«дальновидно» и максимизировать ожидаемую дисконтированную при
быль.

Эти результаты анализа простейшей модели позволяют надеятьс
что предлагаемый подход может привести к последовательному микро
описанию рынка.

Автор приносит благодарность д. ф.-м. н. А. А. Петрову за посто
янное внимание к работе, а также к. ф.-м. н. С. В. Чуканову и к. ф
м. н. В. Е. Кривцову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: к те
рии производственных функций. I. — Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 19
№ 2, с. 18—26.
2. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: с
темный подход и односекторная модель. II. — Изв. АН СССР, Техническая кибе
нетика, 1979, № 3, с. 28—38.
3. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: мно
секторная модель и учет природных ресурсов. III. — Изв. АН СССР, Техничес
кибернетика, 1979, № 4, с. 11—22.
4. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: у
научно-технического прогресса. IV. — Изв. АН СССР, Техническая кибернет
1979, № 5, с. 13—23.
5. *Шананин А. А.* К теории производственной функции. — В сб.: Модели и алгор
мы программного метода планирования сложных систем. — М.: ВЦ АН СС
1979.
6. *Молдашева Г. Б., Петров А. А., Поспелов И. Г.* Математическая модель между
родной торговли. — В сб.: Модели и алгоритмы программного метода планиро
ния сложных систем. — М.: ВЦ АН СССР, 1979.
7. *Бузин А. Ю.* К системному анализу развивающейся экономики ... — Изв.
СССР, Техническая кибернетика, 1981, № 4, с. 25.
8. *Крутов А. П., Поспелов И. Г.* К системному анализу развивающейся эконом
учет влияния банковской системы. — Изв. АН СССР, Техническая кибернет
1981, № 6, с. 48.
9. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1
10. *Розенмюллер И.* Кооперативные игры и рынки. М.: Мир, 1974.
11. *Гихман И. М., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. —
Наука, 1965.
12. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Иностранная литература, 19
13. *Найфе Х.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1980.
14. *Самуэльсон П.* Экономика. М.: Экономика, 1964.
15. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С.* Оптимальное управление. — М.:
ка, 1979.
16. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1969.

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ С ФОНДАМИ, ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫМИ ПО МОМЕНТАМ СОЗДАНИЯ

Наиболее последовательный анализ глобальных динамических
делей с фондами, дифференцированными по моментам создания, пр
дится в работах Л. В. Канторовича и его сотрудников (см. напр
[1]). В этих исследованиях, как правило, предполагается что, во-
вых, трудовые ресурсы жестко закрепляются за фондами на весь п
од их функционирования и, во-вторых, выпуск фондов, созданных
который момент времени, описывается априорно заданной прои
ственной функцией. С другой стороны, в связи с принципиальн
трудностями идентификации производственных функций, разрабат
ются методы их построения как результата наилучшего распредел
ресурсов между фондами с различными характеристиками [2, 3]

В настоящей работе рассматривается глобальная модель экономики с экзогенным научно-техническим прогрессом и фондами, дифференцированными по моментам создания. Выпуск на фондах, созданных в некоторый момент времени описывается леонтьевской производственной функцией, учитывающей научно-технический прогресс, а также различные возможные изменения выпусков в зависимости от срока эксплуатации фондов. Суммарный выпуск продукции в каждый момент времени определяется в результате максимизации выпуска за счет свободного перераспределения трудовых ресурсов по имеющимся на данный момент времени фондам. Норма накопления в модели считается заданной функцией времени, а капитальные вложения целиком расходуются на создание фондов наиболее современных на текущий момент. Предлагаемая модель интересна главным образом методологически, поскольку акцентирует внимание лишь на одном нелинейном механизме «локальной оптимизации», и позволяет проанализировать свойства модели, связанные с указанным механизмом. Формализация этой модели приводит к нелинейному специального вида интегральному уравнению вольтерровского типа.

1. Описание модели

Пусть выпуск конечной продукции в момент времени t на фондах, созданных в момент времени τ описывается производственной функцией

$$F(t,\tau,\Phi(\tau),l(t,\tau))=$$
$$=(1-a(\tau))\min\{\Phi(\tau)W(\tau,t-\tau)/b(\tau),\ l(t,\tau)/c(\tau)\},$$

где $\Phi(\tau)$ — количество фондов, созданных в момент времени τ; $l(t,\tau)$ — количество трудовых ресурсов, занятых в момент времени t на фондах, созданных в момент τ; $W(\tau, t-\tau)$ — функция освоения-выбытия этих фондов, позволяющая описывать ввод фондов с запаздыванием или ввод очередями, естественное выбытие фондов, а также уменьшения выпусков в соответствии с графиком ремонтных работ; $a(\tau)$, $b(\tau)$, $c(\tau)$ — соответственно функции материалоемкости, фондоемкости и трудоемкости предполагаются известными.

Общий выпуск конечного продукта $Y(t)$ при известном распределении фондов $\Phi(\tau)$ и заданном общем объеме трудовых ресурсов $L(t)$ определяются выражением

$$Y(t)=\max\left\{\int_{-\infty}^{t}F(t,\tau,\Phi(\tau),l(t,\tau))\,d\tau\,\Big|\,l(t,\tau)\geqslant 0,\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{t}l(t,\tau)\,d\tau\leqslant L(t)\right\}. \qquad (1.1)$$

Инвестиции (капитальные вложения) в каждый момент времени целиком расходуются на создание наиболее современных фондов

$$\Phi(t)=u(t)Y(t), \qquad (1.2)$$

где $u(t)$ — норма накопления, заданная функция времени. Уравнения (1.1), (1.2) определяют динамику развития фондов на интервале $[0,T]$ при заданных начальных условиях

$$\Phi(t)=\Phi_0(t)\geqslant 0 \text{ при } t\leqslant 0. \qquad (1.3)$$

Выполнения (1.1), (1.2) при $t\leqslant 0$ не требуется.

