Приложение.
Свойства сглаживания оператора $T[R]$

Перечисленные выше свойства функций R, S^2, v_0 и u_0 вытекают из «хороших» свойств оператора T (см. (6.8)). Этот оператор сжимающий, монотонный, сохраняет вогнутость и, кроме того, обладает замечательным свойством «сглаживания». Последнее устанавливается следующей теоремой, которая может представлять и самостоятельный интерес.

Теорема 4. *Если R — вогнутая, V — гладкая, строго вогнутая функция и на некотором отрезке I значений Q максимум в выражении*

$$C(Q) = \max_{\substack{0 \leqslant v \leqslant Q \\ 0 \leqslant v \leqslant v^*}} [R(Q - v) + V(v)] \tag{П.1}$$

достигается во внутренней точке отрезка $[0, Q] \cap [0, v^*]$, то производная $C'(Q)$ существует и непрерывна по Липшицу на I. Аналогичное утверждение справедливо и для второго слагаемого в (6.8).

Доказательство. Легко показать [9], что в условиях теоремы функция C непрерывна и вогнута, а максимум достигается в единственной точке $v_0(Q)$, которая непрерывно зависит от Q. Так как $v_0(Q) \neq 0$, $v_0(Q) \neq v^*$ на I, найдется $h > 0$, такое, что при всех δQ ($|\delta Q| < h$) значение $v_0(Q) + \delta Q$ допустимо для задачи максимизации (П.1) в точке Q. Отсюда следует, что

$$C(Q + \delta Q) \geqslant V(v_0(Q) + \delta Q) + R(Q + \delta Q - v_0(Q) - \delta Q).$$

Поскольку $C(Q) = V(v_0(Q)) + R(Q - v_0(Q))$, получаем неравенство

$$C(Q + \delta Q) - C(Q) \geqslant V(v_0(Q) + \delta Q) - V(v_0(Q)) \tag{П.2}$$

при всех δQ, $|\delta Q| < h$.

Так как C — вогнута, она имеет правую и левую производные, причем

$$C'_+(Q) \leqslant C'_-(Q). \tag{П.3}$$

Но из (П.2) при $\delta Q \to \pm 0$ следует, что $C'_+(Q) \geqslant V'(v_0(Q)) \geqslant C'_-(Q)$. Вместе с (П.3) это означает, что C дифференцируема на I, причем

$$C'(Q) = V'(v_0(Q)) \tag{П.4}$$

(факт, впрочем, известный [9]).

Возьмем теперь произвольные $a, b \in I$, $a < b$ и разобьем отрезок $[a, b]$ на равные части точками $a = Q_0 < Q_1 < \ldots < Q_{n-1} < Q_n = b$ так, чтобы $\Delta = Q_k - Q_{k-1}$ было меньше h. Складывая неравенства (П.2) при $Q = Q_k$, $\delta Q = \Delta$ и при $Q = Q_k$, $\delta Q = -\Delta$, получаем при $k = 1, 2, \ldots, n - 1$

$$\frac{1}{\Delta}[C(Q_k + \Delta) - 2C(Q_k) + C(Q_k - \Delta)] \geqslant \frac{1}{\Delta}[V(v_0(Q_k) + \Delta) -$$

$$2V(v_0(Q_k)) + V(v_0(Q_k) - \Delta)] = \Delta V''(v_0(Q_k)) + \frac{\Delta^2}{2}[V'''(\xi_1) - V'''(\xi_2)], \tag{П.5}$$

где ξ_1 и ξ_2 — некоторые точки области $v_0([Q_k - \Delta, Q_k + \Delta]) \subset [0, v^*]$.

Положим теперь $\nu = \sup\limits_{v \in [0, v^*]} |V'''(v)|$ и

$$\chi(Q) = [C(Q + \Delta) - C(Q)]/\Delta. \tag{П.6}$$

Тогда из (П.5) следует, что при $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\chi(a + k\Delta) - \chi(a + (k-1)\Delta) \geqslant \Delta V''(v_0(Q_k)) - (\Delta^2/3)\nu.$$

Суммируя эти неравенства по k от 1 до n, получаем

$$\chi(b) - \chi(a) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \Delta V''(v_0(Q_k)) - \frac{(b-a)\Delta^2}{3}\nu. \tag{П.7}$$

При $\Delta \to 0$ левая часть (П.7) в силу (П.6) стремится к $C'(b) - C'(a)$, а правая к $\int\limits_a^b V''(v_0(Q))\,dQ$. Поэтому

$$C'(b) - C'(a) \geqslant \int_a^b V''(v_0(Q))\,dQ.$$

Учитывая, что в силу вогнутости $C'(a) \geqslant C'(b)$ и $V'' < 0$, получаем условие Липшица для C':

$$|C'(b) - C'(a)| \leqslant (b - a) \max_{v \in [0, v^*]} |V''(v)|.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поспелов И. Г.* Динамическая модель рынка с посредником.— В кн.: Модели и методы в прогнозировании научно-технического прогресса. М.: ВНИИСИ, 1984, вып. 2, с. 37—44.
2. *Столерю Л.* Равновесие и экономический рост. М.: Статистика, 1974. 472 с.
3. *Лотов А. В.* Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984, с. 352—368.
4. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981, с. 49—55.
5. *Розанов Ю. А.* Случайные процессы. М.: Наука, 1979.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965. 654 с.
7. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 605 с.
8. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 398 с.
9. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.

