ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 1998, № 3, с. 125–136

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 519.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ В ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СТРУКТУР*

© 1998 г. В. М. Колбанов, В. Г. Медницкий

Москва, ВЦ РАН

Поступила в редакцию 18.12.97 г.

Изучается задача оптимальной перестройки производственных структур [1]. Основные результаты заключаются в установлении некоторых свойств и условий существования оптимальных решений этой задачи.

0. Введение. Проходящие в настоящее время в России преобразования делают весьма актуальным математический анализ проблем, возникающих в связи со структурной перестройкой производства. Модель для постановки такой задачи можно получить из следующих соображений. Всякая производственная система организована в технологические комплексы, преобразующие некоторые наборы ресурсов в продукцию. Функционирование такого преобразователя с учетом проблем информационного обеспечения наиболее естественно описывать с помощью технологической матрицы G, элементами которой g_{ij} определены нормы выпуска ($g_{ij} \geq 0$) или затрат ($g_{ij} < 0$) некоторой совокупности продуктов $i \in I$ в процессах производства $j \in J_1$, а компонентами u_j^t векторов $u^t \geqq 0$ устанавливаются тогда интенсивности использования этих процессов в дискретно заданных промежутках времени $t = 1, 2, \ldots, T$ и вектором $z^t = Gu^t$ – совокупный выпуск продукции ($z_i^t \geq 0$) или потребности в ресурсах ($-z_i^t$, когда $z_i^t < 0$), которые не могут быть удовлетворены изнутри самой производственной системы.

Предположим (временно), что $z^t > 0$. Тогда каждая его компонента может быть распределена между конечным потреблением $y_i^t \geq 0$ и частью $z_i^t - y_i^t \geq 0$, используемой для развития самой технологической системы в инвестиционных процессах $j \in J_2$. Если интенсивности их использования в периоде t определяются компонентами вектора v^t, то изымаемая из потребления часть продукции – вектором Bv^t, где B – еще одна нормативная матрица, содержащая коэффициенты затрат продукции производства ($b_{ij} \geq 0$) в инвестиционных процессах.

Соответствие с мощностями $s \in S$ устанавливается с помощью псевдоединичной матрицы $\mathscr{E}$, которая может строиться, вообще говоря, различными способами, описывая некоторые модели развития (преобразования) мощностей. Здесь, впрочем, используется лишь одна из наиболее простых: каждому $j \in J_2$ ставится в соответствие только один элементов в S, для которого $e_{sj} = 1$ (и $e_{sj} = 0$ в остальных случаях), т.е. в принятой здесь модели каждый инвестиционный процесс предназначается для развития определенной мощности и, конечно, предполагается, что подмножества J_{2s} всех процессов, которыми может развиваться мощность s, не пусты для всех $s \in S$.

Необходимые с точки зрения производства объемы мощности фиксируются оператором $F(u^t)$, об особенностях которого речь пойдет ниже, а наличные их объемы (в векторе M^t для периода t) определяются при переходе системы от начального состояния M^0 к некоторому конечному состоянию $M^T \geq \underline{M}$, где вектором $\underline{M}$ зафиксировано в каком-то смысле наиболее предпочтительное, но, может быть, физически неосуществимое значение вектора мощностей в конце переходного периода, причем варьироваться может и его длительность T. Далее естественно предположить, что в результате процессов старения (физического и морального), если $v^t = 0$, то $M^t = (E - \alpha)M^{t-1}$, где α – оператор, описывающий выбытие мощностей, – диагональный, а его элементами α_s (на главной диагонали) определяются нормы выбытия (за один период, поэтому $0 < \alpha_s < 1$).

Необходимым компонентом всех процессов является труд. Будем считать, что L_t – общий его объем, которым система предположительно располагает в период t, а в векторах $l(m)$ содержатся коэффициенты затрат труда в процессах производства (инвестиционных). Наконец, если предположить, что вектором $\underline{y}^t$ для того же периода

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 97-01-00190).

фиксируется структура производства ($\underline{y}_i^t \geq 0$) и (или) затрат ($\underline{y}_i^t < 0$) продуктов, циркулирующих на выходе (входе) производственной системы, то их абсолютные объемы $y^t = \theta_t \underline{y}^t$ формируются с помощью масштабных множителей θ_t, и теперь уже нетрудно получить математическую модель, которую удобно представить сразу с помощью пары взаимосвязанных экстремальных двойственных задач (0.1)–(0.15).

В первой из них, условия которой расположены в левой части указанных соотношений (в дальнейшем она будет называться исходной), описывается специфическая задача оптимального управления в дискретном времени с ограничениями смешанного типа (включающими не только управляющие, но и фазовые переменные) и целевой функцией, смысл которой по (0.1) и (0.7) можно интерпретировать как стремление к максимизации индикатора нижней границы потребления θ на всей траектории перехода

$$\max\theta, \tag{0.1}$$

$$Bv^t + \theta_t \underline{y}^t - Gu^t \leq 0, \quad p^t \geqq 0, \tag{0.2}$$

$$F(u^t) - M^{t-1} \leqq 0, \quad r^t \geqq 0, \tag{0.3}$$

$$lu^t + mv^t \leq L_t, \quad \rho^t \geq 0, \tag{0.4}$$

$$M^t - (E - \alpha)M^{t-1} - \mathscr{E} v^t = 0, \quad \mu^t, \tag{0.5}$$

$$-M^{\mathrm{T}} \leqq -\underline{M}, \quad \underline{\mu} \geqq 0, \tag{0.6}$$

$$\theta - \theta_t \leq 0, \quad \sigma_t \geq 0, \tag{0.7}$$

$$u^t \geqq 0, \quad r^t\Phi_t + \rho_t 1 - p^t G \geqq 0, \tag{0.8}$$

$$v^t \geqq 0, \quad p^t B + \rho_t m - \mu^t \mathscr{E} \geqq 0, \tag{0.9}$$

$$M^t, \quad \mu^t - \mu^{t+1}(E - \alpha) - r^{t+1} = 0, \quad 0 \leq t < T, \tag{0.10}$$

$$M^{\mathrm{T}}, \quad \mu^{\mathrm{T}} - \underline{\mu} = 0, \tag{0.11}$$

$$\theta_t, \quad p^t \underline{y}^t - \sigma_t = 0, \tag{0.12}$$

$$\theta, \quad \sum \sigma_t = 1, \tag{0.13}$$

$$r^t \geqq 0, \quad \Phi_t u^t \leqq F(u^t), \tag{0.14}$$

$$\min\{\sum \rho_t L_t + \mu^0 M^0 - \underline{\mu M}\}. \tag{0.15}$$

Остановимся на механизме использования мощностей, представленном в (0.3). Предполагается, что вектор F состоит из конечного набора калибровочных функций f_s фиксированных выпуклых множеств U_s, находящихся, вообще говоря, в некоторых подпространствах того пространства, где определен вектор u, и, разумеется, допускающих такое описание [2], т.е. когда выполняются условия а) $0 \in U_s \; \forall \, s \in S$ и б) всякий луч вида

$$z = \lambda z^0, \quad \lambda > 0, \quad z^0 \geq 0 \tag{0.16}$$

либо целиком не содержится в U_s, либо пересекается с ним не более чем по некоторому полуинтервалу $0 < \lambda \leq \underline{\lambda}^0 < +\infty$.

Поскольку множество U_s описывается в этом случае неравенствами

$$f_s(z) \leq 1, \quad z \geqq 0, \tag{0.17}$$

то, полагая $\pi^t = p^t G - \rho_t l$ (при фиксированных p^t, ρ_t), можно определить набор локальных задач

$$\max\{\pi^t z \,|\, f_s(z) \leq 1, z \geqq 0\}, \tag{0.18}$$

результатом решения которых оказываются выполняющиеся с дополняющей нежесткостью системы неравенств

$$u_j^t \geqq 0, \quad p^t g^j - r_s^t \varphi_j^{st} - \rho_t l_j \leq 0 \;\; \forall \; j \in J_{1s}, \tag{0.19}$$

где J_{1s} – подмножество процессов, связанных использованием общей мощности s, а компонентами вектора φ^{st} определяется полюс [2] некоторой опорной гиперплоскости множества U_s, т.е. на гиперплоскости $\varphi^{st} z = 1$ существует элемент $\underline{u}^{st} \in \in U_s$, а все множество U_s находится в полупространстве

$$\varphi^{st} z \leq 1. \tag{0.20}$$

Как следует из (0.19), если $\pi_j^t > 0$, то r_s^t, $\varphi_j^{st} > 0$ и $u_j^t = 0$, когда $\pi_j^t < 0$, если $\varphi_j^{st} \geq 0$. Поскольку с экономической точки зрения величинами π_j^t определяются нормы прибыли, то предположение, что $\varphi^{st} \geq 0 \;\forall\; s, t$, представляется естественным. Однако если $\pi_j^t < 0 \;\forall\, j \in J_{1s}$, то, поскольку $r_s^t = 0$, значение вектора φ^{st} становится несущественным и в этом случае иногда удобно полагать, что $\varphi_j^{st} = = 0 \;\forall\, j \in J_{1s}$.

