ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1998, том 38, № 6, с. 1054–1056

УДК 517.958:531.33

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА ДЛЯ БОЗОНОВ ПРИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

© 1998 г. В. И. Цурков

(117967 Москва, ГСП-1, Вавилова, 40, ВЦ РАН)

Поступила в редакцию 15. 01. 97 г.
Переработанный вариант 28. 10. 97 г.

Найден локализованный сильный рост плотности для решений газодинамических уравнений Эйлера с уравнением состояния вырожденного газа Бозе–Эйнштейна вблизи абсолютного нуля температуры при цилиндрической и сферической симметрии.

В [1] установлена невозможность неограниченности решений задачи Коши для одномерных нестационарных уравнений Эйлера, если уравнение состояния газа удовлетворяет полученным там условиям. Одно из этих условий нарушается при абсолютном нуле температуры для вырожденного газа Бозе–Эйнштейна. Детальное исследование этого случая в [1], [2] привело к следующей постановке. Имеется газ с нулевой скоростью и постоянной плотностью, а энтропия задается в виде симметричной степенной функции с положительным минимумом. Очевидно, газ будет "втекать" некоторое время в точку минимума энтропии, поэтому плотность там будет возрастать. В [1], [2] обнаружено следующее поведение решения. В некотором диапазоне показателей степени начальной энтропии при стремлении минимума энтропии к нулю указанный максимум плотности стремится к бесконечности и зона эффекта (по времени и по пространству) стремится к нулю. В пределе имеем поведение типа δ-функции Дирака. Указанное свойство решения подтверждается численными расчетами [1], а также найденным автомодельным решением [2].

После того как в [3], [4] было сообщено, что удалось, наконец, создать столь низкие температуры и получить на несколько секунд бозе-конденсат и что при этом были экспериментально обнаружены пики плотности, указанная тематика становится весьма актуальной. В данной работе по методике [1], [2] найден локализованный сильный рост плотности в случае цилиндрической и сферической симметрии.

Рассмотрим нестационарные газодинамические уравнения Эйлера в лагранжевых координатах в случае цилиндрической ($\nu = 1$) и сферической ($\nu = 2$) симметрии (см., например, [5, гл. 2, §2, п. 8]):

$$\frac{\partial V}{\partial t} - x^{\nu}\frac{\partial u}{\partial q} = \nu\frac{uV}{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + x^{\nu}\frac{\partial p}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = u,$$

где t – время, q и x – лагранжева и эйлеровы координаты соответственно, u – скорость, $V = 1/\rho$ – удельный объем, ρ – плотность, s – энтропия, p – давление, которое для вырожденного Бозе-газа имеет вид

$$p(V, s) = A_0^2 V^{-\gamma} s^{2\alpha}/\gamma.$$

Рассматриваются начальные данные

$$u(0, q) = 0, \quad V(0, q) = V_0, \quad s_0(0, q) = s_0 q^{\beta} + s_1, \quad q \in [0, \infty),$$

где V_0, s_0, β, s_1 являются положительными постоянными.

Имеем также

$$\int_0^{x(0,q)} \rho_0(w) w^{\nu} dw = q,$$

откуда получаем начальное условие

$$x(0, q) = [V_0 q(\nu + 1)]^{1/(\nu + 1)}.$$

В случае цилиндрической и сферической симметрии естественно рассматривать смешанную задачу с условием на левом конце

$$u(t, 0) = 0.$$

Исходная система записывается в инвариантах Римана:

$$\partial r_{\mp}/\partial t \mp x^{\nu}\rho c \partial r_{\mp}/\partial q = f_{\mp}, \quad r_{\mp} = u \mp 2A_0^{\alpha/2}(s_0 q^{\beta} + s_1)^{\alpha}\rho^{(\gamma-1)/2}/(\gamma-1),$$

$$c = A_0^{\alpha/2}(s_0 q^{\beta} + s_1)^{\alpha}\rho^{(\gamma-1)/2}, \quad \rho = [(\gamma-1)(r_+ - r_-)][4A_0^{\alpha/2}(s_0 q^{\beta} + s_1)^{\alpha}]^{-2/(\gamma-1)},$$

$$f_{\mp} = \pm\nu u(\gamma-1)(r_+ - r_-)/4x + g,$$

$$g = \alpha\beta(\gamma+1)(1/4)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}s_0 q^{(\beta-1)}\gamma^{2/(\gamma-1)}(r_+ - r_-)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}\gamma^{-1}A_0^{-\alpha(\gamma-1)}(s_0 q^{\beta} + s_1) -$$
$$-(2\alpha + \gamma - 1)/(\gamma - 1).$$

Так же как в [1], осуществляется численное интегрирование по явной разностной схеме бегущего счета (см., например, [5, гл. 3, § 4, п. 2]). На оси $q = 0$ последовательно решается уравнение $r_+ + r_- = 0$. Критерием остановки является нарушение условия Куранта

$$\tau = \Delta t, \quad h = \Delta x, \quad \tau x^{\nu}\rho c/h < 1,$$

что имеет место, поскольку плотность сильно возрастает в окрестности $q = 0$.

