УДК 519.9

ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ*

Ю.И. Бродский

Значение непрерывной функции в точке не является произвольным, но обусловлено значениями этой функции в "соседних" точках. Данная работа посвящена выяснению вопроса, как обстоит дело в этом отношении у измеримых функций, произвольно ли значение измеримой функции в точке или же оно связано с ее значениями в некоторой окрестности этой точки. Для исследования поставленного вопроса предлагаются понятия существенного частичного предела и главного предела измеримой функции в точке. Эти понятия обобщают классическое понятие предела функции в точке и совпадают с ним для непрерывных функций. Приводятся примеры. В терминах обобщенного понятия предела ответ на поставленный выше вопрос звучит так: почти в каждой точке области определения измеримой функции существует ее главный предел и он равен ее значению в этой точке.

В данной работе будут рассматриваться определенные на отрезке $[a, b]$ ограниченные измеримые функции со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Одно из первых обобщений понятия предела для измеримых функций было предложено в [1] — это понятие замыкания по мере.

О п р е д е л е н и е 1. Говорят, что точка u, t принадлежит замыканию по мере измеримой функции $u(t)$ на измеримом множестве $E \subset [a, b]$ (обозначается $u, t \in \overleftrightarrow{u(E)}$), если для любой

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета Программы поддержки ведущих научных школ (грант 00-15-96137).

V_u – окрестности точки u и любой V_t – окрестности точки t выполняется

$$mes(u^{-1}(V_u) \cap V_t \cap E) > 0.$$

В работе [2] то же самое по существу понятие было предложено на языке, более близком к классическому определению предела, именно им мы и будем пользоваться в данной работе:

О п р е д е л е н и е 2. Говорят, что u_0 принадлежит множеству существенных частичных пределов измеримой функции $u(t)$ в точке t_0 (обозначается $u_0 \in \overleftrightarrow{u}(t_0)$), если для любой V_{u_0} – окрестности точки u_0 и любой V_{t_0} – окрестности точки t_0 выполняется

$$mes(u^{-1}(V_{u_0}) \cap V_{t_0}) > 0.$$

Л е м м а 1. В любой точке области определения множество существенных частичных пределов измеримой функции есть непустой компакт.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть V_t – окрестность точки t. Предположим, что ни одна из точек $\overline{u(V_t)}$ не принадлежит $\overleftrightarrow{u}(t)$. Это означает, что для любого $u \in \overline{u(V_t)}$ найдутся такие окрестности V_u точки u и V_t точки t, что

$$mes(u^{-1}(V_u) \cap V_t) = 0.$$

Система окрестностей $\{V_u\}$ покрывает $\overline{u(V_t)}$, следовательно, из нее можно выделить конечное подпокрытие V_{u_k}, пусть V_{t_k} – соответствующие окрестности точки t и $V_{t_0} = \cap V_{t_k}$, тогда, с одной стороны:

$$\sum_k mes(u^{-1}(V_{u_k}) \cap V_{t_0}) \geq mes(V_t \cap V_{t_0}) > 0,$$

с другой же стороны:

$$\sum_k mes(u^{-1}(V_{u_k}) \cap V_{t_0}) \leq \sum_k mes(u^{-1}(V_{u_k}) \cap V_{t_k}) = 0,$$

и мы получили противоречие, следовательно, найдется $u \in \overline{u(V_t)}$, такой что $u \in \overleftrightarrow{u}(t)$.

Пусть теперь u – точка прикосновения $\overleftrightarrow{u}(t)$. Пусть V_u – окрестность точки u, тогда найдется $v \in V_u$ и $v \in \overleftrightarrow{u}(t)$. Пусть V_v и V_t – произвольные окрестности точек v и t, тогда

$$mes(u^{-1}(V_u \cap V_t)) \geq mes(u^{-1}(V_u \cap V_v) \cap V_t) > 0,$$

что и завершает доказательство леммы.

П р и м е р 1. Если $u(t)$ непрерывна, в каждой точке t она имеет единственный существенный частичный предел, равный $u(t)$.

