Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. VII.

Задача нормативного анализа уязвимости многопродуктовой потоковой сети [1]

©1999 г. **Ю.Е.Малашенко, Н.М.Новикова**
Москва, ВЦ РАН

Поступила в редакцию 21.04.97 г.

Рассмотрена задача анализа эффективности многопользовательских сетевых систем в условиях возможности неслучайных внешних воздействий, уменьшающих пропускную способность ребер физического графа сети. Вектор требований предполагается известным (трактуется как заданный норматив, например, исходно пропускаемый по сети поток). Поставлена задача нормативного анализа уязвимости — получения гарантированных оценок качества функционирования сетевой системы, когда это качество описывается диаграммой обеспеченности требований тяготеющих пар, т.е. рапределением долей от всех требований по уровням обеспеченности. Указанная задача представлена в виде многокритериального минимакса с диаграммным критерием. Проведена формализация понятия решения и для ряда модельных сетей решение построено в явном виде. Это дало возможность сравнить по критерию уязвимости три типа сетевых структур: линейную, кольцо и звезду, — и получить нетривиальные результаты даже на простейших примерах.

Введение. Предлагаемая статья является продолжением [1], посвященной применению общей методологии исследования операций [2] для анализа допустимости многопродуктовых потоковых сетей (МП-сетей) [3, 4] в условиях неопределенности. В [1] был изучен случай неточно или неполностью известного вектора входной нагрузки (требований тяготеющих пар) и даны адекватные обобщенные постановки задачи о допустимости, в частности, гарантированная (предполагающая допустимость для любого вектора требований). В [5] исследована задача о допустимости в случае неизвестных требований и предложены методы ее решения с помощью параметрического анализа. При этом использовалась многокритериальная постановка на максимум вектора величин потоков продуктов. В работе [6] был проведен подробный анализ МП-сетей в предположении, что неопределенный фактор влияет на пропускную способность ребер физического графа сети и является случайным.

[1] Работа поддержана РФФИ по гранту N.98-01-00233

тем что неопределенность, исследуемая в [6], является объективной, а не субъективной как для ситуации с вектором требований. В настоящей статье рассматривается задача анализа МП-сети с неизвестной (неточно или неполностью известной) пропускной способностью ребер ее физического графа в детерминированном случае. Предполагается, что возможные разрушающие (поражающие) воздействия на сеть имеют неслучайный характер: являются результатом глобальных изменений, катаклизмов или целенаправленного поведения. Потери пропускной способности могут оказаться довольно большими и трудно восполнимыми, что требует апостериорного перераспределения потоков в сети. Поэтому будем рассматривать задачу анализа в *нежесткой постановке*: учитывать возможность оптимизации распределения потоков после поражающего воздействия на сеть, далее, “удара”. Здесь считается, что оставшаяся пропускная способность станет затем известной. Тяготеющие пары полагаем для простоты не подверженными воздействию — не изменяющимися.

Согласно общей методологии исследования операций [2] в условиях неполной информированности надо ориентироваться на гибко понимаемый принцип гарантированности результата, т.е. учитывать всю доступную и ожидаемую информацию (по мере ее поступления) и рассчитывать на худший случай в рамках имеющейся неопределенности. Следуя 1-му правилу, мы выбрали нежесткую постановку задачи анализа. Однако, рамки неопределенности вектора пропускной способности для рассматриваемого класса задач слишком широки, чтобы приводить к содержательным оценкам по 2-му правилу. С целью сузить эти рамки будем совмещать принцип гарантированности результата с параметрическим анализом. А именно, параметризуем все возможные воздействия по “силе” (или “мощности”) удара, точнее, по сумме потерь пропускной способности ребер МП-сети. Конкретная локализация удара (ребра, подвергшиеся поражающему воздействию) и распределение данной мощности удара по ребрам сети по-прежнему считаются неизвестными. Таким образом, гарантированное оценивание функциональных возможностей МП-сети предполагает поиск наихудшего для сети распределения удара, т.е. поиск варианта уменьшения пропускной способности ребер, приводящего к максимальному ущербу функционированию МП-сети (при известных ограничениях на суммарное сокращение пропускной способности). Параметрическое семейство подобных задач поиска будет в работе ассоциироваться с *задачей анализа уязвимости*.

обще говоря, не имеют единственного показателя эффективности, их функционирование оценивается вектором критериев. Два типа векторных критериев уже рассматривались нами при изучении задачи анализа МП-сети с фиксированной пропускной способностью (см. [7, 5]). Указанные векторы служат основными количественными показателями при получении оценок функциональных возможностей МП-сети в условиях разрушающих воздействий. При этом качество функционирования сети понимается с позиций обеспечения потоковых требований пользователей — тяготеющих пар. В [8] исследован случай неизвестных требований, когда вектором критериев согласно [5] является мультипоток (но в отличие от [5] задача ставится не как оптимизационная, а как минимаксная). Фактически, в [8] формализована задача априорного анализа уязвимости сетевой системы на этапе ее предварительного проектирования, когда входные потоки известны недостаточно полно/точно. Настоящая статья посвящена проблеме анализа уязвимости уже существующих и функционирующих сетевых систем, вектор потоковых требований d в которых можно считать сформировавшимся и известным лицу, принимающему решения, далее, ЛПР. (Согласно нежесткой постановке у ЛПР имеется возможность управления потоками, т. е. выбора распределения потоков в сети — путей соединения тяготеющих пар. Если придерживаться терминологии сетей связи, то это означает, что, хотя первичная сеть связи проложена и вторичная сеть на ее основе также создана, но в случае повреждения элементов первичной сети можно в обозримое время "переложить" вторичную сеть связи некоторым, и даже близким к оптимальному, образом.) В таком случае, как указывалось в [7], оптимальным, т.е. наиболее адекватным заданному вектору требований, справедливым и эффективным, следует считать *суперконкурентное* распределение потоков в сети.

