Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. IV.

Задача о допустимости со случайными требованиями [1]

©1998 г. **Ю.Е.Малашенко, Н.М.Новикова**

Москва, ВЦ РАН

Поступила в редакцию 21.04.97 г.

Рассмотрена задача анализа эффективности многопользовательских сетевых систем со случайными требованиями пользователей. Предложен ряд вероятностных и стохастических формулировок соответствующей задачи о допустимости многопродуктовых потоковых сетей. Исследованы постановки, учитывающие возможную неинформированность (неполную или неточную информированность) о функции распределения вектора входной нагрузки — вектора требований. Обсуждаются методы решения возникающих задач стохастической оптимизации.

Введение. Предлагаемая статья является продолжением [1], посвященной применению общей методологии исследования операций [2] для анализа допустимости многопродуктовых потоковых сетей (МП-сетей) [3, 4] с неточно или неполностью известным вектором входной нагрузки (требований тяготеющих пар). В [1] были даны соответствующие обобщенные постановки задачи о допустимости, в частности, гарантированная (предполагающая допустимость для любого вектора требований) и слабая (рассчитывающая на допустимость для хотя бы одного), указаны возможности их решения. Причем за основу взято понятие *конкурентного* распределения потоков в сети [5, 6] — максимизирующего уровень обеспеченности требований тяготеющих пар (продуктов). Настоящая работа посвящена проблеме анализа МП-сетей, когда требования тяготеющих пар считаются случайными величинами с известной или не очень известной функцией распределения. Здесь возникает несколько различных типов обобщенных постановок задачи о допустимости, зависящих как от отношения к случайности (гарантированный подход или допускающий осреднение), так и от этапности поступления информации о реализации случайного фактора. Проблема выбора адекватной постановки при этом оказывается существенной и предполагает достаточное понимание условий конкретной содержательной задачи. Цели формализации особенностей, заложенных в основу каждой из возможных постановок, и свойств получающихся реше-

[1] Работа поддержана РФФИ по гранту N.98-01-00233

Авторы надеются, что предложенная классификация позволит исследователю или проектировщику сетевых систем лучше понять роль случайности и оценить последствия тех или иных предположений информированности о ней.

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения из [1], относящиеся к математическому понятию МП-сети.

Основной характеристикой допустимости МП-сети служит *уровень максиминной обеспеченности требований*:

$$\theta_0 = \theta_0(d) \overset{\text{def}}{=} \max_{z\in Z(c)} \min_{i\in M(d)} \frac{z_i}{d_i} = \max_{z,\theta}\{\theta|\ (z \in Z(c),\ \theta d_i \le z_i\ \forall i \in M\}, \quad (0.1)$$

где $c = (c_1, \dots, c_e)$ — вектор пропускной способности ребер графа сети,

$d = (d_1, \dots, d_m)$ — вектор требований тяготеющих пар (продуктов),

$M(d) \overset{\text{def}}{=} \{i \in M|\ d_i \ne 0\}$,

$M = (1, 2, \dots, m)$ — множество индексов i тяготеющих пар,

$z = z(f)$ — вектор значений их потоков, или *мультипоток*, соответствующий *распределению потоков* f различных продуктов по дугам МП-сети,

$Z(c)$ — множество достижимых мультипотоков, т.е. $z(f)$ для всех f, удовлетворяющих условиям сохранения потока и ограничениям по пропускной способности ребер МП-сети, задаваемым вектором c.

Распределение потоков, реализующее θ_0, называется *конкурентным* [5]. Критерий допустимости МП-сети дается условием $\theta_0 \ge 1$, которое гарантирует существование допустимого распределения потоков, т.е. такого, что соответствующий вектор мультипотока будет не меньше вектора заданных требований. При этом конкурентное распределение потоков очевидно будет допустимым.

В случае недопустимости МП-сети ($\theta_0 < 1$) стремление к максимизации

$$\min_{i\in M} \frac{z_i}{d_i}$$

согласуется с концепцией недискриминирования пользователей и значение $\theta_0 < 1$ характеризует эффективность МП-сети по обеспечению данного вектора требований. К сожалению, мало реально рассчитывать на то, что в момент решения задачи оценки эффективности этот вектор окажется известным.

1. Вероятностные постановки задачи о допустимости Предположим, что относительно вектора потоковых требований d абонентов сети известно, что это — реализация случайной величины (с.в.) $d(\cdot)$.

стимости МП-сети.

1.1. Постановки задачи о допустимости с осреднением. Наиболее распространенной и простой, хотя и наименее осмысленной содержательно, является задача о *средней допустимости*, т.е. насколько МП-сеть будет допустима в среднем. Здесь выделим две основные постановки.

1-я — *жесткая*, как и в [1], не рассчитывает на возможность апостериорного перераспределения потоков после реализации с.в. $d(\cdot)$ (когда станет известным конкретное значение d). В таком случае можно сформулировать задачу: выяснить, существует ли распределение потоков, при котором достигается среднее значение $\hat{d}$ с.в. $d(\cdot)$. Если значение $\hat{d}$ известно, то приходим к обычной задаче о допустимости (методы решения которой см., к примеру, в [7, 8, 9, 6, 10, 11]). Если же оно известно неточно, то получаем либо одну из обобщенных постановок, исследованных в [1], либо, когда информация о $\hat{d}$ имеет вероятностный характер, возвращаемся к исходному множеству постановок данной статьи с заменой d на $\hat{d}$. Поэтому для дальнейшего теоретического исследования указанная формулировка самостоятельного интереса не представляет.

Следующая формулировка задачи о средней допустимости для жесткой постановки опирается на понятие *уровня обеспеченности требований* тяготеющих пар при заданном распределении потоков f по ребрам физического графа МП-сети

$$\min_{i \in M(d)} z_i(f)/d_i. \tag{1.1}$$

Уровень (1.1) характеризует допустимость распределения f для вектора d.

Определим жесткую постановку задачи о средней допустимости МП-сети как поиск максимума среднего уровня обеспеченности требований

$$\theta_0^{жC} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{z \in Z(c)} \int_\Omega \min_{i \in M(d(\omega))} \frac{z_i}{d_i(\omega)} \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega). \tag{1.2}$$

Здесь и далее: Ω — пространство элементарных событий ω (от которых зависит значение d), $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на соответствующей σ-алгебре борелевских множеств из Ω, функция $d(\cdot)$ $\mathbf{P}$-измерима на Ω, $D \stackrel{\text{def}}{=} d(\Omega)$. Вместо $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega | \ d(\omega) \in B\})$ будем также использовать укороченную запись $\mathbf{P}(d(\cdot) \in B)$ или просто $\mathbf{P}(B)$.

Вообще говоря, для жесткой постановки возможна еще одна формулировка задачи о средней допустимости, когда максимизируется не печенности требований, т.е. определяется

$$\theta_0^{жC'} \stackrel{\rm def}{=} \max_{z\in Z(c)} \min_{i\in M} \int_\Omega \frac{z_i}{d_i(\omega)} \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega). \tag{1.3}$$

Такая задача, очевидно, эквивалентна обычной задаче о допустимости для вектора d' с компонентами

$$d_i' \stackrel{\rm def}{=} 1/\int_\Omega \{d_i(\omega)\}^{-1}\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega), \tag{1.4}$$

а именно, $\theta_0^{жC'} = \theta_0(d')$.

2-я постановка — которую мы будем в дальнейшем ассоциировать с *нежесткой* задачей о средней допустимости МП-сети — является двухэтапной. Как и для нежесткой гарантированной постановки из [1], предполагается, что, хотя оценка допустимости сети производится *a priori*, приемлемое распределение потоков будет выбираться для известного вектора требований d — реализации с.в. $d(\cdot)$. В такой постановке математическая формулировка задачи (и значение результата) зависит от конкретного смысла слов “приемлемое распределение”, который, следуя общей схеме анализа допустимости МП-сети [1], будем понимать как конкурентное распределение, т.е. решение задачи максимизации уровня обеспеченности требований (1.1),

$$\theta_0(d) \stackrel{\rm def}{=} \max_{z\in Z(c)} \min_{i\in M(d)} z_i(f)/d_i. \tag{1.5}$$

Тогда задача анализа средней допустимости МП-сети сводится к поиску *среднего значения максиминной обеспеченности требований*

$$\theta_0^C \stackrel{\rm def}{=} \max_{z\{\cdot\}:\ D\to Z(c)} \int_\Omega \min_{i\in M(d(\omega))} \frac{z_i\{d(\omega)\}}{d_i(\omega)} \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) = \tag{1.6}$$

$$= \int_\Omega \max_{z\in Z(c)} \min_{i\in M(d(\omega))} \frac{z_i}{d_i(\omega)} \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_\Omega \theta_0(d(\omega))\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega),$$

и если значение $\theta_0^C \geq 1$, то МП-сеть будем считать *допустимой в среднем*, в противном случае, МП-сеть *не допустима в среднем.*

Отметим, что $\theta_0^C \geq \theta_0^{жC}$, т.е. из недопустимости в среднем МП-сети следует (но не эквивалентно) ее недопустимость в среднем в смысле жесткой постановки (1.2) и не следует недопустимости для среднего значения $\hat{d}$ или d' (1.4). Кроме того, для постановки (1.3) выполнено $\theta_0^{жC'} \geq \theta_0^{жC}$. Приведем соответствующие примеры.

