Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности [1]

©1998 г. **Ю.Е.Малашенко, Н.М.Новикова**
Москва, ВЦ РАН
Поступила в редакцию 21.04.97 г.

Общая методология исследования операций применяется для анализа допустимости многопродуктовых потоковых сетей (МП-сетей) в случае неточно известных требований пользователей. Рассматриваются соответствующие обобщенные постановки задач о допустимости и поиска конкурентного распределения потоков в сети. Обсуждаются возможности их решения.

Введение. Многие сложные системы имеют сетевую структуру, являются территориально-распределенными: разнообразные транспортные системы, телеграф, телефон, информационно-вычислительные и топливно-энергетические сети ... Территориально-распределенные системы составляют хозяйственную и управленческую инфраструктуру страны (или региона, местности, производственного комплекса) и от их состояния и качества функционирования зависит не только существующий уровень экономического развития, но и возможности дальнейшего роста. Действительно, для создания и распространения механизмов хозяйствования или управления необходима налаженная система связей — организационная структура, но для установления связей нужны физические пути их реализации. Прокладка новых путей требует, как правило, значительных средств и времени. Таким образом, отсутствие или бедность инфраструктуры существенно тормозит процесс установления связей, что, в свою очередь, задерживает экономический рост и, как следствие, формирование инфраструктуры.

С экономической точки зрения, неразвитость, неразветвленность инфраструктуры способствует также ее монополизации, усугубляющей (в отсутствие централизованного управления) экономическую ситуацию и тенденции к консервации инфраструктуры. Заметим, что простое поддержание территориально-распределенных систем в рабочем состоянии предполагает постоянное внимание и сопряжено с несимволическими затратами. При этом трудно остановить процесс разрушения инфраструктуры, если он начинается.

[1] Работа поддержана РФФИ по гранту N.95-01-00232а

ными) свойствами уязвимости: за счет многочисленных связей и зависимостей в них нередко проявляется “каскадный эффект”, когда сбой в одном каком-либо месте провоцирует перегрузки и выход из строя многих других элементов сети, причем на значительном расстоянии от исходной, возможно, небольшой или недолгой неполадки.

Все это обусловливает важность сетевых территориально-распределенных систем, вызывает необходимость их моделирования и исследования, в том числе, формально математическими методами. Задачи, которые здесь возникают для математика, связаны с проектированием новых систем и развитием старых, а также (что, пожалуй, даже более существенно на данном этапе) с проблематикой принятия решений по использованию имеющихся сетевых систем: управлению потоками в сети, распределению ее ресурсов между пользователями, — и с анализом возможностей улучшения работы сети за счет рационального перераспределения потоков (выбора оптимальной маршрутизации). Как показывает опыт создания вторичных сетей телефонной связи, последнее позволяет повысить эффективность работы сети в несколько раз.

Специфика задач принятия решений (как управляющих, так и проектировочных) для сетевых систем определяется прежде всего наличием у таких систем многих разных (невзаимозаменяемых) пользователей. Вопросы о конкуренции между ними за ресурсы сети при организации самостоятельного доступа или об учете интересов каждого при централизованном распределении ресурсов не имеют однозначных ответов, хотя и преодолеваются на практике, в основном, путем создания избыточного ресурса. К сожалению, в условиях дефицита ресурсов сети возникают и отказы, и потери, и задержки, и ухудшение качества связи, причем, зачастую, не равномерно, а для одних и тех же пользователей. Если принять во внимание, что оконечные пользователи большой сетевой системы агрегированы, это — не отдельные лица, а целые коллективы или группы населения, то проблема недискриминирования пользователей в любых условиях выходит на первый план. Кроме того, уже сам факт, что с территориально-распределенной системой связано большое количество населения, предъявляет к процедуре принятия решений повышенные требования ответственности, заставляет по-иному относиться к риску, во многом ориентироваться на принцип гарантированности результата. И тут мы подходим ко второй специфической черте реальных сетевых систем: существенность неконтролируемых факторов.

С проблемой принятия решений в условиях неопределенности сталтриваемых систем характерно наличие не только объективной, но и субъективной неопределенности, когда некоторые параметры системы известны отдельным пользователям, но не известны лицу, принимающему решения, (ЛПР) или другим пользователям. За счет длительных сроков создания территориально-распределенной системы, условия ее функционирования могут отличаться от расчетных при проектировании, поэтому естественна их корректировка в процессе построения сети и при распределении потоков в готовых сетях, т.е. многоэтапность процедуры принятия решений. Ответственность за принятые решения обязывает аккуратно разграничить неопределенные и случайные неконтролируемые факторы: случайность должна быть теоретически обоснована (и подтверждена статистическими методами), имеющаяся информация о функциях распределения фигурирующих случайных величин должна быть указана явно. Еще раз отметим взаимную зависимость элементов сети, что приводит к немарковости случайных процессов в сетях.

