H_x\nu\,dy = 0, \\ H_x\nu\,dx + (1 + \nu_y + (H\nu)_z)\,dz = 0. \end{cases} \tag{5.18}$$

Чтобы существовала факторизация первого порядка, системы (5.17), (5.18) должны иметь ранг, равный двум. Для этого необходимо и достаточно, чтобы коэффициент третьего уравнения системы (5.17) был равен нулю. Следовательно, уравнение

$$z\nu_x + \nu_y + H\nu_z + (1 + \nu H_z - H_x\nu^2) = 0 \tag{5.19}$$

является условием факторизации приведенной системы.

Это уравнение является квазилинейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка и имеет бесконечно много решений. Каждое решение ν уравнения (5.19) определяет одномерное факториальное t-кораспределение S_ν, порождаемое (5.15). Его характеристическое кораспределение $Q_\nu = \mathsf{C}_t S_\nu$ является двумерным факторизующим кораспределением, и его интегралы, будучи агрегатами приведенной системы, определяют двумерную факторсистему. Кораспределение Q_ν порождается системой (5.16), в которой только два уравнения являются независимыми.

Если приведенная система (2.1) обладает свойством $H_y = 0$, то уравнение (5.19) имеет следующее решение: $\nu = -z/H$.

Декомпозиция первого порядка, найденная по этому решению, является тривиальной, поскольку определяет очевидную факторсистему

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{z} = H(x, z)u. \end{cases}$$

§ 5.3. Факторизация на независимые уравнения

Найденное выше условие факторизации (5.19) приведенной системы показывает, что в категории $\mathcal{AS}$ аффинных управляемых систем имеются широкие возможности их факторизации. Для различных решений ν уравнения (5.19) можно получить разные двумерные факторсистемы. Попытаемся воспользоваться этими возможностями для декомпозиции приведенной системы на независимые уравнения.

Условия существования такой декомпозиции получены в работе [48]. Рассмотрим аффинную управляемую систему (1.1) с трехмерным фазовым пространством ($n = 3$) и с одним управлением ($r = 1$):

$$\dot{y} = f_0(y) + f_1(y)u, \qquad y \in N \subset \mathbb{R}^3, \quad u \in \mathbb{R}^1, \tag{5.20}$$

и систему (5.1), декомпозированную на независимые уравнения. Систему (5.1) можно рассматривать как систему, состоящую из трех независимых одномерных факторсистем. Кроме того, первое и второе, первое и третье, а также второе и третье уравнения образуют три двумерные факторсистемы. Поэтому, чтобы преобразовать управляемую систему (5.20) к виду (5.1), нужно найти три разные двумерные базисные $\mathcal{F}$-кораспределения Q, определяющих двумерные факторсистемы, которые обладают специальными свойствами.

Теорема 8 ([48]). *Пусть для системы* (5.20) *существуют такие базисные* $\mathcal{F}$*-кораспределения* Q_k*,* $k = 1, 2, 3$*, ранга* 2*,* *что* $\sum_{k=1}^{3} Q_k = T^*M$, $\overline{S_k} \cap \overline{S_j} = \mathcal{O}$, $k, j = 1, 2, 3$, *где* S_k *— факториальные* t*-кораспределения, соответствующие* $\mathcal{F}$*-кораспределениям* Q_k, *и* $Q_k \cap Q_j$, $k, j = 1, 2, 3$, *— вполне интегрируемые кораспределения ранга* 1. *Тогда система* (5.20) *локально эквивалентна системе* (5.1).

Доказательство. Каждое кораспределение Q_k, $k = 1$, 2, 3 имеет два функционально независимых интеграла, причем можно так выбрать эти интегралы, что каждая пара кораспределений Q_k, Q_j будет иметь общий интеграл, а именно интеграл кораспределения $Q_k \cap Q_j$. Пусть $\varphi^1(y^1, y^2, y^3)$ — интеграл кораспределения $Q_1 \cap Q_2$, $\varphi^2(y^1, y^2, y^3)$ — интеграл кораспределения $Q_2 \cap Q_3$, $\varphi^3(y^1, y^2, y^3)$ — интеграл кораспределения $Q_1 \cap Q_3$. Покажем, что эти функции являются искомыми агрегатами, т. е. определяют диффеоморфизм (или, иначе говоря, замену координат) $x = \varphi^1(y^1, y^2, y^3)$, $y = \varphi^2(y^1, y^2, y^3)$, $z = \varphi^1(y^1, y^2, y^3)$, задающий эквивалентность между системой (5.20) и некоторой системой вида (5.1). В новой системе координат x, y, z факториальные t-кораспределения S_1, S_2, S_3 порождаются уравнениями Пфаффа следующего вида:

$$\begin{aligned} &\omega_1^1(x, y)dx + \omega_2^1(x, y)dy + \omega_3^1(x, y)dt = 0, \\ &\omega_1^2(y, z)dy + \omega_2^2(y, z)dz + \omega_3^2(y, z)dt = 0, \\ &\omega_1^3(x, z)dx + \omega_2^3(x, z)dz + \omega_3^3(x, z)dt = 0. \end{aligned} \tag{5.21}$$

(В (5.21) первое уравнение порождает S_1, второе — S_2, третье — S_3.) Функции ω_1^k, ω_2^k, $k = 1, 2, 3$, не равны нулю ни в какой точке (x, y, z). Действительно, докажем, например, что $\omega_1^1 \neq 0$. Первая пара уравнений в (5.21) так же, как и любая другая пара уравнений в (5.21), образует базисную систему Пфаффа ассоциированного t-кораспределения K. Согласно определению факториального t-кораспределения (5.8), уравнения Пфаффа $dy = 0$, $dz = 0$, составляющие базисную систему Пфаффа кораспределения $Q_2 = \mathsf{C}_t S_2$, должны быть линейно независимы (в каждой точке) с уравнением $\omega_1^1(x,y)dx+\omega_2^1(x,y)dy=0$. Следовательно, $\omega_1^1\neq 0$.

Преобразуем уравнения (5.21) следующим образом:

$$\begin{aligned} &dx=\ell_1(x,y)dy+\ell_2(x,y)dt,\\ &dz=q_1(y,z)dy+q_2(y,z)dt,\\ &dx=h_1(x,z)dz+h_2(x,z)dt. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Так как каждое из уравнений (5.22) линейно выражается через остальные два, то

$$\ell_1(x,y)=h_1(x,z)q_1(y,z), \tag{5.23}$$

$$\ell_2(x,y)-h_2(x,z)=h_1(x,z)q_2(y,z). \tag{5.24}$$

Из (5.23) следует, что

$$\ell_1(x,y)=\alpha_1(x)\beta_1(y), \qquad q_1(y,z)=\alpha_2(x)\beta_2(y),$$

где α_j, β_j — некоторые функции. Так как

$$\beta_1/\beta_2=h_1(x,z)\alpha_2(z)/\alpha_1(x),$$

то $\beta_1/\beta_2=\mathrm{const}$. Поэтому можно положить $\beta_1(y)=\beta_2(y)=\beta(y)$. Следовательно, $\alpha_1(x)=h_1(x,z)\alpha_2(z)$. Из (5.24) имеем

$$\frac{\ell_2(x,y)}{\alpha_1(x)}=\frac{q_2(y,z)}{\alpha_2(z)}+\frac{h_2(x,z)}{\alpha_1(x)}.$$

Поэтому

$$\frac{\ell_2(x,y)}{\alpha_1(x)}=\mu_1(y)+\nu_1(x), \qquad \frac{q_2(y,z)}{\alpha_2(z)}=\mu_2(y)+\nu_2(z),$$

где μ_j, ν_j — некоторые функции. Так как

$$\mu_1(y)-\mu_2(y)=\nu_2(z)-\nu_1(x)+\frac{h_2(x,z)}{\alpha_1(x)},$$

то $\mu_1(y) - \mu_2(y) = \mathrm{const}$ и, следовательно, можно положить $\mu_1(y) = \mu_2(y) = \mu(y)$.

Итак, первые два уравнения в (5.22), составляющие базисную систему Пфаффа t-кораспределения K, линейным преобразованием приводятся к виду

$$
\begin{aligned}
dx &= \alpha_1(x)\beta(y)dy + \alpha_1(x)(\mu(y) + \nu_1(x))dt,\\
dz &= \alpha_2(z)\beta(y)dy + \alpha_2(z)(\mu(y) + \nu_2(z))dt.
\end{aligned}
$$

Определим два векторных поля

$$
g_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1(x)\nu_1(x) \\ -\mu(y)/\beta(y) \\ \alpha_2(z)\nu_2(z)) \end{pmatrix}, \qquad g_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ 1/\beta(y) \\ \alpha_2(z)) \end{pmatrix}
$$

и построим с их помощью управляемую систему

$$
\begin{cases}
\dot{x} = \alpha_1(x)\nu_1(x) + \alpha_1(x)u,\\
\dot{y} = -\dfrac{\mu(y)}{\beta(y)} + \dfrac{1}{\beta(y)}u,\\
\dot{z} = \alpha_2(z)\nu_2(z) + \alpha_2(z)u,
\end{cases} \tag{5.25}
$$

которая эквивалентна системе (5.20). Так как управляемая система (5.25) имеет вид (5.1), то теорема доказана. □

§ 5.4. Факторизация канонических C-систем

В разд. 2 найдена классификация C-систем. Будем исследовать задачу факторизации для каждой канонической C-системы.