Пусть граф сети состоит из одного ребра единичной пропускной способности и на нем заданы две тяготеющие пары. И пусть $\Omega = \{\omega^1, \omega^2\}$,

$(1/2, 1/2)$, $d' = (3/8, 3/8)$, и $\theta_0^C = 1 > \theta_0^{жC} = 2/3$ (при $z = (1/2, 1/2)$), а $\theta_0^{жC'} = 4/3$. Если же граф сети состоит из двух несмежных ребер с пропускной способностью 1/2 каждое, и по ним разделены две указанные выше тяготеющие пары, то по-прежнему $\theta_0(\hat{d}) = 1$, но $\theta_0^C = 2/3$.

Как уже указывалось выше, трудно представить себе реальную ситуацию, для которой адекватной была бы постановка задачи о средней допустимости, безотносительно, жесткая или нет. Традиционные слова, оправдывающие осреднение результата в обычных задачах оптимизации со случайными факторами, такие, как многократная повторяемость ситуации и возможность компенсации будущим выигрышем настоящего проигрыша, не применимы к большинству многопользовательских сетевых систем, узлы которых соответствуют агрегированным пользователям. Например, узлы телефонной сети как правило АТС, и требования пары АТС в разные моменты соответствуют разным парам квартир или разным людям в этих квартирах и даже просто разным темам разговора одних и тех же людей (то, что ребенок не смог дозвониться маме на работу с вопросом, как выключить чайник, не компенсируется произвольной длительностью их обсуждения уроков). Аналогично, пассажиры одного и того же направления в метро — реально разные люди, и если они едут на работу к определенному времени, то их не слишком радует возможность подождать 2-3 поезда в надежде поехать не в таком переполненном вагоне (а что как все пассажиры останутся ждать?). Подобных примеров можно привести много — с целью проиллюстрировать неповторимость даже модельной ситуации. Кроме того, гипотеза о компенсации предполагает антисимметричность при оценке недополучения пропускной способности и получения лишней. В отсутствие антисимметричности соответствующие штрафы (например, за недопоставку) должны быть учтены в осредняемой целевой функции. Так, в (1.6) вместо z_i/d_i следует рассматривать более общую функцию $\varphi_i(z_i, d_i)$ (например, $\varphi_i(z_i, d_i) = z_i/d_i - \alpha(1 - z_i/d_i)^+$, где α — константа штрафа за недопоставку, верхний индекс "+" обозначает положительную срезку — максимум из 0 и выражения в скобках), или вместо $\min_i z_i/d_i$ максимизировать функцию $\Phi(z, d)$, учитывающую возможность суммирования штрафов (например, $\Phi(z, d) = \min_i z_i/d_i - \sum_i \alpha_i(1 - z_i/d_i)^+$). Далее, однако, ограничимся простейшей формулировкой (1.6), поскольку указанные обобщения могут быть исследованы аналогично.

К сожалению допустимость в среднем для МП-сети даже не позволяет гарантировать конечность очереди в тех сетях, где необеспеченные ли, если описать ситуацию как повторяющуюся и считать, что положительная часть разности $d - z$ как бы добавляется к следующей случайной реализации вектора $d(\cdot)$, то с вероятностью 1 когда-либо получим вектор требований, больший по норме любого наперед заданного числа. (Это следует из закона 0-1, см. к примеру в [13].) Таким образом, постановку задачи о допустимости в среднем рекомендуется рассматривать как предварительную, чтобы в случае не допустимости в среднем МП-сети принимать решение о ее модернизации или развитии, а в случае допустимости в среднем — проводить более тонкий анализ сетевой системы.

Другим подходом к исследованию средней допустимости МП-сети в нежесткой постановке является осреднение величины $\nu_0(d) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1/\theta_0(d)$ [1] коэффициента увеличения пропускной способности ребер сети, обеспечивающего ее допустимость. Обозначим

$$\nu_0^C \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_\Omega \nu_0(d(\omega))\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega), \tag{1.7}$$

и если значение $\nu_0^C \leq 1$, то МП-сеть будем называть *допустимой в среднем по пропускной способности*. Очевидно, отсюда не следует допустимость в среднем и наоборот (ибо суммирование и дробная черта не перестановочны). Содержательно, введенное понятие допустимости в среднем по пропускной способности соответствует нулевым средним затратам на обеспечение допустимости МП-сети при возможности аренды дополнительной и сдачи в аренду лишней пропускной способности для линейной функции стоимости аренды. Однако указанная модельная ситуация, по-видимому, далека от реальности. Кроме того, закон 0-1 для данного случая означает, что даже если МП-сеть и допустима в среднем по пропускной способности, при любом начальном капитале с вероятностью 1 наступит момент, когда не хватит денег на оплату дополнительной пропускной способности. Таким образом, и этот подход не свободен от недостатков предыдущего, в частности, малой информативности факта допустимости в среднем.

Полученное различие по трактовке и по результатам для разных характеристик средней допустимости только подтверждает несостоятельность идеи средней допустимости, тем не менее, в силу ее распространенности процедуре осреднения приходится уделять много внимания. Отметим, что вычисление интеграла (1.6) от функции максимума — нестандартная задача, и ее решение для непрерывных плотностей распределения представляет самостоятельную проблему. В частности, дачи о допустимости, причем, погрешность определения максимумов аккумулируется. Для поиска ν_0^C можно использовать кусочную линейность функции $\nu_0(\cdot)$ и строить процедуру ее интегрирования на базе утв.6 из [12], однако соответствующих численных алгоритмов авторам не известно. Один простой случай возникает здесь, если границы изменения с.в. $d(\cdot)$ настолько малы, что $\nu_0(\cdot)$ в них линейна. Тогда $\nu_0^C = \nu_0(\hat{d})$.

Поиск $\theta_0^{жC}$ в принципе можно осуществлять по методу проекций стохастических квазиградиентов [14], т.е. задавшись произвольным начальным приближением $z^1 > 0$, строить

$$z^{t+1} = \mathrm{Pr}_{Z(c)}\{z^t + \alpha_t \xi(z^t, \omega^t)\}, \quad \alpha_t \downarrow 0, \quad \sum \alpha_t = \infty,$$

где ω^t — t-я независимая реализация с.в. ω,

$$\xi_i(z^t, \omega^t) = 1/d_i(\omega^t) \quad \text{для} \quad i = \arg\min_i z_i/d_i(\omega^t),$$

а остальные компоненты нулевые, $t = 0, 1, \ldots,$
Pr обозначает оператор проектирования. Однако проектирование на многогранник достижимых мультипотоков представляет собой самостоятельную проблему, от решения которой существенно зависит успешность указанного метода.

Преобразование, аналогичное (0.1), для $\theta_0^{жC}$ приводит (согласно [15]) к выражению

$$\theta_0^{жC} = \max_{z \in Z(c)} \max_{\theta(\cdot) \in \mathbf{C}(\Omega)} \{\int_\Omega \theta(\omega) \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) |\ \theta(\omega) d_i(\omega) \le z_i \ \ \forall i \in M, \ \omega \in \Omega\}$$

и для конечных Ω — к задаче ЛП

$$\max_{z \in Z(c)} \max_{\{\theta_\omega\}_{\omega \in \Omega}} \{\sum_{\omega \in \Omega} \theta_\omega \mathbf{P}(\omega) |\ d_i(\omega)\theta_\omega \le z_i \ \ \forall i \in M, \ \omega \in \Omega\}.$$

1.2. Постановки, не предполагающие осреднение. Наиболее обоснованной содержательно и в определенном смысле противоположной к задаче о средней допустимости является задача о допустимости МП-сети с вероятностью 1, т.е. для почти всех возможных реализаций d с.в. $d(\cdot)$ (за исключением, быть может, $d(\omega)$ для $\omega \in \Omega'$, где $\mathbf{P}(\Omega') = 0$). Нетрудно видеть, что данная формулировка практически совпадает с гарантированной постановкой задачи о допустимости из [1] (при аккуратном выборе множества D возможных значений вектора требований — см. ниже в утверждении 1). Поэтому для ее исследования применимы методы, разработанные ранее.