Очевидно, $J_1 = \bigcup_{s \in S} J_{1s}$, а векторы φ^{st} удобно доопределить на всем множестве J_1, полагая $\varphi_j^{st} = = 0 \;\forall\, j \in J_1 \backslash J_{1s}$. В такой форме совокупность векторов $\varphi^{st} \;\forall\, s \in S$ может рассматриваться в качестве строк матрицы $\Phi_t \geqq 0$, которая и входит в условия (0.8) и (0.14) двойственной задачи. Кроме того, для функции F должны [2] выполняться условия

$$F(0) = 0, \quad (F(z) = 0 \;\&\; F(\sigma z) = \\ = \sigma F(z)) \;\forall\; (z \neq 0 \;\&\; \sigma > 0), \tag{0.21}$$
$$F(z^1 + z^2) \leqq F(z^1) + F(z^2) \;\forall\; z^1, z^2,$$

вследствие которых неравенства $\Phi_t u^t \leqq F(u^t)$ в (0.14) выполняются тождественно при всех значениях u^t (в качестве неравенств Фенхеля для однородных функций [3]).

В силу свойств однородности функций f_s в (0.21) после умножения (0.17) на произвольное значение $M_s^{t-1} > 0$ получим $M_s^{t-1} \geq M_s^{t-1} f_s(z) = f_s(M_s^{t-1} z)$, а значит, в (0.20) меняется только масштабный множитель (на который умножаются вектор z и правая часть), т.е. при любых изменениях значений мощностей преобразованиям гомотетии подвергаются именно множества U_s, а векторы φ^{st} остаются при этом инвариантными, что весьма важно для физической интерпретации, поскольку их компонентами устанавливаются нормы затрат ресурсов мощностей в процессах производства продукции.

1. Основные результаты. Хотя в ограничениях (0.3) и (0.14) содержатся нелинейности, тем не менее имеет место общее утверждение, аналогичное известному результату в теории линейного программирования [4].

Т е о р е м а 1. Для существования оптимальных решений у двойственных задач (0.1)–(0.15) необходимо и достаточно, чтобы каждая из них имела допустимое решение. Эти решения будут оптимальными (в соответствующих задачах) тогда и только тогда, когда определенные для них в (0.1) и (0.15) значения линейных форм совпадают.

Пусть обе задачи имеют допустимые решения. Тогда в соответствии с (0.3) и (0.14) для всех t должны иметь место неравенства $\Phi_t u^t \leqq M^{t-1}$, иначе говоря, оба решения будут допустимы в паре двойственных задач линейного программирования, а значит, между значениями линейных форм (0.1) и (0.15) должно выполняться неравенство

$$\theta \leq \sum \rho_t L_t + \mu^0 M^0 - \underline{\mu M}. \tag{1.1}$$

Таким образом, если множества допустимых решений обеих задач не пусты, то значения функционалов в силу (1.1) ограничены – снизу для задачи минимизации и сверху для задачи максимизации. По теореме о существовании минимума собственной, замкнутой, выпуклой и ограниченной снизу функции на замкнутом, непустом и выпуклом множестве [3] обе задачи должны иметь оптимальные решения, но последние будут допустимы (каждое в соответствующей задаче) и первое из утверждений теоремы доказано.

Совпадение значений линейных форм в (1.1) возможно тогда и только тогда, когда оба решения оптимальны в двойственных задачах линейного программирования (которые, как уже говорилось, получаются после замены условия (0.3) неравенствами $\Phi_t u^t \leqq M^{t-1}$). Но тогда $r^t M^{t-1} = r^t \Phi_t u^t$ по дополняющей нежесткости измененных условий (0.3), $r^t \Phi_t u^t \leq r^t F(u^t)$, поскольку $\Phi_t u^t \leqq F(u^t)$ – неравенства Фенхеля [3], а неравенство $r^t F(u^t) \leq r^t M^{t-1}$ следует из (0.3), так как оба решения допустимы в исходных задачах. Но теперь видно, что имеют место равенства $r^t \Phi_t u^t = r^t F(u^t) = r^t M^{t-1}$, т.е. все пары неравенств в (0.2)–(0.14) выполняются с дополняющей нежесткостью. Если же это условие имеет место, то в (1.1) для соответствующей пары допустимых решений возникает равенство, а оптимальность их (в соответствующих задачах) устанавливается с помощью стандартного рассуждения из теории линейного программирования [4].

Располагая этой теоремой, можно поставить вопрос: при каких дополнительных предположениях интересующие нас допустимые решения заведомо существуют? Здесь следует учесть, что по физическому смыслу величин, формирующих матрицу B и вектор l, m, должны выполняться условия

$$B \geq 0, \quad \sum_i b_{ij} > 0 \;\forall\; \text{j}; \quad l, m > 0 \tag{1.2}$$

(в инвестиционных процессах продукты только расходуются, причем любым процессом какие-то продукты – обязательно, труд используется во всех процессах).

Т е о р е м а 2. Допустимое решение двойственной задачи в (0.2)–(0.15) существует даже при несколько более слабых условиях, чем (1.2), а именно когда

$$B \geqq 0, \quad l > 0, \quad m \geqq 0 \tag{1.3}$$

и если и только если

$$\exists t\colon \max_i \underline{y}_i^t > 0. \tag{1.4}$$

Из условий двойственной задачи в (0.2), (0.7), (0.12) и (0.13) следует, что хотя бы для одного t должно выполняться неравенство $p^t \underline{y}^t > 0$, что, однако, невозможно, если не выполняется (1.4), так как в этом случае $\underline{y}^t \leqq 0 \;\forall\; t$, а $p^t \geqq 0$. Если же, например, при $t = h$ условие в (1.4) выполняется, то $\exists q \geq 0$: $q\underline{y}^h > 0$. Полагая $p^h = q/q\underline{y}^h$, $\sigma_h = 1$ и σ_t, $p^t = 0$ для $t \neq h$, получим наборы σ_t, p^t, удовлетворяющие (0.2), (0.7), (0.12) и (0.13) при всех t. Если $p^t G \leqq 0 \;\forall\; t$, то можно положить r^t, $\rho_t = 0$, поскольку при этом выполняются неравенства в (0.3), (0.4) и (0.8). Если же у вектора p^tG есть положительные компоненты, то при некотором $\rho_t > 0$ можно добиться выполнения неравенства (0.8) в форме $p^tG - \rho_t l \leqq 0$ (ибо $l > 0$). Так как при этом по (1.3) $p^tB + \rho_t m \geqq 0$, а равенства $r^t = 0 \ \forall \ t$ сохранились, то в (0.9) и (0.10) получим, что $\mu^t = 0 \ \forall \ t$, а в (0.11) $\underline{\mu} = 0$. Поскольку в (0.8) и (0.14) теперь можно положить $\Phi_t = 0 \ \forall \ t$, то выполнение неравенств $\Phi_t u^t \leqq F(u^t) \ \forall \ u^t \geqq 0$ в (0.14) следует из свойств функции F, указанных в (0.21).

Таким образом, оказывается, что для некоторых t допустимы неравенства $\underline{y}^t \leqq 0$. Это означает, что программа перехода может обеспечиваться ресурсами, полученными не только за счет собственного производства, но и из внешних источников, и этим не закрывается возможность существования оптимального решения двойственной задачи, т.е. формирования в рассматриваемой технологической системе экономического механизма, обеспечивающего рентабельность переходного процесса, если только в совокупности векторов $\underline{y}^t$ (хотя бы для одного t) все-таки предусмотрен выпуск какой-то продукции и любые продукты могут производиться лишь с некоторыми затратами труда.

