УДК 519.85

М.Б. Ахмади, Ю.Е. Малашенко, Н.М. Новикова

Исследование живучести иерархической сети [1]

(кафедра исследования операций факультета ВМиК)

1. Иерархической сетью связи (ИСС) будем называть многопродуктовую потоковую сеть [1, 2, 3], в которой логический граф, или граф тяготений, имеет структуру звезды, т.е. все тяготеющие пары p_i (источник, сток) заданы в виде (v_0, v_i), $i \in M \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \ldots, m\}$, с общим источником v_0. (Речь идет о простейшей одноуровневой иерархии [4].) Подобные структуры возникают при моделировании сетей связи для иерархических систем управления (ИСУ) с веерной иерархической структурой. Предполагается, что управляющий центр ИСУ находится в узле v_0 и передает сообщения или получает их от подчиненных, расположенных в узлах v_i, $i \in M$, называемых далее узлами нижнего уровня. Как правило, физический граф G иерархической сети повторяет ее логическую структуру и имеет тип звезды: $G = \langle V, E \rangle$, где $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, $e_i = (v_0, v_i)$, $i \in M$.

В наших работах [3, 5, 6] было показано, что физические структуры типа звезды обладают плохими характеристиками живучести, поэтому в данной работе наряду с обыч-

[1] Работа поддержана грантами по проектам: N.98-01-00233 РФФИ и N.00-15-96141 "Научные школы".

ным графом G иерархической сети будет рассматриваться также расширенный ("укрепленный") граф $\bar{G} = \langle V, \bar{E} \rangle$ на том же множестве вершин, но с удвоенным числом ребер: $\bar{E} = E \cup E^0$, где $E^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{e_{m+1}, e_{m+2}, \ldots, e_{2m}\}$, $e_{m+i} = (v_i, v_{i+1})$ $\forall i < m$, $e_{2m} = (v_m, v_1)$. В дальнейшем мы не будем выделять последний и первый индексы, формально полагая, что сложение и вычитание в индексах для вершин и потоков производится по модулю m.

Граф $\bar{G}$ соответствует созданию дополнительной кольцевой структуры, связывающей все узлы нижнего уровня с целью дублирования сообщений в случае потери (ухудшения) связи между кем-либо из подчиненных и управляющим центром. В отсутствие потерь считаем, что по кольцу сообщения не передаются, и ограничиваемся графом G, трактуя ребра из E^0 как резервные.

Необходимость создания резерва продиктована важностью поддержания живучести сети связи для нормального функционирования ИСУ, поскольку наличие связи между центром и подчиненными является ключевым моментом для иерархических систем. В данной работе исследуется кольцевая структура резерва.

2. Рассмотрим формальную модель ИСС. Для этого припишем каждому логическому ребру p_i сети положительное число d_i, имеющее смысл требований на передачу потока между центром и i-м подчиненным, а каждому физическому ребру e_k — неотрицательное число y_k, имеющее смысл пропускной способности ребра. Величины d_i и y_k измеряются в одних и тех же единицах потока. Отметим, что здесь говорится о потоке сообщений, т.е. о числе сообщений в единицу времени. Это не означает, что сообщения передаются постоянно, просто обеспечивается возможность передачи сообщения в любой момент (в остальное время по сети может передаваться посторонняя или незначащая информация, служащая для зашифровки сообщения). Вектор y пропускной способности ребер накладывает ограничения на структуру передаваемых по сети потоков. Опишем эту структуру для ИСС (описание для произвольной многопродуктовой сети см., к примеру, в [1, 3]).

Будем для простоты полагать все логические ребра и ребра графа G ориентированными, например, от центра к подчиненным. Ребра резервного кольца являются неориентированными, или двунаправленными. Соответственно будет удобно ввести на кольце два типа потоковых переменных: $f_{k-m}^{i\rightarrow} \geq 0$ и $f_{k-m}^{i\leftarrow} \geq 0$ для потоков по и против часовой стрелки, $k > m$, а на радиальных ребрах ($k \leq m$) потоковые переменные будут обозначаться без стрелок как $f_k^i \geq 0$.