ча анализа допустимости МП-сети для случайного вектора требований с вероятностью, не меньшей заданного значения p — *задача о допустимости с вероятностью* p или о p-*допустимости*. За счет произвола в выборе p эта формулировка менее обоснована, чем предыдущая, но представляется более реальной, чем задача о средней допустимости.

С учетом неполной содержательной обусловленности последней формулировки ее зачастую можно упростить, подменив задачей о гарантированной допустимости для подходящего множества D. Например, если все компоненты d_i реализуют независимые логарифмически нормально распределенные с.в. $d_i(\cdot)$, то с вероятностью p значения $d_i(\cdot)$ находятся в полуинтервале $(0, d_i^p]$, где

$$d_i^p \stackrel{\text{def}}{=} \min\{d_i |\ \mathbf{P}(d_i(\cdot) \le d_i) \ge p^{1/m}\}.$$

Поэтому p-допустимость МП-сети будет вытекать из ее гарантированной допустимости на параллелепипеде $[0, d_1^p] \otimes [0, d_2^p] \otimes \ldots \otimes [0, d_m^p]$ (хотя такая замена не является эквивалентной). В общем случае, когда постановщик задачи не знает как распределить вероятность $1 - p$ (недостижимости вектора требований) между различными пользователями, или в отсутствие независимости требований тяготеющих пар МП-сети, определим множество

$$\{d^\gamma |\ \gamma \in \Gamma(p)\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Arg\ Min}\{d |\ \mathbf{P}(d(\cdot) \le d) \ge p\},$$

где Min означает минимум в смысле отношения порядка "$\le$" среди векторов. Теперь, положив $D^\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{0 \le d \le d^\gamma\} \quad \forall \gamma \in \Gamma(p)$, придем к смешанной постановке обобщенной задачи о допустимости (см. [1, разд.1.4]), когда надо выяснить гарантированную допустимость МП-сети для всех d из хотя бы одного D^γ, $\gamma \in \Gamma(p)$. Поскольку вероятностная мера каждого D^γ не меньше p, то гарантированность обеспечения требований из какого-либо D^γ, $\gamma \in \Gamma(p)$, влечет за собой допустимость МП-сети с вероятностью p. Обратное, вообще говоря, не верно. Отметим, что на практике функция распределения известна неточно и предлагаемая замена вероятностной постановки детерминированной не сильно уменьшает адекватность модельного описания ситуации.

Нежесткая постановка задачи о p-допустимости сводится к проверке условия

$$\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega |\ d(\omega) \in Z(c)\}) \ge p, \quad \text{или} \quad \mathbf{P}(Z(c)) \ge p.$$

Из этой постановки естественно вытекают следующие оптимизационные задачи анализа МП-сети со случайными требованиями.

будем обозначать $p(1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}(Z(c))$ и называть *вероятностью допустимости*. Очевидно, если $p(1) \geq p$, то МП-сеть p-допустима, иначе — нет. Обобщая, можно определить $\forall\theta > 0$ вероятность $p(\theta)$ обеспечения θ-й части требований тяготеющих пар в МП-сети как

$$p(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{p|\ \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega|\ \theta d(\omega) \in Z(c)\}) \geq p\} = \mathbf{P}(Z(c)/\theta), \qquad (1.8)$$

или в терминах максиминной обеспеченности требований [16]

$$p(\theta) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega|\ \theta_0(d(\omega)) \geq \theta\}).$$

Можно поставить и обратную задачу — поиска такого максимального θ, что θ-я доля требований всех тяготеющих пар в МП-сети обеспечивается с вероятностью, не меньшей p. Это значение

$$\theta^*(p) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\theta|\ p(\theta) \geq p\} = \max\{\theta|\mathbf{P}(Z(c)/\theta) \geq p\} \qquad (1.9)$$

будем называть (по аналогии с θ_0) величиной максиминной обеспеченности с вероятностью p требований тяготеющих пар в сети или *величиной максиминной p-обеспеченности требований.*

Утверждение 1. *Величина максиминной обеспеченности требований с вероятностью 1*

$$\theta^*(1) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\theta|\ p(\theta) = 1\}$$

совпадает с $\theta_0^г$ на множестве D таком, что $\mathbf{P}(D) = 1$ и

$$\forall d \in \mathrm{Max}D,\ \forall\varepsilon > 0 \quad \mathbf{P}(D \setminus O_\varepsilon(d)) < 1.$$

Здесь и далее $O_\varepsilon(\cdot)$ обозначает ε-окрестность (в $\mathbf{R}^m$).

Доказательство. Легко видеть, что $\theta_0^г \leq \theta^*(1)$, ибо $\mathbf{P}(D) = 1$ и $\theta_0^г d$ достижим $\forall d \in D$. Для $\theta > \theta_0^г$ по определению $\theta_0^г$ найдется $d \in D$: $\theta_0(d) < \theta$, значит, $\exists d' \in \mathrm{Max}D$: $\theta_0(d') < \theta$, и с учетом непрерывности $\theta_0(\cdot)$, $\exists\varepsilon > 0$: $\forall d'' \in O_\varepsilon(d')\ \theta_0(d'') < \theta$. Отсюда, $\{d|\ \theta_0(d) \geq \theta\} \subseteq D\setminus O_\varepsilon(d')$, но $\mathbf{P}(D \setminus O_\varepsilon(d')) < 1$, т.е. $p(\theta) = \mathbf{P}(\{d|\ \theta_0(d) \geq \theta\}) < 1$ и $\theta > \theta^*(1)$.

Если в постановке задачи дано множество, на котором сосредоточена мера $\mathbf{P}(d(\cdot))$, то это множество и выбирается в качестве D. В общем случае поиск подходящего D является самостоятельной задачей. На практике, когда функция распределения с.в. $d(\cdot)$ не известна или известна неточно, для оценки ее параметров используются результаты наблюдений случайных реализаций d^β с.в. $d(\cdot)$. По этим реализациям можно определить и множество D как объединение всех $\{d^\beta\}$. Нетрудно убедиться, что так построенное множество будет обладать требуемым ния $\mathbf{P}_э(d(\cdot))$.

Аналогичный способ примени́м для практического оценивания величины максиминной p-обеспеченности требований. А именно, будем искать значение $\theta^*(p)$ как максимальное из $\theta_0^г$ на множествах $D(p) \subseteq \cup\{d^\beta\}$, для которых $\mathbf{P}_э(D(p)) \geq p$. Причем, учитывая, что $\theta_0^г$ на любом D совпадает с $\theta_0^г$ на множестве $\mathrm{Max}D$ — максимальных элементов D (см. в [17, 18] и [1]), можем рассматривать лишь $D(p)$, полученные из $\cup\{d^\beta\}$ путем отбрасывания недоминируемых d^β (до тех пор, пока эмпирическая мера множества оставшихся превышает p). При вычислении значений $\theta_0^г$ соответствующее множество $D(p)$ имеет смысл заменить выпуклой оболочкой множества $\cup\{0 \leq d \leq d^\beta | \; d^\beta \in D(p)\}$, чтобы уменьшить число угловых точек для перебора (см. [1, разд.1.3]). Тем не менее, общий перебор, включая различные $D(p)$, может оказаться довольно большим, что не позволяет говорить об эффективной замене задачи (1.9) с $p < 1$ гарантированной постановкой. По-видимому, поиск приближенного значения $\theta^*(p)$ проще осуществлять через решение последовательности задач (1.8), локализуя максимальное θ, для которого $p(\theta) \geq p$, с помощью процедур типа дихотомии (см., к примеру, в [19]).

Значение (1.8) можно приближенно определять по методу Монте-Карло как долю тех $\omega \in \Omega$, для которых $d(\omega) \in Z(c)/\theta$ (или как долю тех β, для которых $d^\beta \in Z(c)/\theta$). При этом, чтобы избежать многократной проверки достижимости $\theta d(\omega)$, следует вычислять $\nu_0(\theta d(\omega))$ не для всех $d(\omega)$, а только для недоминируемых выпуклой комбинацией тех d^β, для которых $\nu_0(\theta d^\beta) \leq 1$, и не доминирующих те, для которых $\nu_0(\theta d^\beta) > 1$ (доминирование понимается в смысле отношения “$\geq$” среди векторов). Кроме того, некоторые $\nu_0(\theta d^\beta)$ могут быть посчитаны аналитически на основании линейного продолжения (см. [20, 21], а также алгоритмы, приведенные в [12]). Отметим, что если для данной МП-сети уже построены множества эффективных мультипотоков $Z^Э(c)$ или $Z^C(c)$ (см. [12]), то решать задачу о допустимости для поиска $p(\theta)$ вообще не понадобится (надо лишь проверять доминирование для θd^β). Таким образом, и искать решение задачи (1.8) проще, чем (1.6), и смысла в полученном решении больше.

