МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том **7** номер **7** год **1995**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

УДК 519.86

МОДЕЛЬ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ОСНОВНЫХ ФОНДОВ И ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ, УЧИТЫВАЮЩАЯ РЕЗЕРВЫ МОЩНОСТЕЙ

© *Н.Н. Оленев*

Вычислительный Центр РАН, Москва

Предложена модель инвестиционной политики фирм, имеющих резервные мощности. Эта модель учитывает старение производственных фондов. Показано, как можно разделить понятия технологии и организации фирмы и представить суммарный выпуск фирм при помощи эффективного распределения суммарной мощности по технологиям. Получен новый класс производственных функций.

A LIFE-CYCLE MODEL OF CAPITAL AND PRODUCTION FUNCTION WITH RESERVE CAPACITY

N.N. Olenev

Computing Center of Russian Academy of Sciences

A model of the investment policy of firms with reserve capacities is suggested. The ageing of productive assets is taken into account. It is shown that the conceptions of a technology and a firm can be separated from each other and that the total production of firms can be described by means of an effective distribution of the total capacity among the technologies. The model gives rise to a new class of production functions.

Введение

Производственная функция – это одно из основных понятий математической экономики. Она задает зависимость выпуска продукта от количеств используемых производственных факторов. Почти 40 лет тому назад Хаутеккер [1] предложил строить производственную функцию, исходя из распределения производственных мощностей по технологиям. Через 10 лет об этой работе вспомнили [2, 3]. Метод построения производственной функции отрасли на основе информации о распределении ее мощностей по технологиям был использован Йохансеном [4, 5] для анализа конкретных отраслей экономики Норвегии и Швеции. Производственные функции, представимые распределением производственных мощностей по технологиям, систематически использовались в макроэкономических моделях экономики, разработанных в ВЦ РАН [6, 7].

Ниже будет рассматриваться частный случай этого представления производственных функций: Предположим, что в процессе производства используется только два производственных фактора: живой труд и капитал. Отрасль хозяйства состоит из отдельных производственных единиц, каждая из которых выпускает один и тот же однородный продукт, используя единственную технологию. Технология характеризуется трудоемкостью λ – нормой затрат живого труда на единицу выпуска. Производственная единица кроме технологии характеризуется мощностью m – максимально возможным выпуском продукта в единицу времени. Мощности возникают в результате капитальных вложений. Производственную структуру такой отрасли в каждый момент времени t можно описать плотностью распределения производственных мощностей по трудоемкости λ, $m(t,\lambda)$. Максимальный суммарный выпуск Y получится, если имеющиеся рабочие места заполнять трудовыми ресурсами R^L в порядке возрастания трудоемкостей. Тогда, при некотором ξ,

$$Y = \int\limits_{\nu(t)}^{\xi} m(t,\lambda)d\lambda, \quad R^L = \int\limits_{\nu(t)}^{\xi} \lambda m(t,\lambda)d\lambda. \tag{0.1}$$

Здесь $\nu(t)$ характеризует наилучшую из разработанных и используемых в отрасли технологий. В [6] показано, что (0.1) неявно определяет производственную функцию вида

$$Y = Mf(t, R^L/M) \tag{0.2}$$

с обычными для неоклассических функций свойствами. Здесь M – суммарная мощность отрасли.

В [8] для установления соответствия производственных функций и распределений производственных мощностей по технологии использовались функции прибыли. Если произведенный продукт продается на свободном рынке по цене p, а трудовые ресурсы оплачиваются по единой ставке заработной платы s, и каждая производственная единица определяет свой выпуск $y(t,\lambda) \in [0, m(t,\lambda)]$, так чтобы максимизировать прибыль $(p - s\lambda)\,y(t,\lambda)$, то суммарный выпуск отрасли Y и суммарные затраты трудовых ресурсов R^L будут связаны соотношениями (0.1), при

$$\xi = p/s \tag{0.3}$$

В [9] учтен процесс старения производственных фондов и получен соответствующий класс производственных функций. В [10, 11] предложено математическое описание экономической деятельности промышленной фирмы, позволяющее рассмотреть жизненный цикл фирмы от момента ее возникновения до момента ее ликвидации.

Модели жизненного цикла фирмы, рассмотренные в [10, 11], имеют один существенный недостаток: поскольку момент ликвидации фирмы наступает раньше момента потери рентабельности, все имеющиеся в наличии мощности оказываются всегда полностью загруженными. Этот результат, во-первых, не соответствует действительности и, во-вторых, казалось бы обесценивает сам исходный способ описания производственной системы с помощью распределения мощностей по технологиям. Напомним, что в [6, 7] это описание было введено именно для того, чтобы объяснить возможность быстрого замещения труда капиталом.

Указанный недостаток, однако, не является неизбежным следствием принятого подхода. Он лишь указывает на неправомерность прямолинейного отождествления технологии и организации фирмы. Здесь мы покажем, как можно разделить эти понятия и согласовать представление о жизненном цикле фирмы с представлениями о неполностью загруженном распределении мощностей по технологиям.

1. Описание загрузки мощностей

Известно, что фирмы держит резервные мощности для того, чтобы быстро нарастить выпуск при улучшении рыночной конъюнктуры, иметь возможность выполнить крупный заказ и не потерять выгодного потребителя. Наращивание выпуска чаще всего происходит путем организации работы в несколько смен. Дополнительное рабочее время оплачивается по повышенной ставке заработной платы.

