УДК 519.85

Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.
(Москва)

Параметризация значения векторного минимакса со связанными ограничениями [1].

1. Задачи принятия решений по многим критериям [**?**] и, как следствие, задачи векторной оптимизации довольно хорошо изучены. Формализованы и понятие решения подобных задач как целого множества эффективных значений вектора критериев, и способы представления решения через оптимальные значения скалярных функций частных критериев (их сверток). Иначе дело обстоит с многокритериальными задачами принятия решений при наличии неопределенных факторов. Соответствующие многокритериальные минимаксные задачи сложнее не только с вычислительной, но и с концептуальной точки зрения. Проблеме описания множества значений минимакса вектора критериев посвящена предлагаемая статья.

В [**?**] была поставлена задача поиска седловой точки вектор-функции Лагранжа как многокритериального минимакса с распадающимися ограничениями и обсуждалось по-

[1]Работа поддержана проектом РФФИ N.95-01-00232a

нятие ее решения. В настоящей работе рассматривается задача поиска минимакса со связанными ограничениями векторной функции общего вида:

$$\operatorname*{Min}_{w\in W}\operatorname*{Max}_{z\in Z(w)}\Phi(z,w), \tag{1}$$

где $\Phi(z,w)=\{\varphi_1(z,w),\varphi_2(z,w),\ldots,\varphi_Q(z,w)\}$, $\Phi(z,w)\geq 0$. (Здесь и далее "$\geq$" и "$\leq$" для векторов понимаем в смысле покомпонентного "$\geq$" и "$\leq$" соответственно.) Функции $\varphi_i(z,w)$, $i=\overline{1,Q}$, будем предполагать непрерывными по совокупности переменных, множества $Z(w)\subset\mathbf{R}^n$ — компактными $\forall w\in W$, отображение $Z(\cdot)$ — непрерывным по Хаусдорфу на компакте W в евклидовом пространстве. Вектор $\Phi(z,w)$ называется вектором критериев или векторным критерием. Задачи такого типа, но с Φ, не зависящим от w, возникают, в частности, при анализе уязвимости многопродуктовых потоковых сетей [?] и исследовались также в [?, ?].

При фиксированном $w\in W$ значением $\operatorname*{Max}_{z\in Z(w)}\Phi(z,w)$ по определению является множество $\operatorname{Max}\Phi(Z(w),w)$, т.е. множество максимальных элементов для $\Phi(Z(w),w)\overset{\text{def}}{=}\bigcup_{z\in Z(w)}\Phi(z,w)$ — множества достижимости, упорядоченного отношением "$\geq$, но не $=$" (или "$>$"). Это множество максимальных элементов называется множеством Эджворта-Парето (или Слейтера) [?, ?]. Таким образом, значение внутреннего максимума в (1) само по себе является множеством векторов.

Понятие решения задачи (1) может быть введено несколькими способами. Неоднозначность трактовки решения задачи (1) объясняется тем, что не ясно, как выбрать из различных множеств Эджворта-Парето (Слейтера) при разных $w \in W$ наихудшее, поскольку, если одно множество Эджворта-Парето не принадлежит Парето-оболочке другого, то они не сравнимы. (Операция Min определена для множества, но не для набора множеств.)

В [**?**], следуя [**?**], рассматриваются две основные концепции: найти множество гарантированных значений критерия Φ, т.е. таких векторов ψ^*, ни одну компоненту которых противник не может уменьшить, и найти множество защищаемых значений критерия Φ, т.е. таких векторов ψ^*, которые не ухудшаемы сразу по всем компонентам. Здесь считается, что z является управлением и его выбор осуществляется оперирующей стороной, стремящейся максимизировать вектор критериев Φ, а параметр w выбирается условным противником, стремящимся минимизировать Φ (в качестве противника также может выступать неопределенный фактор). Кроме того хотелось бы найти w и $z(w)$, при которых найденные значения критерия Φ достигаются.

Введем обозначения $\underline{\Phi}$ и $\overline{\Phi}$ для множеств гарантированных и защищаемых значений критерия Φ соответственно, а также $\Psi = \{\Phi(Z(w), w)|\ w \in W\}$ — для всего множества достижимых значений вектора критериев Φ, т.е.

$$\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi|\ \exists w \in W,\ z \in Z(w) :\ \ \psi = \Phi(z, w)\} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \Phi(z, w)$$

(здесь и далее будем при записи операции объединения опускать фигурные скобки у одноэлементных множеств).

Утверждение 1. Справедливо равенство:

$$\underline{\Phi} = \bigcap_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \Psi|\ \Phi(z, w) \geq \psi\}.$$

Доказательство. Пусть

$$\psi^* \in \bigcap_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \Psi|\ \Phi(z, w) \geq \psi\}.$$

Тогда $\forall w \in W\ \exists z \in Z(w) :\ \Phi(z, w) \geq \psi^*$. Следовательно, какое бы $w \in W$ ни выбрал противник, он не может уменьшить ни одну компоненту вектора ψ^* (при условии, что оперирующая сторона выбирает соответствующее $z \in Z(w)$). Значит, $\psi^* \in \underline{\Phi}$.

Пусть

$$\psi^* \in \Psi \setminus \bigcap_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \Psi|\ \Phi(z, w) \geq \psi\}.$$

Тогда $\exists w^* \in W$: $\forall z \in Z(w^*)$ $\Phi(z,w) \not\geq \psi^*$. Следовательно, выбрав $w^* \in W$, противник может уменьшить хотя бы одну компоненту вектора ψ^*. Значит, $\psi^* \notin \underline{\Phi}$. Утверждение доказано.

Утверждение 2. Справедливо равенство:

$$\overline{\Phi} = \bigcap_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \Psi | \ \Phi(z,w) \not< \psi\}.$$

Доказательство. Пусть

$$\psi^* \in \bigcap_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \Psi | \ \Phi(z,w) \not< \psi\}.$$

Тогда $\forall w \in W$ $\exists z \in Z(w)$: $\Phi(z,w) \not< \psi^*$. Следовательно, какое бы $w \in W$ ни выбрал противник, он не может уменьшить сразу все компоненты вектора ψ^* (при условии, что оперирующая сторона выбирает соответствующее $z \in Z(w)$). Значит, $\psi^* \in \overline{\Phi}$.

Пусть

$$\psi^* \in \Psi \setminus \bigcap_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \Psi | \ \Phi(z,w) \not< \psi\}.$$

Тогда $\exists w^* \in W$: $\forall z \in Z(w^*)$ $\Phi(z,w) < \psi^*$. Следовательно, выбрав $w^* \in W$, противник может уменьшить сразу все компоненты вектора ψ^*. Значит, $\psi^* \notin \overline{\Phi}$. Утверждение доказано.