Задача о p-допустимости может быть рассмотрена и в жесткой постановке, не предполагающей апостериорного перераспределения потоков — после реализации $d(\omega)$. Тогда говорится либо о p-допустимости конкретного распределения потоков f или мультипотока z и определяется $\mathbf{P}(d \leq z)$ (например, по методу Монте-Карло), либо о жесткой

$$p^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{z \in Z(c)} \mathbf{P}(d \leq z).$$

Если $p^* \geq p$, то МП-сеть *жестко p-допустима*, и следовательно, p-допустима (обратное не верно), причем, любой мультипоток z^*, реализующий указанный максимум, будет p-допустим. Очевидно, $z^* \in \mathrm{Max}Z(c)$.

К сожалению, авторы не могут предложить общих методов поиска p^*, z^*. Укажем лишь, что в случае равномерного распределения $d(\cdot)$ на симметричном D, в качестве z^* выбирается вектор из $\mathrm{Max}Z(c)$, все компоненты которого равны, если такой существует. В общем случае, для жесткой постановки, задача о средней допустимости будет существенно проще задачи о p-допустимости. Поэтому мы не будем развивать последнюю постановку далее и рассматривать величины

$$p^*(\theta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{z \in Z(c)} \mathbf{P}(\theta d \leq z) \quad \text{и} \quad \theta^{*ж}(p) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{\theta | \max_{z \in Z(c)} \mathbf{P}(\theta d \leq z) \geq p\}$$

с той же подробностью, что и $p(\theta)$, $\theta^*(p)$. (При известном D очевидно $\theta^{*ж}(1) = \theta_0^{ж} = \theta_0(d^{max})$, где $d_i^{max} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{d \in D} d_i$, — см. [1]. Но для $p < 1$ задача принципиально усложняется.)

2. Задачи с неполной информированностью о функции распределения. Существенным моментом при исследовании задач со случайными факторами является информированность о функциях распределения (ф.р.) имеющихся с.в. В частности, если о ф.р. с.в. $d(\cdot)$ ничего не известно, кроме множества D, которому с вероятностью 1 принадлежат случайные реализации $d(\omega)$, то точная нижняя оценка математического ожидания любой непрерывной случайной функции с.в. $d(\cdot)$ совпадает с минимальным значением этой функции на D [2]. Таким образом,

$$\inf_{\mathbf{P}} \theta_0^C = \inf_{\mathbf{P}:\ \mathbf{P}(D)=1} \int_\Omega \theta_0(d(\omega))\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) = \min_{d \in D} \theta_0(d) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \theta_0^{г},$$

т.е. постановка (1.6) превращается в гарантированную (см. [1]). Для поиска верхней оценки среднего значения максиминной обеспеченности требований получим слабую постановку, изученную в [1]. Следовательно, в случае неизвестной ф.р. для θ_0^C можно указать лишь те же границы, что и для θ_0 (см. формулу (1.19) в [1]). При этом $\theta_0^{г}$ является точной гарантированной оценкой значения θ_0^C.

Из результатов предыдущего пункта очевидно, что (при известном D) $\theta_0^{г} = \theta^*(1) \leq \theta^*(p)$. В отсутствие другой информации о ф.р. указанная нижняя оценка значения $\theta^*(p)$ становится неулучшаемой. Верхняя величиной θ_0^c слабой максиминной обеспеченности требований. Тем самым, в рассмотренных предположениях информированности (неинформированности) о ф.р. постановки (1.6) и (1.9) не различаются и эквиваленты (1.5) при информированности $d \in D$.

2.1. Гермейеровская информированность о функции распределения. Исследуем теперь ситуацию [2], когда относительно ф.р. с.в. $d(\cdot)$ известны лишь двусторонние ограничения-неравенства на некоторые моменты (например, на математическое ожидание и дисперсию) компонент вектора d и компакт D. (При этом не предполагается, что компоненты вектора d взаимно независимы, но считается, что нет информированности о коэффициентах корреляции. Общий случай рассматривается аналогично — см. [2].) Получим для $\mathbf{P}(\cdot)$ условие $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}(a)$, где $a = (a_1, a_1', \dots, a_q, a_q')$, $\mathcal{A}(a) \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{P}(\cdot) |\ \mathbf{P}(D) = 1,$

$$a_{1i} \le \int_\Omega d_i(\omega)\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) \le a_{1i}', \dots, a_{qi} \le \int_\Omega [d_i(\omega) - \hat{d}_i]^q \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) \le a_{qi}' \ \ \forall i \in M\}.$$

Тогда можно определить гарантированные оценки интегралов в (1.6)–(1.9) как инфимумы их значений по всем $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}(a)$.

Процедура вычисления такой оценки для θ_0^C основывается на следующем результате (использующем линейность по $\mathbf{P}(\cdot)$ целевого функционала и ограничений, см. в [2, 14]).

Утверждение 2. *Для любой непрерывной функции минимум по всевозможным $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}(a)$ ее математического ожидания достигается, причем, в качестве реализации минимума может быть выбрана мера, сосредоточенная в конечном числе точек $\le qm + 1$.*

Таким образом, исходная задача оптимизации в функциональном пространстве сведена к конечномерной. Например, пусть известно математическое ожидание $\hat{d}$ с.в. $d(\cdot)$ и что по каждой координате с.в. $d_i(\cdot)$ распределена симметрично относительно $\hat{d}_i$, а ее дисперсия ограничена величиной σ_i^2. Обозначим этот вариант информированности как $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}_c(\hat{d}, \hat{d}, \bar{0}, \sigma^2)$. Здесь и далее обозначение $\bar{0}$ соответствует нулевому вектору, σ^2 — вектору с компонентами σ_i^2, а σ — вектору с компонентами $\sigma_i \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\sigma_i^2}$ (среднеквадратичному отклонению). Тогда точная гарантированная оценка $\theta_0^{C\Gamma}$ среднего значения θ_0^C максиминной обеспеченности требований дается формулой

$$\theta_0^{C\Gamma} \overset{\text{def}}{=} \min_{\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}_c(\hat{d}, \hat{d}, \bar{0}, \sigma^2)} \int_\Omega \theta_0(d(\omega))\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) =$$

$$= \min_{\{\Delta^j, p_j\}_{j=1}^m} \{\theta_0(\hat{d})(1 - \sum_{j=1}^m p_j) + \sum_{j=1}^m (\theta_0(\hat{d} + \Delta^j) + \theta_0(\hat{d} - \Delta^j))p_j/2 \ |$$

$$\sum_{j=1} p_j \le 1, \quad p_j \ge 0, \quad |\Delta_i^j| \le d_i, \quad (\Delta_i^j)^2 p_j \le \sigma_i \quad \forall i, j = 1, \ldots, m\}.$$

Отсюда видно, что для тех сетей, для которых $\theta_0(\cdot)$ выпукла по d, в частности, для однопродуктовика, $\theta_0^{C\Gamma} = \theta_0(\hat{d})$. К такому равенству приходим и для ряда вариантов более узкой информированности, например, когда точно известен вектор $\hat{d}$, задающий пропорции требований тяготеющих пар в сети, но не известен (является случайным) коэффициент его увеличения или уменьшения. Тогда при заданном ограничении на дисперсию и симметричности распределения получаем упрощенную форму задачи поиска $\theta_0^{C\Gamma}$, которая уже допускает явное решение за счет выпуклости по t:

$$\theta_0^{C\Gamma} = \min_{0 \le p, t \le 1} \{\theta_0(\hat{d})(1-p) + [\theta_0((1+t)\hat{d}) + \theta_0((1-t)\hat{d})]p/2 | \ t^2 p \le \sigma^2(t)\} =$$

(по свойству однородности степени -1 для функции $\theta_0(\cdot)$)

$$= \min_{0 \le p, t \le 1} \{\theta_0(\hat{d})(1 - p + \frac{p}{1-t^2}) | \ t^2 p \le \sigma^2(t)\} = \theta_0(\hat{d}).$$

Однако, в общем случае (типичные примеры здесь возникают для D — симплекса) максиминная обеспеченность требований $\theta_0(d)$, как функция многих переменных, не будет ни выпуклой ни вогнутой (хотя минимум $\theta_0(\cdot)$ по d на любом выпуклом множестве достигается в угловых точках [1]). Поэтому поиск значения $\theta_0^{C\Gamma}$ является непростой вычислительной задачей (но более простой, чем поиск значения (1.6) для непрерывной плотности распределения, например, если известно, что $d(\cdot)$ логарифмически нормальна).

