Литература

1. Балакришнан А. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. М., Изд-во "Мир", 1974.

2. Иоффе А.Д. и Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М., Изд-во "Наука", 1974.

3. Уилкс С. Математическая статистика. М., Изд-во "Наука", 1967.

4. Клейнер Г.Б. Область определения производственной функции. Экономика и математические методы, 1978, 14, № 5.

5. Johansen L. Production functions, Amsterdam–London, 1972.

6. Петров А.А., Поспелов И.Г. Системный анализ развивающейся экономики: к теории производственных функций, I. Техническая кибернетика, 1979, № 2.

7. Петров А.А., Поспелов И.Г. Системный анализ развивающейся экономики: системный подход и односекторная модель, II. Техническая кибернетика, 1979, № 3.

8. Петров А.А., Поспелов И.Г. Системный анализ развивающейся экономики: многосекторная модель и учет природных ресурсов, III. Техническая кибернетика, 1979, № 4.

9. Петров А.А., Поспелов И.Г. Системный анализ развивающейся экономики: учет научно-технического прогресса, IV. Техническая кибернетика, 1979, № 5.

10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., Изд-во "Наука", 1966.

УДК 330.115

Г.Б. МОЛДАШЕВА, А.А. ПЕТРОВ, И.Г. ПОСПЕЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ И ВАЛЮТНОГО ОБМЕНА

Модель торговли и валютного обмена между двумя странами

В работе [1] построена простейшая односекторная, однопродуктовая модель развивающейся экономики классического рыночного типа. Используем эту модель для описания экономики каждой из двух торгующих между собой стран. Сохраним обозначения работы [1] и ограничимся минимальными пояснениями, – все внимание сосредоточим на новых элементах описаний, которые вносит учет торгового и валютного обмена между странами.

Пусть хозяйство каждой из стран сагрегировано в одну отрасль, которая выпускает однородный продукт, используемый и для расширения производства, и для потребления, и для экспорта. Выпуск продукта Y_i ограничен суммарной мощностью хозяйства M_i (индекс $i = 1, 2$ отличает одну страну от другой) и определяется количеством используемых в хозяйстве однородных трудовых ресурсов R_i через производственную функцию

$$Y_i(t) = M_i(t) f_i(x_i), \qquad x_i(t) = \frac{R_i(t)}{M_i(t)}, \tag{1.1}$$

$$f_i(x_i) = \int_{\nu_i}^{\xi_i(x_i)} \psi_i(\lambda)\, d\lambda, \tag{1.2}$$

где $\xi_i(x_i)$ является решением уравнения

$$x_i = \int_{\nu_i}^{\xi_i} \lambda \psi_i(\lambda)\, d\lambda. \tag{1.3}$$

Функция $\psi_i(\lambda)$ характеризует технологическую структуру хозяйства – распределение суммарной мощности по технологиям с разными нормами затрат труда λ, которые используются в хозяйстве. Самая совершенная из используемых технологий определяется минимальной нормой ν_i. Она характеризует технический уровень хозяйства. И функция $\psi_i(\lambda)$, и величина ν_i считаются заданными.

Изменение мощности хозяйства со временем подчиняется уравнению

$$\frac{dM_i}{dt} = I_i - \mu_i M_i, \tag{1.4}$$

где I_i – вновь создаваемая в единицу времени мощность, а μ_i – заданный темп выбытия мощности вследствие износа.

Общество каждой из стран состоит из двух несмешивающихся социальных групп: трудящихся и собственников. Трудящиеся получают доход Φ_i^R в виде зарплаты s_i

$$\Phi_i^R = s_i R_i \tag{1.5}$$

и полностью тратят его на потребление. Собственники получают доход в виде процента с капитала, часть его сберегают, а часть

$$\Phi_i^O = \eta_i(r_i) p_i Y_i \tag{1.6}$$

тратят на потребление. Через r_i обозначена норма процента, а через p_i – цена единицы продукта. Функция $\eta_i(r_i)$ задает склонность собственников к потреблению.

Предложение труда трудящимися $\tilde{R}_i$ ограничено количеством трудоспособных $P_i^A(t)$, которое считается известной функцией времени, и определяется уровнем материальной жизни ω_i^R:

$$R_i = P_i^A(t) U_i(\omega_i^R). \tag{1.7}$$

Функция $U_i(\omega_i^R)$ обладает следующими свойствами: $U_i(0) > 0$ и убывает с ростом ω_i^R при достаточно больших ω_i^R. Уровень материальной жизни ω_i^R определим ниже, когда будем рассказывать о моделировании торговли.

Спрос хозяйства на трудовые ресурсы и на инвестиции, от которых зависит величина I_i, (напомним, что спрос на товары оказывается равным фактически реализуемым количеством товаров) задается соотношениями

$$x_i = 0, \text{ если } \frac{p_i}{s_i} < \nu_i; \quad f_i'(x_i) = \frac{s_i}{p_i}, \text{ если } \nu_i \le \frac{p_i}{s_i}, \tag{1.8}$$

$$\frac{p_i Y_i}{1 + r_i} = s_i R_i + p_i b_i I_i, \tag{1.9}$$

в которых b_i обозначает норму приростной фондоемкости, а $f_i' = \dfrac{df_i}{dx_i}$.

Рынок трудовых ресурсов описывается уравнением

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{1}{\Delta_i} \max\{0, p_i f_i'(\tilde{x}_i) - s_i\}, \quad \tilde{x}_i = \frac{\tilde{R}_i}{M_i}. \tag{1.10}$$

Рынок продукта описывается системой уравнений

$$\frac{dQ_i}{dt} = Y_i - \frac{\Phi_i}{p_i}, \tag{1.11}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\alpha_i \frac{Q_i}{Y_i}, \tag{1.12}$$

где Q_i – величина запаса продукта на рынке, отсчитанная от некоторого нормативного уровня, α_i – заданная константа. Поток денежных средств Φ_i, который определяет величину покупок, будет описан ниже, так как в нем надо будет учесть потоки денег вовне и извне страны.

Как и прежде [1 – 3], предполагаем, что рынок капитала находится в равновесии, но описание его существенно изменяется, если учитывать международную торговлю и валютный обмен. Поэтому переходим к обсуждению международной торговли и обмена валют.

Из всех существующих многообразных форм внешнеторговых и финансовых обменов рассмотрим только торговлю продуктами для потребления. Схема ее такова [4]. Потребители (и собственники, и трудящиеся) в обеих странах требуют не только отечественного, но и импортного продукта. Для оплаты импортного продукта нужна валюта страны-экспортера. Поэтому часть Φ_{11} общих потребительских расходов $\Phi_1^R + \Phi_1^O$ тратится на приобретение отечественного продукта, а остальная часть Φ_{12} – на покупку валюты страны-экспортера, чтобы приобрести импортный продукт.*) Таким образом,

$$\Phi_1^R + \Phi_1^O = \Phi_{11} + \Phi_{12}. \tag{1.13}$$

Наоборот, страна-экспортер, чтобы обеспечить свой экспорт, должна продать стране-импортеру количество Θ_{12} своей валюты. Взамен она получает количество Φ_{21} чужой валюты, которая поступает в запас.