Включим описание таких возможностей в нашу модель деятельности фирмы. Пусть промышленная фирма располагает мощностью m с общим числом рабочих мест $r^L = \lambda m$, где λ – трудоемкость единицы продукта. Допустим, что r^L – максимальное число рабочих мест при максимальном использовании сверхурочных часов. Поэтому, чем большая часть рабочих мест загружена, тем выше средняя заработная плата занятых. Пусть имеется некоторая базовая ставка заработной платы s и общее для всех фирм правило, которое определяет, во сколько раз по отношению к базовой возрастает зарплата при использовании сверхурочных работ. Таким образом, общие издержки на выплату зарплаты (фонд заработной платы) для фирмы, заполнившей долю ζ общего числа рабочих мест, составят $sK(\zeta)$, где функция K определяет указанное правило.

Будем предполагать, что функция $K(\zeta)$ монотонно возрастает (чем больше занятых, тем больше фонд заработной платы), выпукла (чем в большей степени используются сверхурочные работы, тем больше зарплата одного занятого), $K(0) = 0$ (постоянные издержки, не связанные с выпуском продукции, пренебрежимо малы), $K'(0) = 1$ (при минимальном использовании сверхурочных работ средняя зарплата совпадает с базовой) [1]. Для простоты считаем $K(\zeta)$ строго выпуклой и гладкой.

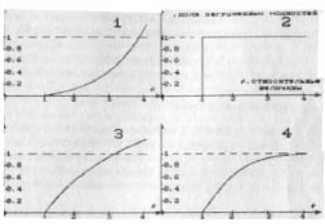
Производную функции $K(\zeta)$ будем называть дифференциальной надбавкой. В силу перечисленных выше свойств, при изменении ζ от 0 до 1 эта величина $\rho(\zeta) = K'(\zeta)$ монотонно возрастает, причем $\rho(0) = 1$. Поэтому существует обратная функция $\zeta(\rho) = (K')^{-1}(\rho(\zeta))$, которая в основном и будет фигурировать в дальнейшем изложении. Положим $\zeta(\rho) = 0$ при $\rho \le 1$, и $\zeta'(\rho) > 0$ при $\rho > 1$. Возможный вид функции $\zeta(\rho)$ показан на рис.1[2].

Выразим через функцию $\zeta(\rho)$ общий выпуск фирмы, y, и фонд заработной платы на единицу мощности, φ,

$$y = m\zeta(\rho), \quad \varphi(\rho) = s\lambda \int\limits_0^{\zeta(\rho)} \xi d\zeta(\xi) = s\lambda \left(\rho\zeta(\rho) - \int\limits_0^{\rho} \zeta(\xi)d\xi \right) \tag{1.4}$$

[1] Штрих здесь и далее обозначает производную функции по ее аргументу.

[2] Графики 1,3 на рис.1 отвечают ситуации, когда возможна перегрузка номинальной мощности. При этом m оказывается не максимальной величиной выпуска, а некоторой нормативной величиной. График 2 соответствует отсутствию надбавки [10, 11], а график 4 – случаю, когда отсутствует перегрузка номинальной мощности.



Рис

раметр краткосрочного управления фирмы ρ, определяющий ее выпуск и издержки, назовем предельной надбавкой к зарплате, которую допускает в настоящий момент фирма.

Рассмотрим теперь динамику производственной мощности $m(t,\tau)$ фирмы, созданной в момент времени τ, "фирмы τ". Пусть в момент создания фирма τ имеет мощность $m(\tau,\tau) = I(\tau)$ и номинальную трудоемкость $\nu(\tau)$. Как и в [9], считаем, что нормативное число рабочих мест фирмы τ в течение всего срока службы сохраняется неизменным $I(\tau)\nu(\tau)$, а номинальная мощность падает, потому что старое оборудование чаще ломается, и с течением времени все большая доля рабочего времени уходит на простои и ремонт. Если темп падения мощности постоянен и равен μ, то к моменту t мощность фирмы τ составит

$$m(t,\tau) = I(\tau)\exp\left(-\mu(t-\tau)\right).$$

Пусть $y(t,\tau)$ – выпуск продукции, а $r^L(t,\tau)$ – число заполненных рабочих мест фирмы τ в момент t, причем предельная надбавка, которую допускает фирма τ в момент t составляет ρ. Тогда

$$\tau)I(\tau)\zeta(\rho) \quad y(t,\tau) = \zeta(\rho)I(\tau)\exp(\quad \mu(t - $$

му трудоемко ь выпуска, $\lambda(t,\tau)$ составит

$$\lambda(t,\tau) \qquad \exp\left(\mu(t\right.$$

Если цена продукции в момент t составляет p, а базовая ставка зарплаты s, то в силу (1.4) максимальную текущую прибыль, $\Pi = (p\zeta(\rho) - \varphi(\rho))\,m(t,\tau)$, фирма τ получит при $\rho = p/s\lambda(t,\tau)$. При этом

$$y(t,\tau) \quad I(\tau)\exp\left(-\mu(t - \tau)\right)\zeta(\qquad \lambda(t,\tau))), \qquad (1.8)$$

$$\Pi \quad s\lambda(t,\tau)I(\tau)\exp\left(-\mu(t\right. \quad \int^{\nu(t)/(s(t)\lambda(t,\tau))} \zeta(\xi)d\xi. \qquad (1.9)$$