С точки зрения практического счета для получения гарантированной оценки средней допустимости МП-сети в нежесткой постановке имеет смысл (с учетом утв. 6 из [12]) использовать величину $\nu_0(d) \stackrel{\text{def}}{=} 1/\theta_0(d)$ и понятие допустимости в среднем по пропускной способности (1.7). Как следствие выпуклости $\nu_0(\cdot)$ по d имеем

$$\nu_0^C \ge \min_{\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}_c(\hat{d}, \hat{d}, \bar{0}, \sigma^2)} \int_\Omega \nu_0(d(\omega))\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) = \nu(\hat{d}) \quad \text{и}$$

$$\nu_0^C \le \nu_0^{C\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}_c(\hat{d}, \hat{d}, \bar{0}, \sigma^2)} \int_\Omega \nu_0(d(\omega))\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) =$$

$$(\text{в предположении } \ \hat{\mathrm{d}} - \sigma = 0) \quad = \max_{\{\Delta | \ \Delta_i = \pm\sigma_i \ \forall i\}} \{\nu(\hat{d} - \Delta) + \nu(\hat{d} + \Delta)\}/2.$$

Еще раз подчеркнем, что знание $\nu_0^{C\Gamma}$ не дает возможности оценить $\theta_0^{C\Gamma}$.

лучим, что

$$\min_{\mathbf{P}(\cdot)\in\mathcal{A}_c(\hat{d},\hat{d},\bar{0},\sigma^2)} \theta_0^{жC'} = \min_{\mathbf{P}(\cdot)\in\mathcal{A}_c(\hat{d},\hat{d},\bar{0},\sigma^2)} \theta_0(d') = \theta_0(\hat{d}),$$

поскольку $\theta_0(\cdot)$ не возрастает по d, а $\hat{d}_i \geq d'_i$, ибо $1/\hat{d}_i \leq 1/d'_i$ за счет выпуклости положительной ветви гиперболы. К сожалению, подынтегральная функция в определении $\theta_0^{жC}$ (1.2) при $m > 1$ не является выпуклой по d, поэтому для поиска гарантированной оценки $\theta_0^{жC}$, т.е. интеграла в (1.2), можем пользоваться лишь формулой типа формулы для $\theta_0^{C\Gamma}$ с заменой $\theta_0(d)$ на $\min_i z_i/d_i$.

Для гарантированного оценивания $p(1)$ (вероятности допустимости МП-сети) или, в общем случае, $p(\theta)$ (1.8) получаем при наличии информации типа $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}(a)$ задачу поиска

$$p^{\Gamma}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{P}(\cdot)\in\mathcal{A}(a)} \int_{\Omega} \chi_{Z(c)}(\theta d(\omega))\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega), \tag{2.1}$$

где $\chi_B(\cdot)$ — индикаторная функция множества B. Поскольку подынтегральная функция не является непрерывной, мы не можем напрямую воспользоваться утверждением 2. Сглаживание индикаторной функции, вообще говоря, не приводит к приближенному решению (2.1). Действительно, если, к примеру, $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}_c(\hat{d},\hat{d},\bar{0},\sigma^2)$, $m = 1$, $Z(c) = [0,\hat{d}]$, то $p^{\Gamma}(1) = 1/2$, но выбирая сглаживающую функцию меньшей $\chi_{Z(c)}(\cdot)$, получим для нее минимум интеграла, равный 0. Если же $Z(c) = [0, z^{max}]$, $z^{max} > \hat{d} + \sigma$, то при сглаживании индикаторной функции "извне" (до $z^{max} + \varepsilon$) минимум интеграла достигается на плотности распределения с.в. $d(\cdot)$ (п.р.), сосредоточенной в точках $z^{max} + \varepsilon$, $\hat{d}$ и $2\hat{d} - z^{max} - \varepsilon$, и близок к $p^{\Gamma}(1) = 1 - \sigma^2/(2(z^{max} - \hat{d})^2)$, однако это не совпадает с равным 1 значением $p(1)$, вычисленным для предельной п.р. (при $\varepsilon \to +0$). Тем не менее, данный пример позволяет подметить следующее [16].

В общей задаче (2.1) оценка $p^{\Gamma}(\theta)$ равна пределу при $\varepsilon \to +0$ оценок

$$p^{\Gamma}_{\varepsilon}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\mathbf{P}(\cdot)\in\mathcal{A}(a)} \int_{\Omega} \chi^{+\varepsilon}_{Z(c)}(\theta d(\omega))\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega),$$

где функция $\chi^{+\varepsilon}$ является непрерывной, $\chi^{+\varepsilon} = \chi$ на $Z(c)$, $\chi^{+\varepsilon} = 0$ вне $O_{\varepsilon}(Z(c))$ и $\chi^{+\varepsilon} \geq \chi$ на $O_{\varepsilon}(Z(c))$, причем $\chi^{+\varepsilon} \geq \chi^{+\varepsilon'}$ $\forall \varepsilon > \varepsilon'$.

Для вычисления $p^{\Gamma}_{\varepsilon}(\theta)$ уже применимо утверждение 2.

Воспользуемся полученным результатом для случая информированности $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}_c(\hat{d},\hat{d},\bar{0},\sigma^2)$. Предположим, что $D = \otimes_i[0, 2\hat{d}_i]$ (решение возможной ненулевую вероятность $\mathbf{P}(\bar{0})$, а $\theta_0(\bar{0}) \stackrel{\text{def}}{=} 1$. Найдем $p^{\Gamma}(\theta)$.

Если $\theta\hat{d} \notin Z(c)$, то $p^{\Gamma}(\theta) = 0$, ибо плотность распределения, сосредоточенная в $\hat{d}$, соответствует ограничениям на $\mathbf{P}$. Если $\theta\hat{d} \in Z(c)$, но найдется вектор Δ (с компонентами Δ_i разных знаков), для которого $\Delta_i^2 \leq \sigma_i^2 \ \ \forall i \in M$ и $(\hat{d}+\Delta)\theta \notin Z(c)$, $(\hat{d}-\Delta)\theta \notin Z(c)$, тогда п.р., сосредоточенная в $\hat{d}\pm\Delta$, также дает $p^{\Gamma}(\theta) = 0$. Если же либо $(\hat{d}+\Delta)\theta$, либо $(\hat{d}-\Delta)\theta$ достижим $\forall\Delta$, $\Delta^2 \leq 2\sigma^2$, а $(\hat{d}+\sigma)\theta \notin Z(c)$, то $p^{\Gamma}(\theta) = 1/2$ и достигается на п.р., сосредоточенной (с равными вероятностями) в точках $\hat{d}+\sigma$ и $\hat{d}-\sigma$. Если $\theta D \subseteq Z(c)$, то, очевидно, $p^{\Gamma}(\theta) = 1$.

В остальных ситуациях приходится рассматривать п.р., сосредоточенные в трех точках:

$$\text{в } \ \hat{d}\pm\Delta \ \text{ с вероятностями } \ \frac{1}{2}p[\Delta] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\min_{i\in M}\sigma_i^2/\Delta_i^2 \ \text{ и в } \ \hat{d} \ \text{ с } \ 1-p[\Delta].$$

При этом, если $\exists\Delta$: $\Delta^2 \leq 2\sigma^2$, $(\hat{d}+\Delta)\theta \notin Z(c)$ и $(\hat{d}-\Delta)\theta \notin Z(c)$, то, выбирая такие Δ, получим достижимость лишь средней точки, и

$$p^{\Gamma}(\theta) = \inf_{\Delta:\ \Delta^2>\sigma^2}\{1-p[\Delta]|\ \hat{d}\pm\Delta \in D\setminus(Z(c)/\theta)\} =$$

$$= 1 - \sup_{\Delta:\ \sigma^2<\Delta^2\leq 2\sigma^2}\{\min_i \sigma_i^2/\Delta_i^2|\ \hat{d}\pm\Delta \in D\setminus(Z(c)/\theta)\} =$$

$$= 1 - \max_{\Delta:\ \Delta^2<2\sigma^2}\{\min_i \sigma_i^2/\Delta_i^2|\ \hat{d}+\Delta \in \mathrm{int}D\cap(\mathrm{Max}Z(c)/\theta),$$

$$\hat{d}-\Delta \in \mathrm{int}D\setminus(\mathrm{int}Z(c)/\theta)\} < 1/2,$$

где Max понимается в смысле отношения “$<$” среди векторов (т.е. по Слейтеру), а int обозначает внутренность в $\mathbf{R}^m$. В противном случае выбирается либо Δ: $\Delta^2 > 2\sigma^2$, так, чтобы $(\hat{d}\pm\Delta)\theta$ были недостижимыми, либо $\Delta' \geq \bar{0}$ так, чтобы $(\hat{d}+\Delta')\theta \notin Z(c)$ и достижимыми были две точки из трех, в которых сосредоточена п.р. (их мера равна $1-p[\Delta']/2$), тогда