• Рассмотрим каноническую систему (2.22) для класса $(C_1, 0)^+$ при $C_1 > 0$

$$
\begin{cases}
\dot{x} = 1 + zu,\\
\dot{y} = u,\\
\dot{z} = az^2 \operatorname{tg}(ax)u,
\end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/\!_2\sqrt{C_1},
$$

для которой функция $H(x, y, z) = az^2 \operatorname{tg}(ax)$. Запишем условие факторизации (5.19) для этой системы

$$z\nu_x + \nu_y + az^2 \operatorname{tg}(ax)\nu_z + 1 + 2az \operatorname{tg}(ax)\nu - \frac{a^2 z^2}{\cos^2(ax)}\,\nu^2 = 0. \tag{5.26}$$

Так как функция H не зависит от y, то (как отмечалось выше) функция $\nu_1 = -z/H = -\frac{1}{az \operatorname{tg}(ax)}$ является решением уравнения (5.26).

Соответствующее факториальное t-кораспределение S_{ν_1} порождается уравнением Пфаффа

$$dx - \frac{dz}{az \operatorname{tg}(ax)} - dt = 0.$$

Характеристическое кораспределение Q_{ν_1} порождается системой

$$\begin{cases} dx = 0, \\ dz = 0, \end{cases}$$

интегралами которого являются x и z, и определяет уже известную факторсистему

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{z} = az^2 \operatorname{tg}(ax)u. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция $\nu_2 = \cos(ax)/az$ является решением уравнения (5.26). Факториальное t-кораспределение S_{ν_2} порождается уравнением Пфаффа

$$dx - z(1 + \sin(ax))dy + (\cos(ax)/az)dz - dt = 0.$$

Подставим ν_2 в систему (5.16) и построим $\mathcal{F}$-кораспределение Q_{ν_2}:

$$\begin{cases} dx - z(1 + \sin(ax))dy + (\cos(ax)/az)dz = 0, \\ az\cos(ax)dx + (1 + \sin(ax))dz = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы являются интегралы

$$\Phi_1 = z(1 + \sin(ax)), \qquad \Phi_2 = yz(1 + \sin(ax)) + \cos(ax)/a.$$

Интеграл Φ_1 не зависит от y, поэтому он является интегралом также кораспределения Q_{ν_1}.

Теперь необходимо найти третье кораспределение Q_{ν_3}, которое бы удовлетворяло условию теоремы 8, т. е. кораспределение, одним из интегралов которого должна быть функция Φ_2, а другим — любой интеграл кораспределения Q_{ν_1}.

Среди факторизующих кораспределений будем искать такие, интегралами которых являются x и Φ_2, т. е. среди кораспределений вида (5.16) нужно найти кораспределение эквивалентное

$$\begin{cases} dx = 0, \\ z\,dy + y\,dz = 0. \end{cases} \tag{5.27}$$

Для этого уравнения (5.27) подставим в систему (5.16) и получим, что функция ν_3 должна удовлетворять следующему условию:

$$\nu_3 = \frac{-yz}{z + yH} = \frac{-y}{1 + ayz\,\mathrm{tg}(ax)}.$$

Легко проверить, что ν_3 является решением уравнения (5.26), т. е. t-кораспределение S_{ν_3} является факториальным

$$dx - \frac{z}{1 + ayz\,\mathrm{tg}(ax)}\,dy - \frac{y}{1 + ayz\,\mathrm{tg}(ax)}\,dz - dt = 0.$$

Таким образом, мы имеем три t-кораспределения S_{ν_1}, S_{ν_2} и S_{ν_3}, которые удовлетворяют условию теоремы 8. Следовательно, систему (2.22) можно декомпозировать на независимые уравнения. Для этого необходимо сделать следующую замену переменных:

$$\tilde{x} = x,$$

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= yz(1+\sin(ax)) + \cos(ax)/a, \\ \tilde{z} &= z(1+\sin(ax)), \end{aligned} \tag{5.28}$$

где первое уравнение является интегралом кораспределения $Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_3}$, второе — интегралом кораспределения $Q_{\nu_2} \cap Q_{\nu_3}$, а третье — интегралом кораспределения $Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$.

В новых координатах факториальные t-кораспределения S_{ν_1}, S_{ν_2} и S_{ν_3} порождаются следующими уравнениями Пфаффа:

$$\frac{1}{\sin(a\tilde{x})}\,d\tilde{x} - \frac{\cos(a\tilde{x})}{a\tilde{z}\sin(a\tilde{x})}\,d\tilde{z} - dt = 0,$$

$$-d\tilde{y} + \frac{\tilde{y}}{\tilde{z}}\,d\tilde{z} - dt = 0,$$

$$\frac{a\tilde{y}}{\cos(a\tilde{x})(1+a\tilde{y}\operatorname{tg}(a\tilde{x}))}\,d\tilde{x} - \frac{1}{1+a\tilde{y}\operatorname{tg}(a\tilde{x})}\,d\tilde{y} - dt = 0.$$

После некоторых преобразований эти уравнения примут следующий вид:

$$\frac{a\,d\tilde{x}}{\cos(a\tilde{x})} - a\operatorname{tg}(a\tilde{x})dt = \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}},$$

$$\frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{dt}{\tilde{y}} = \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}},$$

$$\frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{dt}{\tilde{y}} = \frac{a\,d\tilde{x}}{\cos(a\tilde{x})} - a\operatorname{tg}(a\tilde{x})dt.$$

Эти три уравнения сводятся к двум равенствам

$$\frac{a\,d\tilde{x}}{\cos(a\tilde{x})} - a\frac{\sin(a\tilde{x})}{\cos(a\tilde{x})}\,dt = \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{dt}{\tilde{y}} = \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}}.$$

Приравняв каждую часть равенств к $v\,dt$ и разделив их на dt, получим управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \sin(a\tilde{x}) + \dfrac{\cos(a\tilde{x})}{a}\,v, \\ \dot{\tilde{y}} = -1 + \tilde{y}v, \\ \dot{\tilde{z}} = \tilde{z}v, \end{cases} \quad \text{где } v = \frac{a\cos(ax)}{1+\sin(ax)} + \frac{az}{\cos(ax)}\,u. \tag{5.29}$$

Мы видим, что в новых переменных управляемая система декомпозирована на три независимых уравнения, каждое из которых является факторсистемой исходной системы (2.22).

• Рассмотрим каноническую систему (2.23) для класса $(0, C_2)^+$ при $C_2 \geqslant 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = (x + az)u, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/_2 C_2.$$

Для этой системы функция H имеет вид $H = x + az$. Запишем условие факторизации (5.19) для системы (2.23)

$$z\nu_x + \nu_y + (x + az)\nu_z + (1 + \nu a - \nu^2) = 0. \tag{5.30}$$

Так как функция H не зависит от y, то (как отмечалось выше) функция $\nu_1 = -z/H = \frac{-z}{x+az}$ является решением уравнения (5.30).

Соответствующее факториальное t-кораспределение S_{ν_1} порождается уравнением Пфаффа

$$dx - \frac{z}{x + az}\, dz - dt = 0.$$

Характеристическое кораспределение Q_{ν_1} порождается системой

$$\begin{cases} dx = 0, \\ dz = 0, \end{cases}$$

интегралами которого являются x и z, и определяет уже известную факторсистему

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{z} = (x + az)u. \end{cases}$$

Чтобы найти другие факториальные t-кораспределения, будем искать решение уравнения (5.30) в виде $\nu = \mathrm{const}$. Тогда ν является решением квадратного уравнения

$$1 + a\nu - \nu^2 = 0, \tag{5.31}$$

которое всегда имеет два различных действительных корня

$$\nu_{2/3} = {}^1\!/_2 a \pm \sqrt{1 + ({}^1\!/_2 a)^2}.$$

Этим корням соответствуют два факториальных t-кораспределения. Корню ν_2 соответствует факториальное t-кораспределение S_{ν_2}, порождаемое уравнением

$$dx - (z + \nu_2 x + a\nu_2 z)dy + \nu_2\, dz - dt = 0.$$

Его характеристическая система Q_{ν_2} состоит из уравнений

$$\begin{cases} dy = 0, \\ dx + \nu_2\, dz = 0. \end{cases}$$

Интегралами этой системы являются $\Phi_1 = y$ и $\Phi_2 = x + \nu_2 z$. Интеграл Φ_2 является также интегралом кораспределения Q_{ν_1}.

Корню ν_3 соответствует факториальное t-кораспределение S_{ν_3}, порождаемое уравнением

$$dx - (z + \nu_3 x + a\nu_3 z)dy + \nu_3\, dz - dt = 0.$$

Его характеристическая система Q_{ν_3} состоит из уравнений

$$\begin{cases} dy = 0, \\ dx + \nu_3\, dz = 0. \end{cases}$$

Интегралами этой системы являются $\Phi_1 = y$, $\Phi_3 = x + \nu_3 z$.

Кораспределения Q_{ν_1}, Q_{ν_2}, Q_{ν_3} попарно имеют общие интегралы, следовательно, факториальные t-кораспределения S_{ν_1}, S_{ν_2}, S_{ν_3} удовлетворяют условию теоремы 8. Замена переменных

$$\begin{cases} \tilde{x} = \Phi_2 = x + \nu_2 z, \\ \tilde{y} = \Phi_1 = y, \\ \tilde{z} = \Phi_3 = x + \nu_3 z, \end{cases} \tag{5.32}$$

определяемая этими t-кораспределениями декомпозирует исходную систему (2.23) на независимые уравнения.