Указанные особенности изучаемого класса систем необходимо иметь в виду при разработке теории и методов их математического моделирования. Удобный аппарат для этого предоставляет математическая теория исследования операций [1, 2], общая методология которой и лежит в основе моделей, предлагаемых авторами данной работы.

1. Задача о допустимости МП-сети в условиях неточно известных требований. Принципиальная схема функционирования многопользовательской потоковой сетевой системы описывается известной математической моделью, которая называется многопродуктовая потоковая сеть (МП-сеть) и задается с помощью двух графов на одном и том же множестве вершин — узлов сети. 1-й граф — физический — определяет физическую структуру сети, его ребра $\mathbf{r}_k$ соответствуют физическим отрезкам линий связи: дорогам, линиям электро-передач, телефонному кабелю,... — проложенным от одного узла к другому. Узлы сети соответствуют либо пунктам подключения (отключения) пользователей к сетевой системе, либо пунктам переключения с одной линии связи на другую: перекресткам дорог, узлам коммутации телефонных проводов и т.п. В последнем случае вершины физического графа сети называются транзитными. Нетранзитные узлы сети являются вершинами 2-го — логического — графа сети, определяющего структуру связей между пользователями — абонентами сети, т.е. структуру требований на передачу потоков в сети. Ребра логичекоторыми нужна связь, т.н. абонентские или тяготеющие пары $\mathbf{p}_i$. Объединение указанных двух графов в одну систему — МП-сеть — обусловлено тем, что связь между узлами, соединенными ребрами логического графа, может осуществляться только по ребрам физического графа. Ребра графов сети могут быть как ориентированными, так и неориентированными в зависимости от конкретной специфики задачи.

Название многопродуктовая (“многопродуктовик”) для МП-сети объясняется невзаимозаменяемостью потоков различных тяготеющих пар, например, их телефонных разговоров. Считается, что эти потоки соответствуют как бы разным видам продуктов: они не смешиваются, проходя по ребрам физического графа сети, и не могут поделиться в другой пропорции. В противном случае, когда речь идет, допустим, о системе водоснабжения, говорят об однопродуктовой потоковой сети с несколькими источниками и стоками. Многопользовательская модель однопродуктовика существенно у́же МП-сети, но гораздо проще для математических расчетов. Так что очень удобно, если модель реальной сетевой системы удается представить в виде однопродуктовой потоковой сети, пусть, с более сложной структурой, чем МП-сеть. Один пример подобного представления см. в [3] для конкретной практической задачи исследования сетевой подсистемы энергетического комплекса. Тем не менее, для большого числа сетей связи, таких как телефонные сети или сети ЭВМ, однопродуктовая сетевая модель оказывается неадекватной. Поэтому далее будет рассматриваться общая модель — МП-сеть, являющаяся достаточно универсальной [4].

Если известна количественная мера требований — заявки на потоки — тяготеющих пар, то ребрам логического графа сети приписываются соответствующие числа d_i условных единиц потока для данной абонентской пары $\mathbf{p}_i$. В тех же условных единицах потока измеряется и пропускная способность ребер физического графа сети. Соответствующие числа c_k ограничивают суммарный поток всех абонентских пар по данному ребру $\mathbf{r}_k$. Задача распределения потоков в сети состоит в том, чтобы выбрать маршруты соединения абонентских пар в сети, т.е. проложить по ребрам физического графа пути для всех пар узлов, соединенных ребрами логического графа (например, задача создания вторичной сети телефонной связи на базе имеющейся первичной). При этом необходимо удовлетворить ограничениям (физическим) по пропускной способности и желательно удовлетворить ограничениям (логическим) по одновременному обеспечению требований всех пользователей. Если это возможно, то сеть называется *допусти-*

пропускной способности имеющихся или создании дополнительных ребер физического графа МП-сети — и в таком распределении потоков, которое позволило бы максимально согласовать интересы различных пользователей. 1-я задача называется *задачей синтеза*, 2-я — *задачей анализа*, к ней также относится задача проверки допустимости МП-сети и поиска допустимого распределения потоков. Данная работа посвящена задаче анализа МП-сетей, ряд результатов для задачи синтеза с учетом неопределенности может быть найден в [5, 6].

