УДК 519.86

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП В ОПИСАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ

И. Г. Поспелов

Настоящая работа продолжает исследования структуры рыночных экономических механизмов, начатые в [1], а также дает строгое обоснование приведенным в [1] результатам.

Экономическая система характеризуется системой отношений действующих в ней людей и коллективов (в дальнейшем — экономических агентов (ЭА)). Каждый ЭА играет определенные роли в экономической системе. С каждой ролью связана обязанность принимать какие-то решения. Выбор решений зависит от интересов ЭА. Таким образом, отношения ЭА выражаются в согласованной структуре ролей и интересов. Задача состоит в том, чтобы понять, как возникает наблюдаемая структура в результате взаимодействия ЭА в течение исторического развития системы.

1. Общая формулировка вариационного принципа

В теории экономического равновесия интересы и роли считаются жестко связанными (см., например, [2]). Поэтому такая теория способна лишь установить факт существования согласованного решения ЭА (равновесия), но сталкивается с большими трудностями при попытке описать процесс приближения к равновесию. Кроме того, эмпирических данных часто недостаточно, чтобы дать определенное описание интересов ЭА. Достаточно вспомнить долгие дискуссии об относительной ценности доходов, получаемых ЭА в различные моменты времени.

В экономических моделях теории исследования операций [3] за ЭА сохраняются лишь определенные роли. Интересы их считаются более или менее произвольными. Такой подход часто позволяет лучше понять взаимосвязь ролей, но сталкивается с принципиальной трудностью — произвольно заданные интересы просто невозможно согласовать [4].

Представляется, что объединить указанные подходы и в какой-то мере преодолеть присущие им трудности можно, если учесть, что взаимодействие ЭА не только согласует, но и формирует, воспитывает их интересы. По ходу этого процесса возникают отмеченная выше связь интересов ЭА с его ролью в обществе и возможность устойчивого компромисса между ЭА.

Характерным примером может служить механизм рыночной конкуренции в экономике, основанной на отношениях частной собственности. Каждому участнику рынка постоянно грозит разорение. Разорившийся участник (независимо от его отношения к этому событию) выбывает из рынка и заменяется другим. Естественно предположить, что в конечном счете на рынке останутся те участники, которые умеют достаточно долго избегать разорения. Следовательно,

можно считать, что экономические отношения навязывают каждому участнику рынка потребность — не разориться! — и она сосуществует с другими его интересами, а может быть, и определяет многие из них.

При попытке математически описать такую потребность важно учитывать, что ЭА всегда действует в условиях неопределенности. Если предположить, что эта неопределенность статистического характера, то можно сформулировать такой вариационный принцип (ВП) поведения ЭА в системе рыночного типа: *экономический агент стремится минимизировать вероятность своего разорения.*

Предлагаемый принцип [1] не похож на расхожие экономические критерии. Несмотря на это, в работе [1] показано (правда, не совсем строго), что если этот принцип использовать при изучении деятельности торговца-перекупщика, то из него можно вывести основные закономерности рыночного обмена. В частности, из сформулированного ВП следует, что торговец вынужден максимизировать среднюю дисконтированную прибыль в своих операциях.

В этой статье будет строго доказано, что необходимость максимизации прибыли следует из принципа минимизации вероятности разорения в достаточно широком классе ситуаций, которые могут возникнуть на рынке. Опишем класс изучаемых ситуаций.

2. Описание класса математических моделей

Рассмотрим деятельность одного активного ЭА. Действия остальных рассматриваем как внешние (возможно, случайные) факторы. Состояние интересующего нас ЭА в момент времени t характеризуется набором ресурсов $Q(t)$ и величиной задолженности банку $D(t)$. Вид ресурсов конкретизировать не будем. Задолженность выделена особо потому, что она определяет тот «способ разорения», для которого справедливы приводимые ниже следствия ВП.

В последовательные моменты времени τ_i, образующие пуассоновский поток с частотой Λ [5], ЭА предпринимает некоторые действия, например продает, покупает, перерабатывает или обменивает ресурсы Q. В результате ресурс скачком приобретает новое значение Q', а ЭА получает денежный доход (положительный или отрицательный)

$$W_{\tau_i} = W(Q(\tau_i), Q'_{\tau_i}), \tag{2.1}$$

где $W(\cdot, \cdot)$ — заданная функция своих аргументов. Доход W_{τ_i} идет на погашение [2] долга D. Между операциями долг растет по экспоненте за счет непрерывного начисления фиксированного процента r:

$$D(t) = [D(\tau_i) + W_{\tau_i}] \exp[r(t - \tau_i)], \quad \tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}, \tag{2.2}$$

а ресурс Q остается неизменным:

$$Q(t) = Q(\tau_i + 0) = Q'_{\tau_i}, \quad \tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}. \tag{2.3}$$

[1] В настоящей работе (как и в работе [1]) рассмотрена деятельность одного активного ЭА, действия других ЭА описаны как заданные внешние факторы (возможно, случайные).

[2] Отрицательный доход увеличивает долг, отрицательный долг интерпретируется как вклад в банке.

Будем считать, что ЭА разоряется, если его долг превзойдет некоторую заданную критическую величину D^*.

Результат операции ЭА Q' зависит не только от выбранного ЭА действия s, но и от влияния случайных факторов[3] ξ: $Q' = Q'(s, \xi)$. Возможность тех или иных действий зависит от текущего состояния ресурса Q и, вообще говоря, также от ξ. Независимо от того, что знает ЭА о значении ξ при выборе s, в результате его действий возникает распределение вероятностей $\varkappa$ величины Q'. Формально ситуацию удобно описывать не как выбор s, а именно как выбор распределения $\varkappa$ из совокупности $K(Q)$ распределений[4], допустимых при ресурсах Q. Подчеркнем, что K зависит лишь от Q, но не от D, т. е. величина задолженности сама по себе не ограничивает действий ЭА. Содержательный пример совокупности распределений K приведен в разд. 6.

Из сказанного следует, что поведение ЭА — это выбор распределения $\varkappa \in K$ в каждом возможном состоянии (Q, D). В результате такого выбора образуется условная вероятность изменения ресурса, которую назовем стратегией ЭА и обозначим через $\Omega(A \mid Q, D)$. По определению

$$\Omega(A \mid Q, D) = P\{Q(\tau_i + 0) \in A \mid \text{[illegible]}\}, \tag{2.4}$$

$$\Omega(\cdot \mid Q, D) \in K(Q). \tag{2.5}$$

Вообще говоря, выбор Ω может явно зависеть от времени, но мы рассматриваем лишь стационарные ситуации, когда Λ, r, W и K не зависят от времени. Поэтому для простоты ограничимся стационарными стратегиями (2.4).