Утверждение 3. Справедливо равенство:

$$\overline{\Phi} = \bigcap_{w \in W} \bigcup_{i \in \overline{1,Q}} \{\psi \in \Psi | \ \psi_i \leq \max_{z \in Z(w)} \varphi_i(z,w)\}.$$

Доказательство. Учитывая утверждение 2, достаточно доказать, что $\forall w \in W$

$$\bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \Psi | \ \Phi(z,w) \not< \psi\} = \bigcup_{i \in \overline{1,Q}} \{\psi \in \Psi | \ \psi_i \leq \max_{z \in Z(w)} \varphi_i(z,w)\}.$$

Фиксируем произвольный вектор $w \in W$. Пусть

$$\psi^* \in \bigcup_{i \in \overline{1,Q}} \{\psi \in \Psi | \ \ \psi_i \leq \max_{z \in Z(w)} \varphi_i(z,w)\}.$$

Тогда $\exists z \in Z(w)$, $\exists i$: $1 \leq i \leq Q$, $\psi_i^* \leq \varphi_i(z,w)$. Следовательно, $\exists z \in Z(w)$: $\Phi(z,w) \not< \psi^*$. Значит,

$$\psi^* \in \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \Psi | \ \Phi(z,w) \not< \psi\}.$$

Пусть

$$\psi^* \in \Psi \setminus \bigcup_{i \in \overline{1,Q}} \{\psi \in \Psi | \ \psi_i \leq \max_{z \in Z(w)} \varphi_i(z,w)\}.$$

Тогда $\forall z \in Z(w)$ $\forall i: \ 1 \leq i \leq Q, \ \varphi_i(z,w) < \psi_i^*$. Следовательно, $\forall z \in Z(w): \ \Phi(z,w) < \psi^*$. Значит,

$$\psi^* \notin \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \Psi | \ \Phi(z,w) \not< \psi\}.$$

Утверждение доказано.

Концепции гарантированности соответствует в качестве значения (1) множество $\underline{\Phi}^*$ максимальных по отношению "$\geq$, но не $=$" (или "$>$") элементов множества $\underline{\Phi}$:

$$\underline{\Phi}^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcap_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \Psi | \ \Phi(z,w) \geq \psi\}. \qquad (2)$$

Концепции защищаемости соответствует в качестве значения (1) множество $\overline{\Phi}^*$ максимальных по отношению "$\geq$, но не =" (или ">") элементов множества $\overline{\Phi}$:

$$\overline{\Phi}^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Max} \bigcap_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \Psi |\ \Phi(z,w) \not< \psi\}.$$

Можно построить в определенном смысле "промежуточные" между $\overline{\Phi}^*$ и $\underline{\Phi}^*$ множества значений (1), т.е. возможны и другие концепции решения этой задачи.

Ниже более подробно рассматривается первая концепция — гарантированности значения (1), и исследуется множество $\underline{\Phi}^*$, которое далее будем обозначать $\Phi^* = \Phi^*[W]$ вне зависимости от того, в смысле строгого или нестрогого отношения порядка понимается Max в (2). Утверждения, которые относятся лишь к одному (слейтеровскому или паретовскому) случаю, будут отдельно отмечаться.

Введем следующие определения и обозначения:

$$\forall\, W' \subseteq W \quad \Phi_{\leq}[W'] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{w \in W'} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \in \Psi |\ \Phi(z,w) \geq \psi\},$$

$$\Phi'_{\leq}[W'] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{w \in W'} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \geq 0 |\ \Phi(z,w) \geq \psi\},$$

$$\Phi[W'] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{w \in W'} \bigcup_{z \in Z(w)} \Phi(z,w) = \bigcap_{w \in W'} \Phi(Z(w),w),$$

$$\Phi_{=} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Phi[W], \quad \Phi'_{\leq} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Phi'_{\leq}[W], \quad \Phi_{\leq} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Phi_{\leq}[W] = \underline{\Phi},$$

$$\Phi^*_{=} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Max}\,\Phi_{=}, \quad \Phi'^{\,*}_{\leq} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Max}\,\Phi'_{\leq}, \quad \Phi^*_{\leq} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Max}\,\Phi_{\leq} = \Phi^*.$$

Отметим, что в общем случае $\mathrm{Max}\,\Phi_{\leq}[W] \neq \mathrm{Max}\,\Phi_{=}$, т.е. $\Phi^* \neq \Phi^*_{=}$, как показывает пример двухкритериальной задачи с $\varphi_i(z, w) = z_i$, $i = 1, 2$, $W = \{1, 2\}$, множества $\Phi(Z(1), 1)$ и $\Phi(Z(2), 2)$ для которой изображены на рис.1 — выделены горизонтальной и вертикальной штриховкой, соответственно. В этом примере $\Phi^*_{\leq}$ совпадает с $\mathrm{Max}\,\Phi(Z(2), 2)$, а $\Phi^*_{=} = \Phi^* \bigcap \Phi(Z(1), 1) \subset \Phi^*$. Согласно утверждению 1 мы выбрали данное определение для Φ^*, тем не менее, возможны содержательные постановки, когда требуется найти именно $\Phi^*_{=}$, что еще раз свидетельствует о концептуальной сложности задачи (1). Для сетевых постановок из [?, ?] $\Phi^*_{=} = \Phi^*_{\leq}$. В таком случае для отображения $\mathrm{Max}\,\Phi_{=}[\cdot]$ можно получить те же свойства, что и для $\mathrm{Max}\,\Phi_{\leq}[\cdot]$ (см. ниже утверждение 6).

Другой вариант определения значения (1) — как множества $\Phi'^{*}_{\leq}$ — предложен в [?]. Он соответствует ситуации, когда оперирующую сторону интересует множество гарантированных оценок критериев независимо от реализуемости вектора оценок. Нетрудно, аналогично предыдущему, нарисовать пример, для которого $\Phi'^{*}_{\leq} \neq \Phi^*_{\leq}$ и $\Phi'^{*}_{\leq} \neq \Phi^*_{=}$. При этом следует подчеркнуть, что в задаче поиска связанного минимакса (1) (в отличие от задачи поиска седловой точки [?]) выбор управления z всегда осуществляется после реализации w, т.е. при известном значении неопределенного фактора, или стратегии противника. Поэтому не обязательно заботиться о реализуемости вектора априорных оценок, и постановка из [**?**] также имеет смысл. Для указанных выше сетевых задач выполнено равенство $\Phi'^{*}_{\leq} = \Phi^{*}_{\leq}$, так что все данные определения совпадают.