Предположим, как в [9], что величина $\nu(t)$, характеризующая наилучшую из известных технологий, непрерывна и убывает со временем. Тогда в силу (1.7),(1.8) $y(t,\tau) > 0$ только у фирм с возрастом, не превосходящим $A(t,p/s)$, такого что

$$\nu(t - A(t,p/s)) = p/s. \qquad (1.10)$$

Поэтому в силу (1.6) совокупный выпуск и затраты ресурсов выразятся в виде

$$Y \quad Y(t,p/s) = \int_{-A(t,p/s)} I(\tau)\exp\left(-\mu(t-\tau)\right) \times$$
$$\times\, \zeta\left(p/(s\nu(\tau)\exp(\mu(t - \tau)))\right) d\tau,$$

$$R^L \quad R^L(t,p/s) = \int_{t-A(t,p/s)} \nu(\tau)I(\tau)\exp\left(-\mu(t\right.$$
$$\times\zeta\left(p/ \; s\nu(\tau)\exp(\mu(t - \tau)))\right) d\tau. \qquad (1.12)$$

Соотношения (1.10) - (1.12) будут верны при любых p, s 0, так как $\zeta(\rho) = 0$ при $\rho \leq 1$.

Рассматривая A, Y и R^L как функции двух переменных t и ξ p/s и исключая A из (1.10), (1.11), получаем уравнение для Y.

$$\partial Y/\partial t = I(t)\zeta\left(\xi/\nu(t)\right) - \mu Y(t,\xi) - \mu\xi\partial Y/\partial\xi. \qquad (1.13)$$

Производная $\partial Y/\partial\xi = m(t,\xi)$ – это плотность некоторого эффективного распределения мощностей. Легко показать, что через $m(t,\xi)$ величины (1.11),(1.12) выражаются в виде (0.1), т.е. также как в исходном описании Хаутеккера-Йохансена. Однако, этом случае понятия технологии и фирмы не совпадают. Величина $m(t,\lambda)$ является уже не фактической мощностью фирмы, а некоторой эффективной мощностью, складывающейся из тех "кусочков" мощностей всех фирм, у которых издержки производства равны $s\lambda$. Эффективные мощности загружаются полностью, если рентабельны, и не загружаются совсем, если нерентабельны. Причем, как мы увидим ниже, при любом механизме ликвидации фирм суммарная мощность отрасли будет загружена неполностью.

Динамика величин $m(t,\xi)$ описывается уравнением

$$\partial m/\partial t = \zeta' \qquad t))\,I(t)/\nu(t) - \; 2\mu m(t,\xi) - \mu\xi\partial m/\partial\xi,$$

рое получается дифференцированием (1.13) по ξ.

Уравнение (1.14) обобщает соответствующее уравнение в [9].

Предположим, что функции $\zeta(\rho), \nu(t), I(t)$ выбраны так, что полное чи- рабочих мест в хозяйстве $\overline{R}^L(t) = \int_0^\infty \lambda m(t,\lambda)d\lambda$ (см. (1.12)) конечно[3]. Тогда $(t,\lambda) = \lambda \partial Y/\partial\lambda \to 0$ при $\lambda \to \infty$, и из (1.13) получаем следующее уравнение полной мощности всех производственных единиц $M = Y(t,\infty)$:

$$dM/dt = \zeta(\infty)I(t) - \mu M(t). \qquad (1.15)$$

жив $\zeta(\infty) =$ получим[4] обычное макроэкономическое уравнение [6, 7, 12].

Производственная функция отрасли

Будем считать, что новые мощности создаются непрерывно со скоростью). Введем величину $\sigma(t) = I(t)/M(t)$, темп инвестиций. Тогда считая, как в [9], темп научно-технического прогресса пропорционален этой величине, $d\nu/dt = \varepsilon\nu\sigma$ ($\varepsilon > 0$, $\sigma(t) > 0$), и используя (1.11), (1.12), (0.2), можно получить следующее параметрическое выражение для производственной функции:

$$f(t, x) = \int_{t-A(t,x)} \sigma(\tau)\exp\left(\int \sigma(s)ds\right) \exp \int_{-A(t,x)} (\varepsilon\sigma(s)+\mu)\, ds \Big|\, d\tau,$$

$$\nu(t) = \int_{-A(t,x)}^{t} \sigma(\tau)\exp\left(\int (1-\varepsilon)\sigma(s)-\mu)\, ds \right| \times$$

$$\times \zeta \exp \Big| \int_{A(t,x)} (\varepsilon\sigma(s) + \mu)\, ds \Big|\, d\tau. \qquad (2.16)$$

Здесь $x = R^L/M$, а параметр $A(t,x)$ – это возраст самой старой фирмы, которую нужно загрузить, чтобы обеспечить выпуск $M(t)f(t,x)$.