В новых координатах факториальные t-кораспределения S_{ν_1}, S_{ν_2} и S_{ν_3} порождаются следующими уравнениями Пфаффа:

$$\frac{\nu_3 \tilde{z}\, d\tilde{x} - \nu_2 \tilde{x}\, d\tilde{z}}{\nu_3 \tilde{z} - \nu_2 \tilde{x}} - dt = 0,$$

$$d\tilde{x} - \nu_2 \tilde{x}\, d\tilde{y} - dt = 0,$$

$$d\tilde{z} - \nu_3 \tilde{z}\, d\tilde{y} - dt = 0.$$

Эти три уравнения сводятся к двум равенствам

$$\frac{d\tilde{x}}{\nu_2 \tilde{x}} - \frac{dt}{\nu_2 \tilde{x}} = d\tilde{y} = \frac{d\tilde{z}}{\nu_3 \tilde{z}} - \frac{dt}{\nu_3 \tilde{z}}.$$

Приравняв каждую часть этих равенств к $v\,dt$ и разделив их на dt, получим управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = 1 + \nu_2 \tilde{x} v, \\ \dot{\tilde{y}} = v, \\ \dot{\tilde{z}} = 1 + \nu_3 \tilde{z} v, \end{cases} \qquad \text{где } v = u. \tag{5.33}$$

Мы видим, что в новых переменных управляемая система декомпозирована на три независимых уравнения, каждое из которых является факторсистемой исходной системы (2.23).

• Рассмотрим каноническую систему (2.24) для класса $(0, C_2)^-$ при $C_2 \geqslant 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = (-x + az)u, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/_2 C_2.$$

Для этой системы функция H имеет вид $H = -x + az$. Запишем условие факторизации (5.19) для системы (2.24)

$$z\nu_x + \nu_y + (-x + az)\nu_z + (1 + a\nu + \nu^2) = 0. \tag{5.34}$$

Факториальное t-кораспределение S_{ν_1} с функцией $\nu_1 = -z/H = \frac{z}{x-az}$ определяет известную факторсистему

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{z} = (-x + az)u, \end{cases}$$

системы (2.24).

Если $a > 2$, то уравнение (5.34) имеет два различных постоянных решения ν_2 и ν_3, являющихся корнями квадратного уравнения

$$1 + a\nu + \nu^2 = 0. \tag{5.35}$$

В этом случае дальнейшие выкладки аналогичны выкладкам, приведенным выше для системы (2.23) и с помощью замены переменных (5.32), где ν_2 и ν_3 — корни уравнения (5.35), управляемая система (2.24) приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = 1 - \nu_2 x' u, \\ \dot{\tilde{y}} = u, \\ \dot{\tilde{z}} = 1 - \nu_3 z' u. \end{cases} \tag{5.36}$$

При $a = 2$ уравнение (5.35) имеет только один корень $\nu_2 = -a/2$, поэтому замену третьей переменной надо выбрать из соображений невырожденности преобразования координат. Следующая замена переменных

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - z, \\ \tilde{y} = y, \\ \tilde{z} = z \end{cases}$$

приводит систему (2.24) при $a = 2$ к виду

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = 1 + \tilde{x}u, \\ \dot{\tilde{y}} = u, \\ \dot{\tilde{z}} = (\tilde{z} - \tilde{x})u. \end{cases}$$

В этой системе первое и второе уравнения независимые, и они являются факторсистемой, а третье уравнение зависит от первого.

Для управляемой системы (2.24) при $0 \leqslant a < 2$ не удалось найти три факториальных t-кораспределения S_{ν_1}, S_{ν_2} и S_{ν_3} удовлетворяющих теореме 8.

• Для класса $(C_1, 0)^+$, $C_1 < 0$ при решении задачи факторизации лучше рассмотреть представителя $(\widetilde{2.25})$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = -az^2 \operatorname{cth}(ax)u, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/_2 \sqrt{-C_1},$$

для которого функция $H(x, y, z) = -az^2 \operatorname{cth}(ax)$. Если условие факторизации (5.19) применить к системе $(\widetilde{2.25})$, то получим уравнение

$$z\nu_x + \nu_y - az^2 \operatorname{cth}(ax)\nu_z + 1 - 2az \operatorname{cth}(ax)\nu - \frac{a^2z^2}{\operatorname{sh}^2(ax)}\,\nu^2 = 0. \tag{5.37}$$

Так как функция H не зависит от y, то (как отмечалось выше) функция $\nu_1 = -z/H = \frac{1}{az\operatorname{cth}(ax)}$ является решением уравнения (5.37).

Соответствующее факториальное t-кораспределение S_{ν_1} порождается уравнением Пфаффа

$$dx + \frac{dz}{az \operatorname{cth}(ax)} - dt = 0.$$

Характеристическое кораспределение Q_{ν_1} порождается системой

$$\begin{cases} dx = 0, \\ dz = 0, \end{cases}$$

интегралами которого являются x и z, и определяет уже известную факторсистему

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{z} = -az^2 \operatorname{cth}(ax)u. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция $\nu_2 = \frac{\operatorname{sh}(ax)}{az}$ является решением уравнения (5.37). Факториальное t-кораспределение S_{ν_2} порождается уравнением Пфаффа

$$dx - z(1 - \operatorname{ch}(ax))dy + \frac{\operatorname{sh}(ax)}{az}\, dz - dt = 0.$$

Подставим ν_2 в систему (5.16) и построим $\mathcal{F}$-кораспределение Q_{ν_2}:

$$\begin{cases} dx - z(1 - \operatorname{ch}(ax))dy + \dfrac{\operatorname{sh}(ax)}{az}\, dz = 0, \\ -az \operatorname{sh}(ax)dx + (1 - \operatorname{ch}(ax))dz = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы являются интегралы

$$\Phi_1 = z(1 - \operatorname{ch}(ax)), \qquad \Phi_2 = yz(1 - \operatorname{ch}(ax)) + \operatorname{sh}(ax)/a.$$

Интеграл Φ_1 не зависит от y, поэтому он также является интегралом кораспределения Q_{ν_1}.

Теперь необходимо найти третье кораспределение Q_{ν_3}, которое бы удовлетворяло условию теоремы 8, т. е. кораспределение, одним из интегралов которого должна быть функция Φ_2, а другим — любой интеграл кораспределения Q_{ν_1}.

Среди факторизующих кораспределений будем искать такие, интегралами которых являются x и Φ_2, т. е. среди кораспределений вида (5.16) нужно найти кораспределение, эквивалентное

$$\begin{cases} dx = 0, \\ z\,dy + y\,dz = 0. \end{cases} \tag{5.38}$$

Для этого уравнения (5.38) подставим в систему (5.16) и получим, что функция ν_3 должна удовлетворять следующему условию:

$$\nu_3 = -\frac{yz}{z + yH} = -\frac{y}{1 - ayz\,\mathrm{cth}(ax)}.$$

Легко проверить, что функция ν_3 является решением уравнения (5.37), т. е. t-кораспределение S_{ν_3} является факториальным

$$dx - \frac{z}{1 - ayz\,\mathrm{cth}(ax)}\,dy - \frac{y}{1 - ayz\,\mathrm{cth}(ax)}\,dz - dt = 0.$$

Таким образом, мы имеем три t-кораспределения S_{ν_1}, S_{ν_2} и S_{ν_3}, которые удовлетворяют условию теоремы 8. Следовательно, систему $(\widetilde{2.25})$ можно декомпозировать на независимые уравнения. Для этого необходимо сделать следующую замену переменных:

$$\tilde{x} = x,$$
$$\tilde{y} = yz(1 - \mathrm{ch}(ax)) + \mathrm{sh}(ax)/a,$$
$$\tilde{z} = z(1 - \mathrm{ch}(ax)),$$

где первое уравнение является интегралом кораспределения $Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_3}$, второе — интегралом кораспределения $Q_{\nu_2} \cap Q_{\nu_3}$, а третье — интегралом кораспределения $Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$.

В новых координатах факториальные t-кораспределения S_{ν_1}, S_{ν_2} и S_{ν_3} порождаются следующими уравнениями Пфаффа:

$$-\frac{d\tilde{x}}{\mathrm{ch}(a\tilde{x})} + \frac{\mathrm{sh}(a\tilde{x})d\tilde{z}}{a\tilde{z}\,\mathrm{ch}(a\tilde{x})} - dt = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&-d\tilde{y} + \frac{\tilde{y}\,d\tilde{z}}{\tilde{z}} - dt = 0,\\
&\frac{a\tilde{y}\,d\tilde{x}}{\operatorname{sh}(a\tilde{x})(1 - a\tilde{y}\operatorname{cth}(a\tilde{x}))} - \frac{d\tilde{y}}{1 - a\tilde{y}\operatorname{cth}(a\tilde{x})} - dt = 0.
\end{aligned}
$$

После некоторых преобразований эти уравнения примут следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a\,d\tilde{x}}{\operatorname{sh}(a\tilde{x})} + a\operatorname{cth}(a\tilde{x})dt = \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}},\\
&\frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{dt}{\tilde{y}} = \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}},\\
&\frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{dt}{\tilde{y}} = \frac{a\,d\tilde{x}}{\operatorname{sh}(a\tilde{x})} + a\operatorname{cth}(a\tilde{x})dt.
\end{aligned}
$$

Эти три уравнения сводятся к двум равенствам

$$
\frac{a\,d\tilde{x}}{\operatorname{sh}(a\tilde{x})} + \frac{a\operatorname{ch}(a\tilde{x})dt}{\operatorname{sh}(a\tilde{x})} = \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{dt}{\tilde{y}} = \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}}.
$$

Приравняв каждую часть этих равенств к $v\,dt$ и разделив их на dt, получим управляемую систему

$$
\begin{cases}
\dot{\tilde{x}} = -\operatorname{ch}(a\tilde{x}) + \dfrac{\operatorname{sh}(a\tilde{x})}{a}\,v,\\
\dot{\tilde{y}} = -1 + \tilde{y}v,\\
\dot{\tilde{z}} = \tilde{z}v,
\end{cases}
\qquad \text{где } v = \frac{-a\operatorname{sh}(ax)}{1 - \operatorname{ch}(ax)} + \frac{az}{\operatorname{sh}(ax)}\,u. \tag{5.39}
$$

Мы видим, что в новых переменных управляемая система декомпозирована на три независимых уравнения, каждое из которых является факторсистемой исходной системы $(\widetilde{2.25})$.