Здесь и далее верхний индекс i указывает, что рассматривается поток от центра к i-му подчиненному, а нижний индекс — индекс ребра, на котором рассматривается этот поток, по модулю m. Значение потоковой переменной — величина рассматриваемого потока (неотрицательна). В таких переменных условия неразрывности потоков в k-м узле сети $\forall k \in M$, $i \in M$ запишутся с учетом введенной нумерации ребер следующим образом:

$$f_k^i = f_k^{i\rightarrow} - f_{k-1}^{i\rightarrow} + f_{k-1}^{i\leftarrow} - f_k^{i\leftarrow} \;\; \forall k \neq i, \quad f_i^{i\rightarrow} = 0, \quad f_{i-1}^{i\leftarrow} = 0. \tag{1}$$

При этом значение переменной

$$z_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in M} f_k^i = f_i^i + f_i^{i\leftarrow} + f_{i-1}^{i\rightarrow} \tag{2}$$

равно величине потока от центра к i-му подчиненному. (Равенство в (2) получается при помощи представления

$$\sum_{k \neq i} f_k^i = \sum_{k=i+1}^{m+i-1} f_k^i = \sum_{k=i+1}^{m+i-1} \left(f_k^{i\rightarrow} - f_{k-1}^{i\rightarrow}\right) + \sum_{k=i+1}^{m+i-1} \left(f_{k-1}^{i\leftarrow} - f_k^{i\leftarrow}\right) =$$

$= f_{m+i-1}^{i\rightarrow} - f_i^{i\rightarrow} + f_i^{i\leftarrow} - f_{m+i-1}^{i\leftarrow} = f_{i-1}^{i\rightarrow} + f_i^{i\leftarrow}$, основанного на (1) и сложении по модулю m в индексах.)

Обозначим через $f \in \mathbf{R}_+^{3m^2}$ набор потоковых переменных f_k^i, $f_k^{i\rightarrow}$, $f_k^{i\leftarrow}$, $k \in M$, $i \in M$, удовлетворяющий (1). Набор f задает *распределение потоков* по сети. Соответствующий вектор значений (2) $z = z(f) = (z_1, \ldots, z_m)$ называется *мультипотоком*, задаваемым распределением f. Вектор требований $d = (d_1, \ldots, d_m)$ определяет требования к мультипотоку:

$z = d$. Но существование такого f, чтобы $z(f) = d$ (*задача о допустимости* сети [1]), зависит от ограничений по пропускной способности ребер, поскольку суммарный поток по любому ребру не должен превышать пропускной способности этого ребра. А именно:

$$\sum_{i \in M} f_k^i \le y_k \quad \forall e_k \in E \quad \text{и} \tag{3}$$

$$\sum_{i \in M} \left(f_k^{i\leftarrow} + f_k^{i\rightarrow} \right) \le y_{k+m} \quad \forall e_{k+m} \in E^0. \tag{4}$$

Множество всех мультипотоков $z(f)$, для которых существует набор $f \in \mathbf{R}_+^{3m^2}$, удовлетворяющий условиям (1) — (4), будем называть *множеством достижимости* в ИСС с вектором y пропускной способности физических ребер и обозначать $Z(y)$. Сразу заметим, что из (2) — (3) вытекает $\forall z \in Z(y)$ соотношение

$$\sum_{i \in M} z_i = \sum_{i \in M} \sum_{k \in M} f_k^i \le \sum_{k=1}^{m} y_k, \tag{5}$$

т.е. сумма величин потоков ограничена суммарной пропускной способностью лишь радиальных ребер.

Случай, когда кольцевые ребра отсутствуют (граф G вместо $\bar{G}$), будем для единообразия описывать с помощью тех же переменных, формально полагая $y_k = 0 \ \ \forall k > m$. Обозначим через $\bar{y}_M$ “укороченный” вектор $(y_1, \ldots, y_m)$, через $\bar{0}_M$ — вектор из m нулей. Нетрудно видеть, что $Z(\bar{y}_M, \bar{0}_M)$ состоит из мультипотоков $z(f)$ с компонентами

$$z_i = f_i^i \ \text{ при } \ f_i^i \leq y_i, \quad i \in M. \tag{6}$$

(В силу ограничений (4) все переменные $f_k^{i\leftarrow}$, $f_k^{i\rightarrow}$ для сети с графом G равны нулю.) Отсюда непосредственно следует

Утверждение 1. ИСС будет допустима для вектора требований d при любом векторе пропускной способности y с $\bar{y}_M \geq d$.

Здесь и далее знаки неравенств для векторов понимаются покомпонентно.