2. В определении $\Phi^* = \mathrm{Max}\,\Phi_{\leq}[W]$ участвует все множество W, вообще говоря, континуальное. Естественно, представляет интерес найти более узкое множество $W' \subset W$, для которого тоже $\Phi^* = \mathrm{Max}\,\Phi_{\leq}[W']$, т.е. множество наихудших для оперирующей стороны стратегий противника — соответствующее реализации Min в (1). Как правило, нельзя выбрать одно $w' \in W$, так чтобы $\Phi^* = \mathrm{Max}\,\Phi_{\leq}[\{w'\}]$, поэтому имеет смысл говорить о минимальном по включении таком множестве W'. Однако в общем случае поиск требуемого множества является самостоятельной сложной задачей, так что далее будут построены несколько более широкие множества и указан случай, когда эти множества — минимальные.

Для описания и аппроксимации множества максимумов векторного критерия традиционно используют его параметризацию с помощью свертки частных критериев в виде их суммы (линейная свертка) — для выпуклого случая, или минимума (логическая свертка) с весами [**?**, **?**]. Исследуем аналогичную возможность для рассматриваемой задачи.

Обозначим через

$M \stackrel{\rm def}{=} \{\mu \geq 0| \ \sum\limits_{i=1}^{Q} \mu_i = 1\}$ стандартный $Q-$мерный симплекс;

$$\widehat{W} \stackrel{\rm def}{=} \{w(\lambda) = \arg\min_{w\in W}\{\max_{z\in Z(w)} \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i\varphi_i(z,w)\}| \ \lambda \in M\};$$

$$I(\mu) \stackrel{\rm def}{=} \{i = \overline{1,Q}| \ \mu_i \neq 0\},$$

$$W^* \stackrel{\rm def}{=} \{w^* = w^*(\mu) = \arg\min_{w\in W}\{\max_{z\in Z(w)} \min_{i\in I(\mu)} \mu^{-1}\varphi_i(z,w)\}| \ \mu \in M\}. \tag{3}$$

Утверждение 4. Если множества $\Phi_{\leq}[\{w\}]$ выпуклы $\forall w \in W$, то $\Phi^* = \operatorname{Max}\Phi_{\leq}[\widehat{W}]$, т.е. $\Phi^*[W] = \Phi^*[\widehat{W}]$.

Доказательство. Докажем, что $\Phi_{\leq}[W] = \Phi_{\leq}[\widehat{W}]$. Имеем

$$\Phi_{\leq}[W] = \bigcap_{w\in W} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi \in \Psi| \ \Phi(z,w) \geq \psi\} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcap_{w\in \widehat{W}} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi \in \Psi| \ \Phi(z,w) \geq \psi\} = \Phi_{\leq}[\widehat{W}].$$

Покажем, что выполнено и обратное включение: $\Phi_{\leq}[\widehat{W}] \subseteq \Phi_{\leq}[W]$. Допустим, это не так, т.е. $\exists \psi' \in \Phi_{\leq}[\widehat{W}]$: $\psi' \notin \Phi_{\leq}[W]$. Поскольку $\psi \notin \Phi_{\leq}[W]$, то $\exists w' \in W$: $\forall z \in Z(w')$ $\Phi(z,w') \not\geq \psi'$, т.е. $\psi' \notin \Phi_{\leq}[\{w'\}]$. Выберем $\lambda \in M$, для которого

$$\max_{\psi\in\Phi_{\leq}[\{w'\}]} \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i\psi_i < \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i\psi'_i.$$

Докажем, что такое λ существует.

Обозначим

$$\Phi'_{\le}[\{w'\}] \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi' \ge 0 |\ \exists z \in Z(w') :\ \Phi(z, w') \ge \psi'\},$$

Очевидно, $\psi' \notin \Phi'_{\le}[\{w'\}]$ и $\Phi'_{\le}[\{w'\}] \supseteq \{\psi \in \Psi |\ \exists z \in Z(w')$: $\Phi(z, w') \ge \psi\} = \Phi_{\le}[\{w'\}]$. Множество $\Phi'_{\le}[\{w'\}]$ выпукло, множество $\{\psi'\}$ также выпукло. Расстояние между множествами $\Phi'_{\le}[\{w'\}]$ и $\{\psi'\}$ положительно. Значит, множества $\Phi'_{\le}[\{w'\}]$ и $\{\psi'\}$ сильно отделимы (по теореме 2.1 [?]), т.е. $\exists p$:

$$\max_{\psi \in \Phi'_{\le}[\{w'\}]} \sum_{i=1}^{Q} p_i \psi_i < \sum_{i=1}^{Q} p_i \psi'_i.$$

Пусть $\exists j$: $1 \le j \le Q$, $p_j < 0$. Рассмотрим вектор p': $p'_j = 0$, $p'_i = p_i$ $\forall i$: $1 \le i \le Q$, $i \ne j$. Покажем, что

$$\max_{\psi \in \Phi'_{\le}[\{w'\}]} \sum_{i=1}^{Q} p'_i \psi_i \le \max_{\psi \in \Phi'_{\le}[\{w'\}]} \sum_{i=1}^{Q} p_i \psi_i.$$

Предположим, это не так, т.е.

$$\max_{\psi \in \Phi'_{\le}[\{w'\}]} \sum_{i=1}^{Q} p'_i \psi_i > \max_{\psi \in \Phi'_{\le}[\{w'\}]} \sum_{i=1}^{Q} p_i \psi_i.$$

Пусть

$$\max_{\psi \in \Phi'_{\le}[\{w'\}]} \sum_{i=1}^{Q} p'_i \psi_i = \sum_{i=1}^{Q} p'_i \psi''_i,\ \ \psi'' \in \Phi'_{\le}[\{w'\}].$$

Рассмотрим вектор ψ^*: $\psi^*_j = 0$, $\psi^*_i = \psi''_i$ $\forall i \ne j$, $1 \le i \le Q$. Поскольку $\psi'' \in \Phi'_{\le}[\{w'\}]$ и $\psi^* \le \psi''$, то $\psi^* \in \Phi'_{\le}[\{w'\}]$. Но

$$\sum_{i=1}^{Q} p'_i \psi^*_i = \sum_{i=1}^{Q} p'_i \psi''_i = \max_{\psi \in \Phi'_{\le}[\{w'\}]} \sum_{i=1}^{Q} p'_i \psi_i > \max_{\psi \in \Phi'_{\le}[\{w'\}]} \sum_{i=1}^{Q} p_i \psi_i \ge \sum_{i=1}^{Q} p_i \psi^*_i,$$

