УДК 517.5

ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ С КОРРЕКЦИЕЙ ВСЕХ ДАННЫХ*

В. А. Горелик, О. В. Муравьева

1. Постановка задачи

При интерпретации результатов эксперимента обычно возникает задача аппроксимации экспериментальных точек функцией определенного вида.

Пусть производится опыт, целью которого является исследование зависимости некоторой физической величины y от физической величины x. Предполагается, что x и y связаны функциональной зависимостью определенного вида $y = \varphi(x)$, параметры которой и требуется определить из опыта. Пусть получено n экспериментальных точек с координатами (x_i, y_i), через которые нельзя провести кривую – график функции вида $y = \varphi(x)$. Требуется определить функцию $y = \varphi(x)$, наилучшим образом в каком-либо смысле приближающую экспериментальную зависимость. Общепринятым является критерий минимизации суммы квадратов отклонений по координате y экспериментальных точек от сглаживающей кривой, соответствующий методу наименьших квадратов. Этот метод приводит к сравнительно простому математическому способу определения параметров и допускает теоретическое обоснование с вероятностной точки зрения [1]. В качестве другого критерия, также допускающего вероятностное обоснование, можно выбрать минимизацию суммы

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета Программы поддержки ведущих научных школ (грант 00-15-96137).

квадратов расстояний от экспериментальных точек до аппроксимирующей кривой, т.е. допускать отклонения не только по величине y, но и по x.

Действительно, пусть величины x и y измеряются с некоторой неизбежной ошибкой измерения. Будем считать, что ошибки измерения подчиняются нормальному закону распределения. Результат каждого измерения – случайные величины X_i, Y_i, распределенные по нормальному закону с математическими ожиданиями μ_x^i, μ_y^i, где $\mu_y^i = \varphi(\mu_x^i)$, и средними квадратическими отклонениями σ_x^i, σ_y^i. Предположим, что точность измерения одинакова для величин X и Y и не изменяется от точки к точке: $\sigma_x^i = \sigma_y^i = \sigma$. Тогда закон распределения X_i и Y_i можно записать в виде

$$f_x^i(x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(x_i - \mu_x^i)^2}{2\sigma^2}\Big),$$
$$f_y^i(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(y_i - \mu_y^i)^2}{2\sigma^2}\Big).$$

В результате опыта (ряда измерений) произошло случайное событие - случайные величины $(X_1, Y_1; \ldots; X_n, Y_n)$ приняли совокупность значений $((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$. Поставим задачу: подобрать математические ожидания μ_x^i, μ_y^i так, чтобы вероятность этого события была максимальна. Так как вероятность любого из событий $X_i = x_i$ $(Y_i = y_i)$ равна нулю, найдем вероятность того, что $X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n$ примут значения, лежащие в пределах $(x_i, x_i + dx_i)$, $i = 1, \ldots, n$

$$p = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu_x^i)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_i - \mu_y^i)^2}{2\sigma^2}\right) =$$
$$= K \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x^i)^2 + (y_i - \mu_y^i)^2\right).$$

Заметим, что условие $p \to \max$ равносильно $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x^i)^2 + (y_i - \mu_y^i)^2 \to \min$.

Т.е. для того, чтобы наблюдаемая совокупность значений была наивероятнейшей, нужно выбрать функцию $\varphi(x)$ так, чтобы сумма квадратов расстояний от наблюдаемых значений x_i, y_i до ближайшей точки $(\mu_x^i, \varphi(\mu_x^i))$ была минимальной. Ниже рассмотрим задачу определения параметров функции, наилучшим образом аппроксимирующей экспериментальные данные в смысле этого критерия, в простейшем случае, когда зависимость $y = \varphi(x)$ линейна.

2. Двумерный случай: геометрический подход

Пусть известны значения функции $y = \varphi(x)$ в n точках (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$. Требуется построить такую прямую $l\colon y = ax + b$, что сумма квадратов расстояний от заданных точек до нее минимальна, т. е. имеем задачу безусловной минимизации

$$f = \sum_{i=1}^{n} \rho^2((x_i, y_i), l) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(ax_i - y_i + b)^2}{a^2 + 1} \to \min_{(a,b)}.$$