П р и м е р 2. Функция

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$$

в точке $t = 0$ имеет два существенных частичных предела: 0 и 1, ($\overleftrightarrow{\theta}(0) = \{0, 1\}$).

П р и м е р 3. Отрезок $[-1, 1]$ является множеством существенных частичных пределов функции $u(t) = \sin\frac{1}{t}$ в точке $t = 0$. (Хотя сама функция в этой точке не определена).

П р и м е р 4. Функция-"щетка". Пусть $E_\varepsilon = \cup(a_k, b_k)$ – открытое всюду плотное на $[a, b]$ множество, являющееся объединением попарно непересекающихся интервалов, таких что

$$\sum_k b_k - a_k \leq \varepsilon.$$

Положим

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a, b] \backslash E_\varepsilon, \\ \dfrac{t - a_k}{b_k - a_k}, & t \in (a_k, b_k) \subset E_\varepsilon, \end{cases}$$

Множество концов интервалов $\cup\{a_k, b_k\}$ всюду плотно в $[a, b] \backslash E_\varepsilon$. Отсюда можно показать, что для любой окрестности V_t любой точки $t \in [a,b] \setminus \cup [a_k, b_k]$ найдется интервал (a_k, b_k) из E_ε, целиком лежащий в V_t.

Тогда в каждой точке $t \in [a,b] \setminus E_\varepsilon$ справедливо

$$\overleftrightarrow{u}(t) = [0,1],$$

т. е. функция-"щетка" $u(t)$ имеет континуум существенных частичных пределов в каждой точке множества, отличающегося лишь на ε от множества полной меры.

Таким образом, мы видим, что у измеримой функции на значительной части области определения может быть очень много существенных частичных пределов. Попытаемся теперь рассортировать их, приписать каждому из них некий вес (на самом деле меру), подсчитав "долю поданных за него голосов" в окрестности точки.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется теорема Лебега о точках плотности измеримого множества. Здесь мы приведем ее формулировку, доказательство можно найти, например, в [3].

О п р е д е л е н и е 3. Точка t называется точкой плотности измеримого множества E, если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{mes(E \cap [t-\varepsilon, t+\varepsilon])}{2\varepsilon} = 1.$$

Т е о р е м а Л е б е г а. Почти все точки измеримого множества являются его точками плотности. Почти все точки плотности измеримого множества принадлежат этому множеству.

Вернемся теперь к обсуждению существенных частичных пределов. Для любого подмножества $U \subseteq \overleftrightarrow{u}(t)$ определим внешнюю меру по формуле

$$m^*(U) = \inf_V \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{mes(u^{-1}(V) \cap [t-\varepsilon, t+\varepsilon])}{2\varepsilon},$$

где V – открытые множества, содержащие U. Далее на основе этой внешней меры можно строить на $\overleftrightarrow{u}(t)$ единичную меру

Лебега-Стилтьеса — оценку того, какая часть множества аргументов дает то или иное множество существенных частичных пределов.

П р и м е р ы

- Для функции $\theta(t)$ из примера 2 в точке $t = 0$ это будет дискретная мера, сосредоточенная в точках 0 и 1, составляющих $\overleftrightarrow{\theta}(0)$, $\mu(0) = \mu(1) = \frac{1}{2}$.

- Для функции $u(t) = \sin\dfrac{1}{t}$ из примера 3, в точке $t = 0$ это будет абсолютно непрерывная мера на $\overleftrightarrow{u}(0) = [-1, 1]$
$$\frac{d\mu}{du} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-u^2}}.$$

- Для функции-"щетки" из примера 4 заметим, что по теореме Лебега, множество $[a,b]\backslash E_\varepsilon$, на котором $u(t) = 0$, почти всюду состоит из точек плотности, поэтому почти всюду на $[a,b]\backslash E_\varepsilon$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{mes(([a,b]\backslash E_\varepsilon) \cap [t-\varepsilon, t+\varepsilon])}{2\varepsilon} = 1.$$
Тем более, для любой V – окрестности нуля в $[0,1]$ почти всюду на $[a,b]\backslash E_\varepsilon$ справедливо
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{mes(u^{-1}(V) \cap [t-\varepsilon, t+\varepsilon])}{2\varepsilon} = 1,$$
т.е. при почти всех $t \in [a,b]\backslash E_\varepsilon$ на $\overleftrightarrow{u}(t) = [0,1]$ определена дискретная мера, сосредоточенная в нуле, такая что $\mu(0) = 1$ и $\mu(A) = 0$ для любого $A \subseteq (0,1]$.