т.е.
$$\sum_{i=1}^{Q} p'_i\psi^*_i > \sum_{i=1}^{Q} p_i\psi^*_i.$$
Значит, $p'_j\psi^*_j > p_j\psi^*_j$. Отсюда следует противоречие $0 > 0$. Поэтому
$$\max_{\psi\in\Phi'_{\leq}[\{w'\}]}\sum_{i=1}^{Q} p'_i\psi_i \leq \max_{\psi\in\Phi'_{\leq}[\{w'\}]}\sum_{i=1}^{Q} p_i\psi_i < \sum_{i=1}^{Q} p_i\psi'_i \leq \sum_{i=1}^{Q} p'_i\psi'_i$$
и
$$\max_{\psi\in\Phi'_{\leq}[\{w'\}]}\sum_{i=1}^{Q} p'_i\psi_i < \sum_{i=1}^{Q} p'_i\psi'_i.$$
Далее, если $\exists k$: $1 \leq k \leq Q$, $p'_k < 0$, то рассматриваем вектор p'': $p''_k = 0$, $p''_i = p'_i$ $\forall i$: $1 \leq i \leq Q$, $i \neq k$. За не более, чем Q, шагов получим вектор $p^* \geq 0$:
$$\max_{\psi\in\Phi'_{\leq}[\{w'\}]}\sum_{i=1}^{Q} p^*_i\psi_i < \sum_{i=1}^{Q} p^*_i\psi'_i.$$
Из этого неравенства следует, что $p^* \neq 0$. Теперь выберем
$$\lambda_j := p^*_j/\sum_{i=1}^{Q} p^*_i \ \ \forall j:\ 1 \leq j \leq Q \ \ (\sum_{i=1}^{Q} p^*_i \neq 0, \text{ ибо } p^* \geq 0,\ p^* \neq 0),$$
получаем искомое $\lambda \in M$:
$$\max_{\psi\in\Phi_{\leq}[\{w'\}]}\sum_{i=1}^{Q} \lambda_i\psi_i \leq \max_{\psi\in\Phi'_{\leq}[\{w'\}]}\sum_{i=1}^{Q} \lambda_i\psi_i < \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i\psi'_i.$$
Поскольку $\psi' \in \Phi_{\leq}[\widehat{W}]$, то $\psi' \in \Phi_{\leq}[\{w(\lambda)\}]$, где
$$w(\lambda) = \arg\min_{w\in W}\max_{z\in Z(w)}\sum_{i=1}^{Q} \lambda_i\varphi_i(z,w),$$

и

$$\max_{z\in Z(w(\lambda))}\sum_{i=1}^{Q}\lambda_i\varphi_i(z,w(\lambda))\geq\sum_{i=1}^{Q}\lambda_i\psi_i'.$$

Таким образом, $\exists w'\in W$:

$$\max_{z\in Z(w')}\sum_{i=1}^{Q}\lambda_i\varphi_i(z,w')\leq\max_{\psi\in\Phi_{\leq}[\{w'\}]}\sum_{i=1}^{Q}\lambda_i\psi_i<\sum_{i=1}^{Q}\lambda_i\psi_i'\leq\max_{z\in Z(w(\lambda))}\sum_{i=1}^{Q}\lambda_i\varphi_i(z,w(\lambda)).$$

Но это противоречит определению $w(\lambda)$. Значит, допущение о том, что $\Phi_{\leq}[\widehat{W}]\not\subseteq\Phi_{\leq}[W]$, не верно.

Итак, $\Phi_{\leq}[W]\subseteq\Phi_{\leq}[\widehat{W}]$ и $\Phi_{\leq}[\widehat{W}]\subseteq\Phi_{\leq}[W]$. Следовательно, $\Phi_{\leq}[W]=\Phi_{\leq}[\widehat{W}]$. Значит, $\Phi^*=\mathrm{Max}\,\Phi_{\leq}[W]=\mathrm{Max}\,\Phi_{\leq}[\widehat{W}]=\Phi^*[\widehat{W}]$. Утверждение доказано.

В общем (не обязательно выпуклом) случае множество наихудших стратегий противника может быть параметризовано с помощью (3), где использована обратная логическая свертка [?].

Утверждение 5. Справедливо равенство

$$\Phi^*=\mathrm{Max}\,\Phi_{\leq}[W^*],\quad\text{или}\quad\Phi^*[W]=\Phi^*[W^*].$$

Доказательство. Докажем, что $\Phi_{\leq}[W]=\Phi_{\leq}[W^*]$. Имеем

$$\Phi_{\leq}[W]=\bigcap_{w\in W}\bigcup_{z\in Z(w)}\{\psi\in\Psi|\ \Phi(z,w)\geq\psi\}\subseteq$$

$$\subseteq\bigcap_{w\in W^*}\bigcup_{z\in Z(w)}\{\psi\in\Psi|\ \Phi(z,w)\geq\psi\}=\Phi_{\leq}[W^*],$$

т.е. $\Phi_{\leq}[W]\subseteq\Phi_{\leq}[W^*]$. Покажем, что $\Phi_{\leq}[W^*]\subseteq\Phi_{\leq}[W]$. Допустим, это не так, т.е. $\exists\psi\in\Phi_{\leq}[W^*]$: $\psi\notin\Phi_{\leq}[W]$. Очевидно, что $\psi \neq 0$, ибо если $0 \in \Psi$, то $0 \in \Phi_{\leq}[W]$. Фиксируем $\mu \in M$: $\mu_i = 0$ $\forall i$: $1 \leq i \leq Q$, $\varphi_i = 0$; $\mu_i^{-1}\psi_i = \mu_j^{-1}\psi_j$ $\forall i, j$: $1 \leq i, j \leq Q$, $\psi_i > 0$, $\psi_j > 0$. Такое $\mu \in M$ можно зафиксировать для любого $\psi \in \Psi$, $\psi \neq 0$.

Поскольку $\psi \notin \Phi_{\leq}[W]$, то $\exists w' \in W$: $\forall z \in Z(w')$ выполнено $\Phi(z, w') \not\geq \psi$, т.е. $\forall z \in Z(w')$ $\exists i$: $1 \leq i \leq Q$, $\varphi_i(z, w') < \psi_i$. Пусть

$$\max_{z \in Z(w')} \min_{i=\overline{1,Q}} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w')$$

достигается при некотором $z' \in Z(w')$, т.е.

$$\max_{z \in Z(w')} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w') = \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z', w') = \mu_{i_1}^{-1} \varphi_{i_1}(z', w').$$

Но для $z' \in Z(w')$ $\exists i_2$: $1 \leq i_2 \leq Q$, $\varphi_{i_2}(z', w') < \psi_{i_2}$. Отсюда следует, что

$$\mu_{i_1}^{-1} \varphi_{i_1}(z', w') \leq \mu_{i_2}^{-1} \varphi_{i_2}(z', w') < \mu_{i_2}^{-1} \psi_{i_2} = \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \psi_i.$$

Из условия $\psi \in \Phi_{\leq}[W^*]$, вытекает $\psi \in \Phi_{\leq}[\{w^*\}]$, где

$$w^* = \arg\min_{w \in W} \{ \max_{z \in Z(w)} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w) \}.$$

Следовательно, для рассматриваемого $\mu \in M$

$$\max_{z \in Z(w^*)} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w^*) \geq \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \psi_i > \mu_{i_1}^{-1} \varphi_{i_1}(z', w') =$$

$$= \max_{z \in Z(w')} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w').$$

Таким образом, $\exists w' \in W$:

$$\max_{z\in Z(w')} \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1}\varphi_i(z,w') < \max_{z\in Z(w^*)} \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1}\varphi_i(z,w^*).$$

Но это противоречит определению w^*. Значит, допущение о том, что $\Phi_{\leq}[W^*] \not\subseteq \Phi_{\leq}[W]$, не верно.