Вид производственной функции соответствует виду функции ζ. Изображенная на графике 2 рис.1 функция ζ дает производственную функцию, построенную

Из (2.16) при $\sigma = \mathrm{const}$ легко найти выражение для $\partial f/\partial x$.

$$\partial f(t,x)/\partial x = \zeta\left(\exp\left((\varepsilon\sigma+\mu)A\right)\right) - f(t,x))/$$
$$(\nu(t)\zeta\left(\exp\left((\varepsilon\sigma+\mu)A\right)\right) - (1-\varepsilon-\mu)x) \qquad (2.17)$$

Выражение (2.17) определяет технологию с трудоемкостью, наибольшей из используемых:

$$\nu(t)\exp\left((\varepsilon\sigma+\mu)A(t,x)\right) \quad /f'_x \qquad (2.18)$$

[3] В отличие от [9] полное число рабочих мест в хозяйстве будет неограниченным, если функция $\zeta(\rho)$ не ограничена при $\rho \to \infty$

[4] Случаи $\zeta(\infty) > 1$ и $\zeta(\infty) < 1$ означают, что неудачно определена функция I. Обычное макроэкономическое уравнение получим, переопределив соответствующим образом I.

Рассмотрим простейший случай, когда $\varepsilon = 0$, $\sigma = \mathrm{const}$, а $\zeta(\rho) = 1 - exp(-\alpha(\rho-1))$, где $0 < \alpha < \infty$. Тогда функция имеет вид, изображенный на графике 4 рис.1. Имеем, $\zeta'(\rho) = \alpha(1-\zeta(\rho))$ и $\zeta(\infty) = 1$. В этом случае (2.16) дает следующее параметрическое выражение для производственной функции:

$$f(x) = \zeta(\rho) - (1 - \zeta(\rho))\sum_{i=1}^{\infty}(\mu\alpha\rho)^i / \prod_{j=1}^{i}(\sigma + j\mu) +$$
$$+\rho^{-\sigma/\mu}\sum_{i=1}^{\infty}(\mu\alpha)^i / \prod_{j=1}^{i}(\sigma + j\mu),$$
$$x = \left(\zeta(\rho) - (1 - \rho^{-\sigma/\mu} - f(x)\right)\mu\alpha\rho/\sigma\Big)\, \nu/(1-\mu/\sigma), \qquad (2.19)$$

где $\rho = \exp(\mu A(x)) \geq 1$. Заметим, что ряды сходятся, если $\rho < \infty$.

Так же, как и в [9], параметр производственной функции x является краткосрочным управлением, а σ - долгосрочным. Новым является то, что вновь построенная производственная функция существенно учитывает наличие резервных мощностей. Значение x определяет максимальные из используемых в хозяйстве дифференциальную надбавку ρ и функцию загрузки мощностей $\zeta(\rho)$, которые входят в выражение для производственной функции.

3. Задача Р.Солоу

Рассмотрим режимы экспоненциального роста в простейшей модели экономики при отсутствии научно-технического прогресса ($\varepsilon = 0$). Предположим, что $\zeta(\infty) = 1$. Тогда в силу (1.15) производственные мощности изменяются в соответствии с уравнением $dM/dt = I - \mu M$. Суммарный выпуск продукта $Y(t)$ в соответствии с (0.1), (0.2) определяется производственной функцией (2.19), которая зависит от двух производственных факторов - суммарной мощности хозяйства $M(t)$ и суммарного числа занятых рабочих мест $R^L(t) : Y = Mf(x)$, $x = R^L/M$. Производимый продукт расходуется на расширение производства и конечное потребление: $Y = bI + W$. Здесь W – объем продукта, идущего на потребление, b – коэффициент приростной фондоемкости. На режимах экспоненциального роста объемные показатели R^L, M, I, W увеличиваются с одинаковым постоянным темпом γ, а $x = \mathrm{const}$.

На режимах экспоненциального роста легко определить темп инвестиций, σ, $\sigma = \gamma + \mu$, и объем потребления на одного занятого, $w = W/R^L$, $w = (f(x,\gamma) - b(\gamma+\mu))/x$.

Задача Солоу [9] ставится следующим образом: среди всех режимов сбалансированного роста с заданным темпом γ найти такой, при котором величина w максимальна. Если при заданном γ решение x, определяемое из условия $\partial w/\partial x = 0$, существует и $x \in (0, \overline{x})$, то величина $\partial^2 w/\partial x^2 = (1/x)(\partial^2 f/\partial x^2)$ и в силу свойств производственной функции [6], $\partial^2 f/\partial x^2 < 0$, отрицательна и, значит, x доставляет максимум w.

На рис.2 показана зависимость $w(x)$ для производственной функции $f(x,\gamma)$ (2.19) (кривая 1) и для производственной функции $f_0(x,\gamma) = 1 - (1 - x/(\nu(1+\mu/\gamma)))^{1+\mu/\gamma}$, построенной в работе [9] (кривая 2), при постоянном значении темпа роста $\gamma = 0,05$. Из рисунка видно, что значение x, доставляющее максимум функции w, в первом случае существенно больше ($x \approx 0,12$), чем о втором ($x \approx 0,8$), в то время как максимальное значение w выше во втором случае. Чтобы объяснить этот факт необходимо сравнить решение задачи Солоу для функций (2.19) и $f_0(x,\gamma)$.

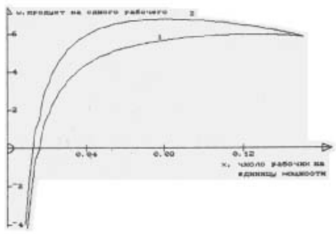


Рис.2.