Из (6) также ясно, что ИСС с графом G, у которой хотя бы одна компонента y_k строго меньше d_k, будет недопустимой для вектора d. Для ИСС с укрепленным графом $\bar{G}$ это не так (например, $y_1 = d_1 + d_2$, $y_2 = 0$, $y_{m+1} = d_2$). Менее очевидным представляется следующее

Утверждение 2. ИСС с графом $\bar{G}$, допустимая для d, имеет минимальную суммарную пропускную способность ребер только в случае вектора пропускной способности $y^0 = (d, \bar{0}_M)$ (фактически соответствующего графу G).

Доказательство. Нам надо доказать, что

$$\{(d, \bar{0}_M)\} = \operatorname{Arg} \min_{y \geq 0:\ Z(y) \ni d} \sum_{k=1}^{2m} y_k. \tag{7}$$

Условие $Z(y) \ni d$ означает существование распределения потоков f, удовлетворяющего (1), (3), (4), для которого

$$d_i = f_i^i + f_i^{i\leftarrow} + f_{i-1}^{i\rightarrow} \quad \forall i \in M. \tag{8}$$

При этом из (5) $\sum\limits_{i\in M} d_i \le \sum\limits_{k=1}^{2m} y_k$. Таким образом, значение целевой функции в задаче (7) не меньше $\sum d_i$, значит, вектор $(d, \bar{0}_M)$ доставляет искомый минимум. Покажем, что других решений в этой задаче нет.

Действительно, другой вектор $y \ge (d, \bar{0}_M)$ даст большее значение целевой функции, а вектор $(\bar{y}_M, \bar{0}_M)$ с некоторыми $y_i < d_i$ не даст допустимой сети. Поэтому остается рассмотреть лишь такие y, у которых $y_k > 0$ с какими-либо $k > m$ и найдется $i^0 \in M$: $y_{i^0} < d_{i^0}$. А для них, чтобы удовлетворить (8), нужно обеспечить $f_{i^0}^{i^0\leftarrow} + f_{i^0-1}^{i^0\rightarrow} = d_{i^0} - y_{i^0} > 0$. Пусть для определенности $f_{i^0-1}^{i^0\rightarrow} > 0$. Подсчитаем для этого случая сумму всех потоков по всем ребрам сети (которая не может быть больше суммарной пропускной способности всех ребер), т.е.

$$\sum_{k=1}^{2m} y_k \ge \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\left(f_k^i + f_k^{i\leftarrow} + f_k^{i\rightarrow}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(f_i^i + f_i^{i\leftarrow} + f_{i-1}^{i\rightarrow} + f_{i-1}^i + f_{i-2}^{i\rightarrow} + f_{i-1}^{i\leftarrow} + f_{i+1}^i + \ldots\right) \ge$$

$$\ge \sum_{i=1}^{m} d_i + f_{i^0-1}^{i^0} + f_{i^0-2}^{i^0\rightarrow}.$$

Из последних двух слагаемых хотя бы одно должно быть строго положительным в силу положительности $f^{i^0\rightarrow}_{i^0-1}$, так как $f^{i^0\rightarrow}_{i^0-1} \leq f^{i^0}_{i^0-1} + f^{i^0\rightarrow}_{i^0-2}$ из (1) с $k = i^0 - 1$. Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{2m} y_k > \sum\limits_{i=1}^{m} d_i$, так что, с учетом предыдущего, рассмотренное распределение потоков удовлетворяет (4) лишь для неоптимальных y в задаче (7). Утверждение доказано.

3. Теперь предположим, что исходная структура ИСС была выбрана оптимальным образом в смысле утверждения 2, т.е. по критерию стоимости — взяли вектор пропускной способности $(d, \bar{0}_M)$, где d — вектор требований. Все требуемые потоки по такой сети проходят и избыточной пропускной способности не создается. Однако при этом не учитывается возможность частичного или полного выхода из строя физических ребер сети, формально выражающегося в уменьшении их исходной пропускной способности. Как было показано в предыдущем разделе, при любых подобных повреждениях сеть перестает быть допустимой для вектора d. Мало того, несмотря на возможность достижения равенства $\sum\limits_{i \in M} z_i = \sum\limits_{k \in M} y_k$ (см. (6)) для сети с графом G, эффективность функционирования такой ИСС непропорционально ухудшается даже при небольшом уменьшении суммарной пропускной способности. Дело в том, что эффективность ИСС не определяется суммой величин потоков, а более адекватно выражается минимумом из этих величин. Зададим соответствующую характеристику формально, следуя [3].