• Для класса $(C_1, 0)^-$, $C_1 < 0$ при решении задачи факторизации лучше рассмотреть следующего представителя $(\widetilde{2.26})$:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = 1 + zu,\\
\dot{y} = u,\\
\dot{z} = -az^2\operatorname{th}(ax)u,
\end{cases}
\qquad \text{где } a = {}^1\!/\!_2\sqrt{-C_1},
$$

для которого функция $H(x,y,z) = -az^2\operatorname{th}(ax)$. Если условие факторизации (5.19) применить к системе $(\widetilde{2.26})$, то получим уравнение

$$z\nu_x + \nu_y - az^2\operatorname{th}(ax)\nu_z + 1 - 2az\operatorname{th}(ax)\nu + \frac{a^2z^2}{\operatorname{ch}^2(ax)}\,\nu^2 = 0. \tag{5.40}$$

Так как функция H не зависит от y, то (как отмечалось выше) функция $\nu_1 = -z/H = \frac{1}{az\operatorname{th}(ax)}$ является решением уравнения (5.40).

Соответствующее факториальное t-кораспределение S_{ν_1} порождается уравнением Пфаффа

$$dx + \frac{dz}{az\operatorname{th}(ax)} - dt = 0.$$

Характеристическое кораспределение Q_{ν_1} порождается системой

$$\begin{cases} dx = 0, \\ dz = 0, \end{cases}$$

интегралами которого являются x и z, и определяет уже известную факторсистему

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{z} = -az^2\operatorname{th}(ax)u. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция $\nu_2 = -\frac{\operatorname{sh}(ax)\operatorname{ch}(ax)}{az}$ является решением уравнения (5.40). Факториальное t-кораспределение S_{ν_2} порождается уравнением Пфаффа

$$dx - z\operatorname{ch}^2(ax)dy - \frac{\operatorname{sh}(ax)\operatorname{ch}(ax)}{az}\,dz - dt = 0.$$

Подставим ν_2 в систему (5.16) и построим $\mathcal{F}$-кораспределение Q_{ν_2}:

$$\begin{cases} dx - z\operatorname{ch}^2(ax)dy - \dfrac{\operatorname{sh}(ax)\operatorname{ch}(ax)}{az}\,dz = 0, \\ 2az\operatorname{sh}(ax)\operatorname{ch}(ax)dx + \operatorname{ch}^2(ax)dz = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы являются интегралы

$$\Phi_1 = z\operatorname{ch}^2(ax), \qquad \Phi_2 = yz\operatorname{ch}^2(ax) - \operatorname{sh}(ax)\operatorname{ch}(ax)/a.$$

Интеграл Φ_1 не зависит от y, поэтому он является интегралом и кораспределения Q_{ν_1}.

Теперь необходимо найти третье кораспределение Q_{ν_3}, которое бы удовлетворяло условию теоремы 8, т. е. кораспределение, одним из интегралов которого должна быть функция Φ_2, а другим — любой интеграл кораспределения Q_{ν_1}.

Среди факторизующих кораспределений будем искать такие, интегралами которых являются x и Φ_2, т. е. среди кораспределений вида (5.16) нужно найти кораспределение, эквивалентное

$$\begin{cases} dx = 0, \\ z\,dy + y\,dz = 0. \end{cases} \tag{5.41}$$

Для этого уравнения (5.41) подставим в систему (5.16) и получим, что функция ν_3 должна удовлетворять следующему условию:

$$\nu_3 = -\frac{yz}{z + yH} = -\frac{y}{1 - ayz\operatorname{th}(ax)}.$$

Легко проверить, что функция ν_3 является решением уравнения (5.40), т. е. t-кораспределение S_{ν_3} является факториальным

$$dx - \frac{z}{1 - ayz\operatorname{th}(ax)}\,dy - \frac{y}{1 - ayz\operatorname{th}(ax)}\,dz - dt = 0.$$

Таким образом, мы имеем три t-кораспределения S_{ν_1}, S_{ν_2} и S_{ν_3}, которые удовлетворяют условию теоремы 8. Следовательно, систему (2.26) можно декомпозировать на независимые уравнения. Для этого необходимо сделать следующую замену переменных:

$$\begin{aligned}
&\tilde{x} = x,\\
&\tilde{y} = yz\operatorname{ch}^2(ax) - \operatorname{sh}(ax)\operatorname{ch}(ax)/a,\\
&\tilde{z} = z\operatorname{ch}^2(ax),
\end{aligned}$$

где первое уравнение является интегралом кораспределения $Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_3}$, второе — интегралом кораспределения $Q_{\nu_2} \cap Q_{\nu_3}$, а третье — интегралом кораспределения $Q_{\nu_1} \cap Q_{\nu_2}$.

В новых координатах факториальные t-кораспределения S_{ν_1}, S_{ν_2} и S_{ν_3} порождаются следующими уравнениями Пфаффа:

$$\begin{aligned}
&-d\tilde{x} + \frac{d\tilde{z}}{a\tilde{z}\operatorname{th}(a\tilde{x})} - dt = 0,\\
&-d\tilde{y} + \frac{\tilde{y}\,d\tilde{z}}{\tilde{z}} - dt = 0,\\
&\frac{a\tilde{y}\operatorname{th}(a\tilde{x})d\tilde{x}}{1 - a\tilde{y}\operatorname{th}(a\tilde{x})} - \frac{d\tilde{y}}{1 - a\tilde{y}\operatorname{th}(a\tilde{x})} - dt = 0.
\end{aligned}$$

После некоторых преобразований эти уравнения примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
&a\operatorname{th}(a\tilde{x})d\tilde{x} + a\operatorname{th}(a\tilde{x})dt = \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}},\\
&\frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{dt}{\tilde{y}} = \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}},\\
&\frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{dt}{\tilde{y}} = a\operatorname{th}(a\tilde{x})d\tilde{x} + a\operatorname{th}(a\tilde{x})dt.
\end{aligned}$$

Указанные преобразованные три уравнения сводятся к двум равенствам

$$a\operatorname{th}(a\tilde{x})d\tilde{x} + a\operatorname{th}(a\tilde{x})dt = \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} + \frac{dt}{\tilde{y}} = \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}}.$$

Приравняв каждую часть этих равенств к $v\,dt$ и разделив их на dt, получим следующую управляемую систему:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -1 + \dfrac{\operatorname{cth}(a\tilde{x})}{a}\, v, \\ \dot{\tilde{y}} = -1 + \tilde{y} v, \\ \dot{\tilde{z}} = \tilde{z} v, \end{cases} \qquad \text{где } v = 2a \operatorname{th}(ax) + az \operatorname{th}(ax) u. \tag{5.42}$$

Мы видим, что в новых переменных управляемая система декомпозирована на три независимых уравнения, каждое из которых является факторсистемой исходной системы $(\widetilde{2.26})$.

Выводы раздела

В этом разделе рассмотрена задача факторизации приведенной системы (2.1) и найдены условия существования факторизации в категории $\mathcal{AS}$. С помощью общих методов факторизации найдены факторсистемы для канонических C-систем. Показано, что при соответствующей замене переменных канонические C-системы декомпозируются на три независимых уравнения, каждое из которых является факторсистемой исходной системы. Так как полученные управляемые системы более простые, чем найденные в разд. 2, то их можно принять за канонические C-системы, но они не являются приведенными.

6. Задача терминального управления

В качестве иллюстрации практического использования теории, изложенной в монографии, рассмотрим пример решения задачи терминального управления для аффинных управляемых C-систем.

Для аффинной управляемой системы (1.1)

$$\dot{y} = f_0(y) + \sum_{j=1}^{s} f_j(y)u^j, \qquad y \in N \subset \mathbb{R}^3,$$

с фазовым пространством N задача терминального управления заключается в следующем. Заданы точки y_0, $y_f \in N$. Требуется определить такое управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$ и соответствующее решение $y(t)$, $t \in [t_0, T]$, что $y(t_0) = y_0$, $y(T) = y_f$. Задаче терминального управления были посвящены многочисленные исследования (см. обзор [49], а также [5, 50]).

При решении задачи терминального управления представляется целесообразным перейти от исходной системы к эквивалентной системе наиболее простого вида, для нее решить задачу терминального управления и затем с помощью обратного преобразования перенести решение в исходную систему. В качестве систем простого вида можно использовать канонические формы существующей классификации управляемых систем.

§ 6.1. C-Системы класса $(0, C_2)^+$

Рассмотрим каноническую форму класса $(0, C_2)^+$ C-систем в факторизованном виде (5.33)

$$\begin{cases} \dot{p} = 1 + \nu_2 p u, \\ \dot{q} = u, \\ \dot{r} = 1 + \nu_3 r u, \end{cases} \tag{6.1}$$

где $\nu_2 = a/2 + \sqrt{1 + (a/2)^2}$, $\nu_3 = a/2 - \sqrt{1 + (a/2)^2}$ являются корнями квадратного уравнения $1 + a\nu - \nu^2 = 0$ ($a = {}^1\!/\!{}_2 C_2$, $C_2 \geqslant 0$).

Наша задача состоит в нахождении такого управления $u(t)$ и соответствующего решения $(p(t), q(t), r(t))$ системы (6.1), которое бы связало начальную точку (p_0, q_0, r_0) фазового пространства с конечной точкой (p_f, q_f, r_f).