В контексте задачи анализа уязвимости нас интересуют не столько "хорошие" свойства суперконкурентного решения, сколько тот факт, что безотносительно к реально проводимому распределению ресурсов сети между пользователями (управлению потоками) суперконкурентный мультипоток дает верхнюю оценку потенциально достижимых потоков для пользователей в условиях их недискриминирования, в частности, их равноправности в обеспечении потоковых требований. Указанные условия предполагались всюду в [1,5–8], тем естественнее считать их выполненными для задачи анализа уязвимости, когда внешние поражающие воздействия приводят к дефициту сетевых ресурсов и усиливают конкуренцию между пользователями. Итак, при исследовастроить гарантированные оценки качества функционирования сети, понимая это качество именно в смысле суперконкурентного решения. Таким образом будут получены наилучшие гарантированные оценки.

Здесь следует еще раз подчеркнуть, что числовые показатели эффективности сети для авторов данной работы связаны по сути лишь с обеспеченностью потоковых требований пользователей. Мы не интересуемся ни затратами на восстановление сетевой системы, ни убытками ее владельцев, предоставляющих каналы связи, ни даже штрафами за непропущенные потоки, задержки или потери, — все это привело бы к другим целевым функциям и к другим реализующимся мультипотокам. Нам важен не экономический, а пользовательский (или, если угодно, социальный — для больших систем) аспект проблемы. При этом в принципе можно говорить о наибольшем гарантированном результате для каждого конкретного пользователя, но мы хотим получить агрегированные показатели, характеризующие уязвимость всей сети в целом, оставаясь в рамках гипотезы анонимности пользователей, являющейся математической формализацией их равноправности (т. е. при изменении номеров тяготеющих пар значение и вид результата не должны измениться). Соответствующая модель излагается далее.

1. Лексикографически-векторный критерий качества функционирования МП-сети. Введем обозначение $\varsigma_i(z) \stackrel{\text{def}}{=} z_i/d_i$ для обеспеченности потоковых требований (о.п.т.), или пропускаемой по МП-сети части требований, i-й тяготеющей пары, $i \in M$, при реализации мультипотока $z \in Z(c)$. (Здесь и далее $M = (1, 2, \ldots, m)$ — множество индексов i тяготеющих пар, вектор $c = (c_1, \ldots, c_e)$ — вектор пропускной способности ребер графа сети после удара (т.е. неизвестный заранее), $Z(c)$ — множество достижимых мультипотоков в МП-сети с пропускной способностью c.) Для любого $z \in Z(c)$ перенумеруем индексы тяготеющих пар в порядке неубывания $\varsigma_i(z)$, получим

$$i_1(z), i_2(z), \ldots, i_m(z): \quad \varsigma_{i_j(z)}(z) \leq \varsigma_{i_{j+1}(z)}(z). \tag{1.1}$$

Теперь построим ступенчатую функцию, отражающую для заданного мультипотока z степень обеспеченности каждой доли μ суммарных

$$
\zeta(z)[\mu] = \begin{cases} \min[\varsigma_{i_1(z)}(z), 1], & \text{если } 0 < \mu \le d_{i_1(z)} / \sum\limits_{i=1}^{m} d_i, \\ \min[\varsigma_{i_2(z)}(z), 1], & \text{если } d_{i_1(z)} / \sum\limits_{i=1}^{m} d_i < \mu \le (d_{i_1(z)} + d_{i_2(z)}) / \sum\limits_{i=1}^{m} d_i, \\ \quad \dots & \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \min[\varsigma_{i_m(z)}(z), 1], & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{m-1} d_{i_j(z)} / \sum\limits_{i=1}^{m} d_i < \mu \le 1. \end{cases} \tag{1.2}
$$

Определим отношение порядка "$\stackrel{*}{\le}$" на множестве ступенчатых функций $\zeta(\cdot)$ как поточечное лексикографическое "$\le$" для $\mu \in (0,1]$. Формально

$$
\zeta(z^1) \stackrel{*}{\le} \zeta(z^2) \Longleftrightarrow \{\zeta(z^1)[\mu] = \zeta(z^2)[\mu] \ \forall \mu \in (0,1]\} \vee \{\zeta(z^1)[\mu^0] < \zeta(z^2)[\mu^0],
$$

$$
\text{где } \ \mu^0 \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\zeta(z^1)[\mu] \ne \zeta(z^2)[\mu]} \mu + \frac{1}{2} \min_{i \in M} d_i / \sum_{i \in M} d_i\}.
$$

С учетом кусочной постоянности $\zeta(z)[\cdot]$ такое определение корректно.