Введенные выше величины подчиним следующим формальным требованиям:

1) возможные значения Q образуют топологическое пространство $\mathcal{Q}$;

2) функция дохода W: $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \to R^1$ — ограниченная борелевская функция:

$$\sup_{Q,Q'} |W(Q, Q')| = \overline{W} < +\infty; \tag{2.6}$$

3) все меры $\varkappa \in K$ определены на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$ борелевских множеств;

4) допустимы лишь стратегии $\Omega(A \mid Q, D)$, которые при фиксированном $A \in \mathcal{B}(\mathcal{Q})$ суть борелевские функции от Q, D. Предполагается, что такие стратегии существуют[5].

[3] Моменты τ_i в их число не включаем. Случайность момента операции выделена особо, так как она представляется самой существенной для ЭА. Основные результаты работы остаются верными, если считать, что моменты операций детерминированы.

[4] Напомним, что распределение $\varkappa \in K$ задано, если заданы вероятности $\varkappa(A)$ попадания Q' в подмножества A множества $\mathcal{Q}$ возможных значений Q'.

[5] Условие 4, строго говоря, накладывает совместное ограничение на выбор $\varkappa$ из K при различных (Q, D), однако содержательно это ограничение совершенно неощутимо.

Всюду ниже символы M, $\int \mu(dx) f(x)$, $\overset{x}{\rightrightarrows}$ обозначают соответственно математическое ожидание, интеграл от функции f по мере (распределению) μ, сходимость, равномерную по параметрам x. Общие сведения из теории случайных процессов в дальнейшем используются без ссылок. Эти сведения можно найти, например, в [5]. Когда делается некоторое утверждение о случайных валичинах (например, о сходимости ряда таких величин), подразумевается, что это утверждение верно лишь с вероятностью 1. То же самое относится и к свойствам реализаций (траекторий) случайных процессов. Например, полагаем, что на конечном интервале времени происходит лишь конечное число событий пуассоновского потока, не оговаривая, что это верно только с вероятностью 1.

В дальнейшем используется следующее специальное свойство пуассоновского потока $\{\tau_k\}$ (τ_k — момент k-го события после $t = 0$).

Л е м м а 1. *Случайные величины*

$$\Sigma_t = \sum_{\tau_k > t} \exp[-r(\tau_k - t)] \tag{2.7}$$

определены, одинаково распределены, имеют моменты всех порядков и характеристическую функцию

$$\Big[\quad \int_0^z \frac{e^{iu} - 1}{u}\, du \Big] \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ряд (2.7) можно записать в виде $\Sigma_t = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-r\theta_j}$, где θ_j — время ожидания j-го по счету после момента t события. Из однородности пуассоновского потока следует, что распределения θ_j, а значит, и распределения Σ_t (2.7) не зависят от t. Ряд, составленный из величин $a_k = \mathrm{P}\{\theta_k < 2k/\Lambda\} = e^{-2k}(2k)^k/k! \sim (e/2)^{-k}(2\pi k)^{-1/2}$, сходится. Согласно лемме Бореля — Кантелли, это означает, что с вероятностью 1 все, кроме конечного числа, члены ряда Σ_t ограничены величинами $\exp(-2rk/\Lambda)$. Отсюда следует сходимость ряда (2.7). Выражение (2.8) получается непосредственным вычислением предела $\sigma(z) = \lim_{T\to\infty} \mathrm{M} \exp\big[iz \sum_{0<\tau_k<T} e^{-r\tau_k}\big]$. Способ вычисления таких величин указан в [5]. Моменты Σ_t существуют, так как функция (2.8) — целая аналитическая [6, 7].

3. Математическая формулировка ВП для описанного класса моделей

Если зафиксировать допустимую стратегию Ω, то величины $Q(t)$, $D(t)$ в силу (2.2)—(2.4) образуют марковский процесс $\mathcal{M}_\Omega$. Это однородный, стохастически непрерывный процесс[6]. Его траек-

[6] Корректность определения процесса $\mathcal{M}_\Omega$ непосредственным указанием его траекторий (2.2)—(2.4) (вместо задания переходных вероятностей) обоснована в [6]. Там же доказаны перечисленные свойства процесса $\mathcal{M}_\Omega$.

тории определены для всех $t \geqslant 0$. Однородность процесса $\mathscr{M}_\Omega$ означает, что совместные вероятности событий, относящихся к разным моментам времени, зависят только от начального состояния процесса и интервала между событиями и не зависят от абсолютных значений времени наступления событий. Стохастическая непрерывность позволяет рассматривать вероятности событий, состоящих в выполнении некоторого условия, одновременно для всех моментов времени t. В частности, для процесса $\mathscr{M}_\Omega$ определена вероятность разорения $\tilde{\omega}_\Omega(D^*, Q, D)$:

$$\tilde{\omega}_\Omega(D^*, Q, D) = \mathrm{P}\{\exists\theta > t : D(\theta) > D^* \mid Q(t) = Q, D(t) = D\}. \quad (3.1)$$

Эта величина — борелевская функция от (Q, D) и не зависит от t ввиду однородности $\mathscr{M}_\Omega$ [6].

Наша первая задача — заменить приближенно (как было сделано в [1]) величину $\tilde{\omega}_\Omega$ более удобной с математической точки зрения величиной вероятности ω_Ω неограниченного роста $D(t)$ на траектории процесса $\mathscr{M}_\Omega$:

$$\omega_\Omega(Q, D) = \mathrm{P}\{\overline{\lim_{\theta\to\infty}} D(\theta) = +\infty \mid Q(t) = Q, D(t) = D\}. \quad (3.2)$$

Как и $\tilde{\omega}_\Omega$, величина ω_Ω определена, не зависит от t и является борелевской функцией от (Q, D). Покажем, что при достаточно большом D^* вероятности $\omega_\Omega(Q, D)$ и $\tilde{\omega}_\Omega(D^*, Q, D)$ близки друг другу одновременно для всех Q, D, Ω. Для этого рассмотрим случайную величину дисконтированной прибыли ЭА:

$$\Pi^t_\Omega(Q, D) = \sum_{\tau_k > t} \exp[-r(\tau_k - t)]\, W_{\tau_k}, \quad Q(t) = Q, \quad D(t) = D. \quad (3.3)$$

Из (2.6), (2.7) вытекает неравенство

$$|\Pi^t_\Omega(Q, D)| \leqslant \overline{W}\Sigma_t. \quad (3.4)$$

Так что в силу леммы 1, $\Pi^t_\Omega(Q, D)$ определена и имеет моменты всех порядков. Из однородности процесса $\mathscr{M}_\Omega$ следует, что функция распределения величин $\Pi^t_\Omega(Q, D)$

$$F_\Omega(a \mid Q, D) = \mathrm{P}\{\Pi^t_\Omega < a \mid Q(t) = Q, D(t) = D\} \quad (3.5)$$

не зависит от t.