Так как система (6.1) факторизована на независимые уравнения, то теперь каждое уравнение можно проинтегрировать независимо от других. Решения системы (6.1) можно записать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \left(p_0 + \int\limits_0^t e^{-\nu_2 U(\tau)} d\tau\right) e^{\nu_2 U(t)}, \\
q(t) &= q_0 + U(t), \\
r(t) &= \left(r_0 + \int\limits_0^t e^{-\nu_3 U(\tau)} d\tau\right) e^{\nu_3 U(t)},
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

где функция $U(t)$ определена так:

$$
U(t) = \int\limits_0^t u(\tau) d\tau. \tag{6.3}
$$

Подставив в уравнения (6.2) координаты начальной и конечной точек, получим уравнения

$$
q_f = q_0 + U(T), \tag{6.4, а}
$$

$$
p_f = \left(p_0 + \int\limits_0^T e^{-\nu_2 U(\tau)} d\tau\right) e^{\nu_2 U(T)}, \tag{6.4, б}
$$

$$
r_f = \left(r_0 + \int\limits_0^T e^{-\nu_3 U(\tau)} d\tau\right) e^{\nu_3 U(T)}. \tag{6.4, в}
$$

Из уравнения (6.4, а) выражаем $U(T)$ и подставляем в уравнения (6.4, б) и (6.4, в). Разрешая их относительно интегралов, получим

$$
U(0) = 0, \tag{6.5, а}
$$

$$U(T) = q_f - q_0, \tag{6.5, б}$$

$$\int\limits_0^T e^{-\nu_2 U(\tau)} d\tau = p_f e^{-\nu_2 (q_f - q_0)} - p_0, \tag{6.5, в}$$

$$\int\limits_0^T e^{-\nu_3 U(\tau)} d\tau = r_f e^{-\nu_3 (q_f - q_0)} - r_0. \tag{6.5, г}$$

Заметим, что уравнение (6.5, а) является следствием определения в уравнении (6.3) функции $U(t)$.

Таким образом, чтобы решить поставленную задачу, необходимо найти функцию $U(t)$, удовлетворяющую уравнениям (6.5). Тогда искомое управление $u(t)$ найдем по формуле $u(t) = \dot{U}(t)$.

Анализируя уравнения (6.5), видим, что интегралы в левой части всегда больше нуля. Поэтому решение задачи терминального управления может существовать только тогда, когда координаты начальной и конечной точек удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} P &= p_f e^{-\nu_2 (q_f - q_0)} - p_0 > 0, \\ R &= r_f e^{-\nu_3 (q_f - q_0)} - r_0 > 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Для единообразия также обозначим $Q = q_f - q_0$.

Чтобы найти решение функциональных уравнений (6.5), необходимо подобрать конкретную функцию $U(t)$ с параметрами. Причем число параметров в этой функции должно быть такое, чтобы число неизвестных было не менее числа уравнений. В нашем случае число уравнений — 4, в которые входит одно неизвестное T. Таким образом, функция $U(t)$ должна зависеть как минимум от трех параметров.

Рассмотрим функцию вида $U(t) = u_2 t^2 + u_1 t + u_0$. Подставим ее в уравнения (6.5). Из уравнения (6.5, а) следует, что $u_0 = 0$.

Оставшиеся уравнения приобретут вид

$$\begin{aligned} P &= \int\limits_0^T \exp(-\nu_2(u_2t^2 + u_1t))\,dt, \\ Q &= u_2T^2 + u_1T, \\ R &= \int\limits_0^T \exp(-\nu_3(u_2t^2 + u_1t))\,dt, \end{aligned} \tag{6.7}$$

или, извлекая интегралы, получим систему

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{\pi}{4\nu_2u_2}}\,e^{\frac{\nu_2u_1^2}{4u_2}}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{\nu_2(2Tu_2+u_1)}{2\sqrt{\nu_2u_2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\nu_2u_1}{2\sqrt{\nu_2u_2}}\right)\right), \\ Q &= u_2T^2 + u_1T, \\ R &= \sqrt{\frac{\pi}{4\nu_3u_2}}\,e^{\frac{\nu_3u_1^2}{4u_2}}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{\nu_3(2Tu_2+u_1)}{2\sqrt{\nu_3u_2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\nu_3u_1}{2\sqrt{\nu_3u_2}}\right)\right). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Таким образом, задача терминального управления свелась к системе трансцендентных уравнений, для решения которой можно применить различные численные методы.

Систему (6.8) можно рассматривать как преобразование трехмерного пространства $(u_1, u_2, T) \longrightarrow (P, Q, R)$. Исследуем, существует ли для него обратное преобразование. Для этого нужно проверить якобиан преобразования на равенство нулю. Ответ на этот вопрос дает следующая лемма.

Лемма 4. *В пространстве переменных u_1, u_2, T не существует такой области, в которой якобиан преобразования* (6.8) *был бы равен тождественно нулю.*

Доказательство. Чтобы доказать утверждение, представим преобразование (6.8) в виде композиции двух преобразований

$$(u_1, u_2, T) \longrightarrow (\alpha, \beta, \tau) \longrightarrow (P, Q, R).$$

Первое преобразование $(u_1, u_2, T) \longrightarrow (\alpha, \beta, \tau)$ определим следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{u_1}{2\sqrt{u_2}}, \\ \beta = \sqrt{u_2}, \\ \tau = T\sqrt{u_2} + \dfrac{u_1}{2\sqrt{u_2}}. \end{cases} \tag{6.9}$$

Это преобразование является обратимым. Обратное имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_1 = 2\alpha\beta, \\ u_2 = \beta^2, \\ T = \dfrac{\tau - \alpha}{\beta}. \end{cases} \tag{6.10}$$

Подставляя (6.10) в систему (6.7), получим уравнения, определяющие преобразование $(\alpha, \beta, \tau) \longrightarrow (P, Q, R)$:

$$\begin{cases} P = \dfrac{\exp(\nu_2 \alpha^2)}{\beta} \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\tau} \exp(-\nu_2 s^2)\, ds, \\ Q = \tau^2 - \alpha^2, \\ R = \dfrac{\exp(\nu_3 \alpha^2)}{\beta} \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\tau} \exp(-\nu_3 s^2)\, ds. \end{cases} \tag{6.11}$$

Если для сокращения объема выкладок ввести обозначения

$$P_1 = \int\limits_{\alpha}^{\tau} \exp(-\nu_2 s^2)\, ds, \qquad R_1 = \int\limits_{\alpha}^{\tau} \exp(-\nu_3 s^2)\, ds,$$

то система (6.11) запишется в виде

$$\begin{cases} P = \dfrac{\exp(\nu_2 \alpha^2)}{\beta}\, P_1, \\ Q = \tau^2 - \alpha^2, \\ R = \dfrac{\exp(\nu_3 \alpha^2)}{\beta}\, R_1. \end{cases} \tag{6.12}$$

Для этой системы запишем матрицу Якоби

$$J = \frac{\partial PQR}{\partial\alpha\beta\tau} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\beta}\,(2\nu_2\alpha\beta P - 1) & -\dfrac{P}{\beta} & -\dfrac{P_{1\tau}}{\beta P_{1\alpha}} \\ -2\alpha & 0 & 2\tau \\ \dfrac{1}{\beta}\,(2\nu_3\alpha\beta R - 1) & -\dfrac{R}{\beta} & -\dfrac{R_{1\tau}}{\beta R_{1\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Определитель Δ матрицы J можно представить в таком виде:

$$\Delta = \frac{2R_1^2}{\beta^3 P_{1\alpha} R_{1\alpha}} \left(\alpha\Big(\frac{P_1}{R_1}\Big)_\tau + \tau\Big(\frac{P_1}{R_1}\Big)_\alpha + 2\tau\alpha(\nu_2 - \nu_3)\frac{P_1}{R_1} \right).$$

Если бы этот определитель был тождественно равен нулю ($\Delta \equiv 0$), то функция $\varphi(\alpha,\tau) = P_1/R_1$ была бы решением дифференциального уравнения в частных производных $\alpha\varphi_\tau + \tau\phi_\alpha + 2\alpha\tau(\nu_2 - \nu_3)\varphi = 0$. Любое решение этого уравнения можно представить в виде $\varphi(\alpha,\tau) = f(\tau^2 - \alpha^2)\exp(-(\nu_2 - \nu_3)\alpha^2)$, где f — произвольная функция. Однако функцию P_1/R_1 в таком виде представить нельзя, так как

$$\frac{P_1}{R_1} = \frac{(\mathrm{erf}(\tau\sqrt{\nu_2}) - \mathrm{erf}(\alpha\sqrt{\nu_2}))\sqrt{\nu_3}}{(\mathrm{erf}(\tau\sqrt{\nu_3}) - \mathrm{erf}(\alpha\sqrt{\nu_3}))\sqrt{\nu_2}}.$$

Следовательно, не существует такой области в пространстве параметров α, β, τ, в которой бы якобиан преобразования (6.11) был бы равен нулю. Он может быть равен нулю только на двумерных или одномерных поверхностях. Например, он равен нулю на поверхности $\tau = \alpha$, но это противоречит условию задачи терминального управления, так как условие $\tau = \alpha$ означает $T = 0$. □

Пример. Для управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = (x + 2z)u, \end{cases} \tag{6.14}$$

нужно найти такое управление $u(t)$, которое бы переводило систему, например, из точки A с координатами $(1,1,1)$ в точку B с координатами $(6,0,{}^1\!/_2)$.

Система (6.14) является канонической C-системой (2.23) в которой $a=2$. Задачу терминального управления сначала решим для факторизованной управляемой системы, а затем найденное решение перенесем для исходной управляемой системы.