Из условия $\partial w/\partial x = 0$ получаем уравнение для определения x, доставляющего максимум w:

$$f(x,\gamma) - x\partial f/\partial x - b(\gamma+\mu) = 0. \tag{3.20}$$

Это соотношение известно в математической экономике под названием "золотого правила роста" Р.Солоу. Если производственная функция имеет вид (2.19), то в соответствии с (2.17) вместо $\partial f/\partial x$ в (3.20) следует подставить

$$\partial f/\partial x = (\zeta(\rho) - f(x,\gamma))\,/\,(\nu(\zeta(\rho) - \gamma x/(\nu(\gamma+\mu)))) \tag{3.21}$$

и из уравнения (3.20) определится значение ρ, которое доставляет максимум w. Для того, чтобы уравнение (3.20) имело решение, достаточно потребовать неотрицательность величины $1 - b(\gamma+\mu)$. Это определяет технологический предел темпа роста: $\gamma < 1/b - \mu$. Значит, чтобы темп роста мог быть положительным, надо потребовать выполнения условия продуктивности $1 - \mu b > 0$ (см. [9]).

Итак, для каждого заданного значения темпа роста, γ, $0 < \gamma < 1/b - \mu$, в случае (2.19) найдется значение ρ, при котором объем потребления на одного занятого, w, максимален. Это значение определяет оптимальные значения $x_{опт}, f_{опт}, w_{опт}, f_{опт}/x_{опт}$. В случае $f_0(x,\gamma)$ найдется оптимальное значение x, при котором w максимально, и это значение определяет остальные (см. [9]). На рис.3 представлены зависимости оптимальных значений от темпа роста γ для обоих случаев. Кривые 1 соответствуют производственной функции (2.19), а кривые 2 – $f_0(x,\gamma)$.

Из рис.3 видно, что при $\gamma = 0$ объем потребления на одного занятого $w_{опт}$ ниже для функции (2.4), хотя загрузка производственных мощностей $f_{опт}$ в обоих

случаях совпадает. Это объясняется тем, что средняя производительность труда $f_{опт}/x_{опт}$ в случае 1 ниже, чем в случае 2. Действительно, в случае 1 вновь созданные мощности имеют целый спектр трудоемкостей, $\nu\xi$ ($\xi \geq 1$), а в случае 2 – единственную трудоемкость, ν.

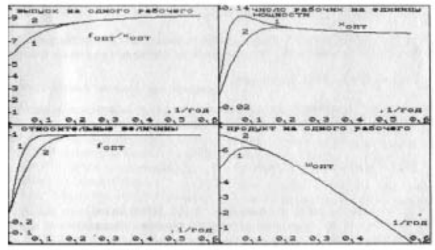


Рис.3.

По мере увеличения γ объем потребления на одного занятого $w_{опт}$ в случае 1 вначале возрастает, достигая максимального значения при γ несколько меньшем $0,1$, а затем падает, причем кривые 1 и 2 практически совпадают при больших γ. При этом в обоих случаях функции $w_{опт}(\gamma)$ вогнуты. Это связано с улучшением технологической структуры при увеличении γ, что выражается в росте средней производительности труда $f_{опт}/x_{опт}$. Такой эффект, возможно, проявился в быстром и эффективном развитии ряда стран Юго-Восточной Азии в послевоенное время.

В случае 1 улучшение технологической структуры происходит быстрее, а загрузка мощностей $f_{опт}$ раньше достигает наивысшего значения. Заметим, что различия в поведении двух сравниваемых функций сказываются в диапазоне реальных значений темпов роста. Отметим, что в случае (2.4) существует темп роста $\gamma > 0$, при котором $w_{опт}$ достигает наивысшего значения.

4. Экономическая деятельность фирмы

Момент продажи мощностей в [10] определен из условия максимизации ожидаемой дисконтированной прибыли фирм за фиксированный, достаточно большой интервал времени T. Ожидаемая прибыль оценивается по текущим значениям цен и процентов. Определим возраст продажи мощностей фирмы τ в нашем случае. Перейдем от переменных t, τ к переменной $\eta = t - \tau$, означающей возраст фирмы τ в момент времени t. Рассмотрим фирму, созданную в возрасте $\eta = 0$ в результате вложения средств Φ^I. Тогда $m(0) = I = \Phi^I/(pb)$. Пусть $B(\eta)$ – количество продукта, которое получается в результате демонтажа единицы мощности возраста η. Считаем, что $B'(\eta) \le 0, B(0) = b$.

Будем считать, как и в [10, 11], что дивиденды собственников фирмы $d(\eta) \ge 0$ и поступают на депозит $q(\eta)$ в банке, на который начисляется процент r_2. Тогда

$$q'(\eta) = r_2 q(\eta) + d(\eta), \; q(0) = 0. \tag{4.22}$$

Пусть $l(\eta)$ – задолженность фирмы, которая растет за счет начисления процента $r_1 (r_1 > r_2)$ и уменьшается за счет платежей погашения $h(\eta) \ge 0$,

$$l'(\eta) = r_1 l(\eta) - h(\eta), \; l(0) = pbm(0). \tag{4.23}$$

Предполагаем, что прибыль делится на обслуживание задолженности и дивиденды [10, 11]. Тогда, в соответствии с (1.9), до продажи,

$$\Pi(\eta) = d(\eta) + h(\eta) = s\lambda(\eta)m(\eta) \int\limits_1^{p/(s\lambda(\eta))} \zeta(\xi)d\xi, \tag{4.24}$$