Теорема 1. *Для величин* $\tilde{\omega}_\Omega$, ω_Ω, F_Ω, *определенных формулами* (3.1), (3.2), (3,5), *справедливы соотношения*

$$\tilde{\omega}_\Omega\, Q, D) = F_\Omega(D \mid Q, D), \quad (3.6)$$

$$\omega_\Omega(Q, D) \xrightarrow{Q,\,\Omega} \begin{cases} 1 & \text{при } D \to +\infty, \\ 0 & \text{при } D \to -\infty; \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\tilde{\omega}_\Omega(D^*, Q, D) \xrightarrow{Q,\,D,\,\Omega} \omega_\Omega(Q, D) \quad \text{при } D^* \to +\infty. \quad (3.8)$$

Доказательство. Зафиксируем начальное состояние $Q(0) = Q$, $D(0) = D$. Из (2.2) легко получить, что

$$D(t) = e^{rt}\Big(D - \sum_{0 \leqslant \tau_k \leqslant t} e^{-r\tau_k} W_{\tau_k}\Big), \quad (3.9)$$

а из (3.3) следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \sum\limits_{0\leqslant\tau_k\leqslant t} e^{-r\tau_k} W_{\tau_k} = \Pi^0_\Omega(Q, D)$. Поэтому если $D < \Pi^0_\Omega(Q, D)$, то начиная с некоторого t величина $D(t) < 0$, т. е. $\overline{\lim\limits_{\to\infty}} D(t) < +\infty$. Если же $D > \Pi^0_\Omega(Q, D)$, то начиная с некоторого t величина $D(t) > {}^1/_2\, e^{rt}(D - \Pi^0_\Omega)$, т. е. $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} D(t) = +\infty$. Наконец, если $D = \Pi^0_\Omega(Q, D)$, то из (3.3), (3.9) следует, что $D(t) = \sum\limits_{\tau_k > t} \exp[-r(\tau_k - t)]\, W_{\tau_k} = \Pi^t_\Omega(Q(t), D(t))$ и в силу (3.4) $D(t)$ ограничено. Окончательно $\mathrm{P}\{\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} D(t) = +\infty\} = \mathrm{P}\{D > \Pi^0_\Omega(Q, D)\}$, что эквивалентно (3.6).

Из (3.4) следует, что функция распределения $F_\Omega(a \mid Q, D)$ стремится к 1 и 0 соответственно при $a \to +\infty$, $a \to -\infty$ быстрее, чем функция распределения величины $\overline{W}\Sigma_t$. Последняя не зависит от t, Ω, Q, D. Сопоставляя эти факты с (3.6), получаем (3.10).

Перейдем теперь к доказательству соотношения (3.8). Обозначим через $\mathscr{U}$ событие $\{\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} D(t) = +\infty\}$. Из (3.9) видно, что $D(t)$ ограничено на любом конечном интервале. Отсюда следует, что $\mathscr{U}$ совпадает с множеством неограниченных по D траекторий $\mathscr{M}_\Omega$:

$$\mathscr{U} = \{\forall D^* \exists t > 0 : D(t) > D^*\} = \{\overline{\lim_{t\to+\infty}} D(t) = +\infty\}. \quad (3.10)$$

Это означает, что при всех D^*

$$\mathscr{U} \subset \mathscr{D}(D^*) = \{\exists t > 0 : D(t) > D^*\} \quad (3.11)$$

Отсюда $\mathrm{P}\{\mathscr{U}\} = \mathrm{P}\{\mathscr{U} \cap \mathscr{D}(D^*)\} = \mathrm{P}\{\mathscr{U} \mid \mathscr{D}(D^*)\}\, \mathrm{P}\{\mathscr{D}(D^*)\}$ или

$$\omega_\Omega(Q, D) = \tilde{\omega}_\Omega(D^*, Q, D)\; \mathrm{P}\{\mathscr{U} \mid \mathscr{D}(D^*)\}, \quad (3.12)$$

так как $\mathrm{P}\{\mathscr{U}\} = \omega_\Omega(Q, D)$ (см. (3.10), (3.2)), а $\mathrm{P}\{\mathscr{D}(D^*)\} = \tilde{\omega}_\Omega(D^*, Q, D)$ (см. (3.11), (3.1)).

Пусть событие $\mathscr{D}(D^*)$ произошло и t_1 — первый момент, когда $D(t) > D^*$. Событие $\mathscr{U}$ происходит с вероятностью $\omega_\Omega(Q(t_1), D(t_1))$, так как на $[0, t_1]$ величина $D(t)$ ограничена. Обозначим через μ_{D^*} распределение состояний процесса $(Q(t_1), D(t_1))$ в момент t_1 при условии $\mathscr{D}(D^*)$. По формуле полной вероятности имеем

$$\mathrm{P}\{\mathscr{U} \mid \mathscr{D}(D^*)\} = \int \mu_{D^*}(dQ', dD')\; \omega_\Omega(Q', D').$$

Распределение μ_{D^*} сосредоточено, очевидно, на множестве $\{(Q, D) : D > D^*\}$, поэтому

$$\mathrm{P}\{\mathscr{U} \mid \mathscr{D}(D^*)\} \geqslant \alpha(D^*), \quad (3.13)$$

где

$$\alpha(D^*) = \inf_{\Omega, Q, D > D^*} \omega_\Omega(Q, D). \tag{3.14}$$

Из (3.12), (3.13), (3.11) получаем оценку

$$\frac{1}{\alpha(D^*)}\,\omega_\Omega(Q, D) \geqslant \tilde{\omega}_\Omega(D^*, Q, D) \geqslant \omega_\Omega(Q, D). \tag{3.15}$$

Из (3.7), (3.14) следует, что $\alpha(D^*) \to 1$ при $D^* \to +\infty$, поэтому из (3.15) следует (3.8). Теорема 1 доказана.