*) Все рассуждения будем проводить за страну 1.

Обмен валютами происходит в соответствии с курсами валют: золотым содержанием ν_1 единицы валюты страны 1 и золотым содержанием ν_2 валюты страны 2:

$$\nu_1 \Theta_{12} = \nu_2 \Phi_{21}.$$

Таким образом, мы полагаем для определенности, что валюты имеют золотое содержание, хотя теперь это выглядит архаизмом.

Валюта Θ_{12} тратится потребителями другой страны (страны 2) на покупку импортного продукта. Теперь можно выписать выражение для суммарных расходов всех покупателей на рынке продукта страны 1:

$$\Phi_1 = \Phi_1^l + \Phi_{11} + \Theta_{12}$$

или с учетом 1.13)

$$\Phi_1 = \Phi_1^l + \Phi_1^R + \Phi_1^O + \Theta_{12} - \Phi_{12}. \qquad (1.14)$$

На рис. 1 показана схема движения платежных средств страны 1. Как и в работе [1], удобно считать, что все платежные средства находятся в едином банке и перемещаются между счетами собственников, фирм, международной торговли и резервами. Банк имеет резерв собственной валюты V_{11} и запас чужой валюты V_{21}. Изменение банковского резерва равно изменению счетов собственников D_1^O, фирм D_1^{Φ}, международной торговли D_1^T, эмиссии денег E_1 и утечке резерва вследствие предъявления к обмену некоторого количества ϑ_{12} валюты страны 1, накопившейся в стране 2. Так как мы считаем, что валюты имеют золотое содержание, то притоку валюты ϑ_{12} может соответствовать и отток золота из банковского резерва на сумму ϑ_{12}: количество утекающего золота равно $\nu_1 \vartheta_{12}$.

Таким образом, изменение банковского резерва

$$\frac{dV_{11}}{dt} = D_1^O + D_1^{\Phi} + D_1^T - \vartheta_{12} + E_1.$$

Изменение счетов собственников

$$D_1^O = [1 + r_1(t - \tau_1)]\, \Phi_1^k(t - \tau_1) - \Phi_1^k(t) - \Phi_1^O(t),$$

так как мы не учитываем спекулятивный спрос на деньги. Через τ_1 обозначен срок, на который фирмы берут кредит у собственников.

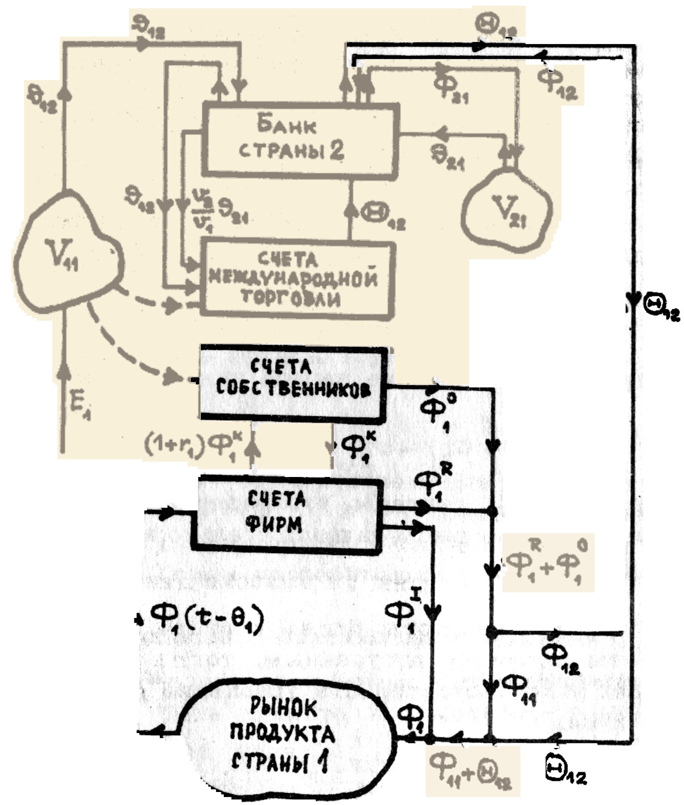

Рис. 1

Изменение счетов фирм

$$D_1^{\Phi} = \Phi_1(t - \vartheta_1) + \Phi_1^k(t) - [1 + r_1(t - \tau_1)]\, \Phi_1^k(t - \tau_1) - \Phi_1^l - \Phi_1^R \approx$$

$$\approx \Phi_1(t) - \theta_1 \frac{d\Phi_1}{dt} + \Phi_1^k(t) - [1 + r_1(t - \tau_1)]\Phi_1^k(t - \tau_1) - \Phi_1^l(t) - \Phi_1^R(t).$$

Если учесть (1.14), то

$$D_1^{\Phi} = \Phi_1^k(t) - [1 + r_1(t - \tau_1)]\, \Phi_1^k(t - \tau_1) - \theta_1 \frac{d\Phi_1}{dt} + \Phi_1^O(t) +$$

$$+ \Theta_{12}(t) - \Phi_{12}(t).$$

Изменение счетов международной торговли происходит за счет зачислений валюты ϑ_{12}, поступившей взамен утечки из резерва, зачислений платежных средств $\frac{\nu_2}{\nu_1} \vartheta_{21}$ взамен части ϑ_{21} запаса чужой валюты, предъявленной банку страны 2 к обмену на валюту страны 1 или на золото*), и изъятий Θ_{12} платежных средств для обеспечения экспорта в страну 2:

$$D_1^T = \vartheta_{12}(t) + \frac{v_2}{v_1}\,\vartheta_{21}(t) - \Theta_{12}(t).$$

Подставляя выражения для D_1^O, D_1^Φ и D_1^T в уравнение для V_{11}, получаем

$$\frac{dV_{11}}{dt} = -\theta_1 \frac{d\Phi_1}{dt} - \Phi_{12} + \frac{v_2}{v_1}\,\vartheta_{21} + E_1.$$

Очевидно, что изменение запаса чужой валюты равно

$$\frac{dV_{21}}{dt} = \Phi_{21} - \vartheta_{21}.$$

Как и в работе [1], считаем, что резерв банка постоянно держится на минимальном законодательно вмененном уровне $V_{11}^{\min} = k_1\theta_1\Phi_1 + \mathrm{const}$, а эмиссия денег – $E_1 = k_1^1 Y_1$. Кроме того, для простоты будем считать, что запас чужой валюты остается постоянным, тогда $\vartheta_{21} = \Phi_{21}$. С учетом всех этих обстоятельств уравнение для V_{11} преобразуется к виду

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \pi_1 Y_1 + \pi_{12}\left(\frac{v_2}{v_1}\Phi_{21} - \Phi_{12}\right), \qquad (1.15)$$

где $\pi_1 = \dfrac{k_1^1}{(1+k_1)\theta_1}$, $\pi_{12} = \dfrac{1}{(1+k_1)\theta_1}$. Это уравнение заменяет соответствующее уравнение работы [1] и переходит в него при $\Phi_{21} = 0$ и $\Phi_{12} = 0$.