В случае цилиндрической симметрии $\nu = 1$ для значений параметров $2\alpha = \gamma = 5/3$, $\rho_0 = 0.5$, $s_0 = 0.3$, $A_0 = 0.5$, $\beta = 0.4$, $\tau = h = 10^{-2}$ при s_1, равных 10^{-2} и 5×10^{-3} получено увеличение плотности, соответственно, в 40 и 200 раз. В случае сферической симметрии $\nu = 2$ для $\rho_0 = 0.1$, $s_0 = 0.5$, $A_0 = 0.5$ и предыдущих остальных параметров получено увеличение плотности в 52 и 104 раза соответственно. Расчеты велись в единичном треугольнике. Количество расчетных слоев ~50. Зона роста плотности по q порядка нескольких шагов.

Так же как в [2], начальное условие

$$s(t, q) = s_0 q^{\beta}$$

дает автомодельное решение, которое в рассматриваемом случае симметрии имеет вид

$$v(t, q) = V(\xi), \quad u(t, q) = q^{\alpha\beta}U(\xi), \quad x(t, q) = q^{1/(1+\nu)}X(\xi),$$

где $\xi = tq^{\alpha\beta - 1/(\nu+1)}$ является автомодельной переменной, а функции $V(\xi)$, $U(\xi)$, $X(\xi)$ удовлетворяют следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$dU(\xi)/d\xi = A_0^2[X(\xi)]^{\nu}\{\xi[\alpha\beta - 1/(\gamma+1)][X(\xi)]^{\nu}[V(\xi)]^{-\gamma-1}\alpha\beta U(\xi) + \nu U(\xi)[V(\xi)]^{-2\gamma}/X(\xi) -$$
$$-[V(\xi)]^{-\gamma}2\alpha\beta/\gamma\}\{1 - [X(\xi)]^{2\nu}A_0^2\xi^2[\alpha\beta - 1/(\nu+1)]^2[V(\xi)]^{-\gamma-1}\}^{-1},$$

$$dV(\xi)/d\xi = \{[X(\xi)]^{\nu}\alpha\beta U(\xi) + \nu U(\xi)V(\xi)/X(\xi) - A_0^2[X(\xi)]^{2\nu}\xi[\alpha\beta - 1/(\gamma+1)][V(\xi)]^{-\gamma}2\alpha\beta/\gamma\}\times$$
$$\times\{1 - [X(\xi)]^{2\nu}A_0^2\xi^2[\alpha\beta - 1/(\gamma+1)]^2[V(\xi)]^{-\gamma-1}\}^{-1},$$

$$dX(\xi)/d\xi = U(\xi)$$

с начальными данными

$$U(0) = 0, \quad V(0) = v^0, \quad X(0) = (v_0\nu)^{1/(\nu+1)}.$$

Если выполняется условие

$$\alpha\beta - 1/(\nu+1) < 0,$$

то получаются следующие асимптотические формулы, где ξ стремится к бесконечности:

$$V(\xi) = o(\xi^{2\alpha\beta/\{\gamma[\alpha\beta - 1/(\nu+1)]\}}), \quad U(\xi) = o(\xi^{-\alpha\beta/[\alpha\beta - 1/(\nu+1)]}).$$

Окончательно:

$$\rho(t, q) \sim t^{-2\alpha\beta/\{\gamma[\alpha\beta - 1/(\nu+1)]\}}q^{2\alpha\beta/\gamma}, \quad u(t, q) \sim t^{-\alpha\beta/[\alpha\beta - 1/(\nu+1)]},$$

что подтверждает эффект сильного локализованного роста плотности.

Автор благодарен Д.В. Булгакову за программные расчеты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цурков В.И.* Газодинамические эффекты, связанные с неограниченностью решений квазилинейных систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 2. С. 481–490.
2. *Цурков В.И.* Об одном автомодельном решении уравнений газодинамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 4. С. 1051–1056.
3. *Anderson M.H., Ensher J.R., Mattews M.R. et al.* Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor // Science. 1995. V. 269. P.198–201.
4. *Burnett K.* An intimate gathering of Bosons // Science. 1995. V. 269. P. 182–183.
5. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.