Отметим также, что если $\underline{y}^t \le 0$, то в соответствии с (0.2), (0.7) и (0.12) в оптимальном решении должны будут выполняться равенства $p^t \underline{y}^t = 0$ и $\sigma_t = 0$, а значит, с ним совместимо любое значение $\theta_t > \theta$. Поэтому в принципе на некоторые из переменных θ_t могут быть наложены дополнительные ограничения типа верхних границ, в связи с чем в (0.12) сформируется условие $\sigma_t - p^t\underline{y}^t = \delta_t$, где $\delta_t \ge 0$ и является множителем Лагранжа для неравенства вида $-\theta_t \ge -\underline{\theta}_t$. При такой модификации задачи значение максимума в (0.1) будет уже ограниченным сверху и обе двойственные задачи, очевидно, имеют оптимальное решение, если (и только если) существует допустимое решение исходной задачи. Здесь весьма полезным оказывается следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. Если $\underline{M} \leqq (E - \alpha)^{\mathrm{T}} M^0$, то допустимое решение исходной задачи существует, причем если еще и $M^0 \geqq 0$, то дополнительно выполняются условия $M^t \geqq 0 \ \forall \ t \le T$.

При указанных предположениях можно положить

$$\theta, \theta_t, u^t, v^t = 0 \ \forall \ t, \tag{1.5}$$

а M^t искать из рекуррентного соотношения $M^t = (E - \alpha)M^{t-1}$, остающегося в (0.5). Если $M^0 \geqq 0$, то $M^t \geqq 0 \ \forall \ t$ по определению оператора α.

С л е д с т в и е 1. Если за время $t < T$ возможен переход в состояние $\underline{M}^t \geqq (E - \alpha)^{(t - \mathrm{T})} \underline{M}$, то возможен и переход в состояние $M^{\mathrm{T}} \geqq \underline{M}$ за время T. Однако T не будет наименьшим возможным значением времени перехода.

После того как система перешла в состояние $\underline{M}^t$, его можно принять за начальное с временем перехода $T - t$. Такой переход по теореме 3 существует, поскольку $(E - \alpha)^{(\mathrm{T} - t)} \underline{M}^t \ge \underline{M}$. Однако $M^t \ge (E - \alpha)^{(\mathrm{T} - t)} M^t$ по определению α и, значит, допустимое конечное состояние M^t достигается за время $t < T$.

Таким образом, нетривиальным остается случай, когда

$$\max_s \{ \underline{M}_s - (1 - \alpha_s)^{\mathrm{T}} M_s^0 \} > 0, \tag{1.6}$$

причем (1.6) будет выполняться для любого $T \ge 1$, если, например, имеют место дополнительные условия

$$\underline{M}, M^0 \ge 0, \quad \underline{M} + M^0 > 0, \quad \underline{M} M^0 = 0. \tag{1.7}$$

(Физически такое сочетание граничных условий означает, что все виды мощностей в рассматриваемой производственной системе можно разделить на старые, формирующие начальное состояние, и новые, к которым система должна перейти после завершения переходного процесса.)

Т е о р е м а 4. При условии (1.6) задача (0.1)–(0.14) (исходная) имеет допустимое решение с временем перехода T, если и только если у пары двойственных задач

$$\min \sum_{s \in S} \omega_s, \tag{1.8}$$

$$Gu^t - Bv^t - \theta_t \underline{y}^t \geqq 0, \quad p^t \geqq 0, \tag{1.9}$$

$$M^{t-1} - F(u^t) \geqq 0, \quad r^t \geqq 0, \tag{1.10}$$

$$-lu^t - mv^t \geqq -L_t, \quad \rho_t \ge 0, \tag{1.11}$$

$$u^t \geqq 0, \quad p^t G - r^t \Phi_t - \rho_t l \leqq 0, \tag{1.12}$$

$$v^t \geqq 0, \quad \mu^t \mathscr{E} - p^t B - \rho_t m \leqq 0, \tag{1.13}$$

$$\theta_t \ge 0, \quad -p^t \underline{y}^t \le 0, \tag{1.14}$$

$$M_s^{\mathrm{T}} + \omega_s \ge \underline{M}_s, \quad \mu_s \ge 0, \tag{1.15}$$

$$\omega_s \ge 0, \quad \underline{\mu}_s \le 1, \tag{1.16}$$

$$(E-\alpha)M^{t-1} + \mathscr{E}v^t - M^t = 0, \quad \mu^t, \tag{1.17}$$

$$M^t, \quad \mu^{t+1}(E-\alpha) + r^{t+1} - \mu^t = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.18}$$

$$M^{\mathrm{T}}, \quad \underline{\mu} - \mu^{\mathrm{T}} = 0, \tag{1.19}$$

$$r^t \geqq 0, \quad \Phi_t u^t \leqq F(u^t), \tag{1.20}$$

$$\max\left\{\underline{\mu M} - \mu^0 M^0 - \sum_{t=1}^{\mathrm{T}} \rho_t L_\tau\right\}, \tag{1.21}$$

оптимальные решения которых существуют при любом T, функционалы (1.8) и (1.21) достигают нулевых значений.

Для построения допустимого решения в первой из этих задач используем сначала конструкцию из теоремы 3, полагая затем $\omega_s^0 = \max[0, (\underline{M}_s - (1-\alpha_s)^{\mathrm{T}} M_s^0)]\ \forall s \in S$.

Так как значения формы (1.8) в силу (1.16) ограничены снизу на всем множестве допустимых решений, то минимум в (1.8) существует [3], а в силу (1.10) и (1.20) выполняются и условия $\Phi_t u^t \leqq \leqq M^{t-1}$. Повторяя рассуждения, уже использованные при доказательстве теоремы 1, заключаем, что вторая из двойственных задач тоже имеет оптимальное решение, а значения форм (1.8) и (1.21) на оптимальных решениях совпадают.

Если при этом их общее значение оказывается равным нулю, то оптимальное решение первой из рассматриваемых задач будет допустимо в ограничениях (0.2)–(0.14) исходной задачи в комбинации с $\theta = \min\limits_t \{\theta_t\}$, где θ_t находятся из оптимального решения задачи (1.8)–(1.21). Если же значение минимума в (1.8) осталось положительным, то никакой траектории для перехода из M^0 в какое-либо состояние $M^{\mathrm{T}} \geqq \underline{M}$ при данном T, очевидно, не существует.

Следствие 2. Множество $M_f(T)$ – достижимых за время T состояний вектора мощностей M^{T} – выпукло, а если состояние $\underline{M}$ недостижимо, то после решения задач (1.8)–(1.21) (с $M = \underline{M}$) оно отсекается от множества $M_f(T)$ неравенством

$$\sum_{t=1}^{\mathrm{T}} \underline{\rho}_t L_t + \underline{\mu}^0 M^0 \ge \underline{\mu} M, \tag{1.22}$$

где $\underline{\mu}$, $\underline{\mu}^0$ и $\{\underline{\rho}_t | t = 1, 2, \ldots, T\}$ – элементы оптимального решения двойственной задачи.

Пусть при некотором $\underline{M}$ значение минимума в (1.8) оказалось положительным. Используя в качестве допустимого решения первой задачи произвольную траекторию, заканчивающуюся некоторым состоянием M^{T}, а в двойственной – оптимальное решение и перемножая для некоторого t структурные неравенства, входящие в (1.9)–(1.20), на расположенные в тех же строках векторные переменные, пройдем всю их совокупность в такой последовательности: (1.14), (1.8), (1.12), (1.13), (1.11), (1.20), (1.10), (1.17), (1.18). В результате получим цепочку неравенств $0 \le \le \theta_t p^t y^t \le p^t G u^t - p^t B v^t \le r^t \Phi_t u^t + \rho_t l u^t + \rho_t m v^t - \mu^t \mathscr{E} v^t \le r^t F(u^t) + \rho_t L_t - \mu^t M^t + \mu^t (E-\alpha) M^{t-1} \le \rho_t L_t + r^t M^{t-1} - \mu^t M^t + \mu^t (E-\alpha) M^{t-1} = \rho_t L_t + \mu^{t-1} M^{t-1} - \mu^t M^t$ и, таким образом, $\mu^t M^t - \mu^{t-1} M^{t-1} \le \rho_t L_t\ \forall t$, а после суммирования возникает обобщающее соотношение

$$\sum_{n=1}^{t} \rho_n L_n \ge \mu^t M^t - \mu^0 M^0. \tag{1.23}$$

Если $t = T$, то в соответствии с (1.19) в (1.23) можно использовать $\underline{\mu}$ вместо μ^{T} и для всех значений $M \leqq M^{\mathrm{T}}$ после замены вектора M^{T} на M это неравенство только усиливается, так как $\underline{\mu} \ge 0$ по (1.15). После указанных в формулировке следствия 2 переобозначений получаем (1.22). Однако усилить это неравенство нельзя, так как если $\underline{M}^{\mathrm{T}}$ – правый конец оптимальной траектории, полученной в (1.8)–(1.20) при $M = \underline{M}$, то условия (1.23) (при всех t) переходят в равенства, а по равенству оптимальных значений функционалов, кроме того, получим еще одно неравенство

$$\underline{\mu M} - \underline{\mu}^0 M^0 - \sum_{t=1}^{\mathrm{T}} \underline{\rho}_t L_t = \sum_{s \in S} \omega_s > 0,$$

и, таким образом, точка $\underline{M}$ условием (1.22) отсекается от множества $M_f(T)$.