Преобразование

$$\begin{cases} p = x + \nu_2 z, \\ q = y, \\ r = x + \nu_3 z, \end{cases} \qquad \text{где } \nu_2 = 1+\sqrt{2}, \quad \nu_3 = 1-\sqrt{2}, \tag{6.15}$$

найденное в разд. 5 (см. (5.32)), переводит эту систему в систему (6.1). При этом преобразовании управление u не меняется. Обратное преобразование имеет вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{p\nu_3 - r\nu_2}{\nu_3 - \nu_2}, \\ y = q, \\ z = \dfrac{r-p}{\nu_3-\nu_2}. \end{cases} \tag{6.16}$$

Преобразование (6.15) переводит точки A и B в точки $\widetilde{A} = (2+\sqrt{2}, 1, 2-\sqrt{2})$ и $\widetilde{B} = (6\,{}^1\!/_2 + {}^1\!/_2\sqrt{2}, 0, 6\,{}^1\!/_2 - {}^1\!/_2\sqrt{2})$.

Теперь необходимо проверить, удовлетворяют ли координаты точек $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ условию (6.6). Если хотя бы одно из условий (6.6) не выполняется, решение задачи с выбранными координатами не существует. В нашем случае имеем $P \approx 77.16825825 > 0$, $R \approx 3.242503826 > 0$, т. е. условия выполняются.

Для нахождения терминального управления следует решить систему уравнений (6.8), которая в нашем случае будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
&u_2T^2 + u_1T = -1,\\
&\sqrt{\frac{\pi}{4(1+\sqrt{2}u_2)}}\,\exp\left(\frac{(1+\sqrt{2})u_1^2}{4u_2}\right)\times\\
&\times\left(\operatorname{erf}\left(\frac{(1+\sqrt{2})(2Tu_2+u_1)}{2\sqrt{(1+\sqrt{2})u_2}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}\,u_1}{2\sqrt{u_2}}\right)\right)=77.168,\\
&\sqrt{\frac{\pi}{4(1-\sqrt{2}u_2)}}\,\exp\left(\frac{(1-\sqrt{2})u_1^2}{4u_2}\right)\times\\
&\times\left(\operatorname{erf}\left(\frac{(1-\sqrt{2})(2Tu_2+u_1)}{2\sqrt{(1-\sqrt{2})u_2}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{1-\sqrt{2}}\,u_1}{2\sqrt{u_2}}\right)\right)=3.242.
\end{aligned}
$$

Численно решая данную систему с помощью универсального математического пакета Maple V®, получим следующее результат:

$$T \approx 4.896407707,\ u_1 \approx -0.8481401985,\ u_2 \approx 0.1315063773.$$

Таким образом, применяя терминальное управление

$$u(t) = 2u_2t + u_1 = 0.2630127546t - 0.8481401985, \tag{6.17}$$

попадаем из точки $\widetilde{A}$ в точку $\widetilde{B}$ за время $T = 4.896407707$. Подставив управление (6.17) в систему (6.2), получим решение факторизованной системы

$$
\begin{aligned}
&p(t) = (45.68487429 + 42.70545903\operatorname{erf}(0.5634576110t -\\
&\quad -1.816988120))\exp(0.3174844796t^2 - 2.047591570t),\\
&q(t) = 1 + 0.1315063773t^2 - 0.8481401985t, \qquad (6.18)\\
&r(t) = (2.829108206 - 2.155054408\operatorname{erfi}(0.2333917842t -\\
&\quad -0.7526211220))\exp(-0.05447172497t^2 + 0.3513111727t),
\end{aligned}
$$

где функция $\operatorname{erfi}(x) = i\operatorname{erf}(ix)$ является действительной функцией.

С помощью обратного преобразования (6.16) найдем решение для исходной системы

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \exp(0.3174844797t^2 - 2.047591571t)\bigl(6.690394950 + \\
&\quad +6.254069686\,\mathrm{erf}(0.5634576110t - 1.816988120)\bigr) + \\
&\quad + \exp(-0.05447172510t^2 + 0.3513111735t)\bigl(2.414794902 + \\
&\quad +1.839453998\,\mathrm{erfi}(-0.2333917842t + 0.7526211220)\bigr), \\
y(t) &= 1 + 0.1315063773t^2 - 0.8481401985t, \qquad (6.19)\\
z(t) &= \exp(0.3174844797t^2 - 2.047591571t)\bigl(16.15204220 + \\
&\quad +15.09865984\,\mathrm{erf}(0.5634576110t - 1.816988120)\bigr) - \\
&\quad - \exp(-0.05447172510t^2 + 0.3513111735t)\bigl(1.000240799 + \\
&\quad +0.7619267929\,\mathrm{erfi}(-0.2333917842t + 0.7526211220)\bigr).
\end{aligned}
$$

Таким образом, если к управляемой системе (6.14) применить управление (6.17), то решение (6.19) этой системы соединит точку A с точкой B.

На рисунке 1 изображены функции $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

§ 6.2. C-Системы класса $(C_1, 0)^+$, $C_1 > 0$

Рассмотрим следующую каноническую форму (2.22) из класса $(C_1, 0)^+$, $C_1 > 0$:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = 1 + zu, \\
\dot{y} = u, \\
\dot{z} = az^2\,\mathrm{tg}(ax)u,
\end{cases}
\qquad a > 0.
$$

Чтобы решить поставленную задачу терминального управления для выбранной системы, предварительно декомпозируем эту систему на независимые уравнения. В разд. 5 было показано, что если сделать замену переменных (5.28)

$$
\begin{cases}
\tilde{x} = x, \\
\tilde{y} = yz(1 + \sin(ax)) + \cos(ax)/a, \\
\tilde{z} = z(1 + \sin(ax)),
\end{cases}
$$

Рис. 1. График функций $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

и замену управлений $v = \frac{a\cos(ax)}{1+\sin(ax)} + \frac{az}{\cos(ax)}\,u$, то система (2.22) преобразуется к декомпозированному виду (5.29)

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \sin(a\tilde{x}) + \dfrac{\cos(a\tilde{x})}{a}\,v, \\ \dot{\tilde{y}} = -1 + \tilde{y}v, \\ \dot{\tilde{z}} = \tilde{z}v. \end{cases}$$

Первое уравнение системы (5.29) можно свести к уравнению Риккати с помощью замены переменных: $p = \mathrm{tg}(a\tilde{x}/2)$. Если заменить $\tilde{y}$ на q, а $\tilde{z}$ на r, то система (5.29) примет вид

$$\begin{cases} \dot{p} = ap + ((1-p^2)/2)v, \\ \dot{q} = -1 + qv, \\ \dot{r} = rv. \end{cases} \tag{6.20}$$

В системе (6.20) уравнение Риккати с произвольной функцией $v(t)$ не интегрируется в квадратурах, поэтому исчерпывающего анализа этой системы провести не удалось.

Рассмотрим систему, состоящую только из двух последних уравнений системы (6.20)

$$\begin{cases} \dot{q} = -1 + qv, \\ \dot{r} = rv, \end{cases} \tag{6.21}$$

и найдем решения этой системы при произвольных управлениях. Эти решения имеют вид

$$\begin{cases} q(t) = q_0 \exp(V(t)) - \exp(V(t)) \int\limits_0^t \exp(-V(\tau)) d\tau, \\ r(t) = r_0 \exp(V(t)), \end{cases} \tag{6.22}$$

где $V(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$. Если ввести функцию

$$S(t) = \int\limits_0^t \exp(-V(\tau)) d\tau,$$

тогда решения (6.22) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} q(t) = \dfrac{q_0 - S(t)}{\dot{S}(t)}, \\ r(t) = \dfrac{r_0}{\dot{S}(t)}. \end{cases} \tag{6.23}$$

По определению функция $S(t)$ является произвольной монотонно возрастающей функцией, которая удовлетворяет условиям $S(0) = 0$ и $\dot{S}(0) = 1$.

Для системы (6.21) задача терминального управления сводится к следующей постановке. Необходимо найти дважды кусочно дифференцируемую, монотонную функцию $S(t)$, удовлетворяющую краевым условиям

$$S(0) = 0, \qquad \dot{S}(0) = 1,$$

Рис. 2. Область достижимости для точки (q_0, r_0), $r_0 > 0$

Рис. 3. Область достижимости для точки (q_0, r_0), $r_0 < 0$

$$S(T) = q_0 - r_0 q_f / r_f, \qquad \dot{S}(T) = r_0 / r_f.$$

Соответствующее управление находится по формуле $v(t) = -\ddot{S}(t)/\dot{S}(t)$.

Так как функция $S(t)$ монотонно возрастающая, то должны выполняться следующие неравенства: $r_0/r_f > 0$, $q_0 > r_0 q_f / r_f$. Эти неравенства для любой начальной произвольной точки (q_0, r_0) задают область достижимости системы (6.21). Для случая $r_0 > 0$, область достижимости показанна на рис. 2.

Рис. 3 иллюстрирует область достижимости при $r_0 < 0$.

Снова вернемся к системе (6.20) и проведем анализ задачи терминального управления, используя кусочно-постоянные управления. Теперь для каждого уравнения системы (6.20) найдем стационарное управление, т. е. управление, при котором уравнение имеет стационарное решение.

Уравнение $\dot{p} = ap + ((1-p^2)/2)v$ имеет стационарное решение, если применить управление

$$v = -\frac{2ap}{1-p^2}. \tag{6.24}$$

Точки (p, v), где v — стационарное управление для p, являются особыми точками. Множество особых точек для первого уравнения системы (6.20) изображено на рис. 4.

Рис. 4. Особые точки и направления движения для координаты p

Стационарное решение уравнения $\dot{q} = -1 + qv$ будет получено при управлении

$$v = \frac{1}{q}. \tag{6.25}$$

Особые точки для этого уравнения изображены на рис. 5.