Здесь $\rho((x_i, y_i), l) = \frac{|ax_i - y_i + b|}{\sqrt{a^2+1}}$ — расстояние от точки (x_i, y_i) до прямой l. Введем следующие обозначения:

$$\mu_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad dx_i = x_i - \mu_x, \quad D_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} dx_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i dx_i,$$

$$\mu_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad dy_i = y_i - \mu_y, \quad D_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} dy_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i dy_i,$$

$$\mu_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \mu_{x^2} = \mu_{xx}, \qquad \mu_{y^2} = \mu_{yy},$$

$$M = \mu_{xy} - \mu_x\mu_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i dy_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i dx_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} dx_i dy_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(a,b) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i - y_i + b)^2}{a^2+1} &= \\ &= \frac{n}{a^2+1}(a^2\mu_{x^2} + \mu_{y^2} + b^2 - 2a\mu_{xy} + 2ab\mu_x - 2b\mu_y). \end{aligned}$$

Найдем стационарные точки функции $f(a,b)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{2n}{a^2+1}(b + a\mu_x - \mu_y) = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2n}{(a^2+1)^2}\big((\mu_{xy} - b\mu_x)a^2 + \\ &\quad + (\mu_{x^2} - (b-\mu_y)^2 - D_y)a - (\mu_{xy} - b\mu_x)\big) = 0. \end{aligned}$$

Из $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$ следует, что $b = \mu_y - a\mu_x$ (т.е. прямая l проходит через точку (μ_x, μ_y)). Подставляя это значение b в уравнение $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ получим $Ma^2 + (D_x - D_y)a - M = 0$.
Если $M \neq 0$, то имеем квадратное уравнение $a^2 + \frac{(D_x - D_y)^2}{M} - 1 = 0$ с корнями:

$$\begin{aligned} a_{1,2} = \frac{D_y - D_x}{2M} \pm \sqrt{\frac{(D_y - D_x)^2}{4M^2} + 1} &= \\ &= \frac{(D_y - D_x) \pm \sqrt{(D_y - D_x)^2 + 4M^2}}{2M}, \end{aligned}$$

соответствующими двум ортогональным прямым.
Исследуем эти корни.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{2n}{a^2+1},\ \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = 2n\frac{\mu_x(a^2+1) - 2a(b + a\mu_x - \mu_y)}{(a^2+1)^2}.$$

В стационарных точках $\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{2n\mu_x}{a^2+1}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = \frac{2n}{(a^2+1)^3}(-2(\mu_{xy} - b\mu_x) - 3(\mu_{x^2} - (b-\mu_y)^2 - D_y)a^2 + \\ + 6(\mu_{xy} - b\mu_x)a + \mu_{x^2} - (b-\mu_y)^2 - D_y),$$

а с учетом условия $b = \mu_y - a\mu_x$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = \frac{2n}{(a^2+1)^3}\big(\mu_{x^2}a^4 - 2Ma^3 + (3(D_x - D_y) + 2\mu_x^2)a^2 + \\ + 6Ma + (\mu_{x^2} - D_y)\big).$$

Так как в стационарных точках $Ma^2 + (D_x - D_y)a - M = 0$ или $4Ma = 4Ma^3 + 4(D_x - D_y)a^2$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = \frac{2n}{(a^2+1)^3}\left(\mu_{x^2}a^4 + (D_x - D_y + 2\mu_x^2)a^2 + 4Ma + \mu_{x^2} - D_y\right).$$

Матрица Гессе в стационарных точках равна

$$\nabla^2 f = \frac{2n}{a^2+1}\begin{pmatrix} \frac{\mu_{x^2}a^4 + (D_x - D_y + 2\mu_x^2)a^2 + 4Ma + \mu_{x^2} - D_y}{(a^2+1)^2} & \mu_x \\ \mu_x & 1 \end{pmatrix},$$

$\det(\nabla^2 f) = \frac{2n}{(a^2+1)^3}g(a)$, где $g(a) = (D_y - D_x)^2a^2 + 4Ma - (D_y - D_x)$. Определим знак $g(a)$ в точках a_1, a_2.

$$g(a_{1,2}) = \left(\frac{(D_y - D_x)^2}{2M^2} + 1 \pm \frac{(D_y - D_x)\sqrt{(D_x - D_y)^2 + 4M^2}}{2M^2}\right) \times \\ \times (D_y - D_x) + 2(D_y - D_x) \pm 2\sqrt{(D_x - D_y)^2 + 4M^2} - (D_y - D_x) = \\ = 2(D_y - D_x) \pm 2\sqrt{(D_x - D_y)^2 + 4M^2} + \frac{(D_y - D_x)^2}{4M^2} \times \\ \times \left(2(D_y - D_x) \pm 2\sqrt{(D_x - D_y)^2 + 4M^2}\right) =$$

$$= 2\Big((D_y - D_x) \pm \sqrt{(D_x - D_y)^2 + 4M^2}\Big)\Big(1 + \frac{(D_y - D_x)^2}{4M^2}\Big).$$