С формальной точки зрения этот результат решает и даже конструктивно задачу построения допустимых конечных состояний нашей системы, так как после решения задач (1.8)–(1.21) для произвольного M либо $M \in M_f(T)$, либо будет построено отсекающее ограничение. Накапливая их в каком-то итерационном процессе, получаем, с одной стороны, все более полное описание финального множества $M_f(T)$, а с другой (располагая каким-то критерием) – возможность выбирать M с учетом накопленной информации. (Отметим, что по лемме 3, если $M^0 \geqq 0$, то $\underline{M} = 0 \in M_f\ \forall T$, так что $M_f \ne \varnothing$).

2. Каноническая форма модели. Обратную рекурсию в равенствах (1.19) и (1.18) $\mu^{\mathrm{T}} = \underline{\mu}$, $\mu^{\mathrm{T}-1} = = \mu^{\mathrm{T}}(E - \alpha) + r^{\mathrm{T}}$, … можно использовать для исключения из условий двойственной задачи векторов μ^t. При этом из исходной исключаются векторы M^t и каждая из них принимает каноническую форму [4] системы неравенств с неотрицательными переменными. Для более компактной записи функционала (1.8) удобно определить в пространстве мощностей вектор $S\hat{}$ с равными единице компонентами. В итоге модель (1.8)–(1.21) преобразуется в следующую пару двойственных задач:

$$\min S\hat{}\omega, \tag{2.1}$$

$$Gu^t - Bv^t - \theta_t \underline{y}^t \geqq 0, \quad p^t \geqq 0, \tag{2.2}$$

$$-lu^t - mv^t \geq -L_t, \quad \rho_t \geq 0, \tag{2.3}$$

$$-F(u^1) \geqq -M^0, \quad r^1 \geqq 0, \tag{2.4}$$

$$-F(u^t) + \sum_{n=1}^{t-1} (E-\alpha)^{t-n-1} \mathcal{E} v^n \geqq -(E-\alpha)^{t-1} M^0, \quad r^t \geqq 0 \ \forall\, t > 1, \tag{2.5}$$

$$\sum_{n=1}^{T} (E-\alpha)^{\mathrm{T}-n} \mathcal{E} v^n + \omega \geqq \underline{M} - (E-\alpha)^{\mathrm{T}} M^0, \quad \underline{\mu} \geqq 0, \tag{2.6}$$

$$u^t \geqq 0, \quad p^t G - r^t \Phi_t - \rho_t l \leqq 0, \tag{2.7}$$

$$\theta_t \geq 0, \quad p^t \underline{y}^t \geq 0, \tag{2.8}$$

$$v^t \geqq 0, \quad \left[\underline{\mu}(E-\alpha)^{\mathrm{T}-t} + \sum_{n=t+1}^{\mathrm{T}} r^n (E-\alpha)^{n-t-1}\right]\mathcal{E} - p^t B - \rho_t m \leqq 0, \quad \forall t < T, \tag{2.9}$$

$$v^{\mathrm{T}} \geqq 0, \quad \underline{\mu}\mathcal{E} - p^{\mathrm{T}} B - \rho_{\mathrm{T}} m \leqq 0, \tag{2.10}$$

$$\omega \geqq 0, \quad \underline{\mu} \leqq S\hat{}, \tag{2.11}$$

$$r^t \geqq 0, \quad \Phi_t u^t \leqq F(u^t), \tag{2.12}$$

$$\max\left\{\underline{\mu}[\underline{M} - (E-\alpha)^{\mathrm{T}} M^0] - \sum_{t=1}^{\mathrm{T}} [r^t (E-\alpha)^{t-1} M^0 + \rho_t L_t]\right\}. \tag{2.13}$$

Связь с исходной системой переменных M^t, μ^t, впрочем, легко восстанавливается. Как видно из сопоставления (2.5), (2.6) и (2.9) с (1.17) и (1.13), имеют место равенства

$$M^t = (E-\alpha)^t M^0 + \sum_{n=1}^{t} (E-\alpha)^{t-n} \mathcal{E} v^n, \quad 1 \leq t \leq T, \tag{2.14}$$

$$\mu^t = \underline{\mu}(E-\alpha)^{\mathrm{T}-t} + \sum_{n=t+1}^{\mathrm{T}} r^n (E-\alpha)^{n-t-1}, \quad 0 \leq t < T, \tag{2.15}$$

$$\mu^{\mathrm{T}} = \underline{\mu},$$

т.е. однотипные величины, относящиеся к разным промежуткам времени, например v_s^t или r_s^t, не могут просто складываться друг с другом, а входят в соответствующие суммы с весами, изменяющимися по степенному закону и с показателем степени, линейно зависящим от времени. (Экономисты процессы такого типа называют дисконтированием.) Из (2.15) сразу же получаем, что $\mu^t \geqq 0 \ \forall\, t$, а из (2.14) $M^t \geqq 0 \ \forall\, t$, если $M^0 \geqq 0$.

Для линейной аппроксимирующей модели при $T = 3$ структура условий (2.1)–(2.13) показана в табл. 1. Из нее видно, что при изменении значений параметра $T = 1, 2, \ldots$ меняется лишь количество формирующих ее элементов. Тогда возникает естественный вопрос: как с ростом T будет вести себя минимум в (2.1), значение которого теперь удобно обозначить $S\hat{}\omega^{\mathrm{T}}$? Для ответа нам понадобится дополнительная информация о свойствах оптимальных решений, содержащаяся в следующих утверждениях.

Т е о р е м а 5. В оптимальном решении задач (2.1)–(2.13) реализуется соотношение

$$\omega_s^{\mathrm{T}} = \max[0, \underline{M}_s - M_s^{\mathrm{T}}] \ \forall\, s \in S, \tag{2.16}$$

и если $\omega_s^{\mathrm{T}} > 0$, то $s \in S_{\mathrm{T}} = \{s | \underline{M}_s > (1-\alpha_s) M_s^{\mathrm{T}-1}\}$.

Если $(\mathcal{E} v^{\mathrm{T}} + \omega^{\mathrm{T}})_s > (\underline{M} - (E-\alpha)M^{\mathrm{T}-1})_s$, то по дополняющей нежесткости в (2.6) и (2.11) $\underline{\mu}_s$, $\omega_s^{\mathrm{T}} = 0$ и $\underline{\mu}_s = 1$, а $(\mathcal{E} v^{\mathrm{T}} + \omega^{\mathrm{T}})_s = (\underline{M} - (E-\alpha)M^{\mathrm{T}-1})_s$, если $\omega_s^{\mathrm{T}} > 0$. Так как при этом и $(\mathcal{E} v^{\mathrm{T}})_s \geq 0$, то неравенство $\omega_s^{\mathrm{T}} > 0$ может иметь место лишь при условии $\underline{M}_s > (1-\alpha_s) M_s^{\mathrm{T}-1}$.