Решение задачи, записанной в уравнении (1.1), в общем виде не представляет труда ([4]). Однако предположим, что создающиеся фонды, «чем новее, тем лучше» в смысле (1.1), для этого достаточно потребовать монотонного невозрастания функции $(1-a(\tau))/c(\tau)$. В этом случае очевидным решением (1.1) будет

$$l(t,\tau)=\Phi(\tau)W(\tau,t-\tau)c(\tau)/b(\tau) \text{ при } \tau\geqslant t-A(t),$$

$$l(t,\tau)=0 \text{ при } \tau<t-A(t),$$

где $A(t)$ определяется из условия максимального использования трудовых ресурсов. Иными словами задачу (1.1) можно переписать в следующем виде

$$Y(t)=\max_A\left\{\int_{t-A}^{t}(1-a(\tau))\frac{\Phi(\tau)}{b(\tau)}W(\tau,t-\tau)\,d\tau\,|\,L(t)\geqslant\right.$$

$$\left.\geqslant\int_{t-A}^{t}\Phi(\tau)W(\tau,t-\tau)\frac{c(\tau)}{b(\tau)}\,d\tau\right\}.$$

Для дальнейшего удобно перейти к переменным

$$y(t)=Y(t)\,c(t)/L(t),\quad \varphi(t)=\Phi(t)\,c(t)/L(t),$$

имеющим смысл Y и Φ на душу населения с учетом роста производительности труда. В этих переменных уравнение (1.4) запишется так:

$$y(t)=\max_A\left\{\int_{t-A}^{t}\varphi(\tau)(1-a(\tau))\frac{c(t)}{c(\tau)}\frac{L(\tau)}{L(t)}\frac{W(\tau,t-\tau)}{b(\tau)}\,d\tau\geqslant\right.$$

$$\left.\geqslant\int_{t-A}^{t}\varphi(\tau)\frac{L(\tau)}{L(t)}\frac{W(\tau,t-\tau)}{b(\tau)}\,d\tau\right\}.$$

Делая замену переменной интегрирования и вводя обозначения

$$f(\tau,t-\tau)=(1-a(\tau))\frac{c(t)}{c(\tau)},\quad G(t,t-\tau)=\frac{L(\tau)}{L(t)}\frac{W(\tau,t-\tau)}{b(\tau)},$$

перепишем

$$y(t)=\max_A\left\{\int_0^A\varphi(t-s)f(t,s)G(t,s)\,ds\,|\,1\geqslant\int_0^A\varphi(t-s)G(t,s)\,ds\right\}. \quad (1.6)$$

В переменных $y(t)$, $\varphi(t)$ уравнения (1.2), (1.3) принимают вид

$$\varphi(t)=u(t)\,y(t)\quad (t\geqslant 0), \quad (1.7)$$

$$\varphi(t)=\varphi_0(t)=\text{fixe}\quad (t<0).$$

Равенство (1.6) можно интерпретировать так

$$y(t)=\int_0^{A(t)}\varphi(t-s)f(t,s)G(t,s)\,ds,$$

где $A(t)$ определяется, вообще говоря, неединственным образом из соотношения

$$1=\int_0^{A(t)}\varphi(t-s)G(t,s)\,ds+\left[1-\int_0^{\infty}\varphi(t-s)G(t,s)\,ds\right] \quad (1.10)$$

Далее для определенности будем считать, что $A(t)$ равно минимальному A, удовлетворяющему (1.10).

2. Общие свойства модели

Систему уравнений (1.7)—(1.10), описывающих экономическую динамику, будем рассматривать на конечном интервале $[0, T]$ при следующих предположениях.

П.1 Функцию $u(\cdot)$, принимающую значения в $[0, 1]$, будем считать принадлежащей пространству $L_\infty[0, T]$ измеримых почти всюду ограниченных функций[1].

Класс функций L_∞ является естественным классом управлений в задачах оптимизации. Выбор этого класса связан с предполагаемым в дальнейшем анализом задач оптимального управления с управляемой нормой накопления $u(t)$. Следствием такого выбора является то, что решение $\varphi(\cdot)$ необходимо искать также в L_∞. К счастью, пространства L_∞ и C весьма схожи и анализ уравнений (1.7)—(1.10) в L_∞ ничуть не сложнее анализа этих уравнений в пространстве непрерывных функций.

П.2. Семейство суммируемых неотрицательных функций $G_t(\cdot) \triangleq G(t, 0)$ имеет общий компактный носитель $[0, \bar{A}]$ (т. е. $G(t, s) = 0$ при всех t и $s \notin [0, \bar{A}]$). Функции $f_t(s) = f(t, s)$ положительны и невозрастающие по s при всех $t \in [0, T]$.

Предположение о монотонности $f_t(s)$ является одним из основных интерпретируется как наличие научно-технического прогресса (см. (1.5)) и совпадает с условием перехода от (1.1) к (1.4). Требование общего компактного носителя функции $G_t(\cdot)$ менее существенно и соответствует наличию предельного срока службы фондов, учитываемого функцией W.

П.3. Функции $f(t, s)$ и $G(t, s)$ ограничены на $[0, T] \times [0, \bar{A}]$.

П.4. Интегралы $\int_0^{\bar{A}} G(t, s)\,ds$ и $\int_0^{\bar{A}} f(t, s) G(t, s)\,ds$ (равномерно) непрерывны на $[0, T]$. Предположения 3 и 4 естественно выполнены для непрерывных функций G и f, однако такой класс функций G и f не позволяет учитывать скачкообразные изменения технологических показателей, ввод фондов с запаздыванием и т. п.. С другой стороны заметим, что основные свойства (1.7—(1.10) сохраняются при существенныхослаблениях указанных предположений. Например, вместо П.3 с формальной точки зрения более естественным является требование равномерной на $[0, T]$ интегрируемости функций $f_t(\cdot) G_t(\cdot)$ и $G_t(\cdot)$.

Пусть $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1) \in L_\infty^+[-\bar{A}, T] = L_\infty^+[-\bar{A}, 0] \times L_\infty^+[0, T]$, где знаком плюс выделяется конус неотрицательных функций соответствующего пространства, а

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0(t) & \text{при } t < 0 \\ \varphi_1(t) & \text{при } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Рассмотрим оператор

$$\mathscr{B}[\varphi] = \mathscr{B}[(\varphi_0, \varphi_1)]: L_\infty^+[-\bar{A}, T] \to L_\infty^+[0, T],$$

$$y(t) = \mathscr{B}[\varphi](t) \triangleq \max_A \left\{ \int_0^A \varphi(t-s) f(t, s) G(t, s)\,ds \geqslant \right.$$

$$\left. \geqslant \int_0^A \varphi(t-s) G(t, s)\,ds \right\}.$$

Оператор $\mathscr{B}$ описывает процедуру вычисления конечных выпусков $y(\cdot)$, если известны предыстория динамики фондов $\varphi_0(\cdot)$ и «капитальные вложения» $\varphi_1(\cdot)$ на интервале $[0, T]$. По аналогии с определениями производственной функции и производственного функционала оператору $\mathscr{B}$ можно было бы приписать название производственного оператора. Перечислим основные свойства этого оператора.

[1]Далее основные сведения из функционального анализа используются без ссылок (см. например [5], [6]). Сведения о нелинейных операторных уравнениях можно найти в [7].

Лемма. Оператор $\mathscr{B}$ удовлетворяет условию Липшица, ком положителен и монотонен на $L_\infty^+[-\bar{A}, T]$.

Кроме этого можно отметить квазивогнутость и диффере мость по конусу оператора $\mathscr{B}$.

В доказательствах неоднократно будет использоваться пр ление $\mathscr{B}$ в виде (1.9), (1.10).