где $\lambda(\eta) = \nu\exp(\mu\eta)$, $m(\eta) = I\exp(-\mu\eta)$. В [10, 11] доказано, что действуя оптимальным образом, собственники фирмы вначале расплачиваются с задолженностью, а затем получают дивиденды:

$$h(\eta) = \Pi(\eta)\theta\left(l(\eta)\right), \; d(\eta) = \Pi(\eta)\left(1 - \theta\left(l(\eta)\right)\right), \tag{4.25}$$

где $\theta(.)$ – функция Хевисайда, $\theta(x) = 1$ при $x > 0$, $\theta(x) = 0$ при $x \le 0$. Момент продажи мощности, τ^u, определяется из условия максимума функции ожидаемой конечной прибыли, $\psi(\tau^u)$, $\psi(\tau^u) = \exp\left(r_2(T - \tau^u)\right)\left(pB(\tau^u)m(\tau^u) - l(\tau^u)\right)$. Из необходимого условия $\psi'(\tau^u) = 0$ получим условие на момент продажи:

$$s\lambda(\tau^u) \int\limits_1^{p/(s\lambda(\tau^u))} \zeta(\xi)d\xi - (\mu + r_2)pB(\tau^u) + pB'(\tau^u)$$
$$+ (r_1 - r_2)l(\tau^u - 0)/m(\tau^u - 0) = 0. \tag{4.26}$$

До сих пор мы предполагали, что p, s, r_1, r_2 постоянны. Будем считать, что условие (4.26) может быть экстраполировано на случай, когда $p(t), s(t), r_1(t), r_2(t)$ зависят от времени, а именно, считать, что в момент времени t происходит ликвидация фирмы τ возраста $\eta(t) = t - \tau$, где $\eta(t)$ определяется из

$$\eta(t) = \inf \Big\{ s(t)\lambda(t, t - \eta) \int\limits_1^{p(t)/(s(t)\lambda(t,t-\eta))} \zeta(\xi)d\xi -$$
$$- (\mu + r_2(t))\, pB(\eta) + p(t)B'(\eta) -$$
$$(r_1(t) - r_2(t))\, l(t, t - \eta)/m(t, t - \eta) < 0 \Big\}. \tag{4.27}$$

Считая, что полученная функция $\eta(t)$ дифференцируемая и, кроме того, $A > \eta(t) > 0$, $\eta'(t) < 1$, мы, действуя так же, как при выводе (1.15), можем получить уравнение для плотности эффективного распределения производственных мощностей, $m(t, \lambda)$.

$$\partial m/\partial t = \zeta'(\lambda/\nu(t))\, I(t)/\nu(t) - 2\mu m(t,\lambda) - \mu\lambda\partial m/\partial\lambda +$$
$$(\eta'(t) - 1)\exp(-2\mu\eta)\zeta'\left(\lambda\exp(-\mu\eta)/\nu(t-\eta)\right) I(t - \eta)/\nu(t - \eta). \tag{4.28}$$

И новые, и демонтируемые мощности распределены по трудоемкости, причем форма распределения также определяется функцией ζ.

5. Односекторная модель экономики

Рассмотрим хозяйство, выпускающее единственный однородный продукт. Управление производством осуществляют мелкие фирмы, различающиеся по моменту их создания. При выпуске продукта используется однородный живой труд. В силу (1.7) базовая трудоемкость фирмы возрастает, $\lambda(t, \tau) = \nu\exp\left(\mu(t - \tau)\right)$. Величина ν считается постоянной.

В момент создания фирма τ берет в банке кредит $\Phi^I(\tau)$. На эти средства она закупает фондообразующий продукт и создает производственную мощность $m(\tau, \tau) = I(\tau) = \Phi^I(\tau)/\left(p(\tau)b\right)$, где b – приростная фондоемкость. В дальнейшем мощность уменьшается вследствие физического износа и, кроме того, может быть частично демонтирована по решению фирмы. При демонтаже всей мощности фирма ликвидируется. Пусть $m(t, \tau)$ - мощность фирмы τ в момент t, μ – темп выбытия, а $u(t, \tau) \ge 0$ - темп демонтажа. Тогда

$$\partial m(t,\tau)/\partial t = -\mu m(t,\tau) - u(t,\tau)m(t,\tau), \; m(t,\tau) \ge 0. \tag{5.29}$$

Демонтированная мощность продается на рынке и приносит фирме доход $z_m(t,\tau) = u(t,\tau)B(t,\tau)p(t)m(t,\tau)$. Функция $B(t, \tau)$ показывает, какому количеству продукта эквивалентна единица демонтированной мощности, $B'(t - \tau) \le 0$, $B(\tau, \tau) = b$ [10],[11].

В соответствии с (1.6),(1.9) выпуск продукции $y(t, \tau)$ фирмой определяется равенством $y(t, \tau) = m(t, \tau)\zeta\left(\rho(t, \tau)\right)$, где $\rho(t, \tau) = p(t)/\left(s(t)\lambda(t, \tau)\right)$ и приносит доход $z_y(t, \tau) = s(t)\lambda(t, \tau)m(t, \tau)\int_1^{\rho(t,\tau)}\zeta(\xi)d\xi$.