Норма процента находится из уравнения

$$\frac{p_1 Y_1}{1+r_1} = \Phi_1 - \eta_1(r_1)p_1 Y_1 - \frac{v_2}{v_1}\Phi_{21} + \Phi_{12}, \qquad (1.16)$$

которое также переходит в соответствующее уравнение работы [1] при $\Phi_{21} = 0$ и $\Phi_{12} = 0$.

Уравнения для страны 2 получаются из уравнений (1.15) и (1.16) переменой местами индексов "1" и "2".

Чтобы замкнуть систему уравнений, осталось определить расходы стран на импорт Φ_{12} и Φ_{21}. Для этого

*) Мы полагаем, что если обмен происходит на золото, то под это золото тут же изымаются из резерва платежные средства, которые зачисляются на счет международной торговли.

необходимо описать потребительский спрос и, в частности, дать выражение уровню материальной жизни ω_i^R, который еще не определен.

Обозначим через w_{11}^R потребление отечественного продукта на душу, а через w_{21}^R потребление импортного продукта на душу в группе потребителей – трудящихся страны 1. Очевидно, что

$$w_{11}^R = \frac{\Phi_{11}^R}{p_1 P_1}, \quad w_{21}^R = \frac{v_1}{v_2}\,\frac{\Phi_{12}^R}{p_2 P_1}, \qquad (1.17)$$

где P_1 – численность группы трудящихся, а

$$\Phi_{11}^R + \Phi_{12}^R = \Phi_1^R \qquad (1.18)$$

является бюджетным ограничением для трудящихся.

Пусть функция $\Omega_1^R(w_{11}^R, w_{21}^R)$ соизмеряет потребительскую ценность для трудящихся отечественного и импортного продуктов. Тогда потребительский спрос трудящихся

определяется условием максимизации функции $\Omega_1^R(w_{11}^R, w_{21}^R)$ при условиях (1.17), (1.18), а максимальное значение Ω_1^R может быть принято в качестве характеристики уровня материальной жизни ω_1^R.

Аналогичным образом определяется потребительский спрос и уровень материальной жизни трудящихся страны 2 и собственников обеих стран: надо только менять местами индексы "1" и "2" и заменять индекс "R" индексом "O".

Рассмотрим два случая:

1) отечественный и импортный продукты взаимозаменяемы

$$\Omega_1^R = (w_{11}^R)^{\alpha_1^R}(w_{21}^R)^{1-\alpha_1^R},$$

где α_1^R – постоянная и $0 < \alpha_1^R < 1$. Тогда

$$\omega_1^R = (\alpha_1^R)^{\alpha_1^R}(1-\alpha_1^R)^{1-\alpha_1^R}\left(\frac{p_1}{p_2}\,\frac{v_1}{v_2}\right)^{1-\alpha_1^R}\frac{\Phi_1^R}{p_1 P_1} \qquad (1.19)$$

$$\Phi_{12}^R = (1-\alpha_1^R)\Phi_1^R, \quad \Phi_{21}^R = (1-\alpha_2^R)\Phi_2^R. \qquad (1.20)$$

Аналогичный вид имеет выражение Φ_{12}^O и Φ_{21}^O. Величины Φ_{12} и Φ_{21} выражаются формулами

$$\Phi_{12} = \Phi_{12}^{R} + \Phi_{12}^{O}, \quad \Phi_{21} = \Phi_{21}^{R} + \Phi_{21}^{O}. \qquad (1.21)$$

2) отечественный и импортный продукты взаимно дополняют друг друга

$$\Omega_1^R = \min\left\{\frac{w_{11}^R}{c_{11}^R}, \frac{w_{21}^R}{c_{21}^R}\right\},$$

а c_{11}^R и c_{21}^R – заданные постоянные. Тогда

$$\omega_1^R = \frac{1}{c_{11}^R} \, \frac{1}{1 + \frac{v_2}{v_1}\frac{p_2}{p_1}\frac{1}{c_1^R}} \, \frac{\Phi_1^R}{p_1 P_1},$$

где $c_1^R = \dfrac{c_{11}^R}{c_{21}^R}$, а расходы трудящихся на приобретение импортных продуктов равны

$$\Phi_{12}^R = \frac{1}{1 + c_1^R \frac{v_1}{v_2}\frac{p_1}{p_2}} \Phi_1^R, \quad \Phi_{21}^{R'} = \frac{1}{1 + c_2^R \frac{v_2}{v_1}\frac{p_2}{p_1}} \Phi_2^R. \qquad (1.20')$$

Выражения Φ_{12}^O и Φ_{21}^O имеют такой же вид, а общие расходы на потребление импортных продуктов задаются формулами (1.21).

Уравнения (1.1) – (1.12), (1.14) – (1.16), (1.19) – (1.21) образуют замкнутую систему, которая дает возможность определить состояние экономики обеих стран и торговые и валютные обмены между ними в любой момент времени по заданному начальному состоянию экономики:

$$M_i(t_0) = M_i^0, \; s_i(t_0) = s_i^0, \; Q_i(t_0) = Q_i^0,$$

$$p_i(t_0) = p_i^0, \; \Phi_i(t_0) = \Phi_i^0.$$

2. Некоторые результаты исследования модели

Во-первых, сразу же видно, что если курсы валюты не постоянны, то возможно такое развитие экономики, при котором

$$\frac{v_2}{v_1}\Phi_{21} - \Phi_{12} = 0 \quad \text{или} \quad v_2\Phi_{21} = v_1\Phi_{12}.$$

Это означает, что стоимость экспорта равна стоимости импорта и не происходит утечек из банковских резервов

обеих стран. Валютный рынок находится в равновесии: курсы валют v_1 и v_2 устанавливаются так, чтобы уравнять спрос и предложение каждой из валют. Такие курсы естественно назвать свободно плавающими.

При свободно плавающих курсах уравнения (1.15) и (1.16) для каждой страны разделяются: не содержат переменных, зависящих от состояния другой страны. Следовательно, экспоненциальный рост экономики каждой страны определяется только ее собственной структурой, а колебания курсов валют зависят от соотношения этих структур.