В дальнейшем полагаем D^* достаточно большим, и на основании (3.8) вероятностью разорения ЭА считаем вероятность ω_Ω неограниченного роста долга (3.2).

Величина ω_Ω удовлетворяет следующему соотношению, которое вытекает из формулы полной вероятности:

$$\omega_\Omega(Q, D) = \Lambda \int^{\infty} d\theta e^{-\Lambda\theta} \int \Omega(dQ' \mid Q, De^{r\theta})\, \omega_\Omega(Q', De^{r\theta} - W(Q, Q')). \tag{3.16}$$

Смысл (3.16) можно пояснить так: с вероятностью $\Lambda e^{-\Lambda\theta} d\theta$ первая операция ЭА происходит в момент θ. К этому времени долг нарастает от начального значения D до $De^{r\theta}$, так что в момент первой операции ЭА находится в состоянии $(Q, De^{r\theta})$. Согласно стратегии Ω ресурс в результате операции принимает значение Q' с вероятностью $\Omega(dQ' \mid Q, De^{r\theta})$, а долг уменьшается на $W(Q, Q')$. Суммирование по всем возможным сочетаниям θ и Q' дает (3.16).

Сформулированный вариационный принцип гласит: стратегия $\hat{\Omega}$, которую фактически выбирает ЭА, обеспечивает ему минимально возможную вероятность разорения $\omega_{\hat{\Omega}} = \hat{\omega}$. Это означает, что

$$\hat{\omega}(Q, D) \leqslant \omega_\Omega(Q, D) \quad \text{для всех } Q, D, \Omega. \tag{3.17}$$

Для отыскания оптимальной стратегии $\hat{\Omega}$ естественно обратиться к принципу Беллмана [8]. Согласно этому принципу оптимальная стратегия должна минимизировать величину $\hat{\omega}$ в каждой операции. Поэтому из (3.16) получаем

$$\hat{\omega}(Q, D) = \Lambda \int_0^{\infty} d\theta e^{-\Lambda\theta} \min_{\varkappa \in K(Q)} \int \varkappa(dQ')\, \hat{\omega}(Q', De^{r\theta} - W(Q, Q')). \tag{3.18}$$

Это уравнение необходимо дополнить граничными условиями (3.10), которым $\hat{\omega}$ должна удовлетворять, поскольку $\hat{\omega} = \omega_{\hat{\Omega}}$. Таким образом,

$$\hat{\omega}(Q, D) \overset{Q}{\rightrightarrows} \begin{cases} 1 & \text{при } D \to +\infty, \\ 0 & \text{при } D \to -\infty. \end{cases} \tag{3.19}$$

Условия (3.19) выделяют задачу минимизации вероятности разорения среди класса задач минимизации вероятностей каких-либо событий в процессе $\mathscr{M}_\Omega$. Без (3.19) уравнение (3.18) имеет заведомо не-

единственное решение. Ему, например, удовлетворяет любая постоянная величина. В дальнейшем предполагается, что оптимальная стратегия существует и может быть найдена из решения (3.18), (3.19). Это, в частности, означает, что, сопоставив состоянию (Q, D) распределение $\varkappa \in K(Q)$, которое доставляет минимум величине $\int \varkappa(dQ')\hat{\omega}(Q', D - W(Q, Q'))$, мы можем получить оптимальную допустимую стратегию $\hat{\Omega}$.

Соотношения (3.18), (3.19) — это строгая формулировка ВП для рассматриваемого класса задач.

4. Задача о максимизации средней дисконтированной прибыли

Рассмотрим теперь более привычную для экономических исследований задачу о максимизации средней дисконтированной прибыли ЭА. Для описанного в разд. 2 класса моделей эта задача ставится так: найти допустимую стратегию Ω_0, которая обеспечивает максимально возможное значение математического ожидания дисконтированной прибыли $m_\Omega(Q, D) = \mathrm{M}\,\Pi_\Omega^t(Q, D)$ (см. (3.3)). Как уже говорилось, m_Ω не зависит от t. Если ввести обозначения $R = m_{\Omega_0}$, то

$$R(Q, D) \geqslant m_\Omega(Q, D) \quad \text{для всех } Q, D, \Omega. \tag{4.1}$$

Заметим, что эта задача никак не связана с величиной D, которая не входит явно в функционал $\mathrm{M}\Pi_\Omega^t$ и в ограничения (2.5) [7]. В связи с этим при отыскании максимума m_Ω можно сразу ограничиться стратегиями $\Omega(A \mid Q)$, зависящими только от Q. Для таких стратегий Π_Ω^t (а также m_Ω) не зависит от D. Для ее характеристической функции $\pi_\Omega(z, Q)$ с помощью формулы полного математического ожидания получаем

$$\pi_\Omega(z, Q) = \mathrm{M}\{e^{iz\Pi_\Omega^t} \mid Q(t) = Q\} = \mathrm{M}\{e^{iz\Pi_\Omega^0} \mid Q(0) = Q\}$$

$$= \mathrm{M}\Big\{\exp\Big[iz\Big(e^{-r\tau_1}\Big(W_{\tau_1} + \sum_{k\geqslant 2}^{\infty} \exp[\ r(\tau_k - \tau_1)\, W_{\tau_k}\Big)\Big)\Big] \Big| Q(0) = Q\Big\} =$$

$$= \mathrm{M}\Big\{\mathrm{M}\Big\{\exp\Big[iz\Big(e^{-r\theta}\Big(W(Q, Q') \quad \sum_{\tau_k > \theta} \exp[\ r(\tau_k - \theta)]\, W_{\tau_k}\Big)\Big)\Big] \Big|$$

$$\tau_1 = \theta, Q(\theta + 0) = Q'\Big\} \Big| Q(0) = Q\Big\} =$$

$$= \int_0^{\infty} d\theta \Lambda e^{-\Lambda\theta} \int \Omega(dQ' \mid Q) \exp[ize^{-r\theta} W(Q, Q')]$$

$$\mathrm{M}\Big\{\exp\Big[ize^{-r\theta} \sum_{\tau_k > \theta}^{\infty} \exp[\ r(\tau_k - \theta)]\, W_{\tau_k}\Big] \Big| Q(\theta) = Q\Big\}$$

[7] В задаче минимизации ω_Ω величина D фигурирует ограничениях (3.19).