Мощности $M_s^{\mathrm{T}-1} > 0$ будем называть действующими на шаге T, из S_T – дефицитными и фиктивными, если $M_s^{\mathrm{T}-1} = 0$. Использующие их процессы производства продукции в силу (0.21) не могут иметь положительных компонент в векторе u^{T}, а предназначенные для развития недефицитных

Таблица 1

Наборы переменных	u^1	u^2	u^3	θ_1	θ_2	θ_3	v^1	v^2	v^3	ω^3	$\geqq$
p^1	G			$-\underline{y}^1$			$-B$				
p^2		G			$-\underline{y}^2$			$-B$			
p^3			G			$-\underline{y}^3$			$-B$		
ρ_1	$-l$						$-m$				$-L_1$
ρ_2		$-l$						$-m$			$-L_2$
ρ_3			$-l$						$-m$		$-L_3$
r^1	$-\Phi_1$										$-M^\circ$
r^2		$-\Phi_2$					$\mathscr{E}$				$-(E-\alpha)M^\circ$
r^3			$-\Phi_3$				$(\mathscr{E}-\alpha)\mathscr{E}$	$\mathscr{E}$			$-(E-\alpha)^2M^\circ$
$\underline{\mu}$							$(\mathscr{E}-\alpha)^2\mathscr{E}$	$(\mathscr{E}-\alpha)\mathscr{E}$	$\mathscr{E}$	E	$\underline{M}-(E-\alpha)^3M^\circ$
Типы ограничений								$\leqq$		$S^\wedge$	

мощностей инвестиционные процессы в оптимальном решении (на шаге T) можно не использовать, ибо $m \geqq 0$, $B \geqq 0$ и при обращении в нуль соответствующих компонент вектора v^{T} неравенства в (2.2) и (2.3) лишь усиливаются. Поэтому входящие в оптимальное решение "укороченные" векторы u_0^{T}, v_0^{T} удовлетворяют условиям

$$G_T u_0^{\mathrm{T}} - B_T v_0^{\mathrm{T}} - \theta_T \underline{y}^{\mathrm{T}} \geqq 0, \quad u_0^{\mathrm{T}}, v_0^{\mathrm{T}}, \theta_T \geqq 0, \tag{2.17}$$

где G_T включает только те процессы производства продукции, которыми используются действующие мощности, а в B_T собраны только такие инвестиционные процессы, с помощью которых могут развиваться дефицитные мощности. (Кроме того, поскольку положительные значения могут принимать лишь компоненты "укороченного" вектора v_0^{T}, то из матрицы $\mathscr{E}$ удобно выделить подматрицу $\mathscr{E}_T$, которая умножается справа на v_0^{T}.)

Естественно возникает вопрос: нельзя ли обеспечить переход нашей системы в одно из допустимых состояний ($M^{\mathrm{T}} \geqq \underline{M}$) простым увеличением T, так сказать, с помощью достаточно большого количества малых изменений траектории вектора мощностей? Поскольку ряд частичных сумм $\sum_{t=1}^{\mathrm{T}} L_t$ можно считать даже расходящимися, то при достаточно больших T будет иметь место сколь угодно большое (за весь переходный период T) "вложение" труда. Тем не менее в общем случае ответ оказывается отрицательным. Как показывают следующие ниже утверждения, в процессе перехода возможна остановка, связанная со структурными особенностями технологии и не зависящая от масштабов производственной деятельности.

Т е о р е м а 6. Набор θ_T, u^{T}, $v^{\mathrm{T}} = 0$ входит в оптимальное решение задачи (2.1)–(2.11) тогда и только тогда, когда либо для вектора $M^{\mathrm{T}-1}$ выполняется неравенство

$$\underline{M} \leqq (E-\alpha)M^{T-1}, \tag{2.18}$$

либо для некоторого вектора p имеют место условия

$$p \geq 0, \quad pG_T \leqq 0, \quad p\underline{y}^{\mathrm{T}} \geq 0, \quad pB_T > 0. \tag{2.19}$$

В последнем случае матрица B_T удовлетворяет всем ограничениям, указанным для нее в (1.2).

Предположим, что набор θ_T, u^{T}, $v^{\mathrm{T}} = 0$ входит в оптимальное решение. По (2.8) $p^{\mathrm{T}}\underline{y}^{\mathrm{T}} \geq 0$ и, не нарушая условий дополняющей нежесткости в (2.3), можно положить $\rho_T = 0$, так как $L_T \geq 0$. Неравенство $r_s^{\mathrm{T}} > 0$ в (2.5) (или в (2.4), когда $T = 1$) влечен $0 = f_s(0) = M_s^{\mathrm{T}-1}$, и, значит, если $M_s^{\mathrm{T}-1} > 0$, то $r_s^{\mathrm{T}} = 0$.

Таблица 2

Наборы переменных	u^T	θ_T	v^T	ν^T	$\geqq$
$\underline{p}^T$	G_T	$-\underline{y}^T$	$-B_T$		
$\underline{\rho}^T$	$-l$		$-m$		$-L_T$
$\underline{r}^T$	$-\Phi_T$				$-\underline{M}^{T-1}$
$\underline{\mu}$			$\mathscr{E}$	E	$\underline{M}-(E-\alpha)\underline{M}^{T-1}$
Типы ограничений		$\leqq$		$S^\wedge$	

В результате из (2.7) получаем, что $p^{\mathrm{T}}G_T \leqq 0$. Если $\omega^{\mathrm{T}} = 0$, то $\underline{M} \leqq M^{\mathrm{T}} = (E - \alpha)M^{\mathrm{T}-1}$ в соответствии с (2.16) и приходим к (2.18), иначе существуют $\omega_s^{\mathrm{T}} > 0$ и по дополняющей нежесткости в (2.11) $\underline{\mu}_s = 1$. Поэтому если b^j – произвольный вектор-столбец из подматрицы B_T, то в соответствии с (2.10) $p^{\mathrm{T}}b^j \geq 1$ и b^j, $p^{\mathrm{T}} \geq 0$. Таким образом, для вектора p^{T} выполняются все условия, входящие в (2.19), а для B_T – в (1.2).

Если выполняется (2.18), то $M^{\mathrm{T}-1} \geqq (E - \alpha)^{(\mathrm{T}-1-\mathrm{T})}\underline{M}$ и по следствию 1 θ_T, u^{T}, v^{T} и $\omega^{\mathrm{T}} = 0$, причем переход в допустимое состояние происходит уже на шаге $T - 1$. В случае же, когда $\omega^{\mathrm{T}} \geq 0$ и выполняются (2.19), после умножения (2.17) слева на вектор p для любых $v_0^{\mathrm{T}} \geq 0$ и u_0^{T}, $\theta_T \geq 0$ получим неравенства $0 \geq p(G_T u_0^{\mathrm{T}} - \theta_T \underline{y}^{\mathrm{T}}) \geq pB_T v_0^{\mathrm{T}} > 0$. Поскольку они несовместимы, то θ_T, u^{T}, $v^{\mathrm{T}} = 0$.

С л е д с т в и е 3. Если на каком-либо шаге T выполняются условия $\mathscr{E}v^{\mathrm{T}} = 0$ и $\omega^{\mathrm{T}} \geq 0$, то $S\hat{\ }\omega^{\mathrm{T}-1} \leq S\hat{\ }\omega^n\ \forall\ n \geq T$.

Так как $\mathscr{E}v^{\mathrm{T}} = 0$, то $M^{\mathrm{T}} = (E - \alpha)M^{\mathrm{T}-1}$ и для набора величин $\underline{\omega}_s = \max[0,\ \underline{M}_s - M_s^{\mathrm{T}-1}] \leq \max[0,\ \underline{M}_s - M_s^{\mathrm{T}}] = \omega_s^{\mathrm{T}}$, составляющих допустимый вектор $\underline{\omega}$ при решении нашей задачи с временем перехода $T - 1$, получим $S\hat{\ }\omega^{\mathrm{T}-1} \leq S\hat{\ }\underline{\omega} \leq S\hat{\ }\omega^{\mathrm{T}}$. Поскольку $S\hat{\ }\omega^{\mathrm{T}} > 0$, то выполняются неравенства (2.19). Но тогда все дефицитные мощности, существующие в периоде T, не будут развиваться не только в этом, но и в любых последующих периодах $n > T$, а значит, $S\hat{\ }\omega^{\mathrm{T}-1} \leq S\hat{\ }\omega^n\ \forall\ n \geq T$.

Отметим, что эта оценка не может быть улучшена, ибо если имеют место (1.7), а неравенства (2.19) выполняются уже при $T = 1$, то $M^{\mathrm{T}} = (E - \alpha)^{\mathrm{T}}M^0$, а $S\hat{\ }\omega^{\mathrm{T}} = S\hat{\ }\underline{M}\ \ \forall\ T \geq 1$.

