УДК 517.977

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ*

Д. Г. Ивашко

В этой работе исследуются аффинные управляемые системы с трехмерным фазовым пространством. Для аффинной управляемой системы

$$\dot{y} = f_0(y) + \sum_{j=1}^{s} f_j(y)u^j, \qquad y \in N \subset \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

где N — фазовое пространство, являющееся областью, а f_0 и f_j — гладкие векторные поля, задача терминального управления заключается в следующем. Заданы точки y_0, $y_1 \in N$. Требуется определить такое управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ и соответствующее решение $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, что $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1$. При решении задачи терминального управления представляется целесообразным от исходной системы перейти к эквивалентной системе наиболее простого вида, для нее решить задачу терминального управления и затем с помощью обратного преобразования перенести решение в исходную систему. В качестве систем простого вида можно использовать канонические формы существующей классификации управляемых систем.

1. Среди трехмерных управляемых систем рассмотрим системы с трехмерной допускаемой алгеброй. Такие системы называются C-системами [1; 2; 3, с. 176]. В работе [1] получена

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00947)), а также Советом программы поддержки ведущих научных школ (грант 00-15-96137).

классификация C-систем и найдены канонические формы. Рассмотрим одну из таких канонических форм

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \qquad\qquad a \geqslant 0. \\ \dot{z} = (x + az)u, \end{cases} \tag{2}$$

Чтобы решить поставленную задачу для этой системы, предварительно декомпозируем эту систему на независимые уравнения. В работе [4] было показано, что если сделать замену переменных

$$\begin{cases} p = x + \nu_1 z, \\ q = y, \\ r = x + \nu_2 z, \end{cases} \tag{3}$$

где $\nu_1 = a/2 + \sqrt{1 + (a/2)^2}$, $\nu_2 = a/2 - \sqrt{1 + (a/2)^2}$, являются корнями квадратного уравнения $1 + a\nu - \nu^2 = 0$, то система (2) преобразуется к декомпозированному виду

$$\begin{cases} \dot{p} = 1 + \nu_1 pu, \\ \dot{q} = u, \\ \dot{r} = 1 + \nu_2 ru. \end{cases} \tag{4}$$

Преобразование (3) не изменяет управление u.

2. Задача состоит в нахождении такого управления $u(t)$ и соответствующего решения $(p(t), q(t), r(t))$ системы (4), при котором решение при $t = 0$ проходило бы через начальную точку (p_0, q_0, r_0) фазового пространства, а при $t = T > 0$ через конечную точку (p_f, q_f, r_f).

Так как система (4) факторизована на независимые уравнения, то теперь каждое уравнение можно проинтегрировать независимо от других. Решения системы (4) можно записать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \left(p_0 + \int\limits_0^t e^{-\nu_1 U(\tau)} d\tau\right) e^{\nu_1 U(t)}, \\
q(t) &= q_0 + U(t), \\
r(t) &= \left(r_0 + \int\limits_0^t e^{-\nu_2 U(\tau)} d\tau\right) e^{\nu_2 U(t)},
\end{aligned} \tag{5}
$$

где функция $U(t)$ определена так:

$$
U(t) = \int\limits_0^t u(\tau) d\tau. \tag{6}
$$

Подставив в уравнения (5) координаты начальной и конечной точек, получим уравнения

$$
q_f = q_0 + U(T), \tag{7a}
$$

$$
p_f = \left(p_0 + \int\limits_0^T e^{-\nu_1 U(t)}\, dt\right) e^{\nu_1 U(T)}, \tag{7b}
$$

$$
r_f = \left(r_0 + \int\limits_0^T e^{-\nu_2 U(t)}\, dt\right) e^{\nu_2 U(T)}. \tag{7c}
$$

Из уравнения (7a) выражаем $U(T)$ и подставляем в уравнения (7b) и (7c). Разрешая их относительно интегралов, получим

$$
U(0) = 0, \tag{8a}
$$

$$
U(T) = q_f - q_0, \tag{8b}
$$

$$
\int\limits_0^T e^{-\nu_1 U(t)}\, dt = p_f e^{-\nu_1 (q_f - q_0)} - p_0, \tag{8c}
$$

$$\int_0^T e^{-\nu_2 U(t)}\,dt = r_f e^{-\nu_2(q_f - q_0)} - r_0. \tag{8d}$$

Заметим, что уравнение (8a) является следствием определения в уравнении (6) функции $U(t)$.