$I_2 \to \int$

УДК 519.86

МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ПОЛИТИКИ ФИРМ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ РЫНОЧНОГО ТИПА

Н. Н. Оленев, И. Г. Поспелов

В моделях развивающейся экономики, исследованных в [1, 2], было дано микроописание лишь текущего управления производством в условиях рыночной экономики. В настоящей работе предпринята попытка дать микроописание механизма долгосрочного управления производством — инвестиционной политики фирм. На основании этого микроописания построена замкнутая модель развивающейся экономики рыночного типа. В статье используются описание технологической структуры хозяйства и модель финансовой системы, предложенные в работах [3, 4] (см. также [5]), а также учитывается особая роль показателя дисконтированной прибыли, выявленная в работе [6].

Будем рассматривать хозяйство, в котором производится единственный однородный продукт, а в производстве затрачивается единственный ресурс — однородная рабочая сила. Производство осуществляется мелкими фирмами, которые продают продукт по единой текущей цене $p(t)$, нанимают рабочую силу по единой ставке заработной платы $s(t)$ и ведут свои финансовые операции с единой банковской системой [1].

1. Описание условий деятельности фирмы

Будем строить модель, исходя из предположения, что фирмы могут образовываться и ликвидироваться. Образующаяся в момент времени t фирма [2] берет в банке кредит $\Phi^I(t)$. На эти средства она закупает фондообразующий продукт $X^I(t) = \Phi^I(t)/p(t)$ и создает производственную мощность

$$m(t, t) = I(t) = \Phi^I(t)/p(t)\, b, \tag{1.1}$$

где b — приростная фондоемкость [3]. Мы считаем, что у всех фирм технологический параметр b одинаков. В дальнейшем мощность уменьшается вследствие физического износа и, кроме того, может быть частично демонтирована по решению фирмы. При демонтаже всей мощности фирма ликвидируется. Пусть $m(t, \tau)$ — мощность фирмы τ в момент t, μ — темп выбытия, а $u(t, \tau) \geqslant 0$ — темп демонтажа. Тогда

$$\partial m(t, \tau)/\partial t = -\mu m(t, \tau) - u(t, \tau)\, m(t, \tau), \quad m(t, \tau) \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Демонтированная мощность продается на рынке наравне с остальным продуктом и приносит фирме доход

$$z_m(t, \tau) = u(t, \tau)\; b(t - \tau)\, p(t)\; m(t, \tau). \tag{1.3}$$

Функция $b(t - \tau)$ показывает, какому количеству продукта эквивалентна единица демонтированной мощности. Эту функцию будем считать убывающей, чтобы отразить обесценение устаревшего оборудования. Соотношение (1.1) дает основание считать, что $b(0) = b$, т. е. что новое оборудование может быть продано по той же цене, по какой было куплено.

[1] Неявно предполагается, что банковская система представляет собой конгломерат конкурирующих мелких банков, так что не возникает эффекта монополии.

[2] Фирмы, образовавшиеся одновременно, в модели неразличимы. Поэтому считаем, что в момент времени τ образуется одна фирма, следовательно, момент τ может служить меткой, выделяющей данную фирму среди остальных. Поэтому будем говорить «фирма τ» вместо «фирма, образовавшаяся в момент τ».

Выпуск продукции фирмой τ обозначим $y(t, \tau)$. Он подчинен ограничению $0 \leqslant y(t, \tau) \leqslant m(t, \tau)$. Выпуск $y(t, \tau)$ требует затрат живого труда в количестве $\lambda(t, \tau)\, y(t, \tau)$, где $\lambda(t, \tau)$ — трудоемкость единицы продукции. Следуя [3], положим $\lambda(t, \tau) = \nu \times \exp[\mu(t - \tau)]$, где ν — трудоемкость единицы продукции, выпускаемой на новых мощностях. В отличие от работы [3] здесь величина ν считается постоянной. Таким образом, выпуск продукта приносит фирме τ доход

$$z_y(t, \tau) = [p(t) - s(t)\, \lambda(t, \tau)]\, y(t, \tau) = \{p(t) - \nu s(t) \times \exp[\mu(t - \tau)]\}\, y(t, \tau), \quad 0 \leqslant y \leqslant m. \tag{1.4}$$

В момент образования фирмы у нее возникает задолженность (см. (1.1))

$$l(\tau, \tau) = \Phi^I(\tau), \tag{1.5}$$

которая в дальнейшем растет за счет начисления процента по текущей ставке $r_1(t)$ [4] и уменьшается за счет платежей погашения $h(t, \tau)$. Следовательно, задолженность $l(t, \tau)$ изменяется в силу уравнения

$$\partial l(t, \tau)/\partial t = r_1(t)\, l(t, \tau) - h(t, \tau), \quad l(t, \tau) \geqslant 0. \tag{1.6}$$