В момент образования у фирмы возникает задолженность $l(\tau, \tau) = \Phi^I(\tau)$, которая меняется в соответствии с (4.23).

$$\partial l(t,\tau)/\partial t = r_1(t)l(t,\tau) - h(t,\tau), \; l(t,\tau) \ge 0. \tag{5.30}$$

Условие $l(t, \tau) \ge 0$ означает, что ссудный счет не используется для накопления сбережений. Банк накладывает ограничение на задолженность, $l(t, \tau) \le k(t, \tau)$, в котором $k(t, \tau)$ – балансовая стоимость фирмы τ. Она подчиняется уравнению [10, 11]

$$\partial k(t,\tau)/\partial t = -\beta k(t,\tau) - u(t,\tau)k(t,\tau), \; k(\tau,\tau) = \Phi^I(\tau). \tag{5.31}$$

Здесь β $(\beta > \mu)$ – норма амортизации. Последнее слагаемое учитывает списание стоимости демонтированной мощности. Погашение кредита h производится за счет дохода фирмы $z \qquad _y + z_m$. Остаток дохода образует дивиденды $d(t,\tau)$ собственников фирмы:

$$d(t,\tau) = z_y(t,\tau) + z_m(t,\tau) - h(t,\tau) = z - h \geq 0. \tag{5.32}$$

Условие $d(t,\tau) \geq 0$ означает, что фирма является обществом с ограниченной ответственностью. Дивиденды поступают в банк и образуют депозит собственников фирмы, $q(t,\tau)$, (см. (4.22)).

$$\partial q(t,\tau)/\partial t = r_2(t) q(t,\tau) + d(t,\tau), \; q(\tau,\tau) = 0, \; q \geq 0. \tag{5.33}$$

При $t = \tau$ имеет место равенство $\quad = k$. Следовательно, для выполнения условия $l \leq k$, необходимо потребовать

$$r_1(t)|_{t=\tau} \qquad \left. \int\limits_{}^{(\tau,\tau)} \zeta(\xi) d\xi \right) / (b\rho(\tau,\tau)) - \beta. \tag{5.34}$$

В [10, 11] показано, что при выполнении условия, соответствующего (5.34), создание новой фирмы прибыльно и, следовательно, предъявляется спрос на инвестиции, и, более того, спрос на кредит неограничен. Однако, предложение кредита банковской системой ограничено. Предполагая, что рынок кредитов находится в равновесии, мы определим из (5.34) норму процента по ссудам

$$r_1(t) = \quad \int^{(t,t)} \zeta(\xi) d\xi \quad / (b\rho(t,t)) - \beta. \tag{5.35}$$

Будем считать, как и в [10, 11], что фирма в первую очередь погашает задолженность, а потом уже накапливает прибыль, ликвидирует фирму в подходящий момент времени $T(\tau)$: $u(t,\tau) = \delta(t - T(\tau))$. Это – первый момент времени t, когда нарушается

$$(t)\lambda(t,\tau) \int^{(t,\tau)} \zeta(\xi) d\xi - (\mu + r_2(t)) p(t) B(t,\tau) + p(t) B'_t(t,\tau) -$$

$$-(r_1(t) - r_2(t)) l(t,\tau)/m(t,\tau) \geq 0. \tag{5.36}$$

Продукт Y, который фирмы поставляют на рынок, состоит из произведенного продукта, $Y^L = \int_{-\infty}^t y(t,\tau) d\tau$, и продукта, образовавшегося в результате демонтажа мощностей $Y^U = \int_{-\infty}^t u(t,\tau) m(t,\tau) B(t,\tau) d\tau$, так что $Y = Y^L + Y^U$.

Спрос на продукт Y предъявляют трудящиеся, доход которых равен заработной плате, выплаченной фирмами, sR^L, где

$$R^L \quad \int \lambda(t,\tau) m(t,\tau) \left| \; (t,\tau) \zeta(\rho(t,\tau)) - \int^{(t,\tau)} \qquad d\tau. \right. \tag{5.37}$$

Кроме трудящихся спрос на продукт Y предъявляют инвесторы, организующие новую фирму. Они расходуют средства Φ^I, взятые в кредит в банковской системе.

Будем предполагать, что рынок продуктов находится в равновесии [10, 11]. Тогда цена, p, определяется условием $p(t) = (sR^L + \Phi^I)/Y$. Изменение заработной платы опишем уравнением $ds/dt = (R^L/\widehat{R}^L - 1)_+/\Delta_s$, где $\widehat{R}^L$ – предложение трудовых ресурсов. $\widehat{R}^L = \widehat{R}^L_0 \exp(nt)$.

Функционирование банковской системы опишем так же как в работах [10, 11]. Предполагаем, что банковские активы складываются из резерва R и задолженности L фирм, а пассивы – из депозитов собственников фирм D. Резерв банковской системы, R, $dR/dt = \pi Y$, обеспечивает депозиты, D, законодательно установленной нормой ξ: $R \geq \xi D$. Используя уравнение (5.33) и считая, что эмиссия денежных средств увеличивает депозиты, находим

$$dD/dt = r_2 D + \int_{-\infty} d(t,\tau) d\tau + \pi Y. \tag{5.38}$$

Подсчитывая задолженность фирм, надо учесть следующее обстоятельство. При сильных колебаниях цены может оказаться невыполненным условие обеспечения кредита, $l \leq k$. Часть фирм может обанкротиться, иначе говоря, может оказаться, что у них $m(t,\tau) = 0$, а $l(t,\tau) > 0$. Как и в [10, 11], мы будем считать, что задолженность таких фирм списывается и не учитывается в активах банка, поэтому суммарная задолженность, $L(t)$, равна

$$(t) = \int\limits_{m(t,\tau)>0} l(t,\tau) d\tau. \tag{5.39}$$

Финансовый баланс банковской системы выражается равенством $D(t) = R(t) + L(t)$.