Отсюда, учитывая (3.3), получаем

$$\pi_\Omega(z, Q) = \Lambda \int_0^\infty d\theta e^{-\Lambda\theta} \int \Omega(dQ' \mid Q) \exp[ize^{-r\theta} W(Q, Q')]\, \pi_\Omega(ze^{-r\theta}, Q'). \tag{4.2}$$

Еще раз напомним, что (4.2) верно для стратегий, не зависящих от D [3]. Функция $\pi_\Omega(z, Q)$ — бесконечно гладкая по z (см. (3.4) и лемму 1). Дифференцируя (4.2) по z при $z = 0$, можно получить соотношения для моментов величины $\Pi^t_\Omega(Q)$. В частности, $m_\Omega(Q) = \mathrm{M}\Pi^t_\Omega(Q) = -i\frac{\partial \pi_\Omega}{\partial z}(0, Q)$, поэтому

$$m_\Omega(Q) = \frac{1}{1+\rho} \int \Omega(dQ' \mid Q)[m_\Omega(Q') + W(Q, Q')], \tag{4.3}$$

где

$$\rho = r/\Lambda \tag{4.4}$$

— важнейший параметр модели — безразмерная характеристика темпа роста задолженности.

Слагаемое $\int \Omega(dQ' \mid Q)\, W(Q, Q')$ в правой части (4.3) показывает вклад в $m_\Omega(Q)$ дохода от первой проведенной операции, а слагаемое $\int \Omega(dQ' \mid Q)\, m_\Omega(Q')$ — от всех последующих. Множитель $1/(1+\rho)$ учитывает потери из-за ожидания момента первой операции. Такое толкование соотношения (4.3) показывает, что стратегию Ω_0, максимизирующую m_Ω, и соответствующее значение $m_{\Omega_0}(Q) = R(Q)$ надо искать из уравнения Беллмана вида

$$R(Q) = \frac{1}{1+\rho} \max_{\varkappa \in K(Q)} \int \varkappa(dQ')[R(Q') + W(Q, Q')] \tag{4.5}$$

(см. [8], где разобрано много подобных задач). Мы предполагаем, что задача (4.5) разрешима в том же смысле, что (3.18), (3.19), и позволяет найти оптимальную стратегию.

В дальнейшем нам понадобится еще величина $S^2(Q)$ дисперсии дисконтированной прибыли в процессе $\mathscr{M}_{\Omega_0}$:

$$S^2(Q) = \mathrm{M}(\Pi^t_{\Omega_0}(Q) - R(Q))^2. \tag{4.6}$$

Уравнение, определяющее $S^2(Q)$, можно получить из (4.2), так как $S^2(Q) = -\frac{\partial^2 \pi}{\partial z^2}(0, Q) - R^2(Q)$. Оно имеет вид

$$S^2(Q) = \frac{1}{1+2\rho}\left\{\int \Omega(dQ' \mid Q)[S^2(Q') + (R(Q') + W(Q, Q'))^2]\right\} - R^2(Q). \tag{4.7}$$

[3] Соотношение для π_Ω можно получить, разумеется, и для стратегий общего вида, но оно будет еще более громоздким, чем (4.2).

Заметим, что оператор, стоящий в правой части уравнения (4.7), сжимает полное пространство борелевских функций над $\mathscr{Q}$. Поэтому (4.7) однозначно определяет $S^2(Q)$ (при уже известном R). Аналогичное замечание верно и для (4.3).

5. Основной результат

Поясним основной результат настоящей статьи. Если параметр ρ мал и решение задачи (4.5) в некотором смысле регулярно, то стратегию $\hat{\Omega}$, минимизирующую вероятность разорения, можно приближенно заменить стратегией Ω_0, максимизирующей среднюю дисконтированную прибыль, потому что вероятности разорения $\hat{\omega}$ и $\omega_0 = \omega_{\Omega_0}$ близки друг к другу в этих условиях.

Теорема 2. *Если для всех достаточно малых ρ задачи* (3.18), (3.19) *и* (4.5) *разрешимы и при $\rho \to 0$*

$$\sup_Q 1/S^2(Q) = O(1), \tag{5.1}$$

$$\sup_Q \sup_{\varkappa \in K(Q)} \int \varkappa(dQ') \mid R(Q) - R(Q') \mid = O(1), \tag{5.2}$$

$$\sup_Q \sup_{\varkappa \in K(Q)} \int \varkappa(dQ') \mid S^2(Q) - S^2(Q') \mid = O(1), \tag{5.3}$$

то для всех $\alpha > 0$

$$\sup_{D,Q} \mid \hat{\omega}(Q, D) - \Phi((D - R(Q))/S(Q)) \mid = o(\rho^{1/2-\alpha}), \tag{5.4}$$

$$\sup_{D,Q} \mid \omega_0(Q, D) - \Phi((D - R(Q))/S(Q)) \mid = o(\rho^{1/2-\alpha}). \tag{5.5}$$

Здесь Φ — функция нормального распределения.

За недостатком места доказательства теоремы не приводим, но сделаем несколько комментариев.

Теорема 2 позволяет приближенно заменить сложную задачу (3.18), (3.19) более простой задачей (4.5), а стратегию $\hat{\Omega}$, зависящую от (Q, D), — стратегией Ω_0, зависящей только от Q.

Появление функции Φ в (5.4), (5.5) показывает, что теорема 2 есть некоторый аналог центральной предельной теоремы для марковских процессов [7]. Однако в отличие от стандартных вариантов предельной теоремы здесь, во-первых, фигурирует не среднее арифметическое, а взвешенная сумма (3.3), во-вторых, рассматривается не один процесс, а сразу вся совокупность $\mathscr{M}_\Omega$. Все эти процессы неэргодичны, так как $D(t)$ в силу (3.9) не имеет предельного распределения.

Соотношение (5.4) показывает, что $\hat{\omega}$ существенно отличается от 0 и 1 лишь в области $G(Q)$, где

$$R(Q) - S(Q) \lesssim D \lesssim R(Q) + S(Q). \tag{5.6}$$

Исходя из (4.5), (4.7), можно показать, что если $R \geqslant 0$[9]), то R растет с уменьшением ρ, причем $R = O(1/\rho)$, $S^2 = O(1/\rho)$.

Примем, что

$$R \sim 1/\rho, \quad S^2 \sim 1/\rho \quad \text{при} \quad \rho \to 0. \tag{5.7}$$

Тогда относительная ширина области G (см. (5.6)) оказывается малой: $S/R \sim \sqrt{\rho}$. Это позволяет интерпретировать величину $R(Q)$ как кредитоспособность торговца, располагающего ресурсом Q (см. [1]).