Банк накладывает ограничение на задолженность [4, 5]

$$l(t, \tau) \leqslant k(t, \tau), \tag{1.7}$$

в котором $k(t, \tau)$ — балансовая стоимость фирмы τ. Она подчиняется уравнению [4, 5]

$$\partial k(t, \tau)/\partial t = -\beta k(t, \tau) - u(t, \tau)\, k(t, \tau), \quad k(\tau, \tau) = \Phi^I(\tau). \tag{1.8}$$

Здесь β ($\beta > \mu$ [4]) — норма амортизации, которую считаем одинаковой у всех фирм. В соответствующем уравнении работы [4] слагаемое $u(t, \tau)\, k(t, \tau)$ отсутствует. Оно учитывает списание стоимости демонтированной мощности. Погашение кредита h производится за счет дохода фирмы $z = z_y + z_m$. Остаток дохода образует дивиденды $d(t, \tau)$ собственников фирмы:

$$d(t, \tau) = z_y(t, \tau) + z_m(t, \tau) - h(t, \tau) = z - h \geqslant 0. \tag{1.9}$$

Дивиденды поступают в банк и образуют депозит [3] собственников фирмы $q(t, \tau)$, на который начисляется [4] единый процент $r_2(t)$:

$$\partial q(t, \tau)/\partial t = r_2(t)\, q(t, \tau) + d(t, \tau), \quad q(\tau, \tau) = 0, \quad q \geqslant 0. \tag{1.10}$$

Потребление собственников для простоты учитывать не будем.

Заметим, что при $t = \tau$ имеет место равенство $l = k$ (см. (1.5), (1.8)). Следовательно, чтобы было выполнено ограничение (1.7), необходимо выполнение условия

$$\left.\frac{\partial (k - l)}{\partial t}\right|_{t=\tau} \quad \beta - \quad u(\tau, \tau) - \quad r_1(\tau)]\, m(\tau, \tau)\, p(\tau)\, b \quad h(\tau, \tau) \geqslant 0. \tag{1.11}$$

[3] Депозит сохраняется и после ликвидации фирмы.

Мы предполагаем, что фирма создается для выпуска продукта, а не для спекуляции мощностями, поэтому считаем $u(\tau, \tau) = 0$, и из (1.9), (1.3), (1.4) следует $h(\tau, \tau) \leqslant [p(\tau) - \nu s(\tau)]\, m(\tau, \tau)$. Отсюда и из (1.11) получаем условие: фирма организуется в момент t, только если

$$p(t) - \nu s(t) \geqslant (\beta + r_1)\, p(t)\, b. \tag{1.12}$$

Банк накладывает ограничение (1.7), чтобы предотвратить банкротство фирмы, иными словами, ситуацию, когда $m(t, \tau) = 0$, но $l(t, \tau) > 0$. Покажем, что при достаточно большом значении β и не слишком сильных колебаниях цены фирма может выполнить условие (1.7), при этом она заведомо не обанкротится.

Утверждение 1. *Если темп падения цены не превосходит γ, а темп уменьшения $b(t-\tau)$ не больше δ:*

$$p(t) \geqslant p(\tau) \exp[-\gamma(t-\tau)] > 0, \quad b(t-\tau) \geqslant b(0) \times \times \exp[-\delta(t-\tau)], \tag{1.13}$$

выполнены условия

$$\beta > \mu + \delta + \gamma \tag{1.14}$$

и условие (1.12) в момент времени τ, то фирма, организованная в момент времени τ, может удовлетворить ограничению (1.7) и это ограничение обеспечивает погашение задолженности фирмой до момента ее ликвидации

$$\theta(\tau) = \inf\{t \mid m(t, \tau) = 0\}.$$

Доказательство. Из соотношений (1.2), (1.8) следует, что $\dfrac{\partial(k/m)}{\partial t} = (\mu - \beta)\dfrac{k}{m}$, и в силу (1.1), (1.8)

$$k(t, \tau) = \exp[(\mu - \beta)(t - \tau)]\; m(t, \tau)\; p(\tau)\; b(0). \tag{1.15}$$

Теперь выясним, когда не может быть выполнено условие (1.7). Это произойдет, если при $k(t, \tau) = l(t, \tau)$

$$0 < \inf_{u,h,y}\left\{\left[\frac{\partial l(t,\tau)}{\partial t} - \frac{\partial k(t,\tau)}{\partial t}\right] \Big| \, u \geqslant 0, 0 \leqslant h \leqslant z(y,u), 0 \leqslant y \leqslant m\right\} = \inf_{u,y}\{[r_1 l + \beta k - (p - \lambda s) y + uk - ub(t-\tau)\, p(t)\, m] \mid u \geqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant m\}.$$

Поскольку из (1.15) $k(t, \tau) = \exp[(\mu - \beta)(t - \tau)]\, m(t, \tau) p(\tau)\, b$ и $l(t, \tau) = k(t, \tau)$, это неравенство эквивалентно неравенству

$$0 < \inf_{0 \leqslant y \leqslant m} A(y, t, \tau) + a^2 \inf_{u \geqslant 0} uB(t, \tau) = C(t, \tau), \tag{1.16}$$