Рис. 5. Особые точки движения для координаты q

Для уравнения $\dot{r} = rv$ стационарное решение будет получено при $r = 0$ или при $v = 0$. Особые точки для этого уравнения изображены на рис. 6.

Рассмотрим решения системы (6.20) при постоянных управлениях v_0.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} \ln\left(\dfrac{(p-\lambda_2)(p_0-\lambda_1)}{(p_0-\lambda_2)(p-\lambda_1)}\right) = t, \\ \dfrac{1}{v_0} \ln\left(\dfrac{qv_0 - 1}{q_0 v_0 - 1}\right) = t, \\ \dfrac{1}{v_0} \ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right) = t, \end{cases} \tag{6.26}$$

Рис. 6. Особые точки и направления движения для координаты r

где $\lambda_1 = (a + \sqrt{a^2 + v_0^2})/v_0$, $\lambda_2 = (a - \sqrt{a^2 + v_0^2})/v_0$. Исходя из этих уравнений, определим напрвления движения при постоянных управлениях в областях между особыми точками, и изобразим их стрелками на рис. 4, 5, 6.

Анализируя рис. 4, укажем области достижимости для первого уравнения управляемой системы (6.20) при кусочно-постоянном управлении. Для начальной точки $p_0 \in]-1, 1[$ областью достижимости является вся прямая $p \in]-\infty, +\infty[$. А если $p_0 \in]-\infty, -1[$, то в этом случае областью достижимости будет этот же интервал. Аналогично, если $p_0 \in]1, +\infty[$, то областью достижимости будет интервал $]1, +\infty[$.

Соответственно для второго уравнения системы (6.20) областями достижимости при кусочно-постоянном управлении будут следующие интервалы (рис. 5): при $q_0 \in]0, +\infty[$ областью достижимости является вся прямая $q \in]-\infty, +\infty[$; если $q_0 \in]-\infty, 0[$, то область достижимости совпадает с этим же интервалом.

Если для третьего уравнения системы (6.20) начальная точка $r_0 < 0$, то и конечная точка $r < 0$, а если же $r_0 > 0$, то $r > 0$.

Таким образом, в трехмерном фазовом пространстве управляемой системы (6.20) мы можем отсечь области, для которых задача терминального управления решена быть не может.

Если ограничиться только постоянными управлениями, то задача терминального управления для системы (6.20) сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+v_0^2}} \ln\left(\frac{(p_f-\lambda_2)(p_0-\lambda_1)}{(p_0-\lambda_2)(p_f-\lambda_1)}\right) = \\ = \frac{1}{v_0}\ln\left(\frac{q_f v_0 - 1}{q_0 v_0 - 1}\right) = \frac{1}{v_0}\ln\left(\frac{r_f}{r_0}\right) = T, \quad (6.27)$$

где p_0, q_0, r_0 — координаты начальной точки, а p_f, q_f, r_f — координаты конечной точки и T — время движения из начальной точки в конечную.

Из второго равенства системы (6.27), найдя управление $v_0 = \frac{r_f - r_0}{q_0 r_f - q_f r_0}$ и подставляя его в первое уравнение системы, проверяем, удовлетворяет ли управление этому уравнению. Если удовлетворяет, то задача терминального управления решена. В противном случае следует рассмотреть кусочно-постоянное управление.

Рассмотрим случай, когда управление является ступенчатой функцией. Пусть эта функция имеет вид

$$v = \begin{cases} v_1 & 0 \leqslant t < t_1, \\ v_2 & t_1 < t. \end{cases}$$

При таком управлении для решения задачи терминального управления следует решить систему уравнений

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+v_1^2}}\ln\left(\frac{(p_1-\lambda_2^1)(p_0-\lambda_1^1)}{(p_0-\lambda_2^1)(p_1-\lambda_1^1)}\right)=$$
$$=\frac{1}{v_1}\ln\left(\frac{q_1v_1-1}{q_0v_1-1}\right)=\frac{1}{v_1}\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)=t_1,$$
$$\frac{1}{\sqrt{a^2+v_2^2}}\ln\left(\frac{(p_f-\lambda_2^2)(p_1-\lambda_1^2)}{(p_1-\lambda_2^2)(p_f-\lambda_1^2)}\right)=$$
$$=\frac{1}{v_2}\ln\left(\frac{q_fv_2-1}{q_1v_2-1}\right)=\frac{1}{v_2}\ln\left(\frac{r_f}{r_1}\right)=t_2,$$

где $t_2=T-t_1$; λ_1^1, λ_2^1 — корни уравнения $a\lambda+((1-\lambda^2)/2)v_1=0$; а λ_1^2, λ_2^2 — корни уравнения $a\lambda+((1-\lambda^2)/2)v_2=0$. В этой системе имеется четыре уравнения с пятью неизвестными (v_1,v_2,p_1,q_1,r_1), что дает некоторый простор для решения. Численно решая систему и найдя v_1,v_2, получим управление $v(t)$, которое решает задачу терминального управления.

Выводы раздела

Факторизация канонических управляемых систем на независимые уравнения позволяет найти решения систем либо в квадратурах, либо при постоянных управлениях и проанализировать (решить) задачу терминального управления для C-систем.

Заключение

При исследовании трехмерных аффинных управляемых систем было использовано два подхода. Первый подход основывался на поиске преобразований, упрощающих системы и приводящих их к более простому виду. Сюда же относится проблема классификации и поиска канонических форм. Второй подход состоял в поиске симметрий или допускаемых преобразований управляемых систем.

В рамках первого подхода при поиске преобразования одной приведенной системы к другой были найдены необходимые условия локальной эквивалентности приведенных систем. Симметричный вид этих условий позволил выделить новый тип управляемых систем — C-системы. Для C-систем условия локальной эквивалентности являются не только необходимыми, но и достаточными. Это дало возможность описать классы эквивалентности C-систем, т. е. установить их классификацию. Классы эквивалентности для C-систем обозначаются $(C_1,\ C_2)^+$ и $(C_1,\ C_2)^-$, где C_1 и C_2 — действительные числа и $C_2 \geqslant 0$. Если $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$, то классы пусты.

Для каждого класса эквивалентности C-систем, кроме класса $(C_1,\ 0)^-$, $C_1 > 0$, найдены представители, которые можно принять за канонические формы.

- Класс $(C_1,\ 0)^+$, $C_1 > 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = az^2 \operatorname{tg}(ax)\, u, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/_2\sqrt{C_1}.$$

- Класс $(0,\ C_2)^+$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = (x + az)u, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/_2 C_2.$$

- Класс $(0,\ C_2)^-$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = (-x + az)u, \end{cases} \qquad \text{где } a = {}^1\!/_2 C_2.$$

- Класс $(C_1,\ 0)^+$, $C_1 < 0$ (два представителя):

$$\begin{cases} \dot x = 1 + zu, \\ \dot y = u, \\ \dot z = \left(e^{2ax} + {}^1\!/_2\, az^2\right) u, \end{cases} \quad \text{где } a = {}^1\!/_2 \sqrt{-C_1}.$$

$$\begin{cases} \dot x = 1 + zu, \\ \dot y = u, \\ \dot z = -az^2 \operatorname{cth}(ax) u, \end{cases} \quad \text{где } a = {}^1\!/_2 \sqrt{-C_1}.$$

- Класс $(C_1,\ 0)^-$, $C_1 < 0$ (два представителя):

$$\begin{cases} \dot x = 1 + zu, \\ \dot y = u, \\ \dot z = \left(-e^{2ax} + {}^1\!/_2\, az^2\right) u, \end{cases} \quad \text{где } a = {}^1\!/_2 \sqrt{-C_1}.$$

$$\begin{cases} \dot x = 1 + zu, \\ \dot y = u, \\ \dot z = -az^2 \operatorname{th}(ax) u, \end{cases} \quad \text{где } a = {}^1\!/_2 \sqrt{-C_1}.$$

Для различных задач управления может быть удобным использование различных представителей классов.

В рамках второго подхода при исследовании трехмерных аффинных управляемых систем (поиска симметрий) найдены допускаемые алгебры Ли для 13 раннее известных [38] канонических систем I–VII и IX–XIV. Все допускаемые алгебры оказались бесконечномерными. Для приведенных систем типа VIII доказана теорема о том, что для них допускаемые алгебры Ли конечномерны и размерность их не больше трех.

Найдены допускаемые алгебры Ли для канонических C-систем. Они все оказались трехмерными. Доказана теорема о том, что для приведенной системы допускаемая алгебра Ли является трехмерной тогда и только тогда, когда система является C-системой. На основании этой теоремы дано инвариантное определение C-систем, не зависящее от приведенной формы: трехмерная аффинная управляемая система является C-системой, если ее алгебра $\mathfrak{a}_1$ трехмерная.

Автором совместно с В. И. Елкиным доказана теорема о том, что трехмерные алгебры, допускаемые C-системами, обладают L-свойством. Следовательно, C-системы — это трехмерные строго L_1-системы. Таким образом, предложенная автором классификация C-систем является классификацией трехмерных строго L_1-систем.

Допускаемая алгебра Ли является классификационным признаком для трехмерных управляемых систем:

– если для трехмерной управляемой системы допускаемая алгебра Ли бесконечномерна, то управляемая система эквивалентна одной из 13 канонических форм по классификации [38];

– если допускаемая алгебра Ли конечномерна, то управляемая система эквивалентна приведенной системе типа VIII по классификации [38];

– если размерность допускаемой алгебры Ли равна трем, то управляемая система является C-системой.

Исследована классификация алгебр Ли над полем действительных чисел размерностью не более трех. Найдены соответствующие инварианты, с помощью которых исследованы структуры допускаемых алгебр для канонических C-систем. Эти допускаемые алгебры распределены по существующей классификации, и выяснено, что для классов $(C_1, 0)^+$ и $(C_1, 0)^-$, где $C_1 \neq 0$, допускаемые алгебры неразрешимы, а для классов $(0, C_2)^+$ и $(0, C_2)^-$ они разрешимы.