Условия (5.2), (5.3) показывают, что вариации величин R и S^2 на носителях распределений $\varkappa$ должны быть малы по сравнению с самими этими величинами. Иначе говоря, величины R и S^2 относительно медленно меняются при изменении начального состояния Q процесса $\mathcal{M}_{\Omega_0}$. Это означает, что $\mathcal{M}_{\Omega_0}$, рассматриваемый на $\mathcal{Q}$ (без учета D), обладает определенными эргодическими свойствами. Например, (5.2), (5.3) выполнено всегда, когда множество $\mathcal{Q}$ конечно, а $Q(t)$ в процессе $\mathcal{M}_{\Omega_0}$ имеет единственное финальное распределение. Огрубляя ситуацию, можно сказать, что (5.4), (5.5) выполнены тогда, когда для потока доходов в процессе $\mathcal{M}_{\Omega_0}$ справедлива центральная предельная теорема.

Основываясь на этих соображениях, можно дать экономическую интерпретацию условий теоремы. Малость параметра ρ означает, что отдельная операция не решает судьбу ЭА и его оптимальное поведение должно быть рассчитано на длительную последовательность операций. Требование эргодичности оптимального поведения означает, что эти операции должны более или менее регулярно повторять друг друга. Именно в такой ситуации длительного повторения стереотипных действий следует ожидать проявления экономических законов, и именно в этой ситуации предложенный вариационный принцип превращается в традиционный для экономики критерий максимума дисконтированной прибыли.

Все результаты, изложенные выше, сохраняют силу (и гораздо проще доказываются), если моменты сделок τ_k не случайны, а детерминированы. Именно, пусть $\tau_k = k\Delta$, где Δ — заданный интервал, и справедливы все остальные предположения, сделанные в разд. 2, а $\tilde{\omega}_\Omega$, ω_Ω, Π^t_Ω, $\hat{\omega}$, $\hat{\Omega}$, R и Ω_0 определены соответственно соотношениями (3.1)—(3.3), (3.17), (4.1), причем $\rho = e^{r\Delta} - 1$. Тогда теоремы 1 и 2 остаются в силе, а уравнение для нахождения R и Ω_0 сохраняет вид (4.5). Уравнение (3.18) надо заменить уравнением

$$\hat{\omega}(Q, D) = \min_{\varkappa \in K(Q)} \int \varkappa(dQ')\, \hat{\omega}(Q', D(1+\rho) - W(Q, Q')).$$

Уравнение (4.7) заменяется на уравнение

$$S^2(Q) = \frac{1}{(1+\rho)^2} \int \Omega_0(dQ' \mid Q) \{S^2(Q') + [(1+\rho) R(Q) - R(Q') - W(Q, Q')]^2\}.$$

[9] Знак R определяется, конечно, видом W, но для экономической деятельности характерна возможность вовсе отказаться от операций. Для такой стратегии $W_\tau = 0$, а, следовательно, $m_\Omega \equiv 0$ и, так как $R \geqslant m_\Omega$, $R \geqslant 0$.

6. Применение основного результата к исследованию экономического поведения торговца

В качестве примера применения теоремы 2 рассмотрим модель рынка, предложенную в [1]. Напомним, что эта модель описывает деятельность торговца, который обладает запасом однородного продукта $Q(t)$ $(Q \in R^1_+)$ и в случайные (пуассоновские) моменты времени получает возможность либо продать (с вероятностью α) часть продукта v, $0 \leqslant v \leqslant Q$, по стоимости $V(v)$, либо (с вероятностью $\beta = 1 - \alpha$) купить продукт в количестве u, $0 \leqslant u \leqslant u^*$, по стоимости $U(u)$ и пополнить запас. Величины u и v выбирает торговец. Функции — U, V — ограниченные, гладкие, вогнутые, $U(0) = V(0) = 0$. Доходы и расходы изменяют долг торговца в соответствии с (2.2).

Сверх этих предположений, сделанных в [1], мы будем здесь считать, что $V = \text{const}$ при v, бо́льших некоторого v^*. Ясно, что продавать продукта больше, чем v^*, при такой функции V торговцу бессмысленно, поэтому в дальнейшем считаем, что $v \leqslant v^*$. Все результаты [1] в этом случае остаются верными.

Видно, что мы имеем здесь дело с процессом $\mathcal{M}_\Omega$, в котором $\mathcal{Q} = R^1_+$,

$$W(Q, Q') = \begin{cases} V(Q - Q') & \text{при } Q' \leqslant Q, \\ -U(Q' - Q) & \text{при } Q' \geqslant Q, \end{cases} \tag{6.1}$$

а допустимыми в состоянии Q распределениями $\varkappa$ являются все борелевские вероятностные меры на R^1_+, удовлетворяющие условиям

$$\int\limits_{\substack{0 \leqslant Q' \leqslant Q \\ 0 \leqslant Q - Q' \leqslant v^*}} \varkappa(dQ') = \alpha, \qquad \int\limits_{0 \leqslant Q' - Q \leqslant u^*} \varkappa(dQ') = \beta, \tag{6.2}$$

которые и дают описание множества K. Здесь α и β — соответственно вероятности возможности купить и продать продукт $(\alpha + \beta = 1)$. Допустимые распределения удобно представить в виде комбинации распределения $\varkappa_v$ объема покупок $v = (Q - Q')_+$ и распределения $\varkappa_u$ объема продаж $U = (Q' - Q)_+$:

$$\varkappa(A) = \alpha \varkappa_v(Q - A) + \beta \varkappa_u(A - Q),$$

$$\operatorname{supp} \varkappa_v \subset [0, Q] \cap [0, v^*], \quad \operatorname{supp} \varkappa_u \subset [0, u^*], \tag{6.3}$$

$$\int f(Q')\, \varkappa_v(dQ') = \alpha \int f(Q - v)\, \varkappa_v(dv) + \beta \int f(Q + u)\, \varkappa_u(du). \tag{6.4}$$

В [1] показано, что задача (3.18), (3.19) для описанного процесса разрешима. Распределения $\varkappa_v$ и $\varkappa_u$ при оптимальном поведении сосредоточены в некоторых точках $\hat{v}(Q, D)$ и $\hat{u}(Q, D)$. Покажем, что в рассматриваемом случае задача (4.5) также разрешима.