В одной стационарной точке $a_1 = \frac{D_y - D_x}{2M} + \frac{\sqrt{(D_y - D_x)^2 + 4M^2}}{2M}$ $g(a_1) > 0$, $\det(\nabla^2 f) > 0$, и это точка локального минимума, а в другой — $g(a_2) < 0$ и это седловая точка.

Если $M = 0$, то $a(D_x - D_y) = 0$:
а) $D_x = D_y$, тогда a – любое число.
б) $D_x \neq D_y$, тогда $a = 0$ – стационарная точка.
Здесь $\det(\nabla^2 f) = \frac{2n}{(a^2+1)^3}\big((D_y - D_x)a^2 - (D_y - D_x)\big) =$
$= \frac{2n}{(a^2+1)^3}(D_y - D_x)$. Если $D_y < D_x$, то $\det(\nabla^2 f) > 0$, в точке $a = 0$ – локальный минимум. Если $D_y > D_x$, то $\det\big(\nabla^2 f(0)\big) < 0$, $a = 0$ – седловая точка (решений нет).
Таким образом, возможны следующие случаи:

1. $M = \mu_{xy} - \mu_x \mu_y \neq 0$. Задача имеет единственное решение, $a = \frac{D_y - D_x}{2M} + \frac{\sqrt{(D_y - D_x)^2 + 4M^2}}{2M}$, $b = \mu_y - a\mu_x$, соответствующая прямая проходит через точку $(\mu_x, \mu_y))$ и имеет положительный наклон, если $M > 0$, и отрицательный, если $M < 0$.

2. $M = 0, D_x = D_y$. Тогда $b = \mu_y - a\mu_x$, a – любое, т. е. задача имеет бесконечно много решений – любая прямая, проходящая через (μ_x, μ_y), соответствует минимуму целевой функции.

3. $M = 0,\ D_x > D_y$. Единственное решение $a = 0$, $b = \mu_y$, ему соответствует горизонтальная прямая.

4. $M = 0,\ D_x < D_y$. Решений нет ($a = \infty$), что соответствует вертикальной прямой $x = \mu_x$.

3. Двумерный случай: матричный подход

Рассмотренную выше задачу можно решать как задачу коррекции несовместной системы линейных уравнений [2]. Действительно, систему линейных уравнений относительно a и b

$$y_i = ax_i + b, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

или в матричном виде

$$\bar{X}\bar{a} = y, \tag{2}$$

где $\bar{X}$ — матрица размерности $n \times 2$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\bar{a} = (a, b)^T \in \mathbb{R}^2$,

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}^T, \ T \text{ — знак транспонирования,}$$

можно интерпретировать геометрически как условие, что n точек с координатами $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ лежат на прямой $l\colon y = ax + b$. Если данные точки не лежат на одной прямой, то система (2) несовместна.

Поставим задачу коррекции системы (2):

$$\Phi = \|\Delta y\|^2 + \|\Delta \bar{X}\|^2 \to \min, \tag{3}$$

при ограничениях

$$(\bar{X} + \Delta\bar{X})\bar{a} = y + \Delta y \tag{4}$$

Здесь $\Delta\bar{X} = \left(\begin{smallmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 & \ldots & \Delta x_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{smallmatrix}\right)^T$, $\Delta y = (\Delta y_1, \ldots, \Delta y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\|\Delta y\|$ – евклидова норма вектора Δy и $\|\Delta\bar{X}\|$ – спектральная норма матрицы $\Delta\bar{X}$, равная евклидовой норме вектора $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)^T$, минимум в (3) берется по совокупности $(\Delta\bar{X}, \Delta y, \bar{a})$, удовлетворяющей (4).

Ограничения в поставленной задаче эквивалентны условию: точки с координатами $(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1), \ldots, (x_n + \Delta x_n, y_n + \Delta y_n)$ лежат на прямой $l\colon y = ax + b$.