Таким образом, в нашу модель необходимо ввести дополнительное условие, которое позволило бы исключить возможность появления на каком-либо шаге неравенств (2.19). Сформулировать его позволяет следующая теорема.

Т е о р е м а 7. Относительно любой матрицы A выполняется только одно из двух утверждений:

$$\begin{aligned} &а)\ \exists y \geq 0:\ yA \leqq 0, \\ &б)\ \exists x > 0:\ Ax > 0, \end{aligned} \qquad (2.20)$$

причем в случае б) достаточно, чтобы вместо строгого неравенства $x > 0$ выполнялось более слабое условие $x \geq 0$.

Для доказательства достаточно заметить, что по лемме Штимке [6] существуют: либо представление нуля в выпуклой оболочке столбцов матрицы $H = [E, A^*]$, т.е. такая пара векторов $\delta^* \geqq 0$ и $y^* \geq 0$, что $\delta^* + A^*y^* = 0$, либо вектор x^*, отсекающий ее от нуля, причем вся выпуклая оболочка лежит в этом случае в полупространстве $x^*z > 0$. Для матрицы H это означает, что $x^* > 0$ и $x^*A^* > 0$. Транспонируя еще раз, получаем а) или б). Если $A = [A_1, A_2]$ и неравенства в б) выполняются только для векторов x^1 и A_1x^1, то, очевидно, можно так подобрать вектор $x^2 > 0$, что неравенство $A_1x^1 + A_2x^2 > 0$ будет иметь место для любой матрицы A_2.

Следуя [5], будем называть матрицу $\underline{G}_T = [G_T, -\underline{y}^{\mathrm{T}}]$ продуктивной, если

$$\exists u_0^{\mathrm{T}},\quad \theta_T \geq 0:\ G_T u_0^{\mathrm{T}} - \theta_T \underline{y}^{\mathrm{T}} > 0. \qquad (2.21)$$

Заметим, что при $\underline{y}^{\mathrm{T}} < 0$ по теореме 7 $\underline{G}_T$ продуктивна независимо от наличия или отсутствия аналогичного свойства у матрицы G_T. Таким образом, на начальных шагах перехода этот процесс можно поддерживать с помощью одних только внешних ресурсов в $\underline{y}^{\mathrm{T}}$ (причем строгое неравенство с физической точки зрения означает, что существенны не объемы, а сам факт наличия ресурсов во всей совокупности их наименований; отсутствие какого-то одного из них может приводить к непродуктивности технологической системы в целом).

Т е о р е м а 8. Если в формирующейся при $T = 1, 2, \ldots$ последовательности матриц G_T при некотором $t \in \{1 \leq n < T\}$ окажется продуктивной матрица G_t, то G_n будут продуктивны при всех $n \in \{t < n \leq T\}$, а $\underline{G}_n$ – еще и при любых значениях векторов $\underline{y}^n$.

Поскольку $M^{\mathrm{T}} = (E - \alpha)M^{\mathrm{T}-1} + \mathscr{E}v^{\mathrm{T}}$, то подмножество действующих мощностей может лишь пополняться за счет фиктивных. Соответственно совокупность столбцов в G_T с ростом T остается неизменной или увеличивается, т.е. $\underline{G}_n = [G_t, \underline{G}_{nt}]$ для всякого $n > t$ и если $\underline{G}_n$ непродуктивна, то, как следует из а) в (2.20), будет непродуктивной и G_t. Если же матрица G_t продуктивна, то по теореме 7 продуктивна и $\underline{G}_n$ независимо от способа определения $\underline{G}_{nt}$, а значит, и вектора $\underline{y}^n$.

Будем говорить, что переход осуществляется за счет внутренних ресурсов, если выполняются условия

$$\underline{y}^t \geq 0\ \ \forall\ t \leq T. \qquad (2.22)$$

С л е д с т в и е 4. Для существования перехода за счет внутренних ресурсов необходимо, чтобы все подматрицы G_T были продуктивными, а это возможно тогда и только тогда, когда продуктивна G_1.

Если G_T непродуктивна, а $\underline{y}^{\mathrm{T}} \ge 0$, то будет непродуктивной и $\underline{G}_T$, ибо, с одной стороны, $\exists q \ge 0$: $qG_T \leqq 0$, а с другой $-p\underline{y}^{\mathrm{T}} \ge 0 \;\forall\, p \ge 0$.

Это утверждение полезно в том отношении, что оно содержит критерий: для проверки технологической системы с матрицей G на возможность существования перехода при условиях (2.22) достаточно провести решение задачи (2.1)–(2.13) только для $T = 1$, и если G_1 окажется непродуктивной, то можно утверждать, что решения задачи перестройки технологического комплекса при использовании только внутренних ресурсов не существует.

Главная роль свойства продуктивности матрицы G_T заключается, пожалуй, в том, что при всех $t \le T$ и векторах $p^t \ge 0$ для некоторых столбцов g^j матрицы G_t выполняется неравенство $p^t g^j > 0$, а значит, в (2.7) для некоторых j, s будут выполняться условия $0 < p^t g^j \le r_s^{\mathrm{T}} \varphi_j^{st} + \rho_t l_j$ и, таким образом, единый вектор $(r^t, \rho_t) \ge 0$, а вектор ограничивающих ресурсов $(M^{t-1}, L_t) > 0$ (так как в M^{t-1} входят только действующие мощности). По неравенствам

$$r^t M^{t-1} + \rho_t L_t > 0 \;\;\forall\, t \le T \qquad (2.23)$$

получаем, что не только на последнем, но и на всех промежуточных шагах вектор $(u^t, v^t) \ge 0$, т.е. оптимальное решение задачи (2.1)–(2.13) при всех T становится нетривиальным.

Величину $S^{\wedge}\underline{\omega}^{\mathrm{T}}$, где $\underline{\omega}_s^{\mathrm{T}} = \max[0, (\underline{M} - (E - \alpha)M^{\mathrm{T}-1})_s]$, когда $M^{\mathrm{T}-1}$ – значение вектора мощностей на предпоследнем шаге вдоль оптимальной траектории, будем называть оценкой сверху для оптимального значения функционала (2.1). (Напомним, что величина $S^{\wedge}\omega^{\mathrm{T}}$ принимает именно такое значение, когда выполняются условия (2.19), и оно, очевидно, может рассматриваться в качестве наихудшего из возможных значений для функционала задачи с временем перехода T).

Т е о р е м а 9. Если матрица G_T продуктивна, то $S^{\wedge}\omega^{\mathrm{T}} < S^{\wedge}\underline{\omega}^{\mathrm{T}}$. Равенство между оптимальными значениями функционалов (2.1) и (2.13), используя (1.23), можно представить в форме $S^{\wedge}\omega^{\mathrm{T}} + \rho_T L_T = \underline{\mu}\underline{M} - \mu^{\mathrm{T}-1}M^{\mathrm{T}-1}$, а так как $\mu^{\mathrm{T}-1} = r^{\mathrm{T}} + \mu^{\mathrm{T}}(E - \alpha)$ и $\mu^{\mathrm{T}} = \underline{\mu}$, получим $S^{\wedge}\omega^{\mathrm{T}} + \rho_T L_T + r^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}-1} = \underline{\mu}(\underline{M} - (E - \alpha)M^{\mathrm{T}-1})$. Но $\underline{\mu}(\underline{M} - (E - \alpha)M^{\mathrm{T}-1} \le S^{\wedge}\underline{\omega}^{\mathrm{T}}$, так как $\underline{M} - (E - \alpha)M^{\mathrm{T}-1} \leqq \underline{\omega}^{\mathrm{T}}$, а $\underline{\mu} \leqq S^{\wedge}$ и теперь неравенство $S^{\wedge}\underline{\omega}^{\mathrm{T}} < S^{\wedge}\underline{\omega}^{\mathrm{T}}$ следует из (2.23).