Таким образом, чтобы решить поставленную задачу, необходимо найти функцию $U(t)$, удовлетворяющую уравнениям (8). Тогда искомое управление $u(t)$ найдем по формуле $u(t) = \dot{U}(t)$.

Анализируя уравнения (8), видим, что интегралы в левой части всегда больше нуля. Поэтому решение задачи терминального управления может существовать только тогда, когда координаты начальной и конечной точек удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &P = p_f e^{-\nu_1(q_f - q_0)} - p_0 > 0, \\ &R = r_f e^{-\nu_2(q_f - q_0)} - r_0 > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Для единообразия обозначим также $Q = q_f - q_0$.

Чтобы найти решение функциональных уравнений (8), необходимо подобрать конкретную функцию $U(t)$ с параметрами. Причем, число параметров в этой функции должно быть такое, чтобы число неизвестных было не менее числа уравнений. В нашем случае число уравнений — 4, в которые входит одно неизвестное T. Таким образом, функция $U(t)$ должна зависеть как минимум от трех параметров.

Рассмотрим функцию вида $U(t) = u_2 t^2 + u_1 t + u_0$. Подставим ее в уравнения (8). Из уравнения (8a) следует, что $u_0 = 0$. Оставшиеся уравнения приобретут вид:

$$\begin{aligned} &P = \int_0^T \exp(-\nu_1(u_2 t^2 + u_1 t))\,dt, \\ &Q = u_2 T^2 + u_1 T, \end{aligned} \tag{10}$$

$$R = \int\limits_0^T \exp(-\nu_2(u_2 t^2 + u_1 t))\, dt,$$

или, извлекая интегралы, получим систему

$$\begin{aligned}
&P = \sqrt{\frac{\pi}{4\nu_2 u_2}}\, e^{\frac{\nu_2 u_1^2}{4u_2}} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{\nu_2(2Tu_2 + u_1)}{2\sqrt{\nu_2 u_2}} \right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\nu_2 u_1}{2\sqrt{\nu_2 u_2}} \right) \right),\\
&Q = u_2 T^2 + u_1 T, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (11)\\
&R = \sqrt{\frac{\pi}{4\nu_3 u_2}}\, e^{\frac{\nu_3 u_1^2}{4u_2}} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{\nu_3(2Tu_2 + u_1)}{2\sqrt{\nu_3 u_2}} \right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\nu_3 u_1}{2\sqrt{\nu_3 u_2}} \right) \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, задача терминального управления свелась к системе трансцендентных уравнений, для решения которой можно применить различные численные методы.

3. Систему (11) можно рассматривать как преобразование трехмерного пространства $(u_1, u_2, T) \longrightarrow (P, Q, R)$. Исследуем, существует ли для него обратное преобразование. Для этого преобразование (11) представим в виде композиции двух преобразований

$$(u_1, u_2, T) \longrightarrow (\alpha, \beta, \tau) \longrightarrow (P, Q, R).$$

Первое преобразование $(u_1, u_2, T) \longrightarrow (\alpha, \beta, \tau)$ определим следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{u_1}{2\sqrt{u_2}}, \\ \beta = \sqrt{u_2}, \\ \tau = T\sqrt{u_2} + \dfrac{u_1}{2\sqrt{u_2}}. \end{cases} \qquad (12)$$

Это преобразование является обратимым. Обратное имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
u_1 = 2\alpha\beta, \\
u_2 = \beta^2, \\
T = \dfrac{\tau - \alpha}{\beta}.
\end{cases} \tag{13}
$$

Подставляя (13) в систему (10), получим уравнения, определяющие преобразование $(\alpha, \beta, \tau) \longrightarrow (P, Q, R)$

$$
\begin{cases}
P = \dfrac{\exp(\nu_1 \alpha^2)}{\beta} \int\limits_{\alpha}^{\tau} \exp(-\nu_1 s^2)\, ds, \\
Q = \tau^2 - \alpha^2, \\
R = \dfrac{\exp(\nu_2 \alpha^2)}{\beta} \int\limits_{\alpha}^{\tau} \exp(-\nu_2 s^2)\, ds.
\end{cases} \tag{14}
$$

Если, для сокращения объема выкладок, ввести обозначения

$$
P_1 = \int\limits_{\alpha}^{\tau} \exp(-\nu_1 s^2)\, ds, \qquad R_1 = \int\limits_{\alpha}^{\tau} \exp(-\nu_2 s^2)\, ds,
$$