$$p^{\Gamma}(\theta) = \min\Big[\inf_{\Delta'\geq\sigma}\{1-p[\Delta']/2|\ \hat{d}+\Delta' \in D\setminus(Z(c)/\theta)\},$$

$$\inf_{\Delta:\ 2\sigma^2\leq\Delta^2\leq\hat{d}^2}\{1-p[\Delta]|\ \hat{d}\pm\Delta \in D\setminus(Z(c)/\theta)\}\Big] =$$

$$= 1 - \max\Big[\frac{1}{2}\max_{\Delta'\geq\sigma}\{\min_i \sigma_i^2/\Delta_i'^2|\ \hat{d}+\Delta' \in \mathrm{int}D\cap(\mathrm{Max}Z(c)/\theta)\},$$

$$\max_{\Delta:\ 2\sigma^2\leq\Delta^2<\hat{d}^2}\{\min_i \sigma_i^2/\Delta_i^2|\ \hat{d}+\Delta \in \mathrm{int}D\cap(\mathrm{Max}Z(c)/\theta),$$

$$\hat{d} - \Delta \in \mathrm{int}D \setminus (\mathrm{int}Z(c)/\theta)\}\Big] =$$

$$= 1 - \max\Big[\frac{1}{2}\max_{t' \geq 1}\{1/(t')^2 |\ \hat{d} + t'\sigma \in \mathrm{int}D \cap (\mathrm{Max}Z(c)/\theta)\},\ \max_{t \geq \sqrt{2},\ \Delta:\ \Delta^2 = \sigma^2}\{1/t^2\ |$$

$$\hat{d} + t\Delta \in \mathrm{int}D \cap (\mathrm{Max}Z(c)/\theta),\ \hat{d} - t\Delta \in \mathrm{int}D \setminus (\mathrm{int}Z(c)/\theta)\}\Big] \geq 1/2.$$

Во всех случаях инфимум не достигается (получается как предел при $\hat{d} \pm \Delta \to Z(c)/\theta$ или $\hat{d} + \Delta' \to Z(c)/\theta$ значений $p(\theta)$ для указанных п.р.), ибо множество $Z(c)$ замкнуто, а минимизирующая последовательность точек стремится к нему извне. В терминах функции $\theta_0(\cdot)$ последние формулы перепишутся как

$$p^{\Gamma}(\theta) = 1 - \max\Big[\frac{1}{2}\max_{t' \geq 1}\{1/(t')^2 |\ \hat{d} + t'\sigma \in \mathrm{int}D,\ \ \theta_0(\hat{d} + t'\sigma) = \theta\},$$

$$\max_{t \geq 1,\ \Delta:\ \Delta^2 = \sigma^2}\{1/t^2\ |\ \hat{d} \pm t\Delta \in \mathrm{int}D,\ \ \theta_0(\hat{d} + t'\Delta) = \theta \geq \theta_0(\hat{d} - t'\Delta)\}\Big].$$

Аналогичная задача гарантированного оценивания $p^*(\theta)$ (для жесткой постановки) формулируется следующим образом:

$$p^{*\Gamma}(\theta) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{z \in Z(c)} \inf_{\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}(a)} \mathbf{P}(\theta d \leq z).$$

Внутренний инфимум здесь может быть представлен как (2.1) с заменой $Z(c)$ на $Le(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \{z' \geq \bar{0} |\ z' \leq z\}$ и для его вычисления справедливо такое же предельное представление. Заметим теперь, что индикатор в (2.1) записывается в виде

$$\chi_{Z(c)}(\theta d(\omega)) = \max_{z \in Z(c)} \chi_{Le(z)}(\theta d(\omega)).$$

В результате получаем оценку

$$p^{*\Gamma}(\theta) = \sup_{z \in Z(c)} \inf_{\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}(a)} \int_{\Omega} \chi_{Le(z)}(\theta d(\omega))\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) \leq$$

$$\leq \inf_{\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}(a)} \int_{\Omega} \max_{z \in Z(c)} \chi_{Le(z)}(\theta d(\omega))\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) = p^{\Gamma}(\theta).$$

При информированности $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}_c(\hat{d}, \hat{d}, \bar{0}, \sigma^2)$ приходим к следующему [16].

Если $\theta\hat{d} \notin Z(c)$, то из полученного неравенства $p^{*\Gamma}(\theta) = 0$, и также, если $\exists\Delta$: $\Delta^2 \leq \sigma^2$, $(\hat{d} \pm \Delta)\theta \notin Z(c)$. В остальных случаях для обеспечения $p^{*\Gamma}(\theta) > 0$ надо так выбрать $z^* \in Z(c)$, чтобы и $\hat{d}\theta \leq z^*$, и $\forall\Delta$, $\Delta^2 \leq \sigma^2$, выполнялось либо $(\hat{d} + \Delta)\theta \leq z^*$, либо $(\hat{d} - \Delta)\theta \leq z^*$, что не

$d^i(t)$ вектор с компонентами $d^i_i(t) = \hat{d}_i$, $d^i_j(t) = \hat{d}_j + t\sigma_j \ \forall j \neq i$, и пусть

$$\hat{\theta}_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i \in M} \theta_0(d^i(t)),$$

тогда $p^{*\Gamma}(\theta) = 0 \ \forall \theta > \hat{\theta}_0(1)$. Для $\theta \leq \hat{\theta}_0(1)$ найдем $t^0 = \max\{t| \ \theta \leq \hat{\theta}_0(t)\}$ и выберем z^*, реализующий $\hat{\theta}_0(t^0)$, т.е. $z^* \geq \hat{d}\theta$ и $\forall \Delta$, $\Delta^2 \leq (t^0)^2 \sigma^2$, следует либо $(\hat{d} + \Delta)\theta \leq z^*$, либо $(\hat{d} - \Delta)\theta \leq z^*$. Отсюда

$$p^{*\Gamma}(\theta) = \min\Big[\inf_{\bar{0} \leq \Delta' \leq t^0\sigma} \{1 - p[\Delta']/2| \ \hat{d} + \Delta' \in D \setminus (Le(z^*)/\theta)\},$$

$$\inf_{\Delta:\ t^0\sigma_i \leq |\Delta_i| \ \forall i \in M} \{1 - p[\Delta] \ | \ \hat{d} \pm \Delta \in D \setminus (Le(z^*)/\theta)\}\Big] =$$

$$= 1 - \max\Big[\frac{1}{2} \max_{t' \in [1, t^0]} \{1/(t')^2| \ \hat{d} + t'\sigma \in \mathrm{int} D \cap (\mathrm{Max} Le(z^*)/\theta)\},$$

$$\max_{t \geq t^0,\ \Delta:\ \Delta^2 = \sigma^2} \{1/t^2| \ \hat{d} + t\Delta \in \mathrm{int} D \cap (\mathrm{Max} Le(z^*)/\theta),\ \hat{d} - t\Delta \in \mathrm{int} D \setminus (\mathrm{int} Le(z^*)/\theta)\}\Big].$$

Гарантированная оценка величины $\theta^*(p)$ максиминной p-обеспеченности требований

$$\theta^{*\Gamma}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}(a)} \ \max_{\mathbf{P}(Z(c)/\theta) \geq p} \theta \tag{2.2}$$

может быть приближенно найдена с помощью процедуры дихотомии по θ (в результате решения логарифмического числа задач (2.1) — поиска $p^\Gamma(\theta)$). Для $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}_c(\hat{d}, \hat{d}, \bar{0}, \sigma^2)$ ее в ряде случаев удается построить в явном виде [16].

Предположим $D = \otimes[0, 2\hat{d}_i]$, $\sigma_i < \hat{d}_i \ \ \forall i \in M$. Если $p > 1 - p[\hat{d}]/2$, то $\theta^{*\Gamma}(p) \equiv \theta_0(2\hat{d}) = \theta_0(d^{max}) = \theta_0^{г} = \theta^{*\Gamma}(1)$ и достигается на п.р., сосредоточенной в точках 0, $2\hat{d} = d^{max}$ с вероятностями $p[\hat{d}]/2$ и в $\hat{d}$ с вероятностью $1 - p[\hat{d}]$. Иначе, пусть $p = 1 - p[\Delta]/2$, где $\sigma \leq \Delta \leq \hat{d}$.