где

$$A(y, t, \tau) = (\beta + r_1)\, p(\tau)\, b(0) \exp[(\mu - \beta)(t - \tau)] - [p(t) - \lambda(t, \tau)\, s(t)]\; y(t, \tau)/m(t, \tau),$$

$$B(t, \tau) = 1 - \frac{b(t-\tau)\, p(t)}{p(\tau)\, b(0)} \exp[(\beta - \mu)(t - \tau)],$$

$$a^2 = p(\tau) b(0) \exp[(\mu - \beta)(t - \tau)].$$

При $t = \tau$ $C(t, \tau) \leqslant 0$, так как $B(\tau, \tau) = 0$, а $A(m, \tau, \tau) = (\beta + r_1) p(\tau)\, b(0) - (p(\tau) - \nu s(\tau)) \leqslant 0$ в силу (1.12). При $t > \tau$ в силу (1.14) $B(t, \tau) < 0$, так что $C = -\infty$. Таким образом, (1.16) неверно и при всех t, τ фирма может выполнить условие (1.7).

2. Описание экономической деятельности фирмы

Рассмотрим сначала ситуацию, в которой параметры экономических механизмов регулирования p, s, r_1 и r_2 постоянны и фирма уже организована. Это означает, что заданы величины $m(\tau, \tau)$, $l(\tau, \tau)$, $k(\tau, \tau)$, связанные равенствами

$$m(\tau, \tau) = l(\tau, \tau)/pb = k(\tau, \tau)/pb > 0. \tag{2.1}$$

По определению $m(\tau, \tau) = I$. Предположим, что фирма выбирает величины y и u так, чтобы максимизировать величину вклада q в некоторый достаточно далекий момент времени $t = T + \tau$. Такой функционал вполне согласуется с предложенным в [6], поскольку при большом и фиксированном T максимизация величины $q(\tau + T, \tau) = e^{r_2 T}\int_0^T d\xi e^{-r_2 \xi}\, d(\tau + \xi, \tau)$ практически эквивалентна максимизации дисконтированной прибыли $\int_0^\infty d\xi e^{-r_2\xi}\, d(\tau + \xi, \tau)$.

Предполагается, что должны быть выполнены условие (1.7) и условие $l(\tau + T, \tau) = 0$. Таким образом, мы должны рассмотреть задачу оптимального управления P:

$$q(T) \to \max, \tag{2.2}$$

$$\dot l = r_1 l(t') - h(t'), \quad \dot q = r_2\, q(t') + d(t'), \quad \dot m = -\mu m(t') - um(t'),$$

$$\dot k = -\beta\, k(t') - uk(t')$$

при граничных условиях

$$k(0) = l(0) = pbm(0) = I, \quad q(0) = 0, \quad l(T) = 0; \tag{2.3}$$

фазовых ограничениях $l \leqslant k$, $q \geqslant 0$, $l \geqslant 0$ и ограничениях на управления $d(t')$, $h(t')$, $y(t')$, $u(t')$:

$$u(t') \geqslant 0, \quad h(t') \geqslant 0, \quad d(t') \geqslant 0, \quad 0 \leqslant y(t') \leqslant m(t'),$$

$$d(t') + h(t') = (p - \nu e^{\mu t'} s) y + b(t')\, pum = z.$$

Через t' обозначен возраст фирмы, так что $t' = t - \tau$.

Утверждение 2. 1. *Задача P разрешима. Если условие (1.12) выполнено, то оптимальное значение $q(T) > 0$ и пропорционально I, а если условие (1.12) нарушается, то $q(T) = 0$.*

2. *Если* $r_1 > r_2$, *то при достаточно большом* T *оптимальное управление в задаче* P *не зависит от* T *и имеет вид*

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } p - \lambda s < 0, \\ m & \text{при } p - \lambda s \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$h = z, \quad d = 0 \quad \text{при } l > 0, \qquad h = 0, \quad d = z \quad \text{при } l \leqslant 0, \tag{2.5}$$

$$u = \delta\,(t' - \theta), \tag{2.6}$$

где $\delta(\cdot)$ — δ-функция; θ — возраст момент продажи мощности. Величина θ определяется как корень уравнения

$$(p - \lambda s)_+ + b'(\theta)\,p - b(\theta)\,p\,(\mu + r_2) - \frac{l(\theta)}{m(\theta)}(r_1 - r_2) = 0. \tag{2.7}$$

Здесь $l(\theta)$, $m(\theta)$ — решения уравнений (2.2) при условиях (2.3) — (2.5) и $u = 0$.

Доказательство утверждения приводить не будем, оно сводится к проверке выполнения принципа максимума для указанного решения [7].

Принцип максимума дает достаточное условие оптимальности, поскольку задача P сводится к линейной.

Соотношение (2.4) означает, что фирма должна максимизировать текущую прибыль. Это согласуется с предположением, принятым в работе [1]. Условия (2.5) означают, что при $r_1 > r_2$ надо сначала погасить задолженность, а потом уже накапливать вклад q. Условие $r_1 > r_2$ естественно для деятельности банковской системы [4]. Условие (2.6) означает, что мощность продается мгновенно. Момент продажи фактически определяется как точка максимума некоторого довольно громоздкого выражения. Уравнение (2.7) — необходимое условие этого максимума.