Введем для любого распределения потоков f значение

$$\min_{i \in M} \frac{z_i(f)}{d_i}$$

уровня обеспеченности потоковых требований (о.п.т.) при этом распределении. Мерой эффективности функционирования ИСС будем называть максимально достижимый в сети уровень о.п.т.

$$\theta_0(y) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{z \in Z(y)} \min_{i \in M} z_i/d_i.$$

Если $\theta_0(y) \geq 1$, то ИСС с вектором пропускной способности y допустима для вектора требований d, а при $\theta_0(y) < 1$ не допустима. Чем больше отличается от 1 значение $\theta_0(y)$ в последнем случае, тем хуже функционирует ИСС, независимо от значения $\sum\limits_{i \in M} z_i$.

Действительно, в веерной ИСУ подчиненные, как правило, не взаимозаменяемы — имеют разные функции, и сообщение одному из них ничего не значит для другого (он может даже не суметь его расшифровать). Необходимость передачи сообщения конкретному подчиненному возникает в произвольный момент времени, а его потеря не компенсируется хорошими условиями связи с другими подчиненными. Заметим, что важность в данный момент i-го информационного направления и уменьшение пропускной способности именно на i-м ребре зачастую оказываются сильно коррелированными, причем возможность выполнения ИСУ своих функций будет напрямую зависеть от отношения z_i/d_i. Поэтому живучесть ИСС будем характеризовать гарантированным значением максимального уровня о.п.т. Для определения указанного гарантированного значения зададим множество возможных значений вектора пропускной способности y для ИСС с исходным вектором c пропускной способности.

Введем параметр γ, характеризующий мощность поражающего воздействия и показывающий, какая часть суммарной пропускной способности ребер из E может оказаться потерянной (выведенной из строя). Поражающим воздействиям мощности γ соответствует множество возможных значений вектора пропускной способности радиальных ребер

$$Y_\gamma(c) = \{\bar{y}_M \geq \bar{0}_M | \sum_{i=1}^{m} y_i = (1-\gamma) \sum_{i=1}^{m} c_i, \quad \bar{y}_M \leq \bar{c}_M\}.$$

Здесь мы учитываем воздействия только на радиальные ребра ($e_k \in E$) и не рассматриваем возможности поражения кольца, считая, к примеру, что потенциальный противник не догадывается о месторасположении резерва (поскольку ребра из E^0 удалены от ребер из E и передачи потока по ним не ведется).

Для каждого значения $\gamma \in (0,1)$ определим

$$\theta_\gamma^г(c) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y \in Y_\gamma(c)} \theta_0(y) = \min_{y \in Y_\gamma(c)} \max_{z \in Z(y)} \min_{i \in M} z_i/d_i$$

гарантированное значение максимума о.п.т. Пусть $\theta_0(c) = 1$, т.е. исходная сеть пропускала мультипоток d без избытка, тогда очевидно

$$\theta_\gamma^г(c) \leq 1 - \gamma, \tag{9}$$

ибо $(1-\gamma)\bar{c}_M \in Y_\gamma(c)$. Указанная оценка достигается далеко не всегда, как показывает

Утверждение 3. Для ИСС при любом векторе $c^0 = (c_{m+1}, \ldots, c_{2m})$, если $\theta_0(y) = 1 - \gamma$ и $y \in Y_\gamma(d, c^0)$, то $Z(y) = \{z|\ z_i = (1-\gamma)d_i \ \ \forall i \in M\}$.

Доказательство просто следует из формулы (5) и поэтому опускается.

Из утверждения 3 и формулы (6) вытекает, что для ИСС с неукрепленным графом G и оптимальным по стоимости вектором $(d, \bar{0}_M)$ пропускной способности верхняя оценка (9) показателя живучести реализуется лишь при равномерном распределении по ребрам сети мощности поражающего воздействия. В остальных случаях, от которых также не гарантирована сеть, эта оценка не достигается. Так что живучесть рассмотренной ИСС оказывается меньше, чем $1 - \gamma$, и уже при $\gamma \geq 1/m$ она обращается в ноль: $\theta_{1/m}^г(d, \bar{0}_M) = 0$.