Целевая функция

$$\Phi = \|\Delta y\|^2 + \|\Delta \bar{X}\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \rho^2 \left((x_i, y_i), (x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i)\right),$$

где $\rho\left((x_i, y_i), (x_i + \triangle x_i, y_i + \triangle y_i)\right)$ — расстояние между точками (x_i, y_i) и $(x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i)$.

Таким образом, задача (3), (4) эквивалентна поставленной выше задаче аппроксимации линейной функцией с коррекцией всей исходных данных.

Задача (3), (4) – это задача минимальной коррекции несовместной системы линейных уравнений с фиксированым последним столбцом. Известно [3], что решение такой задачи имеет вид:

$$\min_{(\bar{X}+\Delta\bar{X})\bar{a}=y+\Delta y} \Phi = \lambda_{\min}(D),\ a = \frac{z_1}{z_0},$$

где $D = B_1^T \left(E - \frac{b_2 b_2^T}{\|b_2\|^2}\right) B_1,\ B_1 = (-y, x),\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $b_2 = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$, E – единичная матрица размерности $n \times n$, $\lambda_{\min}(D)$ – минимальное собственное число матрицы D, $z = (z_0, z_1)^T$ – соответствующий ему собственный вектор с $z_0 \neq 0$ (в противном случае решение не существует).

Найдем собственное число $\lambda_{\min}(D)$ и соответствующий собственный вектор z.

$$E - \frac{b_2 b_2^T}{\|b_2\|^2} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix},$$

$$D=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}-y_1 & -y_2 & \dots & -y_n\\ x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & n-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-y_1 & x_1\\ \vdots & \vdots\\ -y_n & x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i dy_i & -\sum\limits_{i=1}^{n} x_i dy_i\\ -\sum\limits_{i=1}^{n} y_i dx_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i dx_i\end{pmatrix}=nD'$$

где $D'=\left(\begin{smallmatrix}D_y & -M\\ -M & D_x\end{smallmatrix}\right)$.

$$\det(D'-\lambda E)=\lambda^2-(D_x+D_y)\lambda+D_xD_y-M^2,$$

откуда $\lambda_{1,2}=\frac{D_x+D_y\pm\sqrt{(D_x-D_y)^2+4M^2}}{2}$,

$$\lambda_{\min}(D)=n\lambda_2=\frac{n}{2}\left(D_x+D_y-\sqrt{(D_x-D_y)^2+4M^2}\right).$$

Заметим, что матрица D неотрицательно определена, поэтому $\lambda_{\min}(D)\geqslant 0$, причем $\lambda_{\min}(D)=0$ тогда и только тогда, когда все точки (x_i,y_i) лежат на одной прямой.

Действительно, из неравенства Коши-Буняковского $(dx_1^2+\dots+dx_n^2)(dy_1^2+\dots+dy_n^2)\geqslant(dx_1dy_1+\dots+dx_ndy_n)^2$. Имеем $D_xD_y\geqslant M^2$, причем $D_xD_y=M^2$ тогда и только тогда, когда $dx_idy_j=dx_jdy_i\ \forall i,j=1,\dots,n$, т.е. либо $dx_i=0\ \forall i=1,\dots,n$, либо $dy_i=0\ \forall i=1,\dots,n$, либо $\frac{dy_i}{dx_i}=\frac{dy_j}{dx_j}\ \forall i,j=1,\dots,n$, и все точки (x_i,y_i) лежат на одной прямой.

Пусть $z=(z_0,z_1)^T$ – собственный вектор D, соответствующий $\lambda_{\min}(D)$. Тогда

$$\begin{pmatrix}D_y & -M\\ -M & D_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_0\\ z_1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\Big(D_x+D_y-\sqrt{(D_x-D_y)^2+4M^2}\Big)\begin{pmatrix}z_0\\ z_1\end{pmatrix},$$

т. е. имеем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} D_y z_0 - M z_1 = \dfrac{1}{2}\left(D_x + D_y - \sqrt{(D_x - D_y)^2 + 4M^2}\right) z_0 \\ -M z_0 + D_x z_1 = \dfrac{1}{2}\left(D_x + D_y - \sqrt{(D_x - D_y)^2 + 4M^2}\right) z_1 \end{cases},$$

откуда

$$\frac{z_1}{z_0} = \frac{D_y - D_x + \sqrt{(D_x + D_y)^2 + 4M^2}}{2M} \qquad (\text{при } M \neq 0).$$