Доказательство. 1°. Пусть φ — некоторый элемент $L_\infty^+[-$ $y(\cdot)=\mathscr{B}[\varphi](\cdot)$. Рассмотрим разность

$$y(t+\Delta)\ \ y(t)=\int^{A(t)}[\varphi(t+\Delta\ \ s)K(t+\Delta, s)\ \ \varphi(t\ \ s)K(t, s)]$$

$$+\int_{A(t)}^{A(t+\Delta)}\varphi(t+\Delta\ \ s)K(t+\Delta, s)\,ds$$

где $K(t, s)\overset{\Delta}{=}f(t, s)\,G(t, s)$. Оценим первый из интегралов в (2

$$|I_1|=\left|\int_{-\Delta}^{A(t)-\Delta}\varphi(t-s)K(t+\Delta, s+\Delta)\,ds-\int_0^{A(t)}\varphi(t\ \ s)K(t, s)\,ds\right.$$

$$\leqslant\left|\int_{-\Delta}^{0}\varphi(t\ \ s)K(t+\Delta, s\ \ \Delta)\,ds\ \ \right|\int_{A(t)-\Delta}^{A(t)}\varphi(t-s)K(t, s)\,ds$$

$$\|\varphi(\cdot)\|\left|\int_0^{A(t)+\Delta}(K(t+\Delta, s+\Delta)-K(t, s))\,ds\right.$$

Последний интеграл в (2.2) оценивается так

$$\left|\int_0^{A(t)-\Delta}(K(t+\Delta, s+\Delta)\ \ K(t, s))\,ds\right|$$

$$=\left|\int_0^{A(t)-2\Delta}(K(t+\Delta, s+\Delta)\ \ K(t, s+\Delta))\,ds\ \ \right|\left|\int_{-\Delta}^{0}K(t+\Delta, s)\,ds\right|$$

$$\left|\int_{A(t)-2\Delta}^{A(t)+\Delta}K(t, s)\,ds\right|.$$

Первое слагаемое в равенстве (2.3) согласно П.4 оценивается нечно малой $O(\Delta)$, не зависящей от t. Остальные интегралы в п частях (2.2) и (2.3) оцениваются согласно П.3. Таким образом, чаем равномерную по t оценку.

$$|I_1|\leqslant O(\Delta)\|\varphi(\cdot)\|.$$

Вычислим разность равенств (1.10), записанных для и $t+\Delta$

$$0\ \ \int_0^{A(t)}(\varphi(t+\Delta\ \ s)\,G(t+\Delta, s)\ \ \varphi(t\ \ s)\,G(t, s))\,ds+$$

$$+\int_{A(t)}^{A(t+\Delta)}\varphi(t+\Delta\ \ s)\,G(t+\Delta, s)\,ds+$$

$$\left[\ \ \int^{\bar{A}}\tilde{\varphi}(t+\Delta-s)\,G(t+\Delta, s)\,ds\right]$$

$$-\left[1-\int_0^{\bar{A}} \varphi(t-s)\, G(t, s)\, ds\right]_+$$

Отсюда, используя неравенство $|[a]_+-[b]_+|\leqslant|a-b|$, оценим интеграл

$$|I_2|=\left|\int_{A(t)}^{A(t+\Delta)} \varphi(t+\Delta-s)\, G(t+\Delta, s)\, ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_0^{A(t)} (\varphi(t+\Delta-s)\, G(t+\Delta, s)-\varphi(t-s)\, G(t, s))\, ds\right|+$$

$$+\left|\int_0^{\bar{A}} (\varphi(t+\Delta-s)\, G(t+\Delta, s)-\varphi(t-s)\, G(t, s))\, ds\right|.$$

Оба слагаемых в правой части этого выражения оцениваются так же, как и интеграл I_1. Заметим, что второй интеграл в (2.1) можно записать в виде $\bar{f}(t)\, I_2$, где $\bar{f}(t)$ некоторое среднее по s значение ограниченной функции $f(t, s)$. Таким образом, оценив оба слагаемых в правой части (2.1), получаем равномерную по t оценку.

$$|y(t+\Delta)-y(t)|=O(\Delta)\,\|\varphi(\cdot)\|. \tag{2.6}$$

Отсюда, в частности, следует, что значения оператора $\mathscr{B}$ принадлежат пространству $C[0, T]$.

2°. Пусть теперь φ' и $\varphi''\in L_\infty^+[-\bar{A}, T]$. Тогда

$$y'(t)-y''(t)=\int_0^{A'(t)} (\varphi'(t-s)-\varphi''(t-s))\, f(t, s)\, G(t, s)\, ds-$$

$$-\bar{f}(t)\int_{A'(t)}^{A''(t)} \varphi''(t-s)\, G(t, s)\, ds,$$

где $\bar{f}(t)$ некоторое среднее значение функции $f_t(\cdot)$. Используя выражение для $\int_{A'(t)}^{A''(t)} \varphi''(t-s)\, G(t, s)\, ds$, найденное как и в пункте из разности соответствующих φ' и φ'' уравнений (1.10), находим

$$y'(t)-y''(t)=\int_0^{A'(t)} (\varphi'(t-s)-\varphi''(t-s))\, G(t, s)(f(t, s)-\bar{f}(t))\, ds+$$

$$+\left(\left[1-\int_0^{\bar{A}} \varphi''(t-s)\, G(t, s)\, ds\right]_+-\left[1-\int_0^{\bar{A}} \varphi'(t-s)\, G(t, s)\, ds\right]_+\right). \tag{2.7}$$

Используя неравенство $|[a]_+-[b]_+|\leqslant|a-b|$ и предположение П. 3, получаем условие Липшица для оператора $\mathscr{B}$

$$|\mathscr{B}[\varphi'](t)-\mathscr{B}[\varphi''](t)|=|y'(t)-y''(t)|\leqslant K\,\|\varphi'(\cdot)-\varphi''(\cdot)\|. \tag{2.8}$$

Отсюда следует ограниченность оператора $\mathscr{B}$ и, с учетом (2.6), его компактность.

3°. Положительность оператора $\mathscr{B}$ очевидна в силу П.2. Пусть теперь $\varphi'\geqslant\varphi''\geqslant 0$ в смысле конуса неотрицательных функций в L_∞. Используем формулу (2.7). Замечая, что в рассматриваемом случае $A'(t)\leqslant A''(t)$, а значение $\bar{f}(t)$ лежит между значениями $f(t, A''(t))$ и $f(t, A'(t))$, с учетом монотонности $f_t(\cdot)$ находим, что все сомножители под знаком первого интеграла в (2.7) неотрицательны. Неотрицательность второго слагаемого в (2.7) следует из условия $\varphi'\geqslant\varphi''$. Таким образом, имеем $y'\geqslant y''$, т. е. монотонность оператора $\mathscr{B}$.