Например, если расходы на импорт задаются выражениями типа (1.20) $(\alpha_i^R = \alpha_i^O = \alpha_i)$ и экономика каждой страны развивается в режиме экспоненциального роста с темпом γ_i, то, как нетрудно проверить,

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{f_2(x_2^0) - (\gamma_2 + \mu_2)b_2}{f_1(x_1^0) - (\gamma_1 + \mu_1)b_1} \, \frac{M_2^0}{M_1^0} \, \frac{p_2^0}{p_1^0} \, e^{(\gamma_2 - \gamma_1)t},$$

где x_i^0 – решение уравнения

$$(1 - \eta_i(r_i^0))f_i(x_i^0) - f_i'(x_i^0)\left(x_i^0 + \frac{\pi_i b_i}{s_i^0}\right) - b_i\mu_i = 0,$$

r_i^0 – решение уравнения

$$\frac{1}{1 + r_i^0} = 1 - \eta_i(r_i^0), \text{ а } \gamma_i = \frac{\pi_i}{p_i^0}, \quad p_i^0 = \frac{s_i^0}{f_i'(x_i^0)}.$$

Однако уровень материальной жизни трудящихся ω_i^R в силу (1.19) зависит от изменения курсов валют. Следовательно, изменение курсов валют влияет на предложение трудовых ресурсов в странах-торговых партнерах и через него влияет на характер экономического развития стран в условиях, когда предложение трудовых ресурсов ограничивает развитие хозяйства.

Далее будем полагать, что установлены твердые золотые стандарты валют v_1 и v_2, т.е. отношение v_1/v_2 – постоянный параметр. Попытаемся найти режим сбалансированного экспоненциального роста, в котором экономики стран-партнеров растут с одним и тем же постоянным темпом γ. Чтобы упростить громоздкие выкладки, схематизируем исходную модель, предполагая что

1) хозяйство работает на полную мощность: $Y_i = M_i$;

2) выбытие мощностей вследствие износа пренебрежимо мало: $\mu_i = 0$;

3) потребительскими расходами собственников можно пренебречь: $\Phi_i^0 = 0$;

4) нормы приростной фондоемкости $b_1 = b_2 = b$;

5) параметры $\pi_{12} = \pi_{21} = \tilde{\pi}$.

Вследствие этого система уравнений (1.1)–(1.12), (1,14)–(1.16), (1.19)–(1.21) упростится. Выпишем уравнения для страны 1:

$$\frac{dM_1}{dt} = I_1, \tag{2.1}$$

$$\frac{p_1 M_1}{1+r_1} = s_1 R_1 + p_1 b I_1, \tag{2.2}$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = M_1 - \frac{\Phi_1}{p_1}, \tag{2.3}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\alpha_1 \frac{Q_1}{M_1}, \tag{2.4}$$

$$\Phi_1 = p_1 b I_1 + s_1 R_1 - \Phi_{12} + \frac{v_2}{v_1}\Phi_{21}, \tag{2.5}$$

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \pi_1 M_1 + \tilde{\pi}\left(\frac{v_2}{v_1}\Phi_{21} - \Phi_{12}\right). \tag{2.6}$$

К этим уравнениям надо добавить уравнения (1.20) или (1.20′), которые выражают Φ_{12} и Φ_{21} через $\Phi_1^R = s_1 R_1$ и $\Phi_2^R = s_2 R_2$. Уравнения для страны 2 получаются из уравнений (2.1)–(2.6), (1.20) заменой индекса "1" на индекс "2".

Будем искать решение этой системы в виде:

$M_i(t) = M_i e^{\gamma t}$, $I_i(t) = I_i e^{\gamma t}$, $R_i(t) = R_i e^{\gamma t}$, $\Phi_i(t) = \Phi_i e^{\gamma t}$, $Q_i(t) \equiv 0$,

$\Phi_{12}(t) = \Phi_{12} e^{\gamma t}$, $\Phi_{21}(t) = \Phi_{21} e^{\gamma t}$, $p_i(t) \equiv p_i$, $r_i(t) \equiv r_i$,

где теперь M_i, I_i, R_i, Φ_i, p_i, r_i, $i = 1,2$, Φ_{12}, Φ_{21} постоянные неизвестные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\gamma M_1 = I_1, \tag{2.7}$$

$$\frac{p_1 M_1}{1+r_1} = s_1 R_1 + p_1 b I_1, \tag{2.8}$$

$$\Phi_1 = p_1 M_1, \tag{2.9}$$

$$\Phi_1 = p_1 b I_1 + s_1 R_1 - \Phi_{12} + \frac{v_2}{v_1}\Phi_{21}, \tag{2.10}$$

$$\gamma\Phi_1 = \pi_1 M_1 + \tilde{\pi}\left(\frac{v_2}{v_1}\Phi_{21} - \Phi_{12}\right) \tag{2.11}$$

и уравнениям (1.20) (или (1.20′)).

Таким образом, для определения 13 неизвестных*): M_1, M_2, I_1, I_2, Φ_1, Φ_2, p_1, p_2, r_1, r_2, Φ_{12}, Φ_{21}, γ имеем 6 уравнений (2.7)–(2.11), (2.20) для страны 1 и 6 аналогичных уравнений для страны 2. Заметим, что эта система однородна относительно неизвестных, поэтому решение ее находится с точностью до мультипликативной постоянной. В качестве такой постоянной можно выбрать мощность M_1. Таким образом, если при заданных s_i существует общий для экономики темп экспоненциального роста γ, то система (2.7)–(2.11), (1.20) определяет целое семейство режимов сбалансированного экспоненциального роста, зависящее от параметра M_1.

Введем новые параметры x_i по формуле $R_i = x_i M_i$ и тем самым исключим величины R_i. Уравнение (2.7) используем для исключения неизвестной I_1. Тогда уравнение (2.8) определяет неизвестную r_1 по неизвестным p_1 и γ:

$$\frac{1}{1+r_1} = \frac{s_1 x_1}{p_1} + \gamma b.$$

Для определения неизвестных Φ_i, p_i, Φ_{12}, Φ_{21}, γ получаем систему

$$\Phi_1 = p_1 M_1, \tag{2.12}$$

$$\Phi_1 = \gamma b p_1 M_1 + s_1 x_1 M_1 - \Phi_{12} + \frac{v_2}{v_1}\Phi_{21}, \tag{2.13}$$

$$\gamma\Phi_1 = \pi_1 M_1 + \tilde{\pi}\left(\frac{v_2}{v_1}\Phi_{21} - \Phi_{12}\right) \tag{2.14}$$

и уравнения (1.20). Исключим из (2.13) с помощью (2.14) выражение $\frac{v_2}{v_1}\Phi_{21} - \Phi_{12}$, а с помощью (2.11) Φ_1 и получим выражение для неизвестных p_i через темп роста γ:

$$p_i = \frac{\sigma_i - \frac{\pi_i}{\tilde{\pi}}}{1 - \gamma\left(b + \frac{1}{\tilde{\pi}}\right)}, \tag{2.15}$$

где

$$\sigma_i = s_i x_i. \tag{2.16}$$

---

*) Величины R_i однозначно определяются величинами M_i через производственную функцию. Величины s_i считаются заданными.