Найдем a. Возможны следующие случаи:

1. Если $M \neq 0$, то $a = \frac{z_1}{z_0} = \frac{D_y - D_x + \sqrt{(D_x+D_y)^2+4M^2}}{2M}$.
2. Если $M = 0,\ D_x = D_y$, то a – любое число (любой вектор из $\mathbb{R}^2$ является собственным для D).
3. Если $M = 0,\ D_x > D_y$, то собственный вектор, соответствующий минимальному собственному числу, равен $(1, 0)$, т. е. $a = 0$.
4. Если $M = 0,\ D_x < D_y$, то $z_0 = 0, z_1 = 1$, решения нет $(a = \infty)$

Естественно, получили те же результаты, что и в разделе 2 (в случаях 1–3 b можно найти по формуле $b = \mu_y - a\mu_x$). При матричном подходе решение задачи линейной аппроксимации можно обобщить на многомерный случай.

4. Матричная коррекция в многомерном случае

Пусть заданы значения функции $f\colon X \to Y,\ X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}$ в n точках $x^1, x^2, \dots x^n$, соответственно $y^1, y^2, \dots y^n$. Требуется провести гиперплоскость $L\colon y = \langle a, x\rangle + b,\ a, x \in \mathbb{R}^m,\ b \in \mathbb{R}$, такую что сумма квадратов расстояний до нее от заданных точек минимальна.

Сформулируем соответствующую задачу коррекции системы линейных уравнений. Обозначим $y = (y^1, y^2, \dots y^n)$, $\bar{x}^i = (x^i, 1) \in \mathbb{R}^{m+1}$ $\forall i = 1, \dots, n$, $\bar{a} = (a, b) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\bar{X}$ – матрица размера $n \times (m+1)$, строками которой являются векторы $\bar{x}^i$. Введем $M(\Delta\bar{X}, \Delta y) = \{\bar{a}\colon \left(\bar{X} + \Delta\bar{X}\right)\bar{a} = y + \Delta y\}$, где $\Delta y \in \mathbb{R}^n$, $\Delta\bar{X}$ – матрица размера $n\times(m+1)$ с нулевым $(m+1)$-м столбцом.

Тогда задача коррекции имеет вид:

$$\Phi(\Delta\bar{X}, \Delta y) = \|\Delta\bar{X}\|^2 + \|\Delta y\|^2 \to \min_{(\Delta\bar{X}, \Delta y): M(\Delta\bar{X}, \Delta y) \neq \varnothing}.$$

Решение этой задачи есть

$$\min_{(\Delta\bar{X}, \Delta y): M(\Delta\bar{X}, \Delta y) \neq \varnothing} \Phi(\Delta\bar{X}, \Delta y) = \lambda_{\min}(D), \quad a = \frac{z}{z_0},$$

где $D = B_1^T \left(E - \frac{b_2 b_2^T}{\|b\|^2}\right) B_1$, $B_1 = (-y, \tilde{X})$, $\tilde{X}$ – матрица строками которой являются векторы x^i, $b_2 = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$, $\bar{z} = (z_0, z) \in \mathbb{R}^{m+1}$ – собственный вектор матрицы D, соответствующий минимальному собственному числу $\lambda_{\min}(D)$, с $z_0 \neq 0$.

Матрица $D = (d_{ij})_{i,j=0}^m$ имеет следующий вид:

$$d_{ij} = n(\mu_{ij} - \mu_i\mu_j) = \sum_{k=1}^n (x_i^k - \mu_i)(x_j^k - \mu_j),$$

где для единообразия обозначено $x_0^k = -y^k$, $k = 1, \dots, n$, $\mu_i = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n x_i^k$, $i = 0, 1, \dots, m$. Найдя ее собственный вектор $\bar{z}$, соответствующий собственному числу $\lambda_{\min}(D)$, мы определяем $a = \frac{z}{z_0}$ (если $z_0 = 0$, то решения нет, $a = \infty$) и $b = \mu_y - \langle a, \mu_x\rangle$, где $\mu_y = -\mu_0$, $\mu_x = (\mu_1, \dots, \mu_m)$.

Литература

1. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1964. 576 с.

2. *Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука. Физматлит., 1983. 336 с.

3. *Горелик В. А., Кондратьева В. А.* Параметрическое программирование и несобственные задачи линейной оптимизации. // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 1999. С. 57–82.