В "нормальной" [10, 11] ситуации, когда $r_1 > 0$, банк стремится предоставить максимальный кредит $L = R(1 - \xi)/\xi$, а организаторы фирм берут весь предлагаемый кредит. Тогда

$$dL/dt = \Phi^I + \Lambda, \; \Lambda = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{(t,\tau)>0} l(t,\tau) d\tau. \tag{5.40}$$

Здесь Λ – прирост задолженности фирм, за вычетом задолженности банкротов. Таким образом, в "нормальной" ситуации

$$\Phi^I \quad -\Lambda + \pi Y \quad \xi)/\xi. \tag{5.41}$$

Ситуацию, при которой $\Phi^I < 0$, можно интерпретировать [10, 11] как крах банковской системы, а состояние модели, в котором он наступает, следует считать недопустимым. Чтобы иметь средства для предоставления кредита Φ^I, банковская система должна увеличить депозиты в соответствии с равенством (5.38). Она может это сделать, увеличив процент r_2.

$$r_2 D + \int d(t,\tau) = \Phi^I + \Lambda. \tag{5.42}$$

Из этого равенства видно, что уменьшение величины Λ вследствие банкротства фирм (при прочих равных условиях) уменьшает величину процента r_2, тем самым уменьшая доходы собственников на величину списанной задолженности.

На этом завершается описание банковской системы и модели.

6. Численные эксперименты с моделью

Целью численных экспериментов было выяснение работоспособности предложенной модели. В численных экспериментах моделировалась деятельность каждой фирмы. Рассматривался дискретный набор значений независимых переменных t и τ.

На рис.4 изображены некоторые результаты эксперимента, в котором функция ζ имела вид, представленный на рис.1 (график 4): $\zeta(\rho) = 1 - exp(-\alpha(\rho - 1))$, $\rho = p/(s\lambda)$. Параметры модели в этом эксперименте выбирались такими: $\alpha = 0.1$, $\mu = 0.023$, $\nu = 0.1046$, $\xi = 0.1$, $\pi = 0.25$, $\beta = 0.09$, $b = 1.6624$, $\delta_B = 0.03$, $p(0) = 22$, $s(0) = 30$. Значения параметров μ, ν, b являются оценкой соответствующих параметров экономики СССР в 1990 году.

Из рис.4 видно, что после длительного переходного периода в системе устанавливается режим, близкий к экспоненциальному росту с постоянным темпом. В отличие от [10, 11] демонтаж ликвидируемых мощностей здесь осуществляется мгновенно и это не приводит к неестественно резким колебаниям всех показателей. Объем остаточного продукта на единицу мощности, Y^L/M, невелик. Однако, в системе имеется довольно большое количество резервных мощностей. Выпуск Y^L составляет около 30% от имеющихся мощностей M. В то же время доля инвестиций в национальном доходе, ϕ^I/pY, составляет солидную величину около 40%.

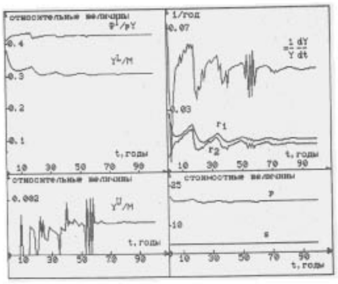


Рис.4.

Проведенные расчеты показывают, что модель качественно верно отражает характерные особенности развития рыночной экономики, и ее можно положить в основу дальнейших исследований.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А.А.Петрову за постоянное внимание к работе, И.Г.Поспелову за существенную помощь и А.А.Шананину за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Houthakker H. S.* The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis// Review of Economic Studies, 1955-56, V.23(1), N 60, P.27-31.
2. *Solow R. M.* Some Recent Developments in the Theory of Production// National Bureau of Economic Research. Conference of Research in Income and Wealth, October 15-16, 1965.
3. *Levhary D.* A Note on Houthakker's Aggregate Production Function in a Multifirm Industry// Econometrica, 1968, V.36, N 1, P.151-154.
4. *Johansen L.* Outline of an approach to production studies // Mem. Inst. Econ. Univ. of Oslo, 28 april. Oslo, 1969. 68 p.
5. *Johansen L.* Production functions. Amsterdam; London: North-Holland, 1972. 274 p.
6. *Петров А.А., Поспелов И.Г.* Системный анализ развивающейся экономики: к теории производственных функций.I// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1979, N 2, С. 18 - 27.
7. *Петров А.А., Поспелов И.Г.* Системный анализ развивающейся экономики: системный подход и односекторная модель.II// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1979, N 3, С. 28 - 38.
8. *Шананин А.А.* К теории производственных функций// Модели и алгоритмы программного метода планирования сложных систем. М.: ВЦ АН СССР, 1979, С. 24-50.
9. *Оленев Н.Н., Петров А.А., Поспелов И.Г.* Модель процесса изменения мощности и производственная функция отрасли хозяйства // Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986. С.46-60.
10. *Оленев Н.Н., Поспелов И.Г.* Модель инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа // Там же. С.163-173.
11. *Оленев Н.Н., Поспелов И.Г.* Исследование инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. М.: Наука, 1989. С.175-200.
12. *Столерю Л.* Равновесие и экономический рост. М.: Статистика, 1974. 472 с.

Поступила в редакцию
25.05.94