Исключим из (2.14) неизвестную Φ_1 с помощью (2.13), запишем аналогичное уравнение для страны 2 и получим выражение неизвестной M_2 через неизвестные p_i и γ:

$$\frac{M_2}{M_1} = -\frac{\nu_1}{\nu_2}\,\frac{\gamma p_1-\pi_1}{\gamma p_2-\pi_2}. \qquad (2.17)$$

Используем уравнение (2.13), чтобы определить темп роста γ. Исключая из него Φ_1 с помощью (2.13) и M_2/M_1 с помощью (2.17), находим, что

$$(1-\gamma b)p_1 = \sigma_1 - \sigma_1\bar\Phi_{12} - \sigma_2\bar\Phi_{21}\,\frac{\gamma p_1-\pi_1}{\gamma p_2-\pi_2},$$

где $\bar\Phi_{12} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1^R}$, $\bar\Phi_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2^R}$. Выражаем в этом уравнении p_1 формулой (2.15), и получаем уравнение

$$\frac{1}{\tilde\pi} + \frac{\sigma_1}{\gamma p_1-\pi_1}\bar\Phi_{12} + \frac{\sigma_2}{\gamma p_2-\pi_2}\bar\Phi_{21} = 0. \qquad (2.18)$$

Из (1.20) следует, что $\bar\Phi_{12} = 1-\alpha_1^R$, $\bar\Phi_{21} = 1-\alpha_2^R$. Подставляя эти выражения вместе с (2.15) в уравнение (2.18), получаем квадратное уравнение для темпа роста γ, коэффициенты которого не зависят от курса валют ν_1/ν_2. Таким образом, оказывается, что если отечественный и импортный продукты взаимозаменяемы, то темп сбалансированного экспоненциального роста экономик стран-торговых партнеров не зависит от курса валют. Исследование уравнения показывает, что, действительно, существует темп роста $\gamma > 0$.

Если отечественный и импортный продукты взаимно дополняют один другого, то величины Φ_{12} и Φ_{21} выражаются формулами (1.20′). Подставим эти формулы вместе с (2.15) в уравнение (2.18). Чтобы упростить выкладки, будем считать, что

$$\frac{c_{11}^R}{c_{21}^R}\,\frac{c_{22}^R}{c_{12}^R} = 1. \qquad (2.19)$$

Тогда уравнение (2.18) можно привести к виду

$$b\gamma = \frac{y+1}{(\delta_1+1)y+\delta_2+1} \qquad (2.20)$$

где

$$y = \frac{\pi_1}{\pi_2}\,\frac{c_{11}^R}{c_{21}^R}\,\frac{\nu_1}{\nu_2},\quad \delta_i = \frac{\sigma_i}{\pi_i b}. \qquad (2.21)$$

Формула (2.20) выражает зависимость темпа роста γ от курса валют ν_1/ν_2. Смысл безразмерных комбинаций y и δ_i будет пояснен дальше, когда полученные результаты будут обсуждаться с экономической точки зрения.

По определению, внешнеторговый баланс страны равен разности выручки от экспорта и расходов на импорт, т.е. $\frac{\nu_2}{\nu_1}\Phi_{21}-\Phi_{12}$. Чтобы найти эту величину, исключим из (2.13) переменную p_1 с помощью (2.15) и γ с помощью (2.20). В результате получим

$$\varphi_{12} = \frac{\nu_2}{\nu_1}\Phi_{21}-\Phi_{12} = \frac{\delta_1-\delta_2}{(\tilde\pi b\delta_1-1)y+\tilde\pi b\delta_2-1}\,\pi_1 bM_1. \qquad (2.22)$$

Заметим, что с помощью этого выражения из (2.14) можно получить следующие выражения для темпа роста γ:

$$\gamma = \gamma_1\left(1+\tilde\pi b\,\frac{\delta_1-\delta_2}{(\tilde\pi b\delta_1-1)y+\tilde\pi b\delta_2-1}\right) \qquad (2.23)$$

$$\gamma = \gamma_2\left(1+\tilde\pi b\,\frac{\delta_2-\delta_1}{(\tilde\pi b\delta_2-1)y+\tilde\pi b\delta_1-1}\right)$$

где $\gamma_i = \frac{\pi_i}{p_i}$, $i = 1, 2$.

Из (2.15) теперь нетрудно получить зависимость внутренних цен p_i от курса валют ν_1/ν_2:

$$p_1 = \hat p_1\,\frac{y+\frac{\delta_2+1}{\delta_1+1}}{y+\frac{\tilde\pi b\delta_2-1}{\tilde\pi b\delta_1-1}},\qquad p_2 = \hat p_2\,\frac{y+\frac{\delta_1+1}{\delta_2+1}}{y+\frac{\tilde\pi b\delta_1-1}{\tilde\pi b\delta_2-1}}, \qquad (2.24)$$

где $\hat p_i = \pi_i b(\delta_i+1)$, $i = 1, 2$ – выражение для цены продукта в изолированной экономике.

Из выражений (2.23) с помощью (2.24) легко получить связь темпа сбалансированного роста экономик стран-торговых партнеров с темпами роста $\hat\gamma_i = \frac{\pi_i}{\hat p_i}$ каждой страны в отдельности, когда между ними нет торговли:

$$\gamma = \hat\gamma_1\,\frac{(\delta_1+1)(y+1)}{(\delta_1+1)y+\delta_2+1},\qquad \gamma = \hat\gamma_2\,\frac{(\delta_2+1)(y+1)}{(\delta_2+1)y+\delta_1+1}.$$

Наконец, из выражения (1.19) находим зависимость уровня метериальной жизни трудящихся от курса валют ν_1/ν_2:

$$\omega_1^R = \frac{1}{c_{11}^R}\,\frac{\delta_1 y}{(\delta_1+1)y+\delta_2+1}\,\frac{M_1}{P_1}. \qquad (2.25)$$

Обратимся к экономической интерпретации полученных результатов. Во-первых, заметим, что зависимости темпа роста γ, внешнеторгового баланса φ_{12}, цены на внутреннем рынке p_1 и уровня материальной жизни ω_1^R от курса валют v_1/v_2 определяются безразмерными комбинациями δ_1, δ_2, $\tilde{\pi} b$, y. Поэтому у всех стран-торговых партнеров, у которых одинаковы структурные параметры δ_1, δ_2, $\tilde{\pi} b$, y, одинаковыми будут и экономические показатели $b\gamma$, $\frac{\varphi_{12}}{\pi_1 b M_1}$, $\frac{p_i}{\hat{p}_i}$, $\frac{c_{ii}^R \omega_i^R p_i}{M_i}$.