то система (14) запишется в виде:

$$
\begin{cases}
P = \dfrac{\exp(\nu_1 \alpha^2)}{\beta}\, P_1, \\
Q = \tau^2 - \alpha^2, \\
R = \dfrac{\exp(\nu_2 \alpha^2)}{\beta}\, R_1.
\end{cases} \tag{15}
$$

Для этой системы запишем матрицу Якоби

$$
J = \frac{\partial PQR}{\partial \alpha\beta\tau} = \begin{pmatrix}
\dfrac{1}{\beta}\,(2\nu_1 \alpha\beta P - 1) & -\dfrac{P}{\beta} & -\dfrac{P_{1\tau}}{\beta P_{1\alpha}} \\
-2\alpha & 0 & 2\tau \\
\dfrac{1}{\beta}\,(2\nu_2 \alpha\beta R - 1) & -\dfrac{R}{\beta} & -\dfrac{R_{1\tau}}{\beta R_{1\alpha}}
\end{pmatrix}. \tag{16}
$$

Определитель Δ матрицы J можно представить в таком виде:

$$\Delta = \frac{2R_1^2}{\beta^3 P_{1\alpha} R_{1\alpha}} \left(\alpha \Big(\frac{P_1}{R_1}\Big)_\tau + \tau \Big(\frac{P_1}{R_1}\Big)_\alpha + 2\tau\alpha(\nu_2 - \nu_3)\frac{P_1}{R_1} \right).$$

Если бы этот определитель был тождественно равен нулю ($\Delta \equiv 0$), то функция $\varphi(\alpha, \tau) = P_1/R_1$ была бы решением дифференциального уравнения в частных производных $\alpha\varphi_\tau + \tau\phi_\alpha + 2\alpha\tau(\nu_1 - \nu_2)\varphi = 0$. Любое решение этого уравнения можно представить в виде $\varphi(\alpha, \tau) = f(\tau^2 - \alpha^2)\exp(-(\nu_1 - \nu_2)\alpha^2)$, где f — произвольная функция. Однако, функцию P_1/R_1 в таком виде представить нельзя, так как

$$\frac{P_1}{R_1} = \frac{(\mathrm{erf}(\tau\sqrt{\nu_1}) - \mathrm{erf}(\alpha\sqrt{\nu_1}))\sqrt{\nu_2}}{(\mathrm{erf}(\tau\sqrt{\nu_2}) - \mathrm{erf}(\alpha\sqrt{\nu_2}))\sqrt{\nu_1}}.$$

Следовательно, не существует такой области в пространстве параметров α, β, τ, в которой бы якобиан преобразования (14) был бы равен нулю. Он может быть равен нулю только на двумерных или одномерных поверхностях. Например, он равен нулю на поверхности $\tau = \alpha$, но это противоречит условию задачи терминального управления, так как условие $\tau = \alpha$ означает $T = 0$.

Пример. Для управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = (x + 2z)u, \end{cases} \tag{17}$$

нужно найти такое управление $u(t)$, которое бы переводило систему например из точки A с координатами $(1, 1, 1)$ в точку B с координатами $(6, 0, 1/2)$.

Система (17) является канонической C-системой (2) при $a = 2$. Задачу терминального управления сначала решим для факторизованной управляемой системы, а затем найденное решение перенесем для исходной управляемой системы.

Преобразование (3) примет вид:

$$\begin{cases} p = x + (1+\sqrt{2})z, \\ q = y, \\ r = x + (1-\sqrt{2})z. \end{cases} \tag{18}$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{(1+\sqrt{2})r - (1-\sqrt{2})p}{2\sqrt{2}}, \\ y = q, \\ z = \dfrac{p-r}{2\sqrt{2}}. \end{cases} \tag{19}$$

Преобразование (18) переводит точки A и B в точки $\widetilde{A} = (2+\sqrt{2}, 1, 2-\sqrt{2})$ и $\widetilde{B} = (6\,{}^1\!/_2 + {}^1\!/_2\sqrt{2}, 0, 6\,{}^1\!/_2 - {}^1\!/_2\sqrt{2})$.