Мы предполагаем, что в условиях, когда МП-сеть подвергается разрушающим воздействиям, целью перераспределения потоков в сети является лексикографическая максимизация (по $z \in Z(c)$) бесконечномерного вектора $\zeta(\cdot)$. Упорядочение (1.1) позволяет добиться анонимности — равноправности тяготеющих пар в обеспечении их потоковых требований, лексикография от меньших значений θ и μ к бо́льшим отражает стремление к справедливому (недискриминирующему) распределению потоков. Тем самым, реализуется принцип равенства без уравнивания пользователей.

Осталось еще обсудить то новое, что дает использование критерия $\zeta(\cdot)$ по сравнению с лексикографически упорядоченным вектором $\varsigma(\cdot)$ в качестве максимизируемого критерия. Отчасти это станет видно из дальнейших построений, но сейчас важно отметить следующее. Критерий $\zeta(\cdot)$ учитывает не только значения $\varsigma_i(\cdot)$ $\forall i \in M$, но и значения d_i, т.е. фактически сколько абонентов стоит за каждой i-й тяготеющей парой. Напомним, что требования в данной главе трактуются как заданные нормативы, или объективные характеристики тяготеющей пары, поэтому ясно, что тот мультипоток лучше, для которого меньшая доля требований обеспечивается с меньшим коэффициентом о.п.т. Трактовка значений d_i как пропорциональных реальному числу пользовательских пар (физических лиц), агрегированных в i-ю тяготеющую пару, конечно, весьма условна, но для междугородних телефонных сетей соответствует принятым представлениям. Кроме того в в качестве d_i взять потоки, пропускаемые по сети до разрушающего воздействия. Тогда критерий (1.2) служит формализацией цели *недискриминирования пользователей при преодолении последствий разрушения сети.*

Задача максимизации критерия (1.2) ставится следующим образом: найти значение $\zeta^0 = \zeta^0(c)$ и реализацию z^* максимума по $z \in Z(c)$ в смысле отношения порядка "$\overset{*}{\leq}$" среди ступенчатых функций $\zeta(z)[\cdot]$,

$$\zeta^0 = \zeta(z^*) \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{\underset{z \in Z(c)}{\mathrm{Max}}}\, \zeta(z). \qquad (1.3)$$

Здесь и далее используется Max с большой буквы "M" по аналогии с классической векторной оптимизацией и Max отмечается звездочкой ("*") с целью подчеркнуть лексикографию. Укажем, однако, что формально диаграмма-критерий $\zeta(\cdot)$ соответствует бесконечномерному вектору (с компонентами $\zeta(\cdot)[\mu]$, $\mu \in (0,1]$). В результате постановка (1.3) относится к обобщению традиционных задач многокритериальной оптимизации на случай континуума критериев. За счет лексикографии значение (1.3) является одноточечным множеством (в отличие от формулировок из [5] и [8]).

На основании результатов [7] решение задачи (1.3) удается получить из решения задачи поиска суперконкурентного мультипотока. Приведем определение суперконкурентного мультипотока z^L, следуя [7].

Обозначим через $Z^0(c,d)$ множество конкурентных мультипотоков [9] в МП-сети, т.е. реализаций максимума уровня о.п.т.

$$\theta_0 = \theta_0(c,d) \overset{\text{def}}{=} \max_{z \in Z(c)} \min_{i \in M} \frac{z_i}{d_i}, \qquad (1.4)$$

$$M_0(c,d) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{z^0 \in Z^0(c,d)} \{i \in M |\ z_i^0 = \theta_0 d_i\} \qquad (1.5)$$

— множество индексов тяготеющих пар, о.п.т. которых невозможно увеличить выше θ_0, не понизив значения уровня о.п.т. (минимума из о.п.т.) в сети. Рекурсивно определим $\forall l = 0, 1, \ldots, L-1$

$$\theta_{l+1}(c,d) \overset{\text{def}}{=} \max_{z^l \in Z^l(c,d)} \min_{i \in M \setminus \cup_{j=0}^{l} M_j(c,d)} \frac{z_i^l}{d_i}, \qquad (1.6)$$

$$Z^{l+1}(c,d) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Arg} \max_{z^l \in Z^l(c,d)} \{ \min_{i \in M \setminus \cup_{j=0}^{l} M_j(c,d)} \frac{z_i^l}{d_i} \}, \qquad (1.7)$$

$$M_{l+1}(c,d) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{z \in Z^{l+1}(c,d)} \{i \in M \setminus \bigcup_{j=0}^{l} M_j(c,d) |\ z_i = \theta_l d_i\}, \qquad (1.8)$$

где $L = L(c,d) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min\{l = 0, 1, \dots \mid M = \bigcup_{j=0}^{l} M_j(c,d)\}$.