Если $\Delta > \hat{d}/\sqrt{2}$, тогда $\theta^{*\Gamma}(p) = \theta_0(\hat{d} + \Delta)$ и инфимум в (2.2) не достигается. Минимизирующей будет последовательность (при $\delta \to +0$) мер $\mathbf{P}_\delta(\cdot)$, сосредоточенных в точках $\hat{d} + \Delta(\delta)$, $\hat{d} - \Delta(\delta)$ с вероятностями $(p[\Delta] + \delta)/2$ и в $\hat{d}$ с вероятностью $1 - (p[\Delta] + \delta)$, где $\Delta_i(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_i/\sqrt{p[\Delta] + \delta}$. Получаем, что при $\delta \neq 0$ для $\mathbf{P}_\delta(Z(c)/\theta) \geq p$ необходимо $\theta(\hat{d} + \Delta(\delta)) \in Z(c)$, т.е. $\theta \leq \theta_0(\hat{d} + \Delta(\delta))$. Последняя величина дает для $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\delta$ значение внутреннего максимума в (2.2), которое и стремится при $\delta \to +0$ к инфимуму, определяющему $\theta^{*\Gamma}(p)$.

$$\theta^{*\Gamma}(p) = \min\Big[\ \theta_0(\hat{d}+\Delta),\ \min_{\Delta':\ \Delta'^2=2\Delta^2} \max[\theta_0(\hat{d}+\Delta'), \theta_0(\hat{d}-\Delta')]\Big],$$

причем, инфимум также не достигается (по сходным соображениям).

В остальных случаях ($p = 1-p[\sqrt{2}\Delta],\ \sigma^2/2 < \Delta^2 < \sigma^2$) аналогичным образом получаем, что

$$\theta^{*\Gamma}(p) = \min\Big[\ \theta_0(\hat{d}),\ \min_{\Delta':\ \Delta'^2=2\Delta^2} \max[\theta_0(\hat{d}+\Delta'), \theta_0(\hat{d}-\Delta')]\Big],$$

где в первой ситуации минимизирующая п.р. сосредоточена в точке $\hat{d}$, а в последней — инфимум не достигается, как и в предыдущих случаях.

Пусть теперь D является симплексом, $D \subset \mathbf{R}^{m-1}$. Тогда можно выразить одну координату через остальные, получим

$$D = \{d \geq \bar{0} |\ \mathrm{d}_m = d_0 - \sum_{i=1}^{m-1} d_i,\quad \sum_{i=1}^{m-1} d_i \leq d_0\}.$$

При этом ограничения на первые $m-1$ компонент остались связанными, однако конкретный вид зависимости компонент по-прежнему считается не известным. В таком случае мы можем рассматривать информированность типа $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}_c(\hat{\hat{d}}, \hat{d}, \bar{0}, \sigma^2)$, но уже для меньшего числа $(m-1)$ компонент вектора d. Проиллюстрируем это на примере $m = 2$. Допустим, $d_0 = 1$, $d(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega, 1-\omega)$, где относительно ф.р. с.в. $\omega = d_1(\cdot)$ имеется информированность $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}_c(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \sigma^2)$ с $\sigma < 1/2$, т.е. $\hat{d}_1 = \hat{\omega} = 1/2$, $\hat{d} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Выпишем решения задач (2.1),(2.2) для данного примера. Они строятся также, как и для предыдущего, с учетом ограничений $d_1 \in [0,1]$. А именно, сначала определяем $p^\Gamma(\theta)$ через предел вероятностей $p^\Gamma_\varepsilon(\theta)$ согласно полученному обобщению утверждения 2 (каждая $p^\Gamma_\varepsilon(\theta)$ вычисляется на основании утверждения 2), а затем по функции $p^\Gamma(\cdot)$ находим $\theta^{*\Gamma}(p)$ как обратную функцию.

Независимо от целевого функционала будем использовать обозначение $\mathbf{P}_0$ для любой меры, реализующей минимум по $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}_c(\hat{d}, \hat{d}, \bar{0}, \sigma^2)$, и $\mathbf{P}_\delta$ — для элемента минимизирующей (при $\delta \to +0$) последовательности мер, если инфимум по $\mathbf{P}(\cdot)$ не достигается. Обозначим также $\forall\ \Delta, \Delta' \in [0, 1/2]$:

$$[\Delta]_2 \stackrel{\text{def}}{=} \min[\sqrt{2}\Delta, 1/2],$$

$$\theta(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \min[\theta_0(\hat{d}), \max[\theta_0(d(\tfrac{1}{2}-\Delta)), \theta_0(d(\tfrac{1}{2}+\Delta))]] =$$

$$= \min_{0\leq\Delta'\leq\Delta} \max[\theta_0(d(\frac{1}{2}-\Delta')), \theta_0(d(\frac{1}{2}+\Delta'))], \quad \theta(\Delta, \Delta') \stackrel{\text{def}}{=}$$

В сделанных обозначениях $p^{\Gamma}(\theta) =$

$0 \quad \forall\theta > \theta(\sigma)$, $\mathbf{P}_0$ сосредоточена либо в $\hat\omega$, либо в $\hat\omega - \sigma$ и $\hat\omega + \sigma$;

$1 - \sigma^2/\Delta^2(\theta) \;\; \forall\theta \in \{\theta(\Delta) |\, \sigma < \Delta < [\sigma]_2\}$, где $\Delta(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\Delta |\, \theta(\Delta) = \theta\}$, $\mathbf{P}_\delta$ сосредоточена в $\hat\omega \pm (\Delta(\theta) + \delta)$ и $\hat\omega$;

$1/2 \quad \forall\theta\colon\; \theta(\Delta^0) \geq \theta > \theta(\sigma, \frac{1}{2})$, $\mathbf{P}_0$ сосредоточена в $\hat\omega \pm \sigma$;

$1 - \frac{1}{2}\sigma^2/(\Delta'(\theta))^2 \;\; \forall\theta = \theta'(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \max[\theta(\Delta, \frac{1}{2}), \theta([\Delta]_2, [\Delta]_2)]$, $\sigma < \Delta < 1/2$, где $\Delta'(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\Delta |\, \theta'(\Delta) = \theta\}$, $\mathbf{P}_\delta$ сосредоточена либо в $\hat\omega \pm (\Delta + \delta)$ и $\hat\omega$, либо в $\hat\omega \pm (\sqrt{2}\Delta + \delta)$ и $\hat\omega$;

$1 \quad \forall\theta \leq \theta_0^{\text{г}}$.

Отсюда получаем, что значением $\theta^{*\Gamma}(p)$ (и его реализацией) будет

$\theta_0^{\text{г}} \quad \forall p\colon\; 1 \geq p \geq 1 - 2\sigma^2$, $\mathbf{P}_0(0) = \mathbf{P}_0(1) = 2\sigma^2$ и $\mathbf{P}_0(\hat\omega) = 1 - 4\sigma^2$ при $p > 1 - 2\sigma^2$, а для $p = 1 - 2\sigma^2$: $\mathbf{P}_\delta(\frac{\delta}{2}) = \mathbf{P}_\delta(1 - \frac{\delta}{2}) = 2\sigma^2/(1-\delta)^2$, $\mathbf{P}_\delta(\hat\omega) = 1 - 4\sigma^2/(1-\delta)^2$;

$\theta(\Delta, [\Delta]_2) = \min[\theta(\Delta, \Delta), \theta([\Delta]_2)]$ для $p = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2/\Delta^2$, $\forall\Delta\colon\; \sigma < \Delta < \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}_\delta(\hat\omega) = 1 - \sigma^2/(\Delta(1-\delta))^2$ и $\mathbf{P}_\delta(\hat\omega \pm \Delta(1-\delta)) = \frac{1}{2}\sigma^2/(\Delta(1-\delta))^2$ — в случае $\theta(\Delta, [\Delta]_2) = \theta(\Delta, \Delta)$, $\mathbf{P}_\delta(\hat\omega) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2/(\Delta(1-\delta))^2$ и $\mathbf{P}_\delta(\hat\omega \pm [\Delta]_2(1-\delta)) = \frac{1}{4}\sigma^2/(\Delta(1-\delta))^2$ — в случае $\theta(\Delta, [\Delta]_2) = \theta([\Delta]_2)$ и $\Delta < 1/(2\sqrt{2})$;

$\theta(\Delta)$ для $p = 1 - \sigma^2/\Delta^2$, $\forall\Delta\colon\; \sigma < \Delta \leq \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}_0(\hat\omega) = 1$ при $\theta(\Delta) = \theta_0(\hat d)$, $\mathbf{P}_\delta(\hat\omega) = 1 - \sigma^2/(\Delta(1-\delta))^2$ и $\mathbf{P}_\delta(\hat\omega \pm \Delta(1-\delta)) = \frac{1}{2}\sigma^2/(\Delta(1-\delta))^2$ в противном случае.

Сходным образом может быть выписано решение задачи (2.2) для произвольного $m > 2$, однако это потребует перебора большего (экспоненциального по m) числа вариантов. Жесткая постановка исследуется аналогично и мы на ней останавливаться не будем. Для общего случая $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}(a)$, когда известны ограничения и на другие моменты, получить явное решение, как правило, не удается, а поиск приближенного решения, несмотря на наличие утверждения 2, остается непростой задачей. В такой ситуации, если оценка, определенная по небольшой информации, требует уточнения, то, по-видимому, проще уточнить ф.р. с.в. $d(\cdot)$, например, эмпирическую путем проведения большего числа случайных испытаний — наблюдений случайных реализаций $d(\omega)$ с.в. $d(\cdot)$, а затем применять результаты разд.1.2.