Из приведенного доказательства видно, что если бы на оптимальной траектории выполнялись условия

$$(r^t - \mu^t\alpha)M^{t-1} + \rho_t L_t > 0 \;\;\forall\, t \le T, \qquad (2.24)$$

то полученную оценку можно было бы несколько улучшить, полагая $\underline{\omega}_s^t = \max[0, (\underline{M} - M^{t-1})_s]$. Неравенства $S^{\wedge}\omega^t < S^{\wedge}\underline{\omega}^t \;\forall\, t$ означали бы в этом случае, что, обрывая процесс на любом шаге $t \le T$, можно получить лучшую оценку функционала, чем то значение, которое гарантируется на предыдущем шаге $T - 1$. К сожалению, чтобы построить условие строгой монотонности $S^{\wedge}\omega^{\mathrm{T}}$ как функции T, этого не достаточно, так как при решении задачи с временем перехода $T - 1$ можно получить в качестве конечного значения не состояние $M^{\mathrm{T}-1}$, а некоторое другое, отличное от него состояние $\underline{M}^{\mathrm{T}-1}$. Однако если последнее зафиксировать и затем найти оптимальное решение одношаговой задачи для последнего периода $t = T$ (структура ограничений аппроксимирующей линейной модели показана в табл. 2), то результирующий вектор невязок ν^{T}, очевидно, войдет в допустимое решение задачи с временем перехода T. Далее, используя приведенные в табл. 2 обозначения переменных двойственной задачи и условия оптимальности решения, получим соотношения $S^{\wedge}\omega^{\mathrm{T}} + \underline{\rho}_T L_T + (\underline{r}^{\mathrm{T}} - \underline{\mu}\alpha)\underline{M}^{\mathrm{T}-1} \le S^{\wedge}\nu^{\mathrm{T}} + \underline{\rho}_T L_T + (\underline{r}^{\mathrm{T}} - \underline{\mu}\alpha)\underline{M}^{\mathrm{T}-1} = \underline{\mu}(\underline{M} - \underline{M}^{\mathrm{T}-1}) \le S^{\wedge}\omega^{\mathrm{T}-1}$, и если $\underline{\rho}_T L_T + (\underline{r}^{\mathrm{T}} - \underline{\mu}\alpha)\underline{M}^{\mathrm{T}-1} > 0$, то неравенство $S^{\wedge}\omega^{\mathrm{T}} < S^{\wedge}\omega^{\mathrm{T}-1}$ выполняется.

Таким образом, монотонность процесса по функционалу (с ростом T) тоже связана с условием типа (2.24), что и заставляет нас изучить его более подробно.

3. Модификация граничных условий. Итак, получен довольно интересный результат. Продуктивность матрицы G_T гарантирует выполнение неравенств (2.23) на всей траектории перехода, но для уменьшения суммы невязок с ростом T должно иметь место другое неравенство, содержащее, очевидно, какое-то дополнительное условие, смысл которого хотелось бы понять. Поскольку оно сформулировано в переменных двойственной задачи, то естественно попытаться истолковать его в терминологии, заимствованной из экономики: если предположить, что для период t компонентами вектора p^t определяются цены продуктов, то значение ρ_t должно соответствовать ставке заработной платы, вектором r^t

устанавливаться нормы прибыли (с единицы использованной мощности), а вектором μ^t – цены основных фондов (при объемах M^{t-1}). При такой интерпретации двойственных переменных в левой части неравенства (2.23) определен валовый доход, который обеспечивается функционированием всей производственной системы в периоде t, а величиной $\mu^t\alpha M^{t-1}$ тогда должны измеряться амортизационные отчисления (в том же периоде), и, следовательно, в левой части неравенства (2.24) оказывается чистый доход, формирующийся после исключения амортизации. На микроуровне чистый доход может появиться при условии, когда между компонентами векторов r^t, μ^t имеет место соотношение типа

$$r^t = \mu^t(\gamma E + \alpha), \tag{3.1}$$

где $\gamma \geq 0$ и определяет верхнюю границу процентных ставок (если $(r_s^t - \mu_s^t\alpha_s)/\mu_s^t = \gamma \geq \gamma_s$, то $r_s^t \geq \mu_s^t(\gamma_s + \alpha_s)$). По (2.14), однако, μ^{T} в (3.1) (при $t = T$) можно заменить на $\underline{\mu}$, и если описываемый механизм действительно поддерживается в нашей модели, то для строгой монотонности перехода оказывается достаточным выполнения условия $\rho_T > 0$. Однако условия (3.1) должны совмещаться с равенством (1.18). Вследствие этого получаем рекуррентные соотношения

$$\mu^{t-1} = (1+\gamma)\mu^t, \quad r^{t-1} = (1+\gamma)r^t, \tag{3.2}$$

и, таким образом, в (3.1) заключено весьма далеко идущее предположение. Тем не менее сейчас будет показано, что реализующий его физический механизм существует.

Рассмотрим задачу (2.1)–(2.13) при условии (1.7). В этом случае в правой части неравенства (2.6) получаем либо $(\alpha_s - 1)^{\mathrm{T}}M_s^0$ при $M_s^0 > 0$, либо $\underline{M}_s > 0$, но выбор значения для $\underline{M}_s$ на самом деле не определен. Если его не фиксировать, а поставить какое-то содержательное условие, которым бы определилась и величина $\underline{M}_s$, то, возможно, такой способ окажется даже более обоснованным. Например, полагая в (0.6) $\forall s \in S_1$: $M_s^{\mathrm{T}} \geq (1 + \gamma)M_s^{\mathrm{T}-1}$, мы установим, что в конце периода T все дефицитные в начальный момент мощности должны расти с темпом относительного прироста не ниже некоторой величины $\gamma \geq 0$. Тогда поскольку условие (0.5) осталось в формулировке задачи, неравенство (2.16) принимает вид

$$(\mathscr{E}v^{\mathrm{T}})_s - (\gamma+\alpha_s)\left[\sum_{t=1}^{\mathrm{T}-1}(1-\alpha_s)^{\mathrm{T}-t-1}(\mathscr{E}v^{\mathrm{T}})_s\right] \geq 0,$$

$$s \in S_1,$$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{T}}(1-\alpha_s)^{\mathrm{T}-n}(\mathscr{E}v^n)_s + \omega_s \geqq \tag{3.3}$$

$$\geqq (1-\alpha_s)^{\mathrm{T}}M_s^0, \quad s \in S/S_1,$$

и так как $\forall s \in S/S_1$ неравенство оказывается строгим, то $\underline{\mu}_s$, $\omega_s = 0$ и по теореме 4 существует допустимое решение в (0.1)–(0.14). Условия же для $s \in S_1$ на правом конце траектории примут вид

$$f_s(u^{\mathrm{T}}) - M_s^{\mathrm{T}-1} \leqq 0, \quad r_s^{\mathrm{T}} \geqq 0, \tag{3.4}$$

$$M_s^{\mathrm{T}} - (1-\alpha_s)M_s^{\mathrm{T}-1} - (\mathscr{E}v^{\mathrm{T}})_s = 0, \quad \mu_s^{\mathrm{T}}, \tag{3.5}$$

$$(1+\gamma)M_s^{\mathrm{T}-1} - M_s^{\mathrm{T}} \leqq 0, \quad \underline{\mu}_s \geqq 0, \tag{3.6}$$

$$M_s^{\mathrm{T}}, \quad \mu_s^{\mathrm{T}} - \underline{\mu}_s = 0, \tag{3.7}$$

$$M_s^{\mathrm{T}-1}, \quad (1+\gamma)\underline{\mu}_s - \mu_s^{\mathrm{T}}(1-\alpha_s) - r_s^{\mathrm{T}} = 0. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) сразу же получаем, что $r_s^{\mathrm{T}} = \mu_s^{\mathrm{T}}(\gamma + \alpha_s)$. Для $s \in S/S_1$ $\mu_s^{\mathrm{T}} = \underline{\mu}_s = 0$, а $r_s^{\mathrm{T}} \geqq 0$ и, таким образом, на правом конце выполняется условие $r^{\mathrm{T}} \geqq \mu^{\mathrm{T}}(\gamma + \alpha)$.