Итак, $\Phi_{\leq}[W] \subseteq \Phi_{\leq}[W^*]$ и $\Phi_{\leq}[W^*] \subseteq \Phi_{\leq}[W]$, т.е. $\Phi_{\leq}[W] = \Phi_{\leq}[W^*]$. Отсюда и $\Phi^* = \operatorname{Max}\Phi_{\leq}[W] = \operatorname{Max}\Phi_{\leq}[W^*] = \Phi^*[W^*]$. Утверждение доказано.

Замечание 1. В ряде практических задач многокритериальной оптимизации при наличии неопределенных факторов рассматриваются минимизируемые критерии, т.е. вместо (1) приходим к аналогичной максиминной постановке

$$\operatorname*{Max}_{w\in W} \operatorname*{Min}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w).$$

Концепции гарантированности результата будет в качестве значения векторного максимина соответствовать множество

$$\Phi^*[W] \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Min} \bigcap_{w\in W} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi \in \Psi |\ \Phi(z,w) \leq \psi\}.$$

Если также переобозначить

$$W^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\arg\max_{w\in W}\{\min_{z\in Z(w)} \max_{i\in I(\mu)} \mu^{-1}\varphi_i(z,w)\} |\ \mu \in M\},$$

то можно повторить утверждение 5 (в форме $\Phi^*[W] =$

$\Phi^*[W^*]$) и для этого случая. Утверждение 4 удается обобщить следующим образом. Введем $\forall s \geq 1$ множества

$$W^s \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\arg\max_{w\in W}\{ \min_{z\in Z(w)} \left(\sum_{i=1}^{Q} \lambda_i^s \varphi_i^s(z,w)\right)^{1/s} \}|\ \lambda \in M\}.$$

Тогда, если все $\bigcup\limits_{z\in Z(w)} \{\psi \in \Psi|\ \Phi(z,w) \leq \psi\}$ выпуклы $\forall w \in W$, то $\Phi^*[W] = \Phi^*[W^s]\ \ \forall s \geq 1$.

Мы можем рассмотреть аналогичную задачу поиска максимина векторной функции со связанными ограничениями:

$$\operatorname*{Max}_{w\in W} \operatorname*{Min}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w).$$

Будем предполагать, что $\forall w \in W \Phi_{\geq}(\{w\})$ является выпуклым множеством. Под решением этой задачи будем понимать множество

$$Phi_* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Min} \bigcap_{w\in W} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi|\Phi(z,w) \leq \psi\} = \operatorname{Min} \bigcap_{w\in W} \Phi_{\geq}(w).$$

Утверждение. Справедливо равенство:

$$\Phi_* = \operatorname{Max} \bigcup_{w\in W} \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\},$$

где $/Max$ и $/Min$ понимаются в смысле Слейтера. Доказательство: Сначала докажем, что

$$\Phi_* \subseteq \operatorname{Max} \bigcup_{w\in W} \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\}).$$

Фиксируем произвольное $\varphi^* \in \Phi^*. \varphi^* \in \bigcup_{w \in W} \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\})$, т.к. в противном случае $\exists \varphi' < \varphi^* : \varphi' \in \bigcap_{w \in W} \Phi_{\geq}(\{w\})$, а из этого следует, что $\varphi^* \notin \operatorname{Min} \operatorname{Min} \bigcap_{w \in W} \Phi_{\geq}(\{w\})$. Предположим, что

$$\varphi^* \notin \operatorname{Max} \bigcup_{w \in W} \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\}).$$

Тогда $\exists w' \in W, \exists \varphi' \in \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\}) : \varphi^* < \varphi'$. Значит, $\varphi^* \notin \Phi_{\geq}(\{w\})$. Следовательно, $\varphi^* \notin \bigcap_{w \in W}$. Значит, $\varphi^* \notin \Phi_*$. Полученное противоречие доказывает, что $\varphi^* \in \operatorname{Max} \bigcup_{w \in W} \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\})$. Теперь докажем, что

$$\operatorname{Max} \bigcup_{w \in W} \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\}) \subseteq \Phi_*.$$

Фиксируем произвольное $\varphi^* \in \operatorname{Max} \bigcup_{w \in W} \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\})$. Предположим, что это не так, т.е. $\exists w' \in W : \forall z \in Z(w') / not / e / phi(z, w') : \varphi(z, w) \leq \varphi^*$. Рассмотрим вектор φ^ϵ :

$$\varphi_i^\epsilon = \varphi_i^* \forall i : 1 \leq i \leq Q, \varphi_i \neq 0,$$

$$\varphi_i^\epsilon = \epsilon \forall i : 1 \leq i \leq Q, \varphi_i = 0.$$

Выберем ϵ достаточно малым, таким, что $\varphi^\epsilon \notin \Phi_{\geq}(\{w'\})$, т.е. $\forall z \in Z(w') \nexists \varphi(z, w') : \varphi(z, W') \leq \varphi^\epsilon$. Фиксируем $\mu \in \mathcal{M}$:

$$\mu_i^{-1} \varphi_i^\epsilon = \mu_j^{-1} \varphi_j^\epsilon = A \forall i, j : 1 \leq i, j \leq Q.$$

Рассмотрим $\varphi' \in Z(w')$:

$$\mu_i^{-1} \varphi_i' = \mu_j^{-1} \varphi_j' = \min_{z \in Z(w')} \max_{k = \overline{1, Q}} \mu_k^{-1} \varphi_k(z, w') = B \forall i, j : 1 \leq i, j \leq Q).$$

$\varphi' \in \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w'\})$, т.к.