Вернемся к уравнениям динамики (1.7)—(1.10) которое теперь запишем в виде операторного уравнения

$$\leqslant \Big| \int_0 \qquad\qquad)) \, ds \, | +$$

$$+ \quad \overline{A} \qquad s) - \varphi''(t \quad s)) \, G(t, s) \, ds$$

Без ограничения общности можно считать $A'(t) \leqslant A''(t)$, тогда согл но определению $\overline{f}(t)$ и предположению П. 2 $f(t, s) \geqslant \overline{f}(t)$ п $s \leqslant A'(t)$. Отсюда получаем

$$|\mathscr{B}[\varphi'](t) - \mathscr{B}[\varphi''](t)| \leqslant$$

$$\varphi'(t \quad s) \quad \varphi''(t \quad s) | \, G(t, s) (f(t, s) + 1) \, ds$$

$\varphi_1')$ и $\varphi'' = (\varphi_0, \varphi_1'')$ тогда $\varphi'(\tau)$

т.

$$\leqslant \int |\varphi'(t \quad s) \quad \varphi''(t \quad s)| \, G(t \quad s)(f(t \quad s)$$

При заданном φ_0 любое начальное приближение $\varphi_1^{(0)} \in L_\infty^+[0, T]$ рождает последовательность $\{\varphi_1^{(k)}\} \subset L_\infty^+[0, T]$

$$\varphi_1^{(k+1)} = \mathscr{A}[\varphi_1^{(k)}], \quad \mathscr{A}[\varphi_1] \triangleq \mathscr{U}\mathscr{B}[\varphi_0, \varphi_1].$$

Обозначим $c = \| \varphi_1^{(1)} - \varphi_1^{(0)} \|$, и пусть согласно предположению $G(t, s)(f(t, s) + 1) \leqslant K < \infty$. Применяя многократно оценку (2 к последовательным приближениям, с учетом того, что $u(t) \in [0,$ имеем

$$|\mathscr{A}[\varphi_1^{(1)}](t) - \mathscr{A}[\varphi_1^{(0)}](t)| \leqslant cKt, \ldots$$

$$\ldots, \ |\mathscr{A}[\varphi_1^{(n+1)}](t) - \mathscr{A}[\varphi_1^{(n)}](t)| \leqslant c(Kt)^n / n!,$$

т. е. факториальную сходимость метода последовательных прибл ний. Аналогично для пары последовательностей $\{\overline{\varphi}_1^{(k)}\}$ и $\{\overline{\overline{\varphi}}_1^{(k)}\}$, начи щихся из разных начальных приближений, находим

$$\overline{\varphi}_1^{(n+1)}(t) - \overline{\overline{\varphi}}_1^{(n+1)}(t) | \leqslant \| \overline{\varphi}_1^{(0)} - \overline{\overline{\varphi}}_1^{(0)} \| (Kt)^n / n! \leqslant$$

$$\leqslant \| \overline{\varphi}_1^{(0)}$$

Оценка (2.11) показывает, что при достаточно больших n степень оператора $\mathcal{A}^n$ является равномерно по φ_0 сжимающей. Учитывая, что $\mathcal{A}$ отображает замкнутое множество L_∞^+ в себя и непрерывно зависит от параметра φ_0, применяя теорему о неявной функции, доказываем существование, единственность решения и его непрерывную зависимость от φ_0. Более того, используя оценку (2.8) можно показать, что $\mathcal{R}[\varphi_0]$ — удовлетворяет условию Липшица.

2°. Рассмотрим произвольное ограниченное множество начальных условий Φ_0. Будем строить множество $\Phi_1=\mathcal{R}[\Phi_0]$ методом последовательных приближений, начинающихся с $\varphi_1^{(0)}$, одного и того же для всех $\varphi_0 \in \Phi_0$. Тогда в силу липшицивости оператора $\mathcal{B}$ и ограниченности $\mathcal{U}$, имеем равномерную по $\varphi_0 \in \Phi_0$ оценку на $\|\varphi_1^{(1)}-\varphi_1^{(0)}\|$, откуда, используя (2.11), доказываем ограниченность $\mathcal{R}[\Phi_0]$, и, следовательно, ограниченность $\Phi=(\Phi_0, \Phi_1)$. Отсюда, используя компактность оператора $\mathcal{B}$, получаем предкомпактность множества $\mathcal{R}[\Phi_0]=\mathcal{U}\mathcal{B}[\Phi]$, и, следовательно, компактность оператора $\mathcal{R}$.

3°. Положительность оператора $\mathcal{R}$ очевидна, поскольку $\mathcal{R}[\varphi_0]$ — сильный предел неотрицательных последовательных приближений. Монотонность $\mathcal{R}$ доказывается предельным переходом по n в неравенствах

$$\overline{\varphi}_1^{(n+1)}=\mathcal{U}\mathcal{B}[(\overline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_1^{(n)})] \geqslant \overline{\overline{\varphi}}_1^{(n+1)}=\mathcal{U}\mathcal{B}[(\overline{\overline{\varphi}}_0, \overline{\overline{\varphi}}_1^{(n)})],$$

где $\{\overline{\varphi}_1^{(n)}\}$ и $\{\overline{\overline{\varphi}}_1^{(n)}\}$ две последовательности метода последовательных приближений, построенных при одинаковых начальных приближениях $\overline{\varphi}_1^{(0)}=\overline{\overline{\varphi}}_1^{(0)}$ и $\overline{\varphi}_0 \geqslant \overline{\overline{\varphi}}_0$.

3. Устойчивость в автономной задаче

Систему (1.7)—(1.10) будем называть автономной, если функции u, f и G не зависят от текущего времени t. В исходной постановке это соответствует тому, что $a(t)\equiv a$; $b(t)\equiv b$; $c(t)=ce^{-\pi t}$; $L(t)=Le^{\lambda t}$; $W(\tau, t-\tau)=W(t-\tau)$. Иными словами, вместо (1.9), (1.10) будем рассматривать

$$\varphi(t)=u\int_0^{A(t)} \varphi(t-s) f(s) G(s)\, ds, \tag{3.1}$$

$$1=\int_0^{A(t)} \varphi(t-s) G(s)\, ds+\left[1-\int_0^{\overline{A}} \varphi(t-s) G(s)\, ds\right]_+.$$

Определим стационарные решения

$$\varphi_*=\max_A\left\{\varphi_* u\int_0^A f(s) G(s)\, ds \;\middle|\; 1\geqslant\varphi_*\int_0^{A_*} G(s)\, ds\right\}.$$

Классифицируем стационарные решения в зависимости от значения параметра $\mu=u\int_0^{\overline{A}} f(s) G(s)\, ds$. При $\mu<1$ существует единственное тривиальное решение $\varphi_*=0$. При $\mu>1$ существует единственное решение, определяемое уравнениями

$$\varphi_*=\varphi_* u\int_0^{A_*} f(s) G(s)\, ds, \quad 1=\varphi_*\int_0^{A_*} G(s)\, ds.$$