Мультипоток z^L, построенный в результате процедуры (1.4)–(1.8), назван в [7] суперконкурентным. Нетрудно видеть, что он оказывается z^* — реализацией максимума в (1.3). В случае $\theta_L(c,d) \leq 1$ эта реализация единственна. Значение $\zeta^0(c)$ искомого максимума является ступенчатой функцией параметра μ (доли суммарных требований тяготеющих пар) и вычисляется $\forall \mu \in (0,1]$ по формуле

$$\zeta^0(c)[\mu] = \begin{cases} \min[\theta_0(c,d), 1], & \text{если } 0 < \mu \leq \mu_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{i \in M_0} d_i / \sum\limits_{i \in M} d_i, \\ \min[\theta_1(c,d), 1], & \text{если } \mu_0 < \mu \leq \mu_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{i \in M_0 \cup M_1} d_i / \sum\limits_{i \in M} d_i, \\ \quad \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \min[\theta_L(c,d), 1], & \text{если } \mu_{L-1} < \mu \leq \mu_L = 1, \end{cases}$$

т.е. равно $\min[1, \theta(\mu)]$ — срезке единицей диаграммы обеспеченности требований, представленной в [7], см. рис.1. Обозначение

$$\mu_l \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i \in M_0 \cup M_1 \cup \dots \cup M_l} d_i / \sum_{i \in M} d_i \quad \forall l = 0, 1, \dots, L \tag{1.9}$$

определяет суммарную величину потоковых требований, которые могут быть обеспечены на уровне не выше l-го, приведенную к сумме требований всех тяготеющих пар.

Рис. 1.

2. Формализация задачи нормативного анализа уязвимости и интерпретация ее решения. В предыдущем разделе был обоснован лексикографически-векторный, а точнее, диаграммный критерий $\zeta(\cdot)$ качества функционирования МП-сети и был найден его максимум $\zeta^0(c)$ при фиксированных c и d. Согласно общей методологии, описанной во Введении, анализ уязвимости МП-сети предполагает получение ности любых c из $C[\gamma]$, где

$$C[\gamma] \stackrel{\text{def}}{=} \{c \geq \bar{0} |\ c \leq c^0, \ \ \sum_{k=1}^{e} c_k = (1-\gamma) \sum_{k=1}^{e} c_k^0\}, \tag{2.1}$$

c^0 — исходный вектор пропускной способности ребер сети (считается известным), $\gamma \in [0,1]$ — параметр, характеризующий мощность разрушающего воздействия. Таким образом, мы приходим к параметрической задаче поиска

$$\zeta^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{Min}_{c \in C[\gamma]} \zeta^0(c) = \operatorname*{Min}_{c \in C[\gamma]} \operatorname*{\overset{*}{Max}}_{z \in Z(c)} \zeta(z), \tag{2.2}$$

$\gamma \in (0,1)$. Минимум в (2.2), обозначенный Min по аналогии с обычной векторной оптимизацией, понимается в смысле поточечного "$\leq$", корректном для ступенчатых функций, а именно

$$\zeta^0(c^2) \leq \zeta^0(c^1) \Longleftrightarrow \{\zeta^0(c^2)[\mu] \leq \zeta^0(c^1)[\mu] \ \ \forall \mu \in (0,1]\}.$$

Обоснование данной постановки можно получить, используя игровую формулировку задачи анализа уязвимости, сходную рассмотренной в [8], но с бесконечномерной вектор-функцией выигрыша $\zeta(\cdot)$ у 1-го игрока. Считаем, что 1-й игрок задает мультипоток $z \in Z(c)$ путем выбора распределения потоков, а 2-й игрок выбирает $c \in C[\gamma]$ путем снижения исходной пропускной способности c^0 ребер МП-сети. 1-му игроку будет известен выбор 2-го игрока, так что он рассчитывает на возможность апостериорного (после удара) перераспределения дуговых потоков. 2-й же игрок может не знать исходных потоков в сети и требований тяготеющих пар, поэтому мы не предполагаем, что он использует лексикографию при минимизации. В результате, будет найдено не одно наихудшее воздействие, а множество (как в обычной векторной оптимизации), содержащее в числе прочих и решение c^{*0} задачи лексикографической минимизации $\zeta^0(c)$. Тем самым, предложенная формализация дает наиболее информативные гарантированные оценки, что особенно важно для случая, когда 2-й игрок является лишь моделью неопределенности.

Задача (2.2) является многокритериальной минимаксной (с критерием-диаграммой $\zeta(\cdot)$, имеющей конечное число ступенек). Задачи на векторный минимакс для обычных векторов рассматривались в [10, 11, 12] и др., в частности, для сетевых постановок в [8]. Обобщение определения из [8] для бесконечномерного вектора критериев приводит к

$$\zeta^* = \operatorname{Max} \bigcap_{c \in C[\gamma]} \bigcup_{z \in Z(c)} \{\zeta(z) \overset{*}{\leq} \overset{*}{\underset{z \in Z(c)}{\operatorname{Max}}} \, \zeta(z)\},$$

которая после расшифровки $\zeta(z)$ и ζ^0 преобразуется в

$$\zeta^* = \operatorname{Max} \bigcap_{c \in C[\gamma]} \{(\mu, \theta) \in [0,1] \times [0,1] \mid \theta \leq \zeta^0[\mu](c)\}, \tag{2.3}$$

т.е. значение ζ^* может быть представлено ступенчатой диаграммой, являющейся точной верхней гранью пересечения по $c \in C[\gamma]$ подграфиков функций $\zeta^0(c)$ (см. рис. 2). С другой стороны (см. также рис. 2) оно оказывается нижней огибающей всех диаграмм обеспеченности требований для $c \in C[\gamma]$,

$$\zeta^* = \operatorname{Min} \bigcup_{c \in C[\gamma]} \{(\mu, \theta) \in [0,1] \times [0,1] \mid \theta = \zeta^0[\mu](c)\} = \operatorname{Min} \bigcup_{c \in C[\gamma]} \overset{*}{\underset{z \in Z(c)}{\operatorname{Max}}} \, \zeta(z). \tag{2.4}$$

Последнее обобщает определение, соответствующее данному в [11] для конечномерного векторного максимина. Из равенства (2.3) и (2.4) получаем эквивалентность для задачи (2.2) двух имеющихся в литературе трактовок значения векторного минимакса, что позволяет сделать вывод об однозначности определения ζ^*. Указанную ступенчатую функцию назовем *диаграммой уязвимости* МП-сети (см. жирную линию на рис. 2).