$\operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\}) = \{ \bigcup\limits_{\mu \in \mathcal{M}} \varphi(\mu) | \max\limits_{i=\overline{1,Q}} \mu_i^{-1} \varphi_i^{-1}(\mu) = \min\limits_{z \in Z(w)} \max\limits_{i=\overline{1,Q}} \mu_i^{-1} \varphi_i^{-1}(z, w)\}.$

Если $A \geq B$, то $\varphi' \leq \varphi^{\epsilon}$, и, значит, $\varphi^{\epsilon} \in \Phi_{\geq}(\{w'\}$, что противоречит выбору φ^{ϵ}. Если $A < B$, то $\varphi^{\epsilon} < \varphi'$. Т.к. $\varphi^* \leq \varphi^{\epsilon}$, то $\varphi^* < \varphi'$. Т.к. $\varphi' \in \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w'\})$ и $\varphi^* < \varphi'$, то $\varphi^* \notin \operatorname{Max} \bigcup_{w \in W} \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\})$. Из этого противоречия следует, что $\varphi^* \in \bigcap_{w \in W} \Phi_{\geq}(\{w\})$. Докажем, что $\varphi^* \in \operatorname{Min} \bigcap_{w \in W} \Phi_{\geq}(\{w\})$. Предположим, что это не так. Значит, $\exists \varphi' \in \bigcap_{w \in W} \Phi_{\geq}(\{w\}) :$ $\varphi' < \varphi^*$. Следовательно, $\nexists w \in W : \varphi^* \in \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\})$. Значит, $\varphi^* \notin \bigcup_{w \in W} \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\})$. Из этого следует, что $\varphi^* \notin \operatorname{Max} \bigcup_{w \in W} \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\})$, что противоречит выбору φ^*. Итак, $\Phi_* \subseteq \operatorname{Max} \bigcup_{w \in W} \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\})$ и $\operatorname{Max} \bigcup_{w \in W} \operatorname{Min} \Phi \geq (\{w\}) \subseteq \Phi_*$. Значит, $\Phi^* = \operatorname{Max} \bigcup_{w \in W} \operatorname{Min} \Phi_{\geq}(\{w\})$. Утверждение доказано. Замечание. Если рассматривать Φ^* в смысле Парето, то утверждение неверно.

Кроме утверждений 4,5, для характеристики значения (1) представляется полезным

Утверждение 6. Если множества $\Phi[\cdot]$ таковы, что $\Phi^*_{\leq} = \Phi^*_{=}$, то $\Phi^* = \operatorname{Max} \Phi[W^*] = \Phi^*[W^*]$, а если при этом $\forall w \in W$ множества $\Phi_{\leq}[\{w\}]$ выпуклы, то $\Phi^* = \operatorname{Max} \Phi[\widehat{W}] = \Phi^*[\widehat{W}]$.

Доказательство дадим для 1-го равенства (для 2-го аналогично). Согласно доказательству предыдущего утверждения $\Phi_{\leq}[W] = \Phi_{\leq}[W^*]$, и $\Phi^* = \operatorname{Max} \Phi_{\leq}[W^*]$ вне зависимости от того, строгое или нестрогое отношение порядка определяет векторный максимум.

Докажем, что $\mathrm{Max}\,\Phi_{\le}[W^*] \subseteq \mathrm{Max}\,\Phi[W^*]$. Предположим, это не так. Пусть $\exists\psi \in \mathrm{Max}\,\Phi_{\le}[W^*]$: $\psi \notin \mathrm{Max}\,\Phi[W^*]$. Поскольку $\psi \in \mathrm{Max}\,\Phi_{\le}[W^*]$, то $\psi \in \Phi^* = \Phi^*_{\le} = \Phi^*_{=}$. Следовательно, $\psi \in \Phi[W^*]$. Но $\psi \notin \mathrm{Max}\,\Phi[W^*]$, т.е. $\exists\psi' \in \Phi[W^*]$: $\psi' \ge \psi$, $\psi' \ne \psi$ (или $\psi' > \psi$). А так как $\psi' \in \Phi[W^*]$, то $\psi' \in \Phi_{\le}[W^*]$, так что $\psi' \in \Phi_{\le}[W^*]$ и $\psi' \ge \psi$, $\psi' \ne \psi$ (или $\psi' > \psi$). Значит, $\psi \notin \Phi_{\le}[W^*]$ — пришли к противоречию.

Докажем, что $\mathrm{Max}\,\Phi[W^*] \subseteq \mathrm{Max}\,\Phi_{\le}[W^*]$. Предположим, это не так. Пусть $\exists\psi \in \mathrm{Max}\,\Phi[W^*]$: $\psi \notin \mathrm{Max}\,\Phi_{\le}[W^*]$. Поскольку $\psi \in \Phi[W^*]$, то $\psi \in \Phi_{\le}[W^*]$, но $\psi \notin \mathrm{Max}\,\Phi_{\le}[W^*]$, т.е. $\exists\psi' \in \mathrm{Max}\,\Phi_{\le}[W^*]$: $\psi' \ge \psi$, $\psi' \ne \psi$ (или $\psi' = \psi$). Так как $\psi' \in \mathrm{Max}\,\Phi_{\le}[W^*]$, то из предыдущего включения $\psi' \in \mathrm{Max}\,\Phi[W^*]$. Следовательно, $\psi' \in \Phi[W^*]$. Итак $\psi' \in \Phi[W^*]$ и $\psi' \ge \psi$, $\psi' \ne \psi$ (или $\psi' > \psi$). Значит, $\psi \notin \mathrm{Max}\,\Phi[W^*]$ — пришли к противоречию.

Таким образом, $\mathrm{Max}\,\Phi_{\le}[W^*] \subseteq \mathrm{Max}\,\Phi[W^*]$ и $\mathrm{Max}\,\Phi[W^*] \subseteq \mathrm{Max}\,\Phi_{\le}[W^*]$, т.е. $\mathrm{Max}\,\Phi[W^*] = \mathrm{Max}\,\Phi_{\le}[W^*]$. Отсюда $\Phi^* = \mathrm{Max}\,\Phi[W^*] = \Phi^*[W^*]$. Утверждение доказано.

Тем самым, мы получили, что если $\mathrm{Max}\,\Phi[W] = \mathrm{Max}\,\Phi_{\le}[W]$, то такое же равенство выполнено и для W^*, и для $\widehat{W}$, т.е. указанные множества наследуют существенные свойства W.

3. Для выполнения условия $\Phi^*_{\le} = \Phi^*_{=}$ достаточно, чтобы $\Phi_{\le} = \Phi_{=}$, в частности, чтобы

$$\forall w \in W \ \ \forall z \in Z(w) \ \forall \psi \le \Phi(z,w), \ \ \psi \ge 0 \ \exists z' \in Z(w): \ \ \psi = \Phi(z',w), \tag{4}$$

как например, в задаче анализа уязвимости сетей связи [?, ?] (если в качестве вектора частных критериев выбран мультипоток). В последней задаче, кроме того, множества $\{\Phi(z,w) |\ z \in Z(w)\}$ $\forall w \in W$ являются выпуклыми многогранниками (задаются линейными ограничениями), в таком случае множество W^* оказывается конечным и в общем положении минимальным по включению множеством, удовлетворяющим свойству $\Phi^*[W] = \Phi^*[W^*]$. А именно, справедливо

Утверждение 7. Пусть 1) $\varphi_i(z,w) \equiv z_i$, $1 \le i \le Q$ $(Q = n)$, 2) $\forall w \in W$ $Z(w)$ образовано линейными ограничениями-неравенствами "$\le$" с неотрицательными коэффициентами и ограничением $z \ge 0$, причем в любой точке

$$z \in \bigcap_{w \in W} Z(w)$$

активными являются не более n ограничений,
3) $\bigcap_{w \in W} Z(w)$ — n-мерный многогранник;
тогда, если Max в (2) понимается в смысле "$>$", то $\forall w^* \in W^*$ $\Phi^* \ne \operatorname{Max} \Phi[W^* \setminus \{w^*\}]$.