При $\mu=1$ существует множество стационарных решений

$$\overline{\Phi}_* = \left\{\varphi_* \geqslant 0 \,\middle|\, 1 \geqslant \varphi_* \int_0^{\overline{A}} G(s)\,ds\right\}.$$ [redacted]

Выясним содержательный смысл параметра μ. Для автономной задачи с $L(t) = Le^{\lambda t}$, $c(t) = ce^{-\pi t}$, используя (1.5) найдем

$$\mu = u \int^{\overline{A}} (1-a) \frac{W(s)}{b} e^{-(\lambda+\pi)s} ds.$$

С другой стороны, если в исходной постановке (1.4) для стационарного случая снять ограничения по труду ($L(t) \equiv +\infty$), то динамика фондов будет описываться линейным уравнением

$$\Phi(t) \quad u \int_0^{\overline{A}} \Phi(t-s)(1-a) \frac{W(s)}{b} ds.$$

Последнее уравнение имеет экспоненциальные решения $\Phi(t) = \Phi e^{\theta t}$, где θ определяется единственным образом из соотношения

$$u \int_0^{\overline{A}} (1-a) \frac{W(s)}{b} e^{-\theta s} ds.$$

Значение θ естественно назвать технологическим темпом роста модели, а $(\lambda+\pi)$ — темпом роста трудовых ресурсов (за счет численности и за счет производительности). В этой терминологии случай $\mu > 1$ соответствует $\theta > (\lambda+\pi)$, — технологический темп роста превосходит темп роста трудовых ресурсов; случай $\mu < 1$ соответствует обратному соотношению $\theta < (\lambda+\pi)$, а случай $\mu = 1$ — совпадению технологического темпа роста и темпа роста трудовых ресурсов.

В дальнейшем, помимо сделанных предположений П.2—П.3, будем считать, что $\min\{\varphi_0(\tau) \mid \tau \in [-\overline{A}, 0]\} = \varphi_0 > 0$. Это предположение гарантирует ненулевые выпуски на всей траектории. Так как разрывность была связана с разрывностью $u(t)$, а в рассматриваемом случае $u(t) = \text{const}$, функцию $\varphi(t)$ можно считать непрерывной.

Теорема 2. При сделанных предположениях решения (1.7), (1.8), (3.1), (3.2) на интервалах $t \in [(k-1)\overline{A}, k\overline{A}]$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant M_0 \mu^k, \text{ если } \mu < 1;$$

$$\varphi_* - (\varphi_* \quad \hat{\varphi})\alpha^{(k-K)} \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi_* + M_0 \mu^k, \text{ если } \mu > \quad \text{и } k \geqslant K,$$

где

$$\alpha = \int_0^{A_*} uG(s)(f(s) \quad f(\overline{A}))\,ds \in (0,\ 1),$$

$$M_0 = \max\{(\varphi(\tau) - \varphi_*)_+ \mid \tau \in [-\overline{A},\ 0]\},$$

$$\hat{\varphi} = \varphi_*(1-a)/(\mu - a), \quad K = [\log_\mu(\hat{\varphi}/\varphi_0)]_+ + 1.$$

Замечания. 1°. Теорема указывает на то, что случай $\mu < 1$ содержательно является плохим, поскольку в этом случае очень быстро растет «безработица». Доля занятого в производстве населения $\int_0^{A(t)} \varphi(t-s) G(s)\,ds$ экспоненциально стремится к нулю.

2°. Нерассмотренный здесь критический случай $\mu = 1$ можно было бы считать «редко встречающимся». Однако к этому утверждению следует относиться весьма осмотрительно. Ниже проанализирован пример задачи максимизации потребления на стационарном решении. В этом примере механизм оптимального выбора параметра u уводит

μ от критического значения. Однако при других постановках или расширениях модели возможны механизмы стабилизирующие μ к критическому значению. Следует отметить, что использование свойств линейного уравнения восстановления (см. §§ 7.8, 7.15 [8]) позволяет доказать, что в случае $\mu=1$ решения $\varphi(t)$ ведут себя достаточно хорошо. Каждое решение $\varphi(t)$ асимптотически эквивалентно некоторой константе φ_*, выбор которой из множества Φ_* однозначно определяется начальными условиями $\varphi_0(\cdot)$.

3°. Рассмотрим следующую интерпретацию уравнений (3.1), (3.2.)

Пусть $\varphi_k(\cdot)\in L_\infty[0, \bar{A}]$; $\varphi_k(t)\overset{\triangle}{=}\varphi(t+(k-1)\bar{A})$; тогда $\varphi_{k+1}(\cdot)$ можно получать из $\varphi_k(\cdot)$ применением оператора $\mathscr{R}$ (см. теорему 1), который в автономном случае не зависит от k. Таким образом, уравнение (3.1) эквивалентно следующему эволюционному уравнению

$$\varphi_{k+1}=\mathscr{R}(\mu)[\varphi_k], \tag{3.2}$$

где $\mathscr{R}$ предполагается зависящим от μ как от параметра. Это уравнение рассматривается в области $\mathscr{D}=0\bigcup\mathrm{int}(L_\infty^+[0,A])$. Взятие внутренности связано с условием $\varphi_0(t)\geqslant\varphi_0>0$. Результаты (теоремы 2) можно переформулировать следующим образом. При $\mu<1$ в области $\mathscr{D}$ существует единственное глобально асимптотически устойчивое нулевое решение, которое при переходе параметра μ через бифуркационное значение $\mu_0=1$ теряет свою устойчивость и передает ее рождающемуся решению $\varphi_*(\mu)$. Заметим, что рождающееся решение «отскакивает» от нулевого на конечную величину, а при $\mu=\mu_0$ существует континуальное множество устойчивых (но не асимптотически устойчивых) стационарных решений. Такая специфика бифуркационной картины связана с наличием линейного участка у оператора $\mathscr{R}$ в области малых φ, и ее можно проиллюстрировать примером одномерного уравнения

$$x=B(\mu, x)=\mu x\min\{1, 1/\sqrt{x}\}.$$

Доказательство теоремы 2. 1°. Пусть $\mu<1$, тогда

$$0\leqslant\varphi(t)\leqslant u\int_0^A\varphi(t-s)f(s)G(s)\,ds.$$

Используя обозначения $M_k=\max\{\varphi(\tau)\,|\,\tau\in[(k-1)\bar{A}, k\bar{A}]\}$, находим

$$M_{k+1}\leqslant\mu\max\{M_k, M_{k+1}\}.$$

Если максимум реализуется на M_{k+1}, то $M_{k+1}=0$, если на M_k, то $M_{k+1}\leqslant\mu M_k$. В обоих случаях справедлива оценка теоремы при $\mu<1$.