На основании решения задачи P, в которой p, s, r_1, r_2 постоянны, предлагается следующая модель для описания экономической деятельности фирмы при непостоянных $p(t)$, $s(t)$, $r_1(t)$, $r_2(t)$: выпуск $y(t, \tau)$, погашение задолженности $h(t, \tau)$ и дивиденды $d(t, \tau)$ определяются соотношениями (2.4), (2.5). Фирма τ ликвидируется в первый момент $\theta(\tau)$, когда возникает неравенство

$$\psi(\theta, \tau) = (p(\theta) - \lambda(\theta, \tau)\,s(\theta))_+ + b'(\theta - \tau)\,p(\theta) - b(\theta - \tau)\,p(\theta)\,[\mu + r_2(\theta)] - \frac{l(\theta, \tau)}{m(\theta, \tau)}\,[r_1(\theta) - r_2(\theta)] < 0. \tag{2.8}$$

Следует заметить, что если выполнено (1.12), то $\psi(\theta, \theta) \geqslant 0$. В отличие от случая постоянных p, s, r_1, r_2 приведенные условия не гарантируют выполнение неравенства $l \leqslant k$, поэтому, если это неравенство нарушится до момента продажи, определяемого условием (2.8), то мощность продается в количестве, необходимом для выполнения условия $l \leqslant k$.

Предлагаемая модель экономической деятельности фирмы отражает предположение, что при прогнозировании цены $p(t)$ и процентов $r_1(t)$, $r_2(t)$ фирма ориентируется на их текущие значения.

Рассмотрим теперь, при каких условиях организуется фирма. Как было показано выше, если $p < \lambda s + pb\,(\beta + r_1)$ (см. (1.12)), организовывать фирму смысла нет и соответственно спрос на кредиты отсутствует. Если же $p > \lambda s + pb\,(\beta + r_1)$, то в силу утверждения 2 организаторы фирмы получат тем больший доход, чем больше начальная мощность. Следовательно, при этом условии спрос на кредит неограничен. Однако предложение кредитов банковской системой ограничено (см. ниже). Предположим, что рынок капитала находится в равновесии. Тогда следует считать, что

$$r_1 = (p - \nu s)/pb - \beta. \tag{2.9}$$

Пока будем считать, что цена p и ставка s таковы, что $r_1 > 0$. Что происходит, если цена p настолько низка, что $r_1 < 0$, обсудим ниже.

3.

$$\int d\tau\, y\,(t, \tau) \tag{3.1}$$

и продукта, образовавшегося в результате демонтажа мощностей

$$Y_2 = \int d\tau\, u\,(t, \tau)\; m\,(t, \tau)\; b\,(t - \tau), \tag{3.2}$$

так что

$$Y = Y_1 + Y_2. \tag{3.3}$$

Спрос на этот продукт предъявляют трудящиеся, доход которых равен заработной плате sR^L, выплаченной фирмами. Через R^L обозначено число занятых в производстве:

$$R^L = \int d\tau\, \lambda\,(t, \tau)\;\; y\,(t, \tau). \tag{3.4}$$

Кроме трудящихся спрос на этот продукт предъявляют инвесторы, организующие новую фирму. В соответствии с (1.1) они расходуют средства Φ^I, взятые в кредит в банковской системе. Будем предполагать (в отличие от [1,4]), что рынок продуктов находится в равновесии [5]. Это означает, что цена p определяется условием

$$p\,(t) = (sR^L + \Phi^I)/Y. \tag{3.5}$$

[1] Здесь и далее выражение $\int d\tau$ означает суммирование по всем фирмам, поскольку с математической точки зрения величины типа m, l, k и т. д. естественно рассматривать как меры на $(-\infty, +\infty)$ [3].

[5] Мы вынуждены принять предложение о равновесии рынка. Если бы продукт мог перед продажей накапливаться в виде общего запаса [1], то возник бы вопрос, как распределить доход, полученный от продажи части этого запаса между фирмами. Это показывает, что последовательное микроописание производственных процессов требует также и микроописания торговых операций.

Изменение заработной платы описывается так же, как и в работах [1,4]:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{R^L-\hat{R}^L}{\hat{R}^L}\right)_+, \tag{3.6}$$

где R^L — численность занятых (см. (3.4)); а $\hat{R}^L$ — предложение трудовых ресурсов. Проще всего считать, что $\hat{R}^L=\hat{R}_0^L e^{nt}$.

Теперь перейдем к описанию функционирования банковской системы. Предполагаем, что банковские активы складываются из резерва R и задолженности фирм, а пассивы — из депозитов собственников фирм D. Используя уравнение (1.10), находим [6], что

$$dD/dt=r_2D+\int d\tau\, d(t,\ \tau). \quad + \pi Y \tag{3.7}$$

Подсчитывая задолженность фирм, надо учесть следующее обстоятельство. При сильных колебаниях цен может оказаться невыполненным условие (1.14) утверждения 1. Часть фирм может обанкротиться, иначе говоря, может оказаться, что у них $m(\theta,\tau)=0$, а $l(\theta,\tau)>$ >0.