Рассмотрена задача факторизации аффинной управляемой системы в категории $\mathcal{AS}$. Применив метод факторизации аффинных управляемых систем, предложенный в [4, с. 237], к приведенной системе, получено условие существования факторсистем.

И, наконец, найдены условия, при которых трехмерные аффинные управляемые системы декомпозируются на независимые уравнения. Применив эти условия к каноническим C-системам, почти во всех случаях C-системы удалось декомпозировать на независимые уравнения.

Рассмотрена задача терминального управления для двух типов канонических C-системам. В качестве примера решена задача терминального управления для конкретной C-системы.

Литература

1. *Brunovsky P.* A classification of linear controllable systems // Kibernetica, 1970. V. 3. P. 173–187.

2. *Hermann R.* The GS algorithm for exact linearisation to Brunovsky normal form // IEEE Trans. Aut. Contr., 1992. V. 37. 2. P. 224–236.

3. *Krener A. J.* On the equivalence of control systems and the linearisation of nonlinear systems // SIAM J. Control., 1973. V. 11. P. 670–676.

4. *Елкин В. И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход М.: Наука. Физматлит, 1997. 320 с.

5. *Крищенко А. П.* Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика, 1984. 6. С. 30–36.

6. *Павловский Ю. Н., Смирнова Т. Г.* Проблема декомпозиции в математическом моделировании. М.: Фазис, 1997. 300 с.

7. *Елкин В. И.* Об условиях агрегирвания управляемых динамических систем // ЖВМ и МФ, 1978. Т. 18. 4. С. 928–934.

8. *Черноплеков А. Н.* Алгебраические аспекты факторизации динамических систем // Кибернетика и вычисл. техн, 1981. Вып. 51. С. 29–36.

9. *Елкин В. И.* К вопросу о классификации и канонических формах нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика, 1985. 1. С. 31–41.

10. *Коновалова Л. Б.* О приведении аффинных управляемых систем к линейному виду // Проблемы математики в физико-технических и экономических задачах: Междувед. сб. М.: МФТИ, 1993. С.75–89.

11. *Елкин В. И., Павловский Ю. Н.* Декомпозиция моделей управляемых процессов // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Оптимизация и управление-1 /ВИНИТИ, 1996. Т. 29. С. 185–238.

12. *Елкин В. И.* Методы алгебры и геометрии в теории управления. Векторные поля и группы диффеоморфизмов. М.: ВЦ АН СССР, 1982. 62 с.

13. *Елкин В. И.* Методы алгебры и геометрии в теории управления. Управляемые динамические системы. М.: ВЦ АН СССР, 1984. 66 с.

14. *Елкин В. И.* Методы алгебры и геометрии в теории управления. Аффинные распределения и аффинные системы. М.: МФТИ, 1996. 111 с.

15. *Lie S.* und *Engel F.* Theorie der Transformationsgruppen. Bd. 3. Leipzig, 1893.

16. *Lie S.* Vorlesungen über differentialgleichungen mit becaunten infinitesimalen transformationen / Leipzig, Druck und verlag von Teubner, 1894. 568 p.

17. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. М. 1947.

18. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.

19. *Павловский Ю. Н.* Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры //Ж.вычисл. мат. и мат. физ, 1974. Т. 14. 4 С. 869–872;/ Т. 14 5 С. 1093–1193.

20. *Павловский Ю. Н.* Теория факторизации и декомпозиции управляемых динамических систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1984. 2. С. 45–47.

21. *Павловский Ю. Н., Яковенко Г. Н.* Группы, допускаемые динамическими системами // Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск: Наука, 1982. С. 155–189.

22. *Кухтенко А. И., Семенов В. Н., Удилов В. В.* Геометрические и абстрактно-алгебраические методы в теории автоматического управления // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наукова думка, 1975. Вып. 27. С. 3–20.

23. *Канатников А. Н., Крищенко А. П.* Симметрии и декомпозиция нелинейных управляемых систем // Дифференц. уравнения, 1994. Т. 30, 11 С. 1886–1891.

24. *Яковенко Г. Н.* Декомпозиция управляемых нелинейных систем с группой симметрий // Механика гироскопических систем. Киев: Вища школа, 1986. Вып. 5. С. 131–137.

25. *Яковенко Г. Н.* Симметрия по состояниям в системах с управлением // Прикладная механика и математика: Междувед. сб. М.: МФТИ, 1992. С. 155–175.

26. *Ивашко Д. Г.* Эквивалентные преобразования и допускаемые алгебры для трехмерных управляемых систем // Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 1995. С. 37–50.

27. *Ивашко Д. Г.* О классификации трехмерных управляемых систем // Моделирование процессов управления и обработки информации: М: Междувед. сб. МФТИ, 1996. С. 142–153.

28. *Елкин В. И.*, *Ивашко Д. Г.* Допускаемые алгебры Ли для некоторых типов аффинных управляемых систем // Дифференциальные уравнения, 1996. Т. 32. 11. С. 1473–1479.

29. *Ивашко Д. Г.* Структура конечномерных допускаемых алгебр трехмерных управляемых систем // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики: М: Междувед. сб. МФТИ, 1997. С. 97–109.

30. *Ивашко Д. Г.* О факторизации трехмерных управляемых систем // Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН. 1997.

31. *Ивашко Д. Г.* О классификации и допускаемых алгебрах трехмерных управляемых систем // Алгебраические и аналитические методы в теории дифференциальных управлений. Труды международной конференции. Орел, 14–19 ноября 1996 г. Орел, 1996. С. 61–62.

32. *Ивашко Д. Г.* О структуре допускаемых алгебр трехмерных управляемых систем // Управление большими системами. Материалы научно-практической конференции (22–26 сентября 1997г., М.). Серия ««Информатизация России на пороге XXI века»». М.: СИНТЕГ, 1997. С. 309.

33. *Елкин В. И.*, *Ивашко Д. Г.* О связи понятий C-систем и L-систем в теории аффинных управляемых систем // Дифференциальные уравнения, 1998. Т. 34. 11. С. 1471–1477.

34. *Елкин В. И., Ивашко Д. Г.* О декомпозиции трехмерных нелинейных управляемых систем // Дифференциальные уравнения 1999. Т. 35. 11. С. 1473–1481.

35. *Ивашко Д. Г.* Об одной задаче терминального управления для C-систем // Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 1999. С. 48–55.

36. *Елкин В. И.* Об управляемых системах, допускающих алгебры Ли с L-свойством // Дифференц. уравнения, 1997. Т. 33, 11. С. 1490–1494.

37. *Елкин В. И.* Автоморфизмы и декомпозиция аффинных управляемых систем // ДАН СССР, 1991. Т. 316. 1. С. 30–32.

38. *Елкин В. И.* О классификации аффинных управляемых систем с фазовым пространством размерности $n < 4$ // ДАН СССР, 1988. Т. 302. 1. С. 18–20.

39. *Елкин В. И.* Общее решение уравнений в частных производных с одинаковой главной частью // Дифференциальные уравнения, 1985. Т. 21. 8. С. 1389–1398.

40. *Елкин В. И.* Эквивалентность, факторизация и сужение аффинных управляемых систем // Дисс. доктора физ.-матем. наук М.: ВЦ РАН, 1992.

41. *Елкин В. И.* Эквивалентность, классификация, факторсистемы и подсистемы аффинных управляемых систем // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. матем. и техн. Тематические обзоры. Оптимизация и управление–1 / ВИНИТИ, 1996. Т. 29. С. 121–184.

42. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. М.: Наука, 1972.

43. *Bianchi L.* Lesioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni sperri. Pisa, 1918.

44. *Гото М., Гроссханс Ф.* Полупростые алгебры Ли. М.: Мир, 1981. 336 с.

45. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964. 356 с.

46. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 496 с.

47. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Госиздат. технико-теоретической литературы, 1953. 488 с.

48. *Елкин В. И.* О декомпозиции управляемых систем на одномерные независимые системы. // Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 1999. С. 92–98.

49. *Жевнин А. А., Колесников К. С., Крищенко А. П., Толокнов А. И.* Синтез алгоритмов терминального управления на основе концепций задач обратной динамики (обзор) //Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1985. 4. С. 180–188.

50. *Жевнин А. А., Крищенко А. П.* Управляемость нелинейных систем и синтез управления // ДАН СССР, 1981. Т. 258. 4, С. 805–809.

Оглавление

Введение 3
1. Основные определения 8
2. Классификация трехмерных аффинных управляемых систем 18
§ 2.1. Существующая классификация 19
§ 2.2. Эквивалентные преобразования приведенной системы 21
§ 2.3. C-Системы и их классификация 28
3. Допускаемые алгебры канонических систем 35
§ 3.1. Трехмерные канонические системы 36
§ 3.2. Приведенная система 38
§ 3.3. C-Системы 42
§ 3.4. Связь между C-системами и L_1-системами . . . 46
4. Структуры допускаемых алгебр 54
§ 4.1. Классификация трехмерных алгебр Ли 55
§ 4.2. Структуры допускаемых алгебр Ли 65
5. Факторизация канонических систем 69
§ 5.1. Условия факторизации управляемых систем . . 70
§ 5.2. Факторизация приведенной системы 74
§ 5.3. Факторизация на независимые уравнения . . . 77
§ 5.4. Факторизация канонических C-систем 80
6. Задача терминального управления 95
§ 6.1. C-Системы класса $(0, C_2)^+$ 96
§ 6.2. C-Системы класса $(C_1, 0)^+$, $C_1 > 0$ 104
Заключение 112
Литература 116