Наличие резерва позволяет избежать подобных ситуаций, поскольку справедливо

Утверждение 4. Для ИСС с укрепленным графом $\bar{G}$ найдется такое число t, что

$$\theta_0((y,t,\ldots,t)) = \sum_{k\in M} y_k / \left(\sum_{i\in M} d_i\right).$$

В результате при любых $\gamma < 1$ получаем равенство $\theta_0((y,t,\ldots,t)) = 1-\gamma \quad \forall y \in Y_\gamma(d)$, т.е. $\theta^z_\gamma((d,t,\ldots,t)) = 1-\gamma$ — достижение верхней оценки живучести. Величину t (достаточный резерв) можно оценить сверху. Обозначим $t^0 \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{\gamma\in(0,1)} \min\limits_t \{t|\ (1-\gamma)d \in Z((\bar{y}_M,t,\ldots,t)) \ \ \forall \bar{y}_M \in Y_\gamma(d)\}$.

Утверждение 5: $t^0 \le \sum\limits_{i\in M} d_i/8$.

Доказательство. При любом $\gamma \in (0,1)$ суммарные потери пропускной способности, и следовательно, из (5), суммарного потока составят $\gamma \sum\limits_{i\in M} d_i$. Для обеспечения уровня $1-\gamma$ о.п.т. надо с учетом утверждения 3 пропустить для всех тяготеющих пар потоки $(1-\gamma)d_i$. При этом по несильно поврежденным ребрам e_k (с $y_k > (1-\gamma)d_k$) можно, задействовав кольцевые ребра, передать дополнительные потоки $\sum\limits_{i\neq k} f^i_k \le y_k - (1-\gamma)d_k$ для других p_i (с $y_i < (1-\gamma)d_i$). Суммарный поток, проходящий по кольцу, не превысит

$$\sigma(y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k\in M} [y_k - (1-\gamma)d_k]^+ = \sum_{i\in M} [(1-\gamma)d_i - y_i]^+ \ \ \forall y \in Y_\gamma(d),$$

где верхний индекс плюс обозначает положительную срезку. Покажем, что $\max\limits_{y \in Y_\gamma(d)} \sigma(y) \le \sigma^0[\gamma] \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1-\gamma)\gamma \sum\limits_{i \in M} d_i$.

Действительно, функция $\sigma(\cdot)$ является выпуклой, поэтому максимум достигается в угловых точках многогранника $Y_\gamma(d)$. С точностью до перенумерации компонент они имеют вид $y = (d_1, \dots, d_{q-1}, y_q, 0, \dots, 0)$:

$$y_q \le d_q, \quad \sum_{i<q} d_i + y_q = (1-\gamma) \sum_{i \in M} d_i \quad \sum_{i>q} d_i + (d_q - y_q) = \gamma \sum_{i \in M} d_i.$$

Тогда, если $y_q \ge (1-\gamma)d_q$, то $\sigma(y) = \sum\limits_{i<q} \gamma d_i + y_q - (1-\gamma)d_q \le \gamma \sum\limits_{i<q} d_i + y_q - (1-\gamma)y_q = \sigma^0[\gamma]$. Если же $y_q \le (1-\gamma)d_q$, то $\sigma(y) = (1-\gamma)d_q - y_q + \sum\limits_{i>q}(1-\gamma)d_i \le (1-\gamma)(d_q - y_q) + (1-\gamma)\sum\limits_{i>q} d_i = \sigma^0[\gamma]$.

В силу возможности передачи в двух направлениях нагрузку на кольцевые ребра удается (за счет оптимизации распределения потоков) сократить вдвое, но не более. Требующийся при этом резерв пропускной способности равен $\sigma^0[\gamma]/2$. Максимизация по $\gamma \in (0,1)$ завершает доказательство.

Заметим, что, создав указанный резерв на радиальных ребрах, мы в предположении его неразрушаемости получили бы гарантированно допустимую сеть. Однако, мало реально обеспечить неразрушаемость при таком резервировании.

Список литературы

1. *Карзанов А.В.* Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках // Комбинаторные методы в потоковых задачах. Вып.3. М.: ВНИИСИ, 1979.

2. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.

3. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Модели неопределенности в многопользовательских сетях. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

4. *Дементьев В.Т., Ерзин А.И., Ларин Р.М., Шамардин Ю.В.* Задачи оптимизации иерархических структур. Новосибирск: изд-во Новосибирского ун-та, 1996.

5. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. VII. Задача нормативного анализа уязвимости многопродуктовой потоковой сети // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. N.4

6. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М., Поспелова И.И.* Многокритериальный синтез потоковых сетей с гарантией живучести // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. N.1