Мы будем считать, что задолженность таких фирм списывается и не учитывается в активах банка, поэтому

$$L(t)=\int\limits_{n(t,\tau)>0} d\tau l(t,\tau). \tag{3.8}$$

Обязанность погашать задолженность обанкротившихся фирм, вообще говоря, лежит на собственниках банков, но, поскольку в модели они явно не описываются, мы распределяем эту задолженность между владельцами депозитов. Способ распределения будет указан ниже.

Как и в работе [4], предполагаем, что резерв банковской системы R изменяется в силу уравнения

$$dR/dt=\pi Y \tag{3.9}$$

и обеспечивает депозиты законодательно установленной нормой ξ:

$$R\geqslant \xi D. \tag{3.10}$$

Финансовый баланс банковской системы выражается равенством

$$D(t)=R(t)+L(t). \tag{3.11}$$

Рассмотрим сначала «нормальную» ситуацию, когда равенство (2.9) определяет положительное значение процента r_1. В этом случае банк стремится предоставить максимальный кредит, который допускают соотношения (3.10) и (3.11):

$$\hat{L}=\frac{1-\xi}{\xi}R. \tag{3.12}$$

[6] Можно положить $D=\int d\tau q(t,\tau)$, но при этом надо учесть, что в банке хранятся и вклады давно ликвидированных фирм.

Предположим, что организаторы фирм берут весь предлагаемый кредит. Напомним, что при любых значениях r_1, превосходящих вычисленное по формуле (2.9), спрос на кредит неограничен. Значит, спрос на кредит $L=\hat{L}$. Из (1.6), (1.5) легко получить, что

$$\frac{dL}{dt}=\Phi^I+\Lambda,\quad \Lambda=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{m(t,\tau)>0} d\tau l(t,\tau). \tag{3.13}$$

Здесь Λ — прирост задолженности фирм, за вычетом задолженности банкротов. Учитывая (3.9), (3.12), получаем, что в «нормальной» ситуации

$$\Phi^I=-\Lambda+\frac{1-\xi}{\xi}\pi Y. \tag{3.14}$$

Инвестиции Φ^I не могут быть больше, чем разница между приростом кредитных возможностей банка $d\hat{L}/dt$ и приростом задолженности уже существующих фирм. Если формула (3.14) дает значение $\Phi^I<0$, это означает, что банковская система не в состоянии выполнить законодательное условие (3.10). Такую ситуацию можно интерпретировать как крах банковской системы, а состояние модели, в котором он наступает, следует считать недопустимым [7]. Чтобы иметь средства для предоставления кредита Φ^I, банковская система должна увеличить депозиты в соответствии с равенством (3.11). Она может это сделать, увеличив процент r_2. Из сказанного следует, что соотношения (3.7), (3.9), (3.11), (3.13) эквивалентны равенству, из которого определяется норма процента r_2:

$$r_2D+\int d\tau\, d(t,\tau)=\pi Y+\Phi^I+\Lambda. \tag{3.15}$$

Заметим, что это равенство справедливо независимо от предположения, что $L=\hat{L}$. Из него видно, что уменьшение величины Λ вследствие банкротства фирм (при прочих равных условиях) уменьшает величину процента r_2, тем самым уменьшая доходы собственников на величину списанной задолженности.

До сих пор мы рассматривали ситуацию, когда равенство (2.9) определяло норму процента $r_1\geqslant 0$. Противоположное неравенство означает, что новые фирмы будут организовываться только при условии, что банковская система будет на это давать субсидии. Мы предполагаем, что в этой ситуации банковская система прекращает выдачу кредитов ($\Phi^I=0$), и полагаем $r_1=0$. Величина нормы процента по вкладам r_2 по-прежнему определяется из условия (3.15).

Эта ситуация характеризуется [8] условиями $L<\hat{L}$ и $R>\xi D$.

[7] Такая ситуация возможна потому, что в принятом описании (1.6) на задолженность всех фирм автоматически начисляется текущий процент. А он может сильно колебаться. Уравнение (1.6) описывает механизм кредитной линии [4]. Этот механизм исторически возник, когда банковская система стала устойчивой, а проценты стабильными.

[8] Если величина r_1 из формулы (2.9) меняет знак «минус» на «плюс», состояние модели с $L<\hat{L}$ должно скачком превратиться в состояние с $L=\hat{L}$. Эту ситуацию надо рассмотреть особо. В численных экспериментах время дискретно и этот эффект несуществен.

На этом завершается описание банковской системы и модели развивающейся рыночной экономики. Заметим, что в отличие от модели, рассматриваемой в работе [4], предлагаемую модель нетрудно перестроить и в предположении, что в хозяйстве выделено несколько отраслей.

4. Численные эксперименты с моделью

Численные эксперименты носили пробный характер. Их целью было выяснить работоспособность предложенной модели. В численных экспериментах моделировалась деятельность каждой фирмы (механизм ее экономической деятельности был описан выше). Рассматривался дискретный набор значений независимых переменных t и τ. Исследовался только случай, когда предложение трудовых ресурсов не ограничивает экономический рост, т. е. $R^L < \hat{R}^L$. Тогда из уравнения (3.6) получаем $s = \mathrm{const}$.