Т е о р е м а 3.1. *Задача* (4.5) *при условиях* (6.1), (6.2) *разрешима.*

2. *Функция* $R(Q)$ *определяется однозначно уравнением*

$$R(Q)=\frac{1}{1+\rho}\,[\alpha \sup_{\substack{0\leqslant v\leqslant Q\\ 0\leqslant v\leqslant v^*}} (R(Q-v)+V(v))+$$

$$+\beta \sup_{0\leqslant u\leqslant u^*} (R(Q+u)-U(u))]. \qquad (6.5)$$

3. *Точные верхние грани в* (6.5) *достигаются в некоторых точках* $v_0(Q)$ *и* $u_0(Q)$ [10]. 4. *Используя* u_0, v_0, *можно получить допустимую оптимальную стратегию* Ω_0 *вида* (6.3), *где*

$$\varkappa_v^0(A)=\delta(A\mid v_0(Q)),\quad \varkappa_u^0(A)=\delta(A\mid u_0(Q)) \qquad (6.6)$$

(*через* $\delta(A\mid x)$ *обозначена* δ-*функция, т. е. распределение, сосредоточенное в точке* x).

Доказательство. Обозначим через $K_v(Q)$ и $K_u(Q)$ множества распределений $\varkappa_v$ и $\varkappa_u$, удовлетворяющих (6.3). Тогда в силу (6.4), (6.1) уравнение (4.5) принимает форму

$$R(Q)=\frac{1}{1+\rho}\Big\{\alpha \max_{\varkappa_v\in K_v(Q)} \int \varkappa_v(dv)\,[R(Q-v)+V(v)]+$$

$$+\beta \max_{\varkappa_u\in K_u(Q)} \int \varkappa_u(du)\,[R(Q+u)-U(u)]\Big\}. \qquad (6.7)$$

Это уравнение имеет не более одного ограниченного борелевского решения. Это следует из того, что оператор, стоящий в правой части (6.7), уменьшает равномерное расстояние между теми функциями, для которых он определен. (Доказательство подобных фактов имеется в [8].)

Обратимся теперь к уравнению (6.5). Оператор

$$T[R]=\alpha \sup_{\substack{0\leqslant v\leqslant Q\\ 0\leqslant v\leqslant v^*}} (R(Q-v)+V(v))+\beta \sup_{0\leqslant u\leqslant u^*} (R(Q+u)-U(u)), \qquad (6.8)$$

стоящий в правой части (6.5), определен на множестве ограниченных функций на R_+^1, не увеличивает равномерного расстояния между ними [8] и переводит непрерывные функции в непрерывные. Отсюда следует, что уравнение (6.5) имеет единственное и притом непрерывное и ограниченное решение R. Из непрерывности R следует, что точные верхние грани в (6.5) достигаются. Множества соответствующих точек максимума замкнуты, а их нижние границы v_0 и u_0 являются борелевскими функциями от Q. Таким образом, стратегия Ω_0 вида (6.6) допустима, и

$$R(Q)=\frac{1}{1+\rho}\Big\{\alpha \int \varkappa_v^0(dv) [R(Q-v)+V(v)]+$$

$$\beta \int \varkappa_u^0(du)\,[R(Q+u)-U(u)]\Big\}. \qquad (6.9)$$

[10] Уравнение (6.5) приводилось в [1]. Ограничение $0\leqslant v\leqslant v^*$ несущественно. Оно выполняется автоматически в силу предположения о том, что $V=\mathrm{const}$ при $v\geqslant v^*$.

Очевидно, что $\max\limits_{\substack{0\leqslant v\leqslant Q\\ 0\leqslant v\leqslant v^*}} [R(Q-v)+V(v)]=\max\limits_{\varkappa_v\in K_v(Q)} \int \varkappa_v(dv)\,[R(Q-v)+V(v)]$ и аналогичное равенство справедливо для $\varkappa_u$. Из этого следует, что R, найденное из (6.5), удовлетворяет уравнению (6.7). Поскольку решение (6.7) единственно, (6.5) и (6.7) в рассматриваемом случае эквивалентны.

Осталось доказать, что стратегия Ω_0 вида (6.6) оптимальна в смысле (4.1). Как отмечалось выше, уравнение (4.3), которое в данном случае имеет вид

$$m_\Omega(Q)=\frac{1}{1+\rho}\Big\{\alpha \int \varkappa_v(dv)\,[m_\Omega(Q-v)+V(v)]+$$

$$\beta \int \varkappa_u(du)\,[m_\Omega(Q+u)-U(u)]\Big\}, \qquad (6.10)$$

однозначно определяет среднюю дисконтированную прибыль m_Ω. Поэтому в силу (6.9) $R(Q)=m_{\Omega_0}(Q)$.

С другой стороны, R можно искать методом итераций из (6.5):

$$R(Q)=\lim_{n\to\infty} R^{(n)}(Q),\qquad R^{(n+1)}=\frac{1}{1+\rho}\,T\,[R^{(n)}]. \qquad (6.11)$$

Возьмем теперь любую стратегию Ω и положим в (6.11) $R^{(0)}=m_\Omega$. Из (6.10), (6.5) находим, что $R^{(1)}(Q)\geqslant m_\Omega(Q)=R^{(0)}(Q)$ для всех Q.

Отсюда в силу монотонности оператора T (если $f\geqslant g$, то $T[f]\geqslant T[g]$) следует, что $R^{(n)}(Q)\geqslant m_\Omega(Q)$ для всех n, Q, и, значит, в силу (6.11) $R(Q)\geqslant m_\Omega(Q)$. Теорема доказана.

Из (6.6), (6.4), (4.7) после некоторых преобразований получаем, что дисперсия дисконтированной прибыли S^2 в рассматриваемом случае определяется из уравнения

$$(1+2\rho)\,S^2(Q)=\alpha S^2(Q-v_0(Q))+\beta S^2(Q+u_0(Q))+\rho^2R^2(Q)+$$

$$+\alpha\beta\,[R(Q-v_0(Q))+V(v_0(Q))-R(Q+u_0(Q))+U(u_0(Q))]^2. \qquad (6.12)$$

Более детальное исследование уравнений (6.5), (6.12) показывает следующее: 1) функция $R(Q)$ вогнута, монотонно возрастает и абсолютно непрерывно дифференцируема по Q; 2) функции u_0, v_0 определены однозначно и непрерывны по Липшицу; 3) функция S^2 — абсолютно непрерывна. Кроме того,

$$0\leqslant \frac{dR}{dQ}\leqslant V'(0),\quad \sup\left|\frac{dS^2}{dQ}\right|=O(1)\quad \text{при } \rho\to 0 \qquad (6.13)$$

(хотя R, $S^2\sim 1/\rho$ при $\rho\to 0$). Из (6.13), (6.4), (6.10), (4.7) сразу следует выполнение условий (5.2), (5.3) теоремы 2. При условии $V'(0)>U'(0)$, которое в [1] было названо условием рентабельности рынка, из (6.12) следует (5.1). Таким образом, теорему 2 можно применять для исследования модели, рассмотренной в [1], и переход от задачи (3.18), (3.19) к задаче (4.5) в этой модели вполне оправдан.