Таким образом, сформулирован "закон экономического подобия" в задаче о внешней торговле двух стран с классической рыночной экономикой.

Среди безразмерных структурных параметров важную роль играют параметры δ_1 и δ_2. Обратимся к выражению (2.20). Легко видеть, что $b\gamma(0) = \frac{1}{\delta_2 + 1}$, а $b\gamma(\infty) = \frac{1}{\delta_1 + 1}$. Следовательно, если $\delta_1 > \delta_2$, то $\gamma(0) > \gamma(\infty)$ и темп роста экономики торгующих стран растет с уменьшением v_1/v_2, т.е. при девальвации валюты страны 1.

Заметим, что отношение $c_1^R = \frac{c_{11}^R}{c_{21}^R}$, которое входит в выражение (2.21) для y, задает соотношение количеств потребляемого отечественного и импортного продуктов.

Чем меньше c_1^R, тем больше импортного продукта потребляется на единицу потребляемого отечественного продукта и тем больше развитие страны 1 зависит от торговли со страной 2. При этом, чем меньше c_1^R, тем больше приходится девальвировать валюту стране 1, чтобы обеспечить заданный прирост y и, следовательно, заданное увеличение темпа роста. То же самое можно сказать относительно отношения π_1/π_2: чем меньше это отношение, тем сильнее надо девальвировать валюту стране 1.

"Закон экономического подобия" показывает, что такие экономические мероприятия, как уменьшение эмиссии платежных средств (уменьшение отношения π_1/π_2) или стимулирование потребления импортного продукта (уменьшение величины c_1^R) оказываются эквивалентными девальвации валюты при стремлении повысить темп экономического развития торгующих стран. При этом оказывается, что каждое из мероприятий делает экономику страны менее

чувствительной к девальвации валюты: при $\Delta(\frac{v_1}{v_2})$ величина Δy становится меньше.

Теперь следует обсудить экономический смысл параметра δ_i. Согласно (2.21)

$$\delta_i = \frac{s_i x_i}{\pi_i b}$$

и определяется структурными параметрами экономики: нормой приростной фондоемкости b, средней в хозяйстве нормой затрат труда x_i на единицу продукта, ставкой заработной платы s_i и параметром $\pi_i = \frac{k_i}{(1+k_i)\theta_i}$. Следовательно, чем больше в хозяйстве затраты труда на выпуск единицы продукции, чем меньше фондоемкость хозяйства, чем медленнее в экономике оборачиваются платежные средства, тем больше величина δ_i.

Чтобы охарактеризовать экономический смысл параметра δ_i, полезно рассмотреть гипотетический режим максимального роста в изолированной экономике. В этом режиме весь произведенный продукт используется для расширения производства, реализуясь на рынке. Нетрудно видеть, что в этом режиме

$$\frac{dM_i^*}{dt} = I_i^*, \quad bI_i^* = M_i^*, \quad \frac{d\Phi_i^*}{dt} = \pi_i M_i^*, \quad \Phi_i^* = p_i^* M_i^*, \quad Q_i^* \equiv 0, \quad p_i^* = \mathrm{const}, \quad r_i^* = 0. \qquad (2.26)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d\Phi_i^*}{dt} = \pi_i b \frac{dM_i^*}{dt}.$$

Естественно считать, что $\Phi_i^* = 0$ при $M_i^* = 0$. Поэтому после интегрирования последнего уравнения находим, что

$$\Phi_i^* = \pi_i b M_i^*. \qquad (2.27)$$

Из (2.21), определения σ_i, x_i следует, что

$$\delta_i = \frac{s_i R_i}{\pi_i b M_i}.$$

Учитывая (2.27), находим, что

$$\delta_i = \frac{s_i R_i}{\Phi_i^*(M_i)} \qquad (2.28)$$

есть отношение потока потребительских расходов $s_i R_i$ в стране к потоку платежных средств $\Phi_i^*(M_i)$, необходимому для максимального расширения производства в стране из данного текущего состояния M_i при отсутствии торговли. Заметим, что в силу (2.28) параметр δ_i можно представить и в таком виде

$$\delta_i = \frac{s_i x_i}{p_i^*} = \frac{\sigma_i}{p_i^*},$$

где p_i^* – цена фондообразующего продукта в режиме максимального роста при условии, что $M_i^* = M_i$, текущей величине мощности. Цена p_i^* также является параметром, характеризующим структуру изолированной экономики.

Итак, можно сказать, что для увеличения темпа сбалансированного экспоненциального роста стран-торговых партнеров надо девальвировать валюту той из стран, у которой больше величина параметра δ (2.28), т.е. той, у которой относительно дороже трудовые ресурсы.

Теперь посмотрим, как влияет девальвация валюты на другие экономические показатели страны 1. Однако, прежде заметим, что следует считать справедливыми неравенства $\tilde{\pi} b\delta_i - 1 > 0$. Действительно, отсюда следует, что $\tilde{\pi} b > \frac{1}{\delta_i}$. Подставляя сюда выражения для $\tilde{\pi}$ и δ_i, легко находим, что неравенство верно, если выполнено неравенство $s_i R_i > k_i^i M_i$. Это неравенство естественно считать справедливым, так как в "здоровой" экономике поток потребительских платежей больше потока эмиссии платежных средств.

Из (2.24) следует, что $p_1(0) = \hat{p}_1 \dfrac{\frac{\delta_2+1}{\delta_1+1}}{\frac{\tilde{\pi} b\delta_2-1}{\tilde{\pi} b\delta_1-1}}$, $p_1(\infty) = p_1$.

Нетрудно усмотреть, что если $\tilde{\pi} b\delta_i - 1 > 0$, то из неравенства $\delta_1>\delta_2$ следует, что $\frac{\delta_2+1}{\delta_1+1} > \frac{\tilde{\pi} b\delta_2-1}{\tilde{\pi} b\delta_1-1}$, откуда находим, что $p_1(0) > p_1(\infty)$. При девальвации валюты с целью повысить темп сбалансированного роста внутренняя цена на производимый в стране продукт повышается. Это означает, что девальвация валюты с целью повысить темп экономического развития вызывает в стране инфляцию.