Рис. 2.

Диаграмма уязвимости ζ^* составлена из набора "ступенек", высота которых θ_{*0}, θ_{*1} и т.д. возрастает по μ. Обозначим через μ_0^*, μ_1^* и т.д. точки на оси μ, отвечающие правым концам ступенек, и положим $\mu_{-1}^* \overset{\text{def}}{=} 0$. Диаграмма уязвимости показывает следующее. В рамках неопределенности $c \in C[\gamma]$ может случиться, что $(\mu_t^* - \mu_{t-1}^*)$-я часть требований в сети будет обеспечена не более, чем на $\theta_{*t} \cdot 100\%$ для всех $t = 0, 1, \ldots$. Полученная гарантированная оценка является точной (неулучшаемой).

на. Она представляет собой множество $C^* = C^*(\gamma)$, состоящее из векторов c^*, соответствующих тем диаграммам ζ^0, которые формируют ζ^* (на рис. 2 они имеют участки, выделенные жирным). Благодаря единственности значения (1.3), эти диаграммы задают множество минимальных элементов среди всех диаграмм обеспеченности требований (при $c \in C[\gamma]$), т.е.

$$\operatorname*{Min}_{c\in C[\gamma]} \zeta^0(c) = \operatorname*{Min}_{c\in C^*(\gamma)} \zeta^0(c).$$

Свойства множества $C^*(\gamma)$ очень интересны. В частности, оно содержит не только угловые точки множества $C[\gamma]$. (Угловой точкой является c^{*0}, задающая нижнюю ступеньку диаграммы ζ^*.) Некоторые примеры описания C^* будут даны в разд. 4.

Теперь напомним, что диаграмма ζ^* характеризует уязвимость МП-сети для заданного $C[\gamma]$. Однако, обычно значение γ не известно. Поэтому задача нормативного анализа уязвимости ставится как параметрическая с параметром

$$\gamma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{k=1}^{e} c_k \Big/ \sum_{k=1}^{e} c_k^0 \tag{2.5}$$

мощности разрушающего воздействия. Решение задачи нормативного анализа уязвимости МП-сети предполагает поиск $\zeta^* = \zeta^*(\gamma)$ и $C^* = C^*(\gamma)$ для $C[\gamma]$ (2.1) при всех $\gamma \in [0,1)$. На практике приходится ограничиться лишь конечным (и небольшим) числом различных значений γ, поскольку решение каждой отдельной задачи в настоящее время скорее искусство, чем рутинная процедура. Тем не менее это дает возможность сравнения различных сетевых структур по критерию уязвимости (см. далее в разд. 4). Заметим, что на качественном уровне диаграммы уязвимости близки для близких γ и число различных типов диаграмм конечно (хотя и экспоненциально по m).

Предложенная формализация позволяет получить наглядное описание уязвимости МП-сети с произвольным числом продуктов в виде трехмерной диаграммы, где ось абсцисс — это ось μ, ось ординат — γ, а ось аппликат — θ, т.е. при каждом γ строим диаграмму уязвимости, как показано на рис. 2. По оси γ соответствующие ступенчатые функции поточечно монотонно не возрастают, убывая от тождественной единицы (в случае допустимости исходной МП-сети) до тождественного нуля. Отличие от 1 объема положительной части подграфика такой трехмерной диаграммы дает скалярный (числовой) показатель уязвимости. Значение этого показателя всегда меньше 1, а если требования ство достигается только для сетей с однореберным физическим графом или им эквивалентных).

Если диаграммы уязвимости имеются лишь для конечного числа различных γ, то получаем ступенчатую трехмерную диаграмму типа изображенной на рис. 3 и можем аппроксимировать искомую поверхность как сверху, так и снизу.

Рис. 3.

3. Обсуждение содержательной стороны постановки. Если сравнить предложенную постановку с рассмотренной в начале [8] (разд. 1), то нетрудно убедиться в ее большей информативности. Действительно, задача поиска наибольшего гарантированного уровня о.п.т., или гарантированного значения θ_0,

$$\theta_0^*(d) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{c \in C[\gamma]} \max_{z \in Z(c)} \min_{i \in M} \frac{z_i}{d_i},$$

определяет лишь самую нижнюю ступеньку на диаграмме уязвимости: $\theta_{*0} = \theta_0^*(d)$. При этом, если для данной МП-сети знания того, к примеру, что $\theta_{*0} = 0$, т.е. что какая-то тяготеющая пара возможно останется вообще без связи, уже достаточно, чтобы делать оргвыводы (хотя, наверное, хотелось бы знать, сколько может быть таких "разделенных" пар и каков общий объем их требований), то для выбора из различных физических графов сети безусловно нужна более подробная информация, описываемая в настоящем параграфе. Возникает вопрос, для чего надо выбирать сетевые структуры, ведь во Введении указывалось, что задача нормативного анализа ставится для уже существующей сети со сложившимся вектором требований. По мнению авторов подобные постановки должны возникать при сравнении проектов модернизации сетевой системы с целью ее упрочнения — понижения уязвимости. Поскольку разные проекты, как правило, заметно различаются по стоимости, то ЛПР ожидает как можно более полной информации о том, что дает каждый проект. А чтобы избежать пристрастности, важно обеспечить анонимность тяготеющих пар. Последнее обстоятельство та проекта принимается не одним ЛПР, а группой лиц, имеющих неодинаковые привязанности к разным информационным направлениям. Предложенная постановка предоставляет им возможность договориться на основе объективной платформы, оберегающей равноправность пользователей МП-сети.