2°. Пусть теперь $\mu>1$. Используя (3.1) и соответствующее равенство в (3.3), двумя способами вычислим разность

$$\varphi(t)-\varphi_*=\int_0^{A_*}(\varphi(t-s)-\varphi_*)uf(s)G(s)\,ds+$$

$$+\bar{f}(t)\int_{A_*}^{A(t)}u\varphi(t-s)G(s)\,ds,$$

$$\varphi(t)-\varphi_*=\int_0^{A(t)}(\varphi(t-s)-\varphi_*)uf(s)G(s)\,ds-f(t)\int_{A(t)}^{A_*}u\varphi_*^{\cdot}G(s)\,ds. \tag{3.5}$$

Здесь из второго интеграла вынесено среднее значение $f(t, s)$, $s\in[A_*, A(t)]$ (Последняя операция законна в силу неотрицательности φ, φ_*, G). Запишем также двумя способами разность (3.2) и аналогичного равенства из (3.3)

$$0=\int_0^{A_*}(\varphi(t-s)-\varphi_*)G(s)\,ds+\int_{A_*}^{A(t)}\varphi(t-s)G(s)\,ds+w(t),$$

$$0 \quad \int_0^{A(t)} (\varphi(t \quad s) \quad \varphi_*) G(s)\, ds \quad \int_{A(t)}^{A_*} \varphi_* G(s)\, ds + w(t),$$

где $w(t) = \left[1 - \int_0^{A} \varphi(t-s) G(s)\, ds\right]_+$. Подставляя вторые слагаемые правых частей (3.6), (3.7) в (3.4) и (3.5) соответственно, находим

$$\varphi(t) - \varphi_* = \int^{A_*} (\varphi(t-s) - \varphi_*) uG(s)(f(s) - \bar{f}(t))\, ds - u\bar{f}(t) w(t)$$

$$\varphi(t) \quad \varphi_* = \int_0^{A(t)} (\varphi(t \quad s) \quad \varphi_*) uG(s)(f(s) \quad \bar{\bar{f}}(t))\, ds - u\bar{\bar{f}}(t) w(t). \quad (3.9)$$

2. Зафиксируем некоторый момент времени t. Если $A(t) \quad A_*$, используя (3.8) и учитывая, что $\bar{f}(t) \geqslant f(\bar{A})$, находим

$$\varphi(t) - \varphi_* \leqslant u \int^{A_*} (\varphi(t \quad s) \quad\quad) G(s)(f(s) \quad f(\bar{A}))\, ds$$

Если $A(t) \quad A_*$, то, используя (3.9), получаем

$$\varphi(t) \quad \varphi_* \leqslant u \int_0^{A(t)} (\varphi(t \quad s) - \varphi_*) G(s)(f(s) - f(\bar{A}))\, ds$$

Все сомножители под интегралом неотрицательны и $A(t) < A_*$, следовательно, последняя оценка сильнее (3.10). Тем самым неравенство (3.10) справедливо при любых $A(t)$ и t. Из (3.10) следует, что

$$M_{k+1} \leqslant \alpha \max\{M_k, M_{k+1}\},$$

где $M_k = \max\{(\varphi(\tau) - \varphi_*)_+ \mid \tau \in [(k-1)\bar{A}, k\bar{A}]\}$. Отсюда как и в 1°, получаем верхнюю оценку для случая $\mu > 1$.

3°. Пусть $w(t) = 0$ для некоторого t, тогда при $A(t) \geqslant A_*$ аналогично (3.10) можно получить оценку

$$\varphi(t) - \varphi_* \geqslant u \int_0^{A_*} (\varphi(t \quad s) \quad \varphi_*)_- G(s)(f(s) \quad\quad \bar{A}))\, ds, \quad (3.11)$$

а при $A(t) < A_*$

$$\varphi(t) \quad \varphi_* \geqslant u \int_0^{A(t)} (\varphi(t \quad s) \quad \varphi_*)_- G(s)(f(s) \quad f(\bar{A}))\, ds.$$

Опять-таки последнее неравенство сильнее (3.11) и, следовательно, оценка (3.11) справедлива для всех t таких, что $w(t) = 0$.

Пусть теперь t таково, что $w(t) > 0$, но тогда $A(t) = \bar{A}$ и

$$\varphi(t) = \int_0^{\bar{A}} \varphi(t \quad s) u f(s) G(s)\, ds \quad (3.12)$$

Обозначая $\varphi_k = \min\{\varphi_*, \min\{\varphi(\tau) \mid \tau \in [(k \quad 1)\bar{A}, k\bar{A}]\}\}$, из (3.11), (3.12) получаем

$$\varphi_{k+1} \geqslant \min\{(1-\alpha)\varphi_* + \alpha\varphi_k, (1-\alpha)\varphi_* + \alpha\varphi_{k+1}, \mu\varphi_k, \mu\varphi_{k+1}\}.$$

Заметим, что из положительности интегралов $\int_0^{A_*} uG(s)(f(s) - f(\bar{A}))\, ds$ и $\int_0^{A_*} u f(s) G(s)\, ds$ и соотношений (3.11) и (3.12) следует, что, если $\varphi_k > 0$, то $\varphi_{k+1} > 0$. Используя условие $\varphi_0 > 0$, находим,

$\varphi_k > 0$ для всех k. С другой стороны, если $\varphi_k = \varphi_*$, то из (3.13) следует, что $\varphi_{k+1} = \varphi_*$. Поскольку мы хотим доказать, что $\varphi_k \geqslant (\varphi_* - \delta_k) \to \varphi_*$, этот случай является тривиальным. Будем рассматривать последовательности $\{\varphi_k\}$, такие, что $\varphi_k \in (0, \varphi_*)$ для всех k. В этом случае минимум в (3.13) не может реализоваться на $\mu\varphi_{k+1}$ (тогда $\varphi_{k+1} = \mu\varphi_{k+1} > \varphi_{k+1}$) и на $(1-\alpha)\varphi_* = \alpha\varphi_{k+1}$ (тогда $\varphi_{k+1} = \varphi_*$), т. е. последовательность должна удовлетворять

$$\varphi_{k+1} \geqslant \min\{(1-\alpha)\varphi_* + \alpha\varphi_k, \mu\varphi_k\}. \tag{3.14}$$

Из этого неравенства следует, что, во-первых, последовательность монотонна и, во-вторых, при $\varphi_k \leqslant \hat{\varphi} \stackrel{\Delta}{=} (1-\alpha)\varphi_*/(\mu-\alpha)$ минимум реализуется на $\mu\varphi_k$, а при $\varphi_k \geqslant \hat{\varphi}$, — на $(1-\alpha)\varphi_* + \alpha\varphi_k$. Следовательно, не более чем через $K = [\log_\mu(\hat{\varphi}/\varphi_0)]_+ + 1$ шагов члены последовательности станут больше $\hat{\varphi}$, а при $k \geqslant K$ из (3.14) получаем оценку $\varphi_k \geqslant \varphi_* - (\varphi_* - \hat{\varphi})\alpha^{(k-K)}$, завершающую доказательство теоремы 2.