Последний случай, когда почти всюду один из существенных частичных пределов забирает себе весь "вес", как мы увидим далее, достаточно типичен. В связи с этим введем следующее определение:

О п р е д е л е н и е 4. Вектор u называется главным пределом измеримой функции $u(t)$ в точке t_0, будем обозначать это

$$u = \overleftrightarrow{\lim_{t\to t_0}} u(t),$$

если для любой окрестности V_u точки u существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{mes(u^{-1}(V_u) \cap [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon])}{2\varepsilon} = 1.$$

Нетрудно убедиться, что главный предел в точке может быть только один и что он является существенным частичным пределом.

П р и м е р ы. Функция $\theta(t)$ из примера 2 и функция $\sin\frac{1}{t}$ из примера 3 в точке $t = 0$ не имеют главного предела. Функция-"щетка" $u(t)$ из примера 4 почти всюду на $[a,b]\backslash E_\varepsilon$ имеет главный предел

$$\overleftrightarrow{\lim_{t'\to t}} u(t') = 0.$$

Т е о р е м а 1. Почти в каждой точке области определения измеримой функции существует ее главный предел и справедливо равенство

$$\overleftrightarrow{\lim_{t\to t_0}} u(t) = u(t_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что на множестве $E_0, mes(E_0) = \alpha > 0$ не существует главного предела измеримой функции $u(t)$ либо он не равен значению функции. По теореме Лузина (см., например, [3], [4]), существует непрерывная функция $v(t)$, такая что

$$mes\{t : u(t) \neq v(t)\} < \frac{\alpha}{2},$$

следовательно, найдется множество $E_1, mes(E_1) > \frac{\alpha}{2}$, такое что на E_1 справедливо $u(t) = v(t)$, но

$$\overleftrightarrow{\lim_{t' \to t}} u(t') \neq u(t),$$

или же его не существует. В силу непрерывности $u(t)$ на E_1 для любой окрестности V_u точки u найдется $\varepsilon-$окрестность точки t такая, что как только $t' \in E_1 \cap [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$, так $u(t') \in V_u$, отсюда заключаем: $u(E_1 \cap [t-\varepsilon, t+\varepsilon]) \subset V_u$, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{mes(u^{-1}(V_u) \cap E_1 \cap [t-\varepsilon, t+\varepsilon])}{mes(E_1 \cap [t-\varepsilon, t+\varepsilon])} = 1.$$

Но по теореме Лебега о точках плотности почти всюду на E_1 справедливо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{mes(E_1 \cap [t-\varepsilon, t+\varepsilon])}{2\varepsilon} = 1,$$

отсюда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{mes(u^{-1}(V_u) \cap E_1 \cap [t-\varepsilon, t+\varepsilon])}{2\varepsilon} = 1,$$

почти всюду на E_1, и тем более,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{mes(u^{-1}(V_u) \cap [t-\varepsilon, t+\varepsilon])}{2\varepsilon} = 1.$$

Таким образом, мы получили, что почти всюду на E_1 функция $u(t)$ имеет главный предел, совпадающий с ее значением, что противоречит исходному предположению доказательства. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Л и т е р а т у р а

1. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Необходимые условия слабого экстремума в задаче оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенства. // ЖВМ и МФ 1968,Т.8,4. С.725–779.

2. *Бродский Ю.И.* Принцип максимума Л.С.Понтрягина в общей задаче оптимального управления. Деп. в ВИНИТИ 1977,850-77. 86 с.

3. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.:Мир, 1974. 160 с.

4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.Б.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.:Наука, 1972. 496 с.