Расчеты показали, что в системе возникают сильные колебания, если считать, что мощность фирмы производственной единицы вся продается, как только наступает условие (2.8). Поэтому в последующих расчетах предполагалось, что начиная с момента времени, определяемого условием (2.8), фирма продает свои мощности с достаточно высоким, но конечным темпом, до тех пор пока ее мощность не станет исчезающе малой.

В некоторых экспериментах наблюдался крах банковской системы. Ранее мы условились считать крах банковской системы недопустимым состоянием экономики. Замечено, что краха удается избежать, если подобрать величину s, ξ и π так, чтобы характерный темп роста экономики был бы достаточно большим.

Наступали и банкротства фирм, но на траекториях, описанных ниже, они не оказывали существенного влияния на развитие экономической системы.

Некоторые показатели характерных траекторий модели изображены на рис. 1—4. Рис. 1 показывает, что в системе устанавливается режим, близкий к экспоненциальному росту с постоянным темпом. На рис. 2 видно, что продукт Y_2, образующийся вследствие демонтажа мощностей, составляет существенную часть общего выпуска. На рис. 3 и 4 видно, что в процессе установления экспоненциального роста наблюдаются медленно затухающие колебания цены, процента и других относительных величин. В периоды, когда цена и процент высоки, увеличивается выпуск продукта и сокращается распродажа мощности. В периоды, когда цена низкая, мощности интенсивно демонтируются. Это характерно для кризисных периодов капиталистической экономики. В период, когда $r_2 < 0$ (см. рис. 4) [9], происходит массовое банкротство фирм.

[9] Ситуация, когда $r_2 < 0$, конечно, неестественна в экономике. Мы ее допускаем лишь для простоты, чтобы не описывать изъятия вкладов из банка и перевода этих средств в наличность собственников.

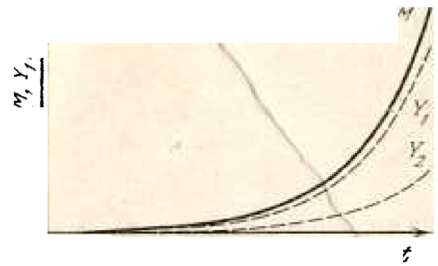

Рис.

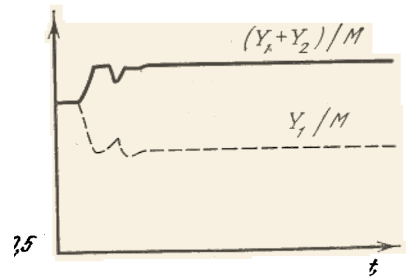

Рис. 2

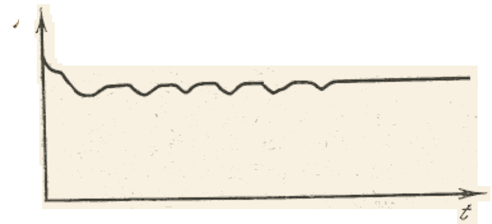

Рис. 3

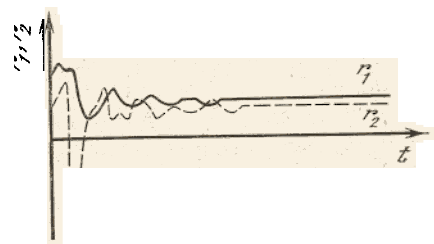

Рис. 4

Проведенные расчеты показывают, что модель качественно верно отражает характерные особенности развития рыночной экономики, так что ее можно положить в основу дальнейших исследований.

Авторы приносят глубокую благодарность доктору физ.-мат. наук А. А. Петрову за помощь в разработке модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики. I—IV.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1979, № 2, с. 18—27; № 3, с. 28—38; № 4, с. 11—23; № 5, с. 13—24.
2. *Петров А. А.* Проблемы математического описания экономических процессов и системного анализа экономики.— Наст. кн.
3. *Оленев Н. Н., Петров А. А., Поспелов И. Г.* Модель процесса изменения мощности и производственная функция отрасли хозяйства.— Наст. кн.
4. *Крутов А. П., Поспелов И. Г.* К системному анализу развивающейся экономики: учет влияния банковской системы.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 6, с. 48—59.
5. *Крутов А. П., Романко А. В.* Влияние государственных расходов на характер развития рыночной экономики.— Наст. кн.
6. *Поспелов И. Г.* Вариационный принцип в описании экономического поведения.— Наст. кн.
7. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.

УДК 519.86

Петров А. А. **Проблемы математического описания экономических процессов и системного анализа экономики.**— В кн.: Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986.

Дан обзор состояния исследований, направленных на разработку методов математического описания взаимодействующих экономических процессов и методов вывода макросоотношений, образующих математическую модель развивающейся экономической системы. Особое внимание обращено на необходимость в математическом описании адекватно отражать основные идеи политической экономии.

Библиогр. 28 назв.

УДК 519.86

Крутов А. П., Романко А. В. **Влияние государственных расходов на характер развития рыночной экономики.**— В кн.: Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986.