4. Устойчивость в асимптотически автономном случае

Задачу (1.7)—(1.10) будем называть асимптотически автономной, если $u(t)$, $f(t, s)$, $G(t, s)$ стремятся при $t \to \infty$ к u_0, $f_0(s)$, $G_0(s)$ так, что

$$\underset{\tau \in [t, \infty)}{\mathrm{vraimax}} \int_0^{\overline{A}} |K_1(\tau, s)|\, ds \to 0, \quad K_1(\tau, s) \stackrel{\Delta}{=} u(\tau) f(\tau, s) G(\tau, s) - u_0 f_0(s) G_0(s),$$

$$\max_{\tau \in [t, \infty)} \int_0^{\overline{A}} |K_2(\tau, s)|\, ds \to 0, \quad K_2(\tau, s) \stackrel{\Delta}{=} G(\tau, s) - G_0(s).$$

Будем считать, что предположения П.1—П.4 выполнены на $[0, T)$ при $T = \infty$; система (1.7)—(1.10) является асимптотически «грубой» т. е. $\mu \int_0^{\overline{A}} u_0 f_0(s) G_0(s)\, ds \neq 1$. Кроме того предположим, что решение на любом интервале $[0, T]$ отделено от нуля. В терминах исходной постановки последнее условие можно гарантировать требованием того, что начальные условия $\varphi_0(t)$ отделены от нуля и на каждом интервале $[0, T]$ значения $u(t)$, $f(t, \overline{A})$ и $\int_0^{\overline{A}} G(t, s)\, ds$ отделены от нуля.

Теорема 3. Пусть для стационарной задачи с функциями $f_0(s)$, $G_0(s)$ и u_0 определена стационарная траектория $\varphi_*(t) = \varphi_*$. Тогда при сделанных предположениях любое решение $\varphi(t)$ системы (1.7)—(1.10) стремится к φ_* в следующем смысле

$$\mathrm{vraimax}\{|\varphi(\tau) - \varphi_*| : \tau \geqslant t\} \to 0 \text{ при } t \to 0.$$

Доказательство. 1°. Пусть $\mu < 1$. Тогда

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \int_0^{\overline{A}} \varphi(t-s) u(t) f(t, s) G(t, s)\, ds.$$

Используя обозначения $M_k = \mathrm{vraimax}\{\varphi(\tau) \mid \tau \in [(k-1)\overline{A}, k\overline{A}]\}$ и учитывая (4.1), получаем, что для любого $\mu_1 \in (\mu, 1)$ найдется такое K, что при $k \geqslant K$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant M_{k+1} \leqslant \mu_1 \max\{M_k, M_{k+}\}.$$

Замечая, что в силу теоремы существования $M_K < \infty$, аналогично 1° теоремы 2 получаем оценку

$$M_k \leqslant \mu_1^{(k-K)} M_K \text{ при } k \geqslant K,$$

доказывающую утверждение теоремы для случая $\mu < 1$.

2°. Пусть теперь $\mu > 1$. Повторяя выкладки, проделанные при доказательстве теоремы 2, аналогично (3.10) можно получить

$$\varphi(t) - \varphi_* \leqslant \int_0^{A_*} (\varphi(t-s) - \varphi_*)_+ u_0 G_0(s) (f_0(s) - f_0(\overline{A})) \, ds +$$

$$+ \int_0^{\overline{A}} ((\varphi(t-s) - \varphi_*)_+ + \varphi_*) ((K_1(t, s))_+ - f_0(0) u_0 (K_2(t, s))_-) \, ds. \quad (4.3)$$

Отсюда, вводя обозначения $M_k = \operatorname{vraimax}\{(\varphi(\tau) - \varphi_*)_+ \mid \tau \in [(k-1)\overline{A}, k\overline{A}]\}$ и используя (4.1), (4.2), получаем, что для любого $\alpha_1 \in (\alpha, 1)$, начиная с некоторого $k = K$, справедливы неравенства

$$0 \leqslant M_{k+1} \leqslant \alpha_1 \max\{M_k, M_{k+1}\} + \varepsilon_k, \quad (4.4)$$

где ε_k — стремящаяся к нулю последовательность, которую без ограничения общности будем считать монотонной. Значение α — определяется так же, как и в теореме 2. Если в (4.4) максимум реализуется на M_{k+1}, то $M_{k+1} \leqslant \varepsilon_k/(1-\alpha_1)$, если на M_k, то $M_{k+1} \leqslant \alpha_1 M_k + \varepsilon_k$. И в том, и в другом случае справедлива оценка

$$M_{k+1} \leqslant \alpha_1 M_k + \varepsilon_k/(1-\alpha_1).$$

Учитывая, что $M_K < \infty$, $\alpha_1 \in (0, 1)$, ε_k — монотонно стремится к нулю, для $k \geqslant K$ находим

$$0 \leqslant M_k \leqslant \alpha_1^{(k-K)} M_K + \sum_{i=K+1}^{k} \alpha_1^{(i-K)} \varepsilon_i/(1-\alpha_1) \leqslant \alpha_1^{(k-K)} M_K +$$

$$+ \alpha_1^{k-[(k-K)/2]} \varepsilon_K/(1-\alpha_1)^2 + \varepsilon_{K+1+[(k-K)/2]}/(1-\alpha_1)^2 \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Здесь $[a]$ — целая часть числа a. Отсюда имеем

$$\operatorname{vraimax}\{(\varphi(\tau) - \varphi_*)_+ \mid \tau \geqslant t\} \to 0 \text{ при } t \to \infty. \quad (4.5)$$

3°. Получим нижнюю асимптотическую оценку для случая $\mu > 1$. Аналогично (3.11) (сравни (4.3)) для t таких, что $w(t) = \left[1 - \int_0^{\overline{A}} \varphi(t-s) G(t, s) \, ds\right]_+ = 0$, справедливо неравенство

$$\varphi(t) - \varphi_* \geqslant \int_0^{A_*} (\varphi(t-s) - \varphi_*)_- u_0 G_0(s) (f_0(s) - f_0(\overline{A})) \, ds +$$

$$\int_0^{\overline{A}} \varphi(t-s) K_3(t, s) \, ds, \quad (4.6)$$

где $K_3(t, s) \stackrel{\triangle}{=} (K_1(t, s))_- - u_0 f_0(s) (K_2(t, s))_+$. С другой стороны, при $w(t) > 0$ аналогично (3.12) имеем

$$\varphi(t) = \int_0^{\overline{A}} \varphi(t-s) u(t) f(t, s) G(t, s) \, ds. \quad (4.7)$$

Найдем K такое, что, во-первых, при $t \geqslant (K-1)\overline{A}$ согласно (4.5) $\varphi(t) \leqslant 2\varphi_*$ (это позволит оценить второй интеграл в (4.6)) и, во-вторых, при $t \geqslant K\overline{A}$ согласно (4.1) значение $\int_0^{\overline{A}} u(t) f(t, s) G(t, s) \, ds \geqslant \mu_1 \in (1, \mu)$.