2.2. Неточная информированность о параметрах функции распределения. Менее реальной представляется ситуация информированности, при которой известен вид ф.р. с.в. $d(\cdot)$, но не известны некоторые ее параметры (например, с.в. считается логарифмически персией). Тем не менее, указанный тип информированности нередко предполагается в традиционных исследованиях задач со случайными факторами. Нетрудно видеть (см. также в [2]), что тогда для поиска $\theta_0^{C\Gamma}$ получаем задачу конечномерной минимизации интегральной целевой функции:

$$\theta_0^{C\Gamma} = \inf_{\alpha} \int_{\Omega} \theta_0(d(\omega))\mathbf{P}^{\alpha}(\mathrm{d}\omega),$$

где α меняется на множестве возможных значений вектора неизвестных параметров меры $\mathbf{P}^{\alpha}(\cdot)$. Оценка для (1.8) может быть аналогично записана с помощью интегрального представления

$$p^{\Gamma}(\theta) = \inf_{\alpha} \int_{\Omega} \chi_{Z(c)}(\theta d(\omega))\mathbf{P}^{\alpha}(\mathrm{d}\omega)$$

или как $p^{\Gamma}(\theta) = \inf_{\alpha} \mathbf{P}^{\alpha}(Z(c)/\theta)$. Для (1.9) приходим к минимаксной задаче

$$\theta^{*\Gamma}(p) = \inf_{\alpha \in A} \max_{\mathbf{P}^{\alpha}(Z(c)/\theta) \geq p} \theta.$$

К сожалению, общих методов решения полученных задач нет, поэтому надо использовать специфические особенности заданного вида ф.р. Если доступно дифференцирование по параметру α, то можно попытаться применять градиентные или субградиентные процедуры минимизации, однако придется на каждом шаге метода решать задачу типа (1.6),(1.8) или (1.9), соответственно, для определения градиента целевой функции. По-видимому, чем более подробную (но неполную) информированность мы предполагаем, тем труднее находить точные оценки в рамках такой информированности.

2.3. Стохастические постановки. Теперь заметим, что информацию о ф.р. (в том числе, рассмотренную выше) вряд ли удается получать теоретически, а скорее она основана на экспериментальных данных — наблюдениях независимых реализаций с.в. $d(\cdot)$. Поэтому наиболее адекватным практике представляется следующий вариант информированности о ф.р., традиционно предполагаемый в стохастической оптимизации. Как и в начале разд.2, считаем, что никакой прямой информации о ф.р. с.в. $d(\cdot)$ нет, кроме, быть может, множества D, ограничивающего область значений $d(\omega)$. Однако допустим, что доступна сколь угодно обширная косвенная информация, а именно, произвольная случайная последовательность независимых реализаций с.в. $d(\cdot)$. Причем, в отличие от предыдущего пункта, требуется найти не гарантированные оценки характеристик (1.6)—(1.9), а сами эти величины, пусть, приближенно. В такой постановке для задач (1.6)—(1.8) в разд.1.1,2), а другие способы интегрирования не применимы, и важно организовать процедуру счета так, чтобы не вычислять каждый раз заново значение подынтегральной функции, но по возможности использовать полученные ранее значения. Наиболее просто это сделать для задачи (1.8) (см. разд.1.2), для задач (1.6),(1.7) подобная возможность основана результатах [12] (см. утв.4, 6). Задача поиска $\theta_0^{жC}$ (1.2) в рассматриваемой постановке является стохастической игровой задачей с рекурсией, для решения которой примени́м метод стохастических квазиградиентов [14].

Решение задачи (1.9) с $p = 1$, т.е. поиск $\theta_0^{г}$, осуществляется путем итеративного уменьшения его текущего значения θ, если для очередного $d(\omega)$ не выполнилось условие $d(\omega) \in Z(c)/\theta$ — тогда $\theta := \theta_0(d(\omega))$. При этом вычисления производятся лишь для тех $d(\omega)$, которые не доминируются рассмотренными ранее (как и в разд.1.2). В случае $p < 1$ значение (1.9) можно приближенно найти, если параллельно строить решения набора задач (1.8) с различными θ (в зависимости от желательной точности определения $\theta^*(p)$). А именно, для каждого реализующегося $d(\omega)$ проверяется его принадлежность $Z(c)/\theta$ сразу для всех θ из заданного множества — здесь достаточно вычислить $\theta_0(d(\omega))$ или $\nu_0(d(\omega))$. Набор долей, дающих приближения для $\mathbf{P}(Z(c)/\theta)$ при указанных θ, также подсчитывается одновременно (вместо одного числа запоминается соответствующий массив, обновляемый после очередной случайной реализации). Значение θ, при котором доля $d(\omega) \in Z(c)/\theta$ от числа испытаний минимально превышает p, стремится (с ростом числа испытаний) к искомому приближению для $\theta^*(p)$ с вероятностью 1.

В ситуации, когда осуществлять наблюдение $d(\omega)$ гораздо проще, чем вычислять $\theta_0(d(\omega))$, может оказаться удобнее сначала определить эмпирическую п.р. с.в. $d(\omega)$. Тогда применимы также и другие способы вычисления (1.6)—(1.9), рассмотренные в разд.1.1,2. Кроме того, по имеющейся выборке можно приближенно оценить математическое ожидание и дисперсию с.в. $d(\omega)$ и использовать результаты разд.2.1.

В целом, подчеркнем, что, несмотря на обилие различных постановок задачи анализа МП-сетей в условиях неопределенности вектора d и на проблему выбора из них наиболее соответствующей поставленной задаче, не правомерно сразу подменять ее задачей с полной информированностью. Подобная возможность имеется лишь в редких случаях: некоторые жесткие постановки (см. начало разд.1), частные виды D и некоторые постановки с осреднением из разд.2.1 (см. $\theta_0^{C\Gamma}$ для одобосновании.

Список литературы

1. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.2

2. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

3. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.

4. *Карзанов А.В.* Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках // Комбинаторные методы в потоковых задачах. Вып.3. М.: ВНИИСИ, 1979.

5. *Matula D.W.* Concurrent flow and concurrent connectivity in graphs // Graph Theory and Its Appl. to Algorithms and Comput. Sci. N.Y.: Wiley-Intersci., 1985.

6. *Shahrokhi F., Matula D.W.* The maximum concurrent flow problem // J. Assoc. Comput. Math. 1990. V.37. N.2.

7. *Iri M.* On the extension of the maximum-flow minimum-cut theorem to multicommodity flows // J. Oper. Res. Soc. Japan, 1971. V.13.

8. *Малашенко Ю.Е., Станевичюс А.-И.А.* О решении многопродуктовой задачи с целочисленными потоками // ЖВМ и МФ, 1982. Т.22. N.3.

9. *Biswas J., Matula D.W.* Two flow routing algorithms for the maximum concurrent flow problem // Fall Joint Comput. Conf., Dallas, Tex., Nov.2-6, 1986. Proc. Washington, D.C., 1986.

10. *Kamath A., Palmon O.* Improved interior-point algorithms for exact and approximate solutions of multicommodity flow problems // Proceeding of the 6th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 1995.

11. *Leighton T., Makedon F., Plotkin S., Stein C., Tardos E., Tragoudas S.* Fast approximation algorithms for multicommodity flow problems // J. Computer and Syst. Sci., 1995. V.50. N.1.

пользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. III. Многокритериальная, или параметрическая, постановка для неизвестных требований // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.4.

13. *Дуб Дж.Л.* Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.

14. *Ермольев Ю.М.* Стохастическое программирование. М.: Наука, 1976.

15. *Novikova N.M.* Iterative stochastic methods for solving variational problems of mathematical physics and operations research // Journal of Math. Sciences (Contemprorary Mathematics and Its Applications, Vol.3), New York - London, Plenum Publ. Corp., 1994. N1.

16. *Новикова Н.М.* Решение некоторых стохастических задач оценки допустимости многопродуктовой сети // ЖВМ и МФ, 1998. Т.38. N.5.

17. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Обобщенная задача анализа многопродуктовой сети // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1989. N.4.

18. *Малашенко Ю. Е.* Математические модели анализа потоковых сетевых систем. М.: ВЦ АН СССР, 1993.

19. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

20. *Смирнов М.М.* О логической свертке вектора критериев в задаче аппроксимации множества Парето // ЖВМ и МФ, 1996. Т.36. N.5.

21. *Смирнов М.М.* Метод обратной логической свертки в задачах векторной оптимизации. М.: ВЦ РАН, 1996.