Предложена и исследована математическая модель экономической системы классического рыночного типа. Особое внимание обращено на финансовый сектор экономики, в явном виде описаны функционирование банковской системы, способы финансирования государственных расходов и налоговая политика. Доказано существование устойчивых режимов сбалансированного роста. Результаты исследования и численные эксперименты показали, что модель правильно отражает главные качественные особенности механизмов регулирования капиталистической экономики. Проведена оценка параметров модели на основе статистических данных по США за 1979—1984 гг. В результате исследования модели найдены условия, при которых рост непроизводительных расходов государства отражает экономические интересы основных социальных групп капиталистического общества.

Ил. 16. Библиогр. 13 назв.

УДК 519.86

Оленев Н. Н., Петров А. А., Поспелов И. Г. **Модель процесса изменения мощности и производственная функция отрасли хозяйства.**— В кн.: Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986.

Предложено математическое описание процесса старения производственных мощностей отрасли хозяйства. Предполагается, что в процессе старения производственной мощности сокращение количества выпускаемой в единицу времени продукции не сопровождается соответствующим сокращением количества рабочих мест. Вследствие этого старение мощности вызывает уменьшение производительности труда на ней. Текущая технологическая структура отрасли описывается распределением ее производственных мощностей по величине трудоемкости единицы продукции. Описан новый класс производственных функций отрасли. Производственная функция получается интегрированием распределения мощностей по трудоемкости, что в рассматриваемом случае осложняется деформацией распределения вследствие изменения технологической характеристики отдельной мощности (трудоемкости) в зависимости от срока службы этой мощности.

Ил. 4. Библиогр. 12 назв.

УДК 519.86

Кришталь В. В. **Производственная функция капиталоемкой отрасли хозяйства.**— В кн.: Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986.

Предложено описание производственной функции отрасли хозяйства в экономической системе классического рыночного типа. Такое описание учитывает влияние платежей за основные фонды на выпуск продукции. Рассматривается модель изменения мощностей и технологических характеристик производственных единиц. Выводится дифференциальное уравнение изменения плотности мощности. Показано, что выпуск отрасли зависит от величины используемого капитала. Приведен конкретный пример построения микроописания динамики производственных мощностей.

Библиогр. 17 назв.

УДК 519.86

Шананин А. А. **К вопросу об агрегировании моделей экономического роста.**— В кн.: Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986.

Методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений исследуются одно- и двухсекторная модели роста экономики рыночного типа с полностью загруженными мощностями. Построен пример двухсекторной модели, которая после усреднения по быстрым рыночным колебаниям агрегируется в односекторную.

Ил. 5. Библиогр. 7 назв.

УДК 519.86

Шананин А. А. **Агрегированное описание группы отраслей при помощи функции приведения разных конечных продуктов к однородному продукту.**— В кн.: Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986.

Рассматривается группа взаимосвязанных отраслей, выпускающих разные конечные продукты. Построена процедура агрегирования производственных функций прибыли отраслей с помощью функции приведения разных продуктов к однородному. Исследуются свойства агрегированных производственных функций, функций прибыли, спроса и предложения.

Библиогр. 16 назв.

УДК 519.86

Поспелов И. Г. **Вариационный принцип в описании экономического поведения.**— В кн.: Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986.

Предложен вариационный принцип для описания поведения экономического агента в экономической системе рыночного типа: каждый экономический агент стремится минимизировать вероятность своего разорения. Описан класс моделей, для которых можно сформулировать данный вариационный принцип строго математически. Показано, что в рассмотренном классе моделей при выполнении естественных с экономической точки зрения условий вариационный принцип требует, чтобы экономический агент максимизировал среднюю дисконтированную прибыль.

Библиогр. 9 назв.

УДК 519.86

Оленев Н. Н., Поспелов И. Г. **Модель инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа.**— В кн.: Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986.

Предлагается математическое описание экономической деятельности промышленной фирмы. Рассматривается процесс возникновения и ликвидации фирм. Предполагается, что новая фирма организуется на заемные средства и ликвидируется, если продает все свои основные фонды. Выписываются условия возникновения и банкротства фирмы. Данное микроописание деятельности включено в замкнутую односекторную модель экономики рыночного типа. Приводятся предварительные результаты исследования модели.

Ил. 4. Библиогр. 7 назв.

УДК 930.2 + 312

Бузин А. Ю. **Критическая численность первобытных сообществ: Модель группового отбора.**— В кн.: Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986.

Изменение численности сообщества (популяции) описывается либо марковским процессом «рождения и гибели», либо диффузионным процессом. Каждое сообщество за конечное время либо погибает (если его численность достигает нуля), либо делится на два сообщества численностью $J/2$ (если его численность достигает «порога деления» J). Совокупность сообществ с одинаковым порогом деления называется группой. При делении сообщества потомки либо обязательно остаются в группе сообщества-родителя (модель без мутаций), либо с некоторой вероятностью переходят в любую другую группу (модель с мутациями). Исследована динамика распределения сообществ по группам. При этом возникает естественное определение «оптимального порога деления» J^*. Указан функционал, который достигает максимума при $J = J^*$. Приведены оценки этого функционала, упрощающие его исследование и имеющие естественную интерпретацию.

Ил. 2. Табл. 2. Библиогр. 23 назв.