Теперь добавим еще несколько слов к тому, что неоднократно говорилось о равноправности тяготеющих пар в МП-сети и равнозначности их потоковых требований, реальность которых в данной главе не подвергается сомнению.

Даже при самой благоприятной для пользователей структуре исходного физического графа сети его поражение наверняка будет несимметричным: одни тяготеющие пары окажутся в худшем положении, другие — в лучшем. В этом — специфика сетевой структуры связей (если в сети есть хотя бы два ребра, а информационные направления различаются, то для них не все равно, какое из ребер подвергается разрушению). Как бы ни старался диспетчер сети путем перераспределения потоков улучшить связь пользователям первой группы, он не может поднять их уровень о.п.т. выше $\theta_0(c,d)$, в частности, в случае $\theta_0(c,d) = 0$ они вообще лишатся связи. Все пары из $M_0(c,d)$ в этом смысле равны. Однако они не будут равными другим тяготеющим парам, ибо иначе не надо было бы заботиться и о связи для всех остальных. Тем самым, мы конечно приходим к пресловутой ситуации, когда одни будут "равнее" других [13], но такова суть проблемы недискриминирования в дискриминирующей обстановке (не позволяющей полностью компенсировать последствия разрушающих воздействий). Именно поэтому мы не можем оценивать качество функционирования пораженной сети единственным критерием и должны учитывать все уровни о.п.т. В результате возникает множественность сценариев, формирующих диаграмму уязвимости, а также возможная несравнимость МП-сетей по критерию уязвимости (если их диаграммы пересекаются). Но здесь уместно подчеркнуть, что принятие решений возложено на ЛПР, а не на модель. Цель модели состоит в предоставлении ЛПР математического аппарата для проведения необходимых исследований, способствующих обоснованному выбору.

4. Пример сравнительного анализа уязвимости трехпродуктовых сетей с различными физическими графами. Рассмотрим и сравним три простейших примера МП-сетей, которые, однако, позволяют продемонстрировать некоторые особенности введенных понятий.

На множестве из трех узлов построим три различные сети $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ и проставлены в соответствующих кружках, а цифры рядом с ребрами указывают на величину их исходной пропускной способности.

Рис. 4.

Пусть требования на передачу потоков, т.е. тяготения, в сетях $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ и $\mathbf{S}_3$ являются одинаковыми и составляют: между узлами v_1 и v_2 $d_1 = 10$, между узлами v_1 и v_3 $d_2 = 20$ и, наконец, между v_2 и v_3 $d_3 = 30$ (граф тяготений совпадает с графом сети $\mathbf{S}_2$). Нетрудно убедиться, что данные требования можно обеспечить в каждой из сетей, причем $\theta_0(c^0, d) = 1$, $M_0(c^0, d) = M$.

Далее на рис. 5 — 8 приведены различные варианты состояний сетей $\mathbf{S}_1$,$\mathbf{S}_2$ и $\mathbf{S}_3$ и построены диаграммы уязвимости для разрушений разной мощности (2.5): $\gamma = 0.2,\ 0.4,\ 0.5$ и 0.6.

Рис. 5

Напомним, что после разрушающего воздействия с параметром γ

ется как $\sum\limits_{k=1}^{e} c_k = (1-\gamma)c_0$, где c_0 — исходная суммарная пропускная способность ребер, которая составляет: для сети $\mathbf{S}_1$ $c_{01} = 70$, для $\mathbf{S}_2$ $c_{02} = 60$ и для $\mathbf{S}_3$ $c_{03} = 120$.

Каждый из рис. 5 — 8 соответствует одному значению γ, все рисунки построены по одинаковому принципу, поэтому рассмотрим для примера только рис. 6. В верхней части рисунка приведено численное значение $\gamma = 0.4$. Указано, что левый столбец диаграмм относится к сети $\mathbf{S}_1$, средний — к сети $\mathbf{S}_2$, а правый — к сети $\mathbf{S}_3$, далее приводятся соответствующие значения остаточной суммарной пропускной способности: для сети $\mathbf{S}_1$ $\sum\limits_{k=1}^{2} c_k = 42$, для $\mathbf{S}_2$ $\sum\limits_{k=1}^{3} c_k = 36$ и для $\mathbf{S}_3$ $\sum\limits_{k=1}^{3} c_k = 72$.

Рис. 6.