Доказательство. Введем множество J индексов всех ограничений (линейных), определяющих $Z(w)$, $w \in W$. Обозначим через $J(w) \subseteq J$ те индексы, которые соответствуют $Z(w)$, и $R(z) \subseteq J$ — индексы ограничений, активных (выполняющихся как равенства) в точке

$$z \in \bigcap_{w \in W} Z(w); \quad \Phi^* = Z^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Max} \bigcap_{w \in W} Z(w) \text{ по Слейтеру.}$$

По определению W^* (в сделанных предположениях) $\forall w^* \in W^*$ $\exists z(w^*) \in Z^*$: $J(w^*) \cap R(z(w^*)) \neq \emptyset$. Допустим, $\Phi^* = \mathrm{Max}\,\Phi[W^* \backslash \{w^*\}]$, тогда $\forall z \in Z^*$ $\forall j \in J(w^*) \cap R(z)$ j-е ограничение является следствием остальных ограничений, активных в этой точке (так что представимо их линейной комбинацией). Выберем в качестве z смежную с $z(w^*)$ угловую точку, получим $R(z(w^*)) \subseteq R(z)$, значит, $R(z) \cap J(w^*) \neq \emptyset$. Но $|R(z)| \leq n$ (по условию) и хотя бы одно из активных ограничений оказалось линейно зависимым — пришли к противоречию с тем, что угловая точка n-мерного многогранника определяется n линейно независимыми ограничениями. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Из условия (4) для задач с сетевой структурой ограничений вытекает также условие $\Phi'_{\leq} = \Phi_{=}$ (вообще говоря, $\Phi_{=} \subseteq \Phi_{\leq} \subseteq \Phi'_{\leq}$). В случае $\Phi'_{\leq} = \Phi_{\leq}$ представление (3) для множества W^* позволяет получить следующую параметризацию множества Φ^* — значения задачи (1). Это также дает возможность использовать для аппроксимации множества Φ^* методы, предложенные в [?].

Утверждение 8. Пусть $\Phi'_{\leq} = \Phi_{\leq}$ и $\not\exists\ \psi^1, \psi^2 \in \Phi^*$, таких что $\psi_i^1 < \psi_i^2 \ \ \forall i = \overline{1,Q}$: $\ \psi_i^1 + \psi_i^2 > 0$. Тогда, если Max в (2) понимается в смысле "$>$", то

$$\Phi^* = \bigcup_{\mu \in M} (\min_{w \in W} \max_{z \in Z(w)} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z,w))\mu. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть

$$\psi^\mu \stackrel{\text{def}}{=} (\min_{w \in W} \max_{z \in Z(w)} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z,w))\mu \stackrel{\text{def}}{=} (\max_{z \in Z(w^*(\mu))} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w^*(\mu)))\mu.$$

Докажем, что $\forall \mu \in M \ \ \psi^\mu \in \Phi_{\leq}[W]$. Фиксируем произвольное $\mu \in M$. Тогда $\forall w \in W$

$$\max_{z \in Z(w)} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z,w) \geq \max_{z \in Z(w^*(\mu))} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w^*(\mu)) = \mu_j^{-1} \psi_j^\mu \ \ \forall j: \ \mu_j \neq 0.$$

Значит,

$$\forall w \in W \ \exists z \in Z(w): \quad \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z,w) \geq \mu_j^{-1} \psi_j^\mu \ \ \forall j: \ \mu_j \neq 0.$$

Учитывая, что $\psi_i^\mu = 0$, если $\mu_i = 0$, получим, что $\forall w \in W$ $\exists z \in Z(w)$: $\Phi(z,w) \geq \psi^\mu$. Следовательно, $\forall \mu \in M \ \ \psi^\mu \in \Phi'_{\leq} = \Phi_{\leq}[W]$ (по условию).

Докажем теперь, что $\forall \mu \in M \ \ \psi^\mu \in \Phi^*$. Фиксируем произвольное $\mu \in M$. Допустим, что $\psi^\mu \notin \Phi^*$, т.е. $\exists \psi' \in \Phi_{\leq}[W]:$ $\psi' > \psi^\mu$. Так как $\psi' \in \Phi_{\leq}[W]$, то $\forall w \in W \ \exists z \in Z(w)$: $\Phi(z,w) \geq \psi' > \psi^\mu$. Отсюда

$$\forall w \in W \ \ \exists z \in Z(w): \ \ \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z,w) \geq \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \psi'_i > \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \psi_i^\mu.$$

Следовательно,

$$\forall w \in W \quad \max_{z\in Z(w)} \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1}\varphi_i(z,w) \ge \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1}\psi_i' > \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1}\psi_i^{\mu}.$$

Поэтому и

$$\max_{z\in Z(w^*(\mu))} \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1}\varphi_i(z,w^*(\mu)) > \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1}\psi_i^{\mu}.$$

Но из определения ψ^μ следует, что

$$\max_{z\in Z(w^*(\mu))} \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1}\varphi_i(z,w^*(\mu)) = \mu_j^{-1}\psi_j^{\mu} = \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1}\psi_i^{\mu},$$

где j — любой индекс, такой что $\mu_j \neq 0$. Значит, мы получили противоречие, т.е. $\forall\mu \in M \;\; \psi^\mu \in \Phi^*$.

Докажем, обратное включение, а именно, $\forall\psi \in \Phi^* \;\; \exists\mu \in M\colon \;\; \psi = \psi^\mu$. Фиксируем произвольное $\psi \in \Phi^*$.