Обозначая $\varphi_k = \operatorname{vraimin}\{\varphi(\tau) \mid \tau \in [(k-1)\bar{A}, k\bar{A}]\}$, из соотношений (4.6), (4.7) при $k \geqslant K$ получим

$$\varphi_{k+1} \geqslant \min\{(1-\alpha)\varphi_* + \alpha\varphi_k - \varepsilon_k,\ (1-\alpha)\varphi_* + \alpha\varphi_{k+1} - \varepsilon_k,\ \mu_1\varphi_k,\ \mu_1\varphi_{k+1}\},$$

где ε_k — стремящаяся к нулю последовательность, полученная из оценки второго слагаемого в формуле (4.6). Зададим $\hat{\varepsilon}$ и найдем $\hat{K} > K$ такое, что $\varepsilon_k \leqslant \hat{\varepsilon}$ при $k \geqslant \hat{K}$ и, следовательно,

$$\varphi_{k+1} \geqslant \min\{(1-\alpha)\varphi_* + \alpha\varphi_k - \hat{\varepsilon},\ (1-\alpha)\varphi_* + \alpha\varphi_{k+1} - \hat{\varepsilon},\ \mu_1\varphi_k,\ \mu_1\varphi_{k+1}\}. \quad (4.8)$$

Пусть $\hat{\varepsilon}$ таково, что $\hat{\varphi} \overset{\Delta}{=} (1-\alpha)\varphi_*/(\mu_1-\alpha) - \hat{\varepsilon}/(\mu_1-\alpha) > 0$, $\hat{\hat{\varphi}} \overset{\Delta}{=} \varphi_* - \hat{\varepsilon}/(1-\alpha) = (\mu_1-\alpha)\hat{\varphi}/(1-\alpha) > 0$. Согласно оценке (4.8) последовательность $\{\varphi_k\}$ монотонна в области $[0, \hat{\hat{\varphi}}]$ и, единожды попав в область $[\hat{\hat{\varphi}}, \varphi_*]$, не выходит из нее. При $\varphi_k \leqslant \hat{\varphi}$ из (4.8) имеем $\varphi_{k+1} \geqslant \mu_1\varphi_k$. Следовательно, начиная с $\varphi_{\hat{K}} > 0$, последовательность $\{\varphi_k\}$ не более чем за $k_1 = [\log_{\mu_1}(\hat{\varphi}/\varphi_{\hat{K}})]_+$ шагов попадет в область $\varphi_k \geqslant \hat{\varphi}$. Если $\varphi_k \in [\hat{\varphi}, \hat{\hat{\varphi}}]$, то согласно (4.8) $\varphi_{k+1} \geqslant \hat{\hat{\varphi}} - \alpha(\hat{\hat{\varphi}} - \varphi_k)$. Отсюда находим, что $\varphi_k \geqslant \hat{\hat{\varphi}} - \hat{\varepsilon}/(1-\alpha) = \varphi_* - 2\hat{\varepsilon}/(1-\alpha)$ при $k \geqslant \hat{K} + \hat{k}_1 + \hat{k}_2$, где $\hat{k}_2 = [\log_\alpha(\hat{\varepsilon}/\hat{\varphi}(\mu_1-1))]_+$. Ввиду произвольности выбора $\hat{\varepsilon} > 0$ последняя оценка для φ_k совместно с (4.5) завершает доказательство теоремы.

5. Максимизация потребления на стационарных траекториях

Для каждого значения нормы накопления $u \in [0, 1]$ можно найти стационарные траектории автономной модели (3.1), (3.2). Определим $p_* = \varphi_*(1-u)/u$ — стационарное потребление на единицу трудовых ресурсов (с учетом роста производительности труда). Рассмотрим задачу максимизации $p_*(u)$ по u. Если $\mu(u) = u\mu_0$, где $\mu_0 = \int_0^{\bar{A}} f(s)G(s)\,ds$, то $\varphi_* = 0$ и $p_* = 0$. То есть максимизацию следует проводить только по $u \in [1/\mu_0, 1]$. При $u \in (1/\mu_0, 1]$ величины u, φ_*, p_* можно из соотношений (3.3) однозначно определить по значению A_*. Взяв в качестве независимой переменной A_*, запишем задачу максимизации $p_*(A_*)$

$$p_* = \left(\int_0^{A_*} f(s)G(s)\,ds - 1\right) \Big/ \int_0^{A_*} G(s)\,ds \to \text{sup}$$

$$u = \int_0^{A_*} f(s)G(s)\,ds \in [1, \mu_0).$$

Вычислим производную

$$p_*'(A_* \quad \left(G(A_*) \Big/ \left(\int_0^{A_*} G(s)\,ds\right)^2\right)\left(\quad \int_0^{A_*} G(s)(f(s) \quad f(A_*))\,ds\right)$$

Если

$$G(s)(f(s) \quad f(\bar{A}))\,ds = \mu_0 \quad f(\bar{A}) \int^{\bar{A}} G(s)\,ds >$$

то найдется $\hat{A}_* \in (0, \bar{A})$, на котором реализуется максимум $p_*(A_*)$. При этом

$$1/\hat{u}=\int_0^{A_*} f(s)\,G(s)\,ds \in (1,\ \mu_0),$$

$$\hat{\mu}=\hat{u}\mu_0 \int_0^{\bar{A}} f(s)\,G(s)\,ds \Big/ \int_0 f(s)\,G(s)\,ds$$

т. е. $\hat{u}$ — допустимо, а соответствующее стационарное решение $\hat{\varphi}_*$ глобально асимптотически устойчиво. В этом случае естественно ожидать, что для модели (1.8), (3.1), (3.2) на больших временных интервалах решение задачи максимизации интеграла потребления (без дисконтирования) в классе не зависящих от времени u будет давать значения близкие к значению $\hat{u}$, полученному в стационарной задаче.

Если неравенство (5.2) не выполнено, то sup в (5.1) реализуется при $A_* \to \bar{A}$, $u \to 1/\mu_0$, $\mu \to 1$. В этом случае стационар, получаемый предельным переходом, не является притягивающим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математические модели и статистический анализ научно-технического прогресса. — Сборник трудов, вып. 8. М.: ВНИИСИ, 1982.
2. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: к теории производственных функций. I. — Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1979, № 2, с. 18—27.
3. *Шананин А. А.* К теории производственных функций. — В сб.: Модели и алгоритмы программного метода планирования сложных систем. — М.: ВЦ АН СССР, 1979, с. 24—50.
4. *Ашманов С. А.* Математические модели и методы в экономике. — М.: изд-во МГУ, 1980.
5. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Наука, 1979.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа, изд. 4-е. — М.: Наука, 1974.
7. Приближенное решение операторных уравнений. (*М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др.*) — М.: Наука, 1969.
8. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-равностные уравнения. М.: Мир. 1967.