На фиг. 1, 2 и 3 рис. 6 изображены результирующие диаграммы уязвимости соответственно сетей $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ и $\mathbf{S}_3$. Здесь по оси ординат отложены значения θ_{*t}, а по оси абсцисс — значения μ_t^* (см. рис. 2 из разд. 2). Рядом с диаграммами приведены численные значения высот ступенек на данной диаграмме. Указанные значения являются точными гарантированными (нижними) оценками для обеспеченности соответствующей $(\mu_t^* - \mu_{t-1}^*)$-й части потоковых требований в сетях $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ и $\mathbf{S}_3$.

Диаграмма уязвимости на фиг. 2 (рис. 6) получена для сети $\mathbf{S}_2$ в редля диаграмм обеспеченности требований (см. рис. 2) по всевозможным $c \in C[\gamma]$ — возмущениям с $\gamma = 0.4$. На фиг. 5,8,11 с рис. 6 приведены в определенном смысле наихудшие варианты таких возмущений (составляющие множество $C^*(0.4)$ для рассматриваемой МП-сети).

Рис. 7.

Рассмотрим рис. 6, фиг. 11. Справа-вверху изображена сеть, возникшая после возмущения. Пропускные способности ребер (определяются соответствующим c^*) указаны на рисунке. Считаем, что величины d_i тяготений — такие же, как в исходной сети. При суперконкурентном распределении потоков будет получена диаграмма обеспеченности требований, изображенная на рисунке слева. По оси ординат (см. рис. 1) откладываются значения θ_l (полученные из решения задач (1.4), (1.6) и т.п.), а по оси абсцисс — величины μ_l, которые вычисляются по формуле (1.9). Для сети на фиг.11 с рис. 6 значение $\theta_0(c, d) = 0.2$, и оно является наихудшим в том смысле, что при данном $\gamma = 0.4$ не существует такого возмущения (такого $c' \in C[\gamma]$), при котором $\theta_0(c', d)$ окажется меньше, чем 0.2. Аналогичным свойством обладают все сети, изображенные на рис. 5–8 самыми нижними, они формируют нижние ступеньки диаграмм уязвимости и дают значения θ_{*0}. Следующие ступеньки θ_{*1}, θ_{*2} и т.д. во всех рассмотренных примерах тоже задаются значениями θ_0. В частности на фиг.5,8 рис.6 $\theta_0(c^{*1}, d) = 0.4$, $\theta_0(c^{*2}, d) = 0.514$. При этом не существует такого $c' \in C[\gamma]$, что $\theta_0(c', d)$ окажется меньше 0.4 при $\sum\limits_{i \in M_0(c', d)} d_i \geq 40$ или меньше 0.514, при $\sum\limits_{i \in M_0(c', d)} d_i = 60$. Вопрос, некоторых диаграмм обеспеченности требований, т.е. $\theta_{*t} = \theta_0(c^{*t}, d)$ $\forall t$, на данный момент является открытым.

Рис. 8.

При сравнении диаграмм уязвимости, приведенных на рис. 5–8 слева и в середине, обращают на себя внимание следующие особенности. Для сети $\mathbf{S}_1$ значения θ_{*0} оказываются меньше или равными соответствующим значениям для сети $\mathbf{S}_2$ (т.е. левая крайняя ступенька диаграммы для сети $\mathbf{S}_1$ оказывается ниже или совпадает с соответствующей ступенькой для $\mathbf{S}_2$). Естественно, при разрушении сети со структурой типа “дерево” легче нарушаются связи между узлами, и поэтому при неравномерном (для тяготеющих пар) поражении ребер сети удается нанести больший ущерб наименее обеспеченным — см. нижние диаграммы на рисунках. С другой стороны, самая правая ступенька на диаграммах для сети $\mathbf{S}_1$ выше, чем на диаграммах для $\mathbf{S}_2$, т.е. структура “дерево” в каком-то смысле лучше (по критерию неуязвимости), чем полный граф. Последнее вызвано как особенностями сети, так и предлагаемым правилом перераспределения потоков (выбором конкурентного решения).

Действительно, при разрушении сети типа “дерево” несколько потоков приходится передавать по сильно разрушенному ребру сети, но в другой части сети могут сохраниться ребра с большой пропускной способностью, что позволит почти полностью удовлетворить требованиям оставшихся тяготеющих пар, т.е. получить (при суперконкурентном решении) относительно бо́льшие значения θ_L. В сети $\mathbf{S}_2$ за номерно (для тяготеющих пар) распределить оставшуюся пропускную способность и получить относительно бо́льшие значения θ_0. Но именно это более равномерное распределение приводит к тому, что последующие значения θ_t (включая последнее θ_L) не так сильно отличаются от θ_0. В результате, когда противник выбирает удар с целью максимизировать ущерб одной — не важно какой — тяготеющей пары, сеть типа "дерево" для него предпочтительнее. А когда он пытается максимизировать ущерб каждой пары, то уязвимей полный граф. Причем оптимальным для противника в этом случае будет неравномерное распределение мощности удара (в отличие от структуры типа "дерево"), требующее перераспределения потоков для уравнивания тяготеющих пар и применения "обходных" маршрутов, что приводит к менее эффективному, чем в исходной сети, использованию оставшейся пропускной способности ребер.