Теперь необходимо проверить, удовлетворяют ли координаты точек $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ условию (9). Если хотя бы одно из условий (9) не выполняется, решение задачи с выбранными координатами не существует. В нашем случае имеем $P \approx 77.16825825 > 0$, $R \approx 3.242503826 > 0$, т. е. условия выполняются.

Для нахождения терминального управления следует решить систему уравнений (11), которая в нашем случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} &u_2 T^2 + u_1 T = -1, \\ &\sqrt{\frac{\pi}{4(1+\sqrt{2}u_2)}}\,\exp\left(\frac{(1+\sqrt{2})u_1^2}{4u_2}\right)\times \\ &\times\left(\operatorname{erf}\left(\frac{(1+\sqrt{2})(2Tu_2+u_1)}{2\sqrt{(1+\sqrt{2})u_2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}\,u_1}{2\sqrt{u_2}}\right)\right) \approx 77.168, \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{4(1-\sqrt{2}u_2)}}\,\exp\left(\frac{(1-\sqrt{2})u_1^2}{4u_2}\right)\times$$
$$\times\left(\operatorname{erf}\left(\frac{(1-\sqrt{2})(2Tu_2+u_1)}{2\sqrt{(1-\sqrt{2})u_2}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{1-\sqrt{2}}\,u_1}{2\sqrt{u_2}}\right)\right)\approx 3.242.$$

Численно решая данную систему с помощью пакета Maple V®, получим следующее решение:

$$T\approx 4.896407707,\ u_1\approx -0.8481401985,\ u_2\approx 0.1315063773.$$

Таким образом, применяя терминальное управление

$$u(t)=2u_2t+u_1=0.2630127546t-0.8481401985, \tag{20}$$

попадаем из точки $\widetilde{A}$ в точку $\widetilde{B}$ за время $T = 4.896407707$. Подставив управление (20) в систему (5), получим решение факторизованной системы

$$\begin{aligned}
&p(t)=(45.68487429+42.70545903\operatorname{erf}(0.5634576110t-\\
&\quad -1.816988120))\exp(0.3174844796t^2-2.047591570t),\\
&q(t)=1+0.1315063773t^2-0.8481401985t,\\
&r(t)=(2.829108206-2.155054408\operatorname{erfi}(0.2333917842t-\\
&\quad -0.7526211220))\exp(-0.05447172497t^2+0.3513111727t),
\end{aligned} \tag{21}$$

где функция $\operatorname{erfi}(x) = i\operatorname{erf}(ix)$ является действительной функцией.

С помощью обратного преобразования (19) найдем решение для исходной системы

$$\begin{aligned}
&x(t)=\exp(0.3174844797t^2-2.047591571t)\big(6.690394950+\\
&\quad +6.254069686\operatorname{erf}(0.5634576110t-1.816988120)\big)+\\
&\quad +\exp(-0.05447172510t^2+0.3513111735t)\big(2.414794902+
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+1.839453998\,\mathrm{erfi}(-0.2333917842t + 0.7526211220)\big),\\
y(t) &= 1 + 0.1315063773t^2 - 0.8481401985t, \qquad (22)\\
z(t) &= \exp(0.3174844797t^2 - 2.047591571t)\big(16.15204220 +\\
&+15.09865984\,\mathrm{erf}(0.5634576110t - 1.816988120)\big) -\\
&- \exp(-0.05447172510t^2 + 0.3513111735t)\big(1.000240799 +\\
&+0.7619267929\,\mathrm{erfi}(-0.2333917842t + 0.7526211220)\big).
\end{aligned}
$$

Таким образом, если к управляемой системе (17) применить управление (20), то решение (22) этой системы соединит точку A с точкой B.

Рис. 1. График функций $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

На рисунке 1 изображены функции управление $u(t)$ и решение $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ управляемой системы.

Литература

1. Ивашко Д. Г. *О классификации трехмерных управляемых систем.* // Моделирование процессов управления и обработки информации. Междувед. сб. / МФТИ. М. Изд-во МФТИ. 1996. С. 142–153.

2. Ёлкин В. И., Ивашко Д. Г. *О связи понятий C-систем и L-систем в теории аффинных управляемых систем.* // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. 11. С. 1471–1477.

3. Ёлкин В. И. *Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход.* М.: Наука. Физматлит. 1997. 320 с.

4. Ёлкин В. И., Ивашко Д. Г. *О декомпозиции трехмерных нелинейных управляемых систем.* // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. 11. С. 1473–1481.