В заключение автор выражает глубокую признательность доктору физ.-мат. наук А. А. Петрову за постоянное внимание и помощь в работе.

Приложение.
Свойства сглаживания оператора $T[R]$

Перечисленные выше свойства функций R, S^2, v_0 и u_0 вытекают из «хороших» свойств оператора T (см. (6.8)). Этот оператор сжимающий, монотонный, сохраняет вогнутость и, кроме того, обладает замечательным свойством сглаживания. Последнее устанавливается следующей теоремой, которая может представлять и самостоятельный интерес.

Т е о р е м а 4. *Если R — вогнутая, V — гладкая, строго вогнутая функция и на некотором отрезке I значений Q максимум в выражении*

$$C(Q) = \max_{\substack{0 \leqslant v \leqslant Q \\ 0 \leqslant v \leqslant v^*}} [R(Q - v) + V(v)] \qquad (\text{П.1})$$

достигается во внутренней точке отрезка $[0, Q] \cap [0, v^*]$, то производная $C'(Q)$ существует и непрерывна по Липшицу на I. Аналогичное утверждение справедливо и для второго слагаемого в (6.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко показать [9], что в условиях теоремы функция C непрерывна и вогнута, а максимум достигается в единственной точке $v_0(Q)$, которая непрерывно зависит от Q. Так как $v_0(Q) \neq 0$, $v_0(Q) \neq v^*$ на I, найдется $h > 0$, такое, что при всех δQ ($|\delta Q| < h$) значение $v_0(Q) + \delta Q$ допустимо для задачи максимизации (П.1) в точке Q. Отсюда следует, что

$$C(Q + \delta Q) \geqslant V(v_0(Q) + \delta Q) + R(Q + \delta Q - v_0(Q) - \delta Q).$$

Поскольку $C(Q) = V(v_0(Q)) + R(Q - v_0(Q))$, получаем неравенство

$$C(Q + \delta Q) - C(Q) \geqslant V(v_0(Q) + \delta Q) - V(v_0(Q)) \qquad (\text{П.2})$$

при всех δQ, $|\delta Q| < h$.

Так как C вогнута, она имеет правую и левую производные, причем

$$C'_+(Q) \leqslant C'_-(Q). \qquad (\text{П.3})$$

Но из (П.2) при $\delta Q \to \pm 0$ следует, что $C'_+(Q) \geqslant V'(v_0(Q)) \geqslant C'_-(Q)$. Вместе с (П.3) это означает, что C дифференцируема на I, причем

$$C'(Q) = V'(v_0(Q)) \qquad (\text{П.4})$$

(факт, впрочем, известный [9]).

Возьмем теперь произвольные $a, b \in I$, $a < b$ и разобьем отрезок $[a, b]$ на равные части точками $a = Q_0 < Q_1 < \ldots < Q_{n-1} < Q_n = b$ так, чтобы $\Delta = Q_k - Q_{k-1}$ было меньше h. Складывая неравенства (П.2) при $Q = Q_k$, $\delta Q = \Delta$ и при $Q = Q_k$, $\delta Q = -\Delta$, получаем при $k = 1, 2, \ldots, n - 1$

$$\frac{1}{\Delta}[C(Q_k [illegible] \Delta) - 2C(Q_k) + [illegible](Q_k [illegible] \quad 1 [illegible]$$

$$2V(v_0(Q_k)) - [illegible] V'''(\xi_2)], \qquad (\text{П.5})$$

где ξ_1 и ξ_2 — некоторые точки области $v_0([Q_k [illegible] \Delta, Q_k [illegible] \Delta]) \subset [0, v^*]$.

Положим теперь $\nu = \sup\limits_{v \in [0, v^*]} |V'''(v)|$ и

$$\chi(Q) = [C(Q + \Delta) - C(Q)]/\Delta. \qquad (\text{П.6})$$

Тогда из (П.5) следует, что при $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\chi(a + k\Delta) - \chi(a + (k - 1)\Delta) \geqslant \Delta V''(v_0(Q_k)) - (\Delta^2/3)\nu.$$

Суммируя эти неравенства по k от 1 до n, получаем

$$\chi(b) - \chi(a) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \Delta V''(v_0(Q_k)) - \frac{(b - a)\Delta^2}{3}\nu. \qquad (\text{П.7})$$

При $\Delta \to 0$ левая часть (П.7) в силу (П.6) стремится к $C'(b) - C'(a)$, правая к $\int_a^b V''(v_0(Q))\,dQ$. Поэтому

$$C'(b) - C'(a) \geqslant \int_a^b V''(v_0(Q))\,dQ.$$

Учитывая, что в силу вогнутости $C'(a) \geqslant C'(b)$ и $V'' < 0$, получаем условие Липшица для C':

$$|C'(b) - C'(a)| \leqslant (b - a) \max_{v \in [0, v^*]} |V''(v)|.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поспелов И. Г.* Динамическая модель рынка с посредником.— В кн.: Модели и методы в прогнозировании научно-технического прогресса. М.: ВНИИСИ, 1984, вып. 2, с. 37—44.
2. *Столерю Л.* Равновесие и экономический рост. М.: Статистика, 1974. 472 с.
3. *Лотов А. В.* Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984, с. 352—368.
4. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981, с. 49—55.
5. *Розанов Ю. А.* Случайные процессы. М.: Наука, 1979.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965. 654 с.
7. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 605 с.
8. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 398 с.
9. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.

$1_2 \to \int$

УДК 519.86

МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ПОЛИТИКИ ФИРМ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ РЫНОЧНОГО ТИПА

Н. Н. Оленев, И. Г. Поспелов

В моделях развивающейся экономики, исследованных в [1, 2], было дано микроописание лишь текущего управления производством в условиях рыночной экономики. В настоящей работе предпринята попытка дать микроописание механизма долгосрочного управления производством — инвестиционной политики фирм. На основании этого микроописания построена замкнутая модель развивающейся