Диаграммы на фигурах, помеченных цифрами 4,5 и 6 на рис. 5–8, соответствуют стремлению противника равномерно понизить значения обеспеченности требований всех тяготеющих пар в МП-сети. В такой постановке — вполне обоснованной для противника (в роли которого, как уже подчеркивалось, может выступать и неопределенный фактор), не информированного об относительной важности тяготеющих пар или об их взаимозаменяемости, — уязвимость МП-сети $\mathbf{S}_1$ (с физическим графом типа "дерево") меньше, чем уязвимость МП-сети $\mathbf{S}_2$ (на полном физическом графе). Отметим также соотношение $\theta_{*L^*} \le 1-\gamma$, приведенное в [8] (в конце разд. 1), т.е. на сети $\mathbf{S}_1$ реализовалась верхняя граница θ_{*L^*}.

Таким образом, можно сказать, что полносвязная сеть является "равнопрочной" для всех тяготеющих пар в целом, но нельзя сказать, что она вообще "менее уязвима", поскольку в сети типа "дерево" всегда находятся тяготеющие пары, для которых гарантирована более высокая (чем на сети с полным графом) степень обеспечения их потоковых требований. (Большее значение θ_{*L^*} показывает, что некоторая пара остается "менее уязвимой".)

Указанный факт противоречит теоретико-графовым представлениям о живучести МП-сетей, так как число реберной связности дерева всегда меньше, чем полного графа. Конечно, модельные предположения, заложенные в основу теоретико-графовых постановок задач за противника ("нападающего" — разрушающего сеть), не во всем близки к вышеупомянутой концепции равномерного подавления (см. [14]). Однако из этого примера видно, что теоретико-графовый подход в некотокачественных свойств сетевых потоковых систем, связанных с возможностью перераспределения потоков после разрушающего воздействия. Тем самым, вновь приходим к необходимости изучения потоковых постановок.

МП-сеть $\mathbf{S}_3$ дает еще один пример различия результатов применения теоретико-графового и потокового подходов к исследованию уязвимости и кроме того иллюстрирует противоречивость критериев уязвимости и стоимости при синтезе МП-сетей. Действительна, при решении задачи синтеза МП-сетей зачастую используется (возможно в качестве компоненты) структура типа “звезда”, когда все узлы логического графа (источники и стоки) соединяют физическими ребрами с единственным транзитным узлом. Этот узел обычно располагают в т.н. “точке Штейнера”, сумма расстояний от которой до остальных вершин минимальна. Подобная структура позволяет минимизировать затраты на прокладку линий связи без учета стоимости самих каналов связи и применяется, в частности, в теплосетях, при проектировании линий электропередачи и т.п. Тем не менее из сравнения приведенных рисунков очевидно, что сеть $\mathbf{S}_3$ (со структурой “звезда”) более уязвима, чем и $\mathbf{S}_1$, и $\mathbf{S}_2$, — ее диаграммы уязвимости ниже других при всех значениях γ, а удара с $\gamma = 0.6$ для нее уже достаточно, чтобы лишились связи все тяготеющие пары. Для удобства представим на одном рисунке диаграммы уязвимости всех трех рассмотренных вариантов физического графа сети (см. рис. 9). Выделим черным диаграмму для сети со структурой типа “звезда”, штриховой линией — “дерево” и пунктирной — для полного графа.

Рис. 9

К сожалению, никакие теоретико-графовые рассуждения не помо-

Действительно, для обоих графов удаление одного ребра нарушает связность, а двух — разделяет все тяготеющие пары; минимальный разрез из разделяющих все пары и там и там имеет пропускную способность 30+40=70. Таким образом, сетевая структура, создание которой может показаться более предпочтительным по экономическим соображениям, будет обладать худшими свойствами уязвимости, но чтобы это выяснить, придется провести их подробный анализ с учетом возможности перераспределения потоков. Последняя возможность не принимается во внимание теоретико-графовым подходом.

В целом следует отметить, что задачи вычисления на графах показателей, так или иначе характеризующих уязвимость МП-сетей, в большинстве своем являются NP-трудными. Поэтому нет оснований предпочесть графовые подходы потоковым и с точки зрения возможностей практического счета. Авторы надеются привлечь к предложенным потоковым постановкам внимание исследователей сетевых систем, с тем чтобы инициировать разработку методов решения возникающих новых задач сетевой оптимизации.

1. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. I. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.2

2. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

3. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.

4. *Карзанов А.В.* Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках // Комбинаторные методы в потоковых задачах. Вып.3. М.: ВНИИСИ, 1979.

5. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М., Смирнов М.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. III. Многокритериальная, или параметрическая, постановка для неизвестных требований // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.4.

6. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. V. Задачи и методы исследования допустимости в условиях случайной пропускной способности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. N.1

7. *Давидсон М.Р., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. II. Свойства суперконкурентного распределения потоков // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.3.

8. *Воробейчикова О.А., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. VI. Задача о допустимости при неслучайных потерях пропускной способности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. N.3.

9. *Matula D.W.* Concurrent flow and concurrent connectivity in graphs // Graph Theory and Its Appl. to Algorithms and Comput. Sci. N.Y.: Wiley-Intersci., 1985.

10. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

Academic Press, 1994.

12. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Параметризация значения векторного минимакса со связанными ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1997. Т.37. N.12.

13. *Orwell G.* Animal Farm. Таллинн: Периодика, 1989.

14. *Малашенко Ю.Е., Рогожин В.С., Ферапонтов Е.В.* Детерминированные модели оценки живучести и уязвимости сетей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1989. N.2.

Рис. 4.