Если $\psi = 0$, то $\Phi^* = \{\psi = 0\}$. Действительно, предположим, что это не так. Пусть $\exists\psi' \neq 0\colon \;\; \psi' \in \Phi^*$. Тогда $\exists\psi$, $\psi' \in \Phi^*\colon \;\; \psi_i < \psi_i' \; \forall i = \overline{1,Q}\colon \;\; \psi_i + \psi_i' > 0$. Мы получили противоречие с условием утверждения. Значит, если $\psi = 0$ и $\psi \in \Phi^*$, то $\psi^\mu = \psi = 0 \; \forall\mu \in M$, так как $\psi^\mu \in \Phi^* \; \forall\mu \in M$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\psi \neq 0$, $\psi \in \Phi^*$. Фиксируем $\mu \in M$:

$$\mu_i = 0 \;\; \forall i : \; 1 \le i \le Q, \;\; \psi_i = 0;$$

$$\mu_i^{-1}\psi_i = \mu_j^{-1}\psi_j \;\forall i,j : \; 1 \le i,j \le Q, \;\; \psi_i\psi_j \neq 0.$$

Докажем, что $\psi = \psi^{\mu}$, т.е. $\forall j: \ 1 \le j \le Q$

$$\psi_j = (\max_{z \in Z(w^*(\mu))} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w^*(\mu)))\mu_j.$$

Если $\mu_j = 0$, то и $\psi_j = 0$ по определению вектора μ. Покажем, что $\forall j: \ 1 \le j \le Q, \ \mu_j \neq 0$

$$\psi_j = (\max_{z \in Z(w^*(\mu))} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w^*(\mu)))\mu_j,$$

т.е.

$$\mu_j^{-1}\psi_j = \max_{z \in Z(w^*(\mu))} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w^*(\mu)).$$

Предположим, что это не так. Пусть $\exists j$: $1 \le j \le Q, \ \mu_j \neq 0$ и

$$\mu_j^{-1}\psi_j > \max_{z \in Z(w^*(\mu))} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w^*(\mu)).$$

Так как $\psi \in \Phi_{\le}[W]$, то для $w^*(\mu) \in W \ \exists z' \in Z(w^*(\mu))$: $\Phi(z', w^*(\mu)) \ge \psi$. Следовательно,

$$\min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z', w^*(\mu)) \ge \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1}\psi_i = \mu_j^{-1}\psi_j >$$

$$> \max_{z \in Z(w^*(\mu))} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w^*(\mu)) \ge \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z', w^*(\mu)).$$

Отсюда вытекает противоречие

$$\min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z', w^*(\mu)) > \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z', w^*(\mu)).$$

Пусть $\exists j: \ 1 \le j \le Q, \ \mu_j \neq 0$ и

$$\mu_j^{-1}\psi_j < \max_{z \in Z(w^*(\mu))} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w^*(\mu)).$$

Значит, $\forall i: \ 1 \le i \le Q, \ \mu_i \ne 0, \ \psi_i < \psi_i^\mu$. Таким образом, $\psi, \psi^\mu \in \Phi^*$ и $\psi_i < \psi_i^\mu \ \ \forall i\colon \ 1 \le i \le Q, \ \psi_i + \psi_i^\mu > 0$, ибо $\psi_i = \psi_i^\mu = 0$ при $\mu_i = 0$. Отсюда следует противоречие с условием утверждения. Поэтому $\psi = \psi^\mu$.

Итак, $\psi^\mu \in \Phi^* \ \forall \mu \in M$ и $\forall \psi \in \Phi^* \ \exists \mu \in M\colon \ \psi = \psi^\mu$. Следовательно,

$$\Phi^* = \bigcup_{\mu \in M} \psi^\mu = \bigcup_{\mu \in M} \big(\max_{z \in Z(w^*(\mu))} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w^*(\mu)) \big) \mu$$

и утверждение доказано.

Тем самым, в условиях утверждения 8 получено обобщение на минимаксный случай формулы для параметризации множества Слейтера с помощью обратной логической свертки [?]. Подчеркнем, что при этом для описания решения не надо искать все множество реализаций минимакса свертки, а достаточно по одному представителю для каждого $\mu \in M$. Любопытно, что стандартное представление в виде объединения значений критерия в точках оптимума свертки для решения задачи (1), вообще говоря, построить не удается, хотя в сетевом случае за счет выполнения (4) можно распространить на минимакс и такую формулу, а именно

$$\Phi^* = \bigcup_{\mu \in M} \{ \Phi(z(\mu), w^*(\mu)) | \; w^*(\mu) \in \operatorname{Arg} \min_{w \in W} \{ \max_{z \in Z(w)} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w) \},$$

$$z(\mu) \in \operatorname{Arg} \max_{z \in Z(w^*(\mu))} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w^*(\mu)) \},$$

$$\text{или} \quad \Phi^* = \bigcup_{\mu \in M} \Phi(z^*(\mu), w^*(\mu)), \quad \text{где} \quad \forall \mu \in M$$

$$w^*(\mu) \in \operatorname{Arg} \min_{w \in W} \{ \max_{z \in Z(w)} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w) \},$$

$$z^*(\mu) \in \operatorname{Arg} \max_{z \in Z(w^*(\mu))} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, w^*(\mu)) :$$

$\mu_i^{-1}\varphi_i(z^*(\mu), w^*(\mu)) = const \ \forall i \in I(\mu)$ и $\varphi_i(z^*(\mu), w^*(\mu)) = 0$ $\forall i \notin I(\mu)$; т.е. $\varphi_i(z^*(\mu), w^*(\mu)) = \psi_i^\mu \ \forall i : 1 \leq i \leq Q$ и последняя формула совпадает с (5). Но с точки зрения аппроксимации множества Φ^* формула (5), полученная в утверждении 8 без предположения (4), безусловно более интересна.

Замечание 2. В случае выпуклости Φ^* 2-е условие утверждения 8 можно заменить следующим:

$$\min_{i=\overline{1,Q}} \max_{\psi \in \Phi^*} \psi_i > 0.$$

Если же этот минимакс равен нулю, то можно перейти в пространство критериев меньшей размерности, в котором уже применять результат утверждения 8.

Замечание 3. Если 1-е условие утверждения 8 не выполняется, то предложенная параметризация справедлива для множества $\Phi'^{*}_{\leq}$:

$$\Phi'^{*}_{\leq} = \bigcup_{\mu \in M} \psi^\mu.$$

Отметим, что при этом $\Phi^* \subset \Phi'^{*}_{\leq}$, поскольку фактически при доказательстве утверждения 8 мы получили: $\psi^\mu \in \Phi'^{*}_{\leq} \ \forall \mu \in M$ и $\forall \psi \in \Phi^* \ \ \exists \mu \in M$: $\psi = \psi^\mu$. Таким образом всегда можно построить внешнюю аппроксимацию для Φ^* на основе представления (5).

Список литературы

[1] Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

[2] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

[3] Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Потоковые задачи анализа уязвимости многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1989.

[4] Малашенко Ю.Е. Математические модели анализа потоковых сетевых систем. М.: ВЦ АН СССР, 1993.

[5] Воробейчикова О.А., Новикова Н.М. Векторный минимакс со связанными ограничениями // Вестн. МГУ. Вычисл. матем. и кибернетика, 1996. N . С .

[6] Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

[7] Смирнов М.М. О логической свертке вектора критериев в задаче аппроксимации множества Парето // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1996. Т.36. N . С .

[8] Смирнов М.М. Методы аппроксимации граней множества Парето в линейной многокритериальной задаче // Вестн. МГУ. Вычисл. матем. и кибернетика, 1996. N 3. С 37–43.

Рис.1