Из (2.22) следует, что при $\delta_1>\delta_2$ страна 1 имеет активный внешнеторговый баланс: $\varphi_{12}>0$. При этом $\varphi_{12}(0) =$

$\frac{\delta_1-\delta_2}{\tilde{\pi} b\delta_2 - 1}\pi_1 bM_1$, а $\varphi_{12}(\infty) = 0$. Следовательно, при девальвации валюты с целью повысить темп экономического развития обеих стран-торговых партнеров в стране 1 растет положительное сальдо внешней торговли.

Наконец, из (2.25) следует, что при этом уровень материальной жизни трудящихся в стране 1 падает. Действительно, $\omega_1^R(0) = 0$, а

$$\omega_1^R(\infty) = \frac{1}{c_{11}^R}\,\frac{\delta_1}{\delta_1+1}\,\frac{M_1}{P_1}.$$

Таким образом, повышение темпов экономического развития стран-торговых партнеров может произойти в результате девальвации валюты той из стран, у которой экономика менее эффективна, т.е. трудовые ресурсы дороже и величина параметра δ больше (2.28). Это – либо страна с эффективным хозяйством, но высокой ставкой заработной платы, либо страна с большими затратами труда на выпуск продукции и малой капиталоемкостью производства, т.е. с неэффективным хозяйством. Рост темпа экономического развития сопровождается инфляционным ростом цен и понижением уровня жизни трудящихся в стране, девальвирующей валюту. Однако внешнеторговый баланс этой страны становится более активным. Это означает, что рост темпа экономического развития происходит за счет увеличения потока платежных средств из другой страны. Грубо говоря, схема такова: инфляционный рост цен снижает потребление трудящихся в стране 1, следовательно, импорт страны 1: это дает возможность расширять экспорт и инвестиции на расширение производства за счет роста внешнеторгового баланса.

3. Результаты численных имитационных экспериментов с моделью

Имитационные эксперименты с моделью имели методический характер. Целью экспериментов было исследовать качественные особенности экономического развития торгующих между собой стран.

В первую очередь надо было установить, хотя бы экспериментально, существование режима сбалансированного экспоненциального роста обеих стран. Напомним, что в разд. 2 существование сбалансированного экспоненциального роста было установлено при многочисленных упрощающих предположениях. В частности, предполагалось, что

$c_1^R c_2^R = 1$, где $c_1^R = \frac{c_{11}^R}{c_{21}^R}$, $c_2^R = \frac{c_{22}^R}{c_{12}^R}$ характеризуют соотношение потребляемых количеств отечественного и импортного продуктов в странах. Чем меньше c_i^R, тем больше потребление импортного продукта на единицу потребляемого отечественного продукта в i-й стране, следовательно, тем больше развитие i-й страны зависит от развития ее торгового партнера. Наоборот, чем больше c_i^R, тем меньше международная торговля влияет на развитие i-й страны.

Удобно ввести новые параметры

$$\kappa_1 = \frac{c_1^R}{1+c_1^R}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{1+c_2^R},$$

характеризующие взаимозависимость страны 1 и страны 2 через взаимную торговлю. Если $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0$, то $c_1^R = \infty$, $c_2^R = \infty$, и страна 1, и страна 2 не связаны между собой взаимной торговлей. Чем меньше κ_1 и чем больше κ_2, тем сильнее страна 1 и страна 2 взаимозависимы и тем существеннее торговля между ними. Заметим, что случай, разобранный во втором разделе статьи, соответствует условию $\kappa_1 = \kappa_2$.

Чтобы исследовать влияние "связанности" стран на характер их экономического развития, проводились имитационные эксперименты, в которых изучался характер выхода системы двух стран в режим сбалансированного роста. Мы не особенно заботились о подборе параметров модели: они подбирались так, чтобы только темп роста имел бы правдоподобные значения порядка 5% в год. Все структурные параметры, характеризующие экономику стран, были выбраны одинаковыми, за исключением параметров ν, характеризующих технический уровень хозяйства стран (см. первый разд.). Эксперименты проводились при $\nu_1 = 0.05$, $\nu_2 = 0.1$. От эксперимента к эксперименту изменялись параметры κ_1, κ_2, характеризующие "связанность" стран.

Некоторые результаты имитационных экспериментов представлены на рис. 2–6. Графики на рис. 2–6 показывают характер процесса выхода экономик стран в режим сбалансированного роста и влияние на этот процесс "связанности" стран κ_1 и κ_2. Как видно из рис. 2–6, процесс выхода на сбалансированный рост состоит из двух составляющих. Первая составляющая показывает, как каждая из стран из начального состояния выходит в "собственный" режим экспоненциального роста. На рис. 2 показаны кривые зависимости темпа роста стран от времени, на рис. 3 – зависимость цен от времени (кривые 1,2 на