Последнее неравенство означает, что условия $r^{\mathrm{T}} \geqq 0$ следуют из условий $\mu^{\mathrm{T}} \geqq 0$ и потому могут быть опущены; в (3.4) поэтому возникают равенства $F(u^{\mathrm{T}}) = M^{\mathrm{T}-1}$, которые можно использовать вместе с (3.5) для исключения обоих векторов $M^{\mathrm{T}-1}$, M^{T} из условий задачи. В результате для определения финального состояния получаем самостоятельную модель

$$\max\theta, \tag{3.9}$$

$$Bv + \theta z^{\mathrm{T}} - Gu \leqq 0, \quad p \geqq 0, \tag{3.10}$$

$$(\gamma E + \alpha)F(u) - \mathscr{E}v \leqq 0, \quad \mu \geqq 0, \tag{3.11}$$

$$lu + mv \leqq 1, \quad \rho \geqq 0, \tag{3.12}$$

$$u \geqq 0, \quad pG - \mu(\gamma E + \alpha)\Phi_T - \rho l \leqq 0, \tag{3.13}$$

$$v \geqq 0, \quad \mu\mathscr{E} - pB - \rho m \leqq 0, \tag{3.14}$$

$$\theta, \quad pz^{\mathrm{T}} = 1, \tag{3.15}$$

$$\mu \geqq 0, \quad \Phi_T u \leqq F(u), \tag{3.16}$$

$$\min\rho, \tag{3.17}$$

где $z^{\mathrm{T}} = \underline{y}^{\mathrm{T}}/L_T$ (при соответствующей перенормировке u, v).

Теорема 10. При условиях (1.3) и если для $\underline{y}^{\mathrm{T}}$ выполняется требование из (1.4), то обе задачи в (3.9)–(3.17) имеют оптимальные решения.

Для доказательства достаточно повторить рассуждения, с помощью которых получены теоремы 1 и 2, и заметить, что решение u, v, $\theta = 0$ допустимо в первой из приведенных задач.

Таким образом, в оптимальном решении $\theta \geq 0$ и если в действительности $\theta > 0$, то в силу совпадения оптимальных значений функционалов $\rho > 0$, а $lu + mv = 1$. Однако поскольку для некоторых i выполняется неравенство $\theta z_i^{\mathrm{T}} > 0$, то из (3.17) $u \geq 0$, в соответствии с (0.21) $F(u) \geq 0$ и по (3.18) $\mathscr{E}v \geq 0$, а значит, и $v \geq 0$, иначе говоря, в системе будут существовать действующие и развивающиеся мощности. Если дополнительно предположить, что $m > 0$, то можно доказать еще одно утверждение.

Теорема 11. Если в оптимальном решении системы (3.9)–(3.17) $\rho > 0$ и дополнительно к предположениям из теоремы 10 выполняется еще и условие $m > 0$, то не развиваются только фиктивные мощности, т.е. для них (и только для них) выполняется равенство $(\mathscr{E}v)_s = 0$. Кроме того, для действующих мощностей выполняется условие $\mu_s > 0$, а значит, в оптимальном решении имеет место равенство $(\gamma E + \alpha)F(u) = \mathscr{E}v$.

Из предположений m, $\rho > 0$ следует, что $pB + \rho m > 0$. Если мощность действующая, то $0 < (\gamma + \alpha_s)f_s(u) \leq (\mathscr{E}v)_s$ и, значит, в оптимальном решении должно быть $v_j^s > 0$, по крайней мере для некоторых $j \in J_{2s}$. По дополняющей нежесткости в (3.14) сразу же получаем, что

$$\mu_s = \min_{j \in J_{2s}} \{pb^j + \rho m_j\} > 0. \quad (3.18)$$

Если же мощность фиктивная, т.е. $0 = (\gamma + \alpha_s)f_s(u) \leq (\mathscr{E}v)_s$ и $(\mathscr{E}v)_s > 0$, то по дополняющей нежесткости (3.11) сразу же получаем, что $\mu_s = 0$, и по дополняющей нежесткости в (3.14) должны иметь место равенства $v_j^s = 0 \; \forall j \in J_{2s}$, и значит, в действительно $(\mathscr{E}v)_s = 0$. Но если мощность не развивается, т.е. $(\mathscr{E}v)_s = 0$, то по (3.11) и (0.21) $f_s(u) = 0$ и мощность фиктивная.

Теперь можно определить вектор суммарных приростов мощностей δM и правую псевдообратную матрицу Ξ_T

$$\mathscr{E}\Xi_T = \begin{bmatrix} 0 & \\ & \underline{E} \end{bmatrix}, \quad \delta M = \mathscr{E}v, \quad v = \Xi_T \delta M \quad (3.19)$$

(где $\underline{E}$ – единичная матрица, возможно, не полной размерности, поскольку $\delta M \geq 0$). Так как $\mu \geqq 0$ в (3.11) и (3.16) всегда, то указанные условия можно заменить равенствами, которые используются для еще одного преобразования условий оптимальности решения. С учетом равенств в (3.19) получим $\delta M = \mathscr{E}v = (\gamma E + \alpha)F(u) = (\gamma E + \alpha)\Phi_T u$ и $v = \Xi_T \delta M = \Xi_T(\gamma E + \alpha)\Phi_T u$, а после этого, полагая

$$H(\gamma) = G - B\Xi_T(\gamma E + \alpha)\Phi_T,$$
$$n(\gamma) = 1 + m\Xi_T(\gamma E + \alpha)\Phi_T,$$

приводим нашу модель к компактной форме, которая соответствует статической модели с матрицей технологических коэффициентов $H(\gamma)$ и вектором коэффициентов затрат труда $n(\gamma)$

$$\max \theta, \quad (3.20)$$

$$\theta z^{\mathrm{T}} - H(\gamma)u \leqq 0, \quad p \geqq 0, \quad (3.21)$$

$$n(\gamma)u \leqq 1, \quad \rho \geqq 0, \quad (3.22)$$

$$u \geqq 0, \quad \rho n(\gamma) - pH(\gamma) \geqq 0, \quad (3.23)$$

$$\theta, \quad pz^{\mathrm{T}} = 1, \quad (3.24)$$

$$\min \rho, \quad (3.25)$$

и теперь нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 12. В модели (3.20)–(3.25) оптимальные значения функционалов $\theta = \rho > 0$, если и только если не существует такого вектора $\underline{p}$, для которого выполнялись бы условия

$$\underline{p} \geq 0, \quad \underline{p}H(\gamma) \leqq 0, \quad \underline{p}z^{\mathrm{T}} > 0. \quad (3.26)$$

Если условия (3.26) выполнены, то, как не трудно проверить, для наборов θ, $u = 0$ и $\rho = 0$, $p = \underline{p}/\underline{p}z^{\mathrm{T}}$ все неравенства в (3.21)–(3.23) выполняются с дополняющей нежесткостью, а перенормированный вектор p удовлетворяет условию $pz^{\mathrm{T}} = 1$ в (3.24). Таким образом, указанное решение оптимально в (3.20)–(3.25). Необходимость условий (3.26) следует из леммы Фаркаша [6] для системы $E\delta - H(\gamma)u = -z^{\mathrm{T}}$, δ, $u \geq 0$.

Следовательно, продуктивности матрицы $H(\gamma)$ достаточно, чтобы после модификации граничных условий для финального состояния системы выполнялось условие $M^{\mathrm{T}} \geq 0$. Для векторов μ^t после модификации граничных условий равенства в (2.15) преобразуются к виду

$$\mu^t = \sum_{n = t+1}^{\mathrm{T}-1} r^n (E - \alpha)^{n-t-1} \; \forall \; t < T - 1,$$
$$\mu^{\mathrm{T}-1} = 0, \quad \mu^{\mathrm{T}} = \underline{\mu}.$$

В заключение отметим, что, несмотря на довольно тяжелое положение с информацией, представленные в работе модели могут быть реализованы численно, по крайней мере в агрегированной и линеаризованной форме, когда в качестве G

используются матрицы укрупненных межотраслевых балансов, а вместо оператора F – непосредственно заданная матрица Φ. Для описания начального состояния народного хозяйства можно принять данные 1986 г., а для конструирования финальных состояний допустимо использовать сценарный подход. Хотя модель в принципе получится очень упрощенной, представляется, что в ходе расчетов могли бы выявиться весьма интересные результаты как с точки зрения оценки значений времени перехода в зависимости от тех или иных сценариев будущих технологических структур народного хозяйства, так и с точки зрения необходимых для осуществления перехода затрат ресурсов и получаемого эффекта в структуре и объемах конечного потребления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колбанов В.М., Медницкий В.Г.* О решении задач перестройки структуры производства // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 1.
2. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.
3. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
4. *Голдман А. Дж., Таккер А.У.* Теория линейного программирования // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
5. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
6. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.