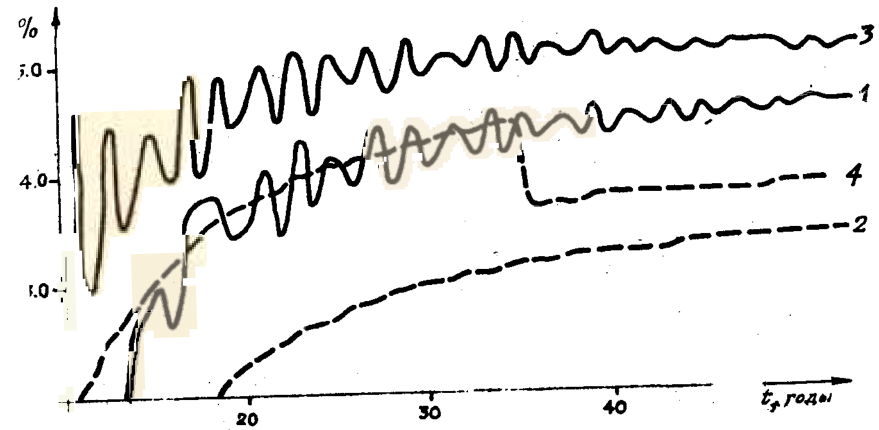

Рис. 2

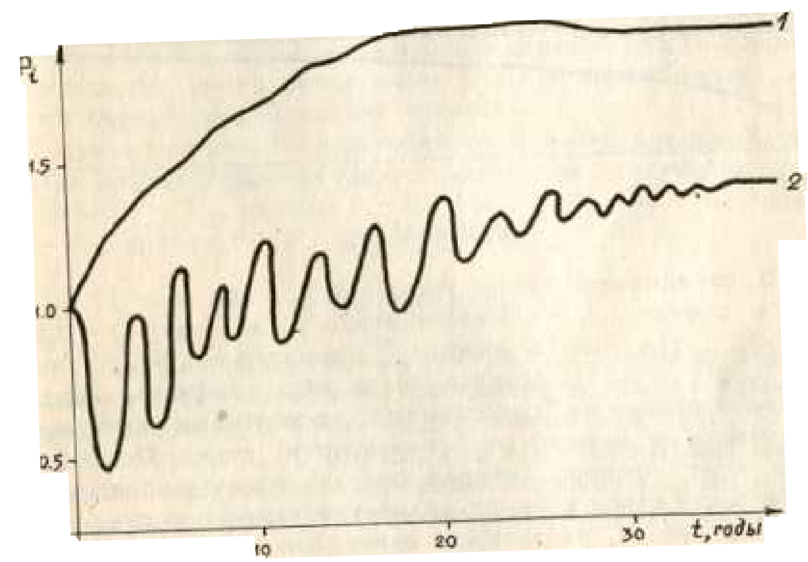

Рис. 3

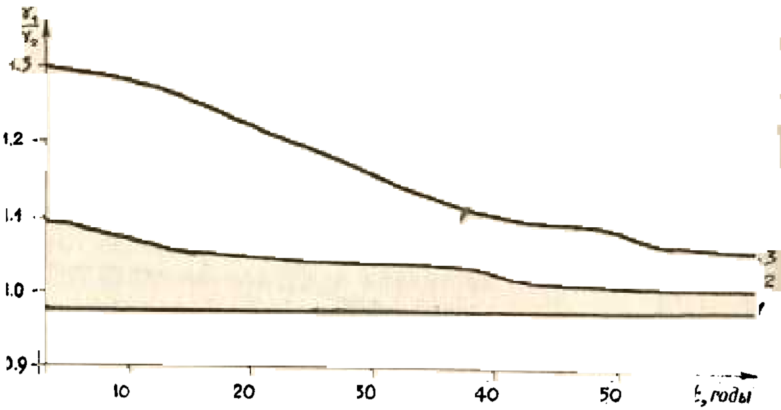

Рис. 4

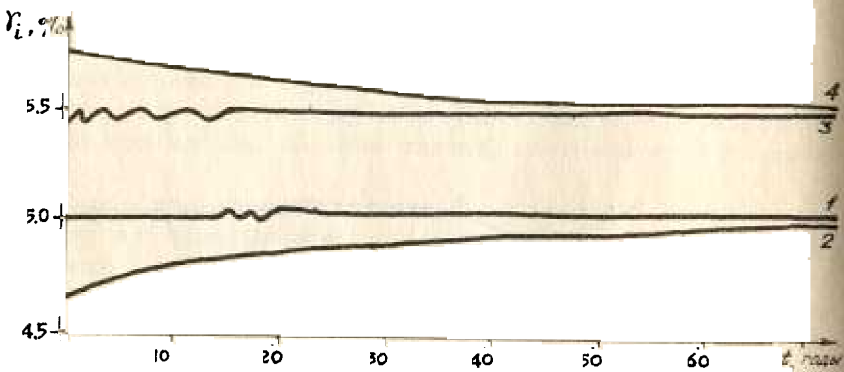

Рис. 5

рис. 2 показывают темпы роста γ_1, γ_2, при $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0$, а кривые 3,4 – соответственно γ_1, γ_2 при $\kappa_1 = 0.8$, $\kappa_2 = 0.1$. На рис. 3 кривые 1,2 показывают p_1, p_2 при $\kappa_1 = 0.8$, $\kappa_2 = 0.1$). Как видно из этих графиков, выход экономики страны на "собственный" экспоненциальный рост практически не зависит от "связанности" стран. Одновременно идет процесс (вторая составляющая) сближения темпов роста стран к темпу сбалансированного роста. Как видно из рис. 4, на котором приведены графики зависимости от времени отношения темпов роста γ_1 / γ_2 стран, этот процесс также не сильно зависит от "связанности" стран (кривая 1 соответствует $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0$, кривая 2 – $\kappa_1 = 0.6$, $\kappa_2 = 0.1$, кривая 3 – $\kappa_1 = 0.7$, $\kappa_2 = 0.1$). Кривые 1,2 (кривая 1 соответствует γ_1, кривая 2 – γ_2 при $\kappa_1 =$

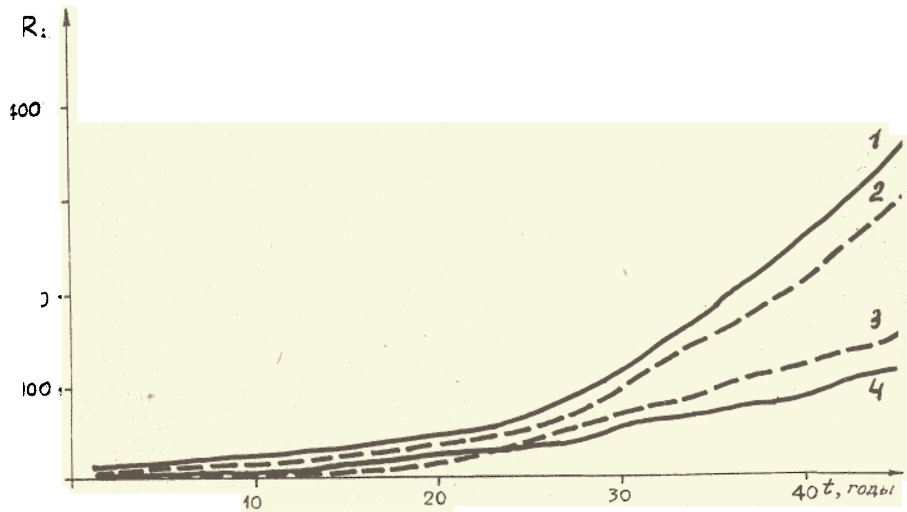

Рис. 6

$= 0.8$, $\kappa_2 = 0.1$) и 3,4 (3 – γ_1, 4 – γ_2 при $\kappa_1 = 0.6$, $\kappa_2 = 0.1$) на рис. 5 показывают, что характерное время второй составляющей процесса выхода стран в режим сбалансированного роста значительно больше характерного времени первой составляющей процесса.

Кривые на рис. 6 характеризуют влияние взаимной торговли между странами на рост занятости в хозяйстве стран (кривая 1 – R_1, кривая 2 – R_2 при $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0$, кривая 3 – R_1, кривая 4 – R_2 при $\kappa_1 = 0.6$, $\kappa_2 = 0.1$).

Литература

1. Петров А.А., Поспелов И.Г. Системный анализ развивающейся экономики: системный подход и односекторная модель, II. Техническая кибернетика, 1979, № 3.

2. Петров А.А., Поспелов И.Г. Системный анализ развивающейся экономики: многосекторная модель и учет природных ресурсов, III. Техническая кибернетика, 1979, № 4.

3. Петров А.А., Поспелов И.Г. Системный анализ развивающейся экономики: учет научно-технического прогресса, IV. Техническая кибернетика, 1979, № 5.

4. Елин Г.М. Иностранные валюты и механизм международных расчетов, М., Госфиниздат, 1946.