Указанная модель является довольно грубой моделью функционирования сложной сетевой системы, она отражает лишь характерные сетевые свойства: наличие входов/выходов, транспортных магистралей и возможностей переключения с одной магистрали на другую, а также существование различных пользователей, ассоциируемых каждый с парой входов системы. Дальнейшее логическое усложнение модели, связанное с допустимостью нескольких — более двух — входов для одного пользователя (одного вида продукта), не вносит существенно новых моментов и в настоящей работе рассматриваться не будет. Кроме того, модель не учитывает явно и ряда физических характеристик, например, ограничения по пропускной способности транзитных вершин (иногда их удается задать и в рамках данной модели путем введения дополнительных "фиктивных" вершин и ребер с ограниченной пропускной способностью, но в общем случае добавляются новые линейные ограничения неравенства, связывающие суммарные потоки на смежных ребрах) или же задержку по времени и вероятность потери и ошибок при прохождении потока в вершинах и на ребрах (считаем, что эти характеристики отражены в пропускной способности). Большой набор других важных характеристик должен учитываться с помощью нелинейных, зачастую комбинаторных, ограничений на распределение потоков, например, ограничения по числу транзитных вершин в маршруте соединения тяготеющей пары (что соответствует ограниченному времени ожидания, специальным условиям поддержания качества связи и т.п.) или по числу реберно-непересекающихся маршрутов для некоторых тяготеющих пар (что соответствует требованиям по надежности связи для этих пар).

Вообще говоря, ребра физического графа МП-сети могут различаться и по иным характеристикам, кроме пропускной способности, например, по степени защищенности. В таком случае удобно представить, что имеется как бы несколько физических графов различных категорий (например, состоящих из ребер с не меньшей защищенностью, чем тре-

МП-сетей, различающихся лишь физическими графами. Аналогично и для пользователей МП-сети могут существовать разные категории обслуживания, тогда можно рассматривать МП-сети для нескольких логических графов, например, сначала для пользователей высшей категории, а потом на оставшейся пропускной способности ребер физического графа сети — для пользователей остальных категорий. (Конкретный пример учета системы категорий потребления продемонстрирован в [3].) Таким образом, данная базовая модель допускает определенное расширение, хотя, конечно, не описывает всего разнообразия задач, возникающих в сетевых системах. Тем не менее, она позволяет изучать сетевые задачи с неопределенными факторами, не затемняя специфики проблем, связанных с неопределенностью.

Согласно базовой модели, задача анализа МП-сети зависит от двух векторов d и c переменных. Поэтому в ней возможна неопределенность двух типов. 1-я связана с вектором требований и может трактоваться как субъективная: вектор требований пользователей, хотя и объективно существующий, не известен или неточно известен лицу, принимающему решения — выбирающему пути соединения абонентских пар. В случае полностью неизвестных требований возникает задача многокритериальной максимизации вектора z результирующих потоков z_i для всех абонентских пар $\mathbf{p}_i$ МП-сети, называемого *мультипотоком*. Ее решением является множество оптимальных по Парето и Эджворту мультипотоков, т.е. векторов потоков, не увеличиваемых ни по одной компоненте без уменьшения какой-либо из других [7]. Другой крайний случай — точно (или почти точно) известных требований — приводит к проблеме выбора конкретной парето-оптимальной (ПО) точки, являющейся решением задачи согласования интересов пользователей. Промежуточные варианты весьма разнообразны: от известных границ для вектора d до известной (или не очень) функции распределения на заданном множестве его возможных значений.

2-й тип неопределенности связан с вектором c пропускной способности ребер физического графа МП-сети и трактуется как объективная неопределенность, не известная в момент исследования сети ни исследователю, ни пользователям. Считаем, что причиной ее возникновения является уменьшение пропускной способности или выход из строя отдельных ребер физического графа МП-сети в результате либо случайных повреждений сети, либо целенаправленных ее разрушений. В 1-м случае известна, возможно, неточно, функция распределения вектора c на множестве значений от 0 до вектора c^0, соответствующего начально ческая задача поиска наихудшего разрушающего воздействия ограниченной мощности — равной текущему значению параметра. Указанная задача, названная задачей анализа уязвимости МП-сети, изучена в [8, 5]. При этом можно рассмотреть и комбинированные постановки с различного рода субъективной неопределенностью в информированности о векторе требований. В частности, для случая неизвестного d в [9] исследуется многокритериальная задача поиска минимакса вектора z потоков всех продуктов.

Для всех перечисленных постановок базовым является вариант, когда вектор d требований пользователей известен с точностью до множества D возможных значений. Его формальному рассмотрению посвящена данная статья.

1.1. Формальное описание модели. Традиционной математической структурной моделью функционирования многопользовательской сетевой системы является многопродуктовая потоковая (МП-) сеть $\mathbf{S} \overset{\mathrm{def}}{=} \langle V, R, P \rangle$, которая задается множествами: $V \overset{\mathrm{def}}{=} \{v_1, \ldots, v_n\}$ — узлов сети, $R \overset{\mathrm{def}}{=} \{\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_e\} \subset V \times V$ — ребер физического графа $\mathcal{G}$ сети и $P \overset{\mathrm{def}}{=} \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m\} \subset V \times V$ — тяготеющих пар (видов продуктов), или ребер логического графа сети. Соответствующие индексные множества будем обозначать: $N \overset{\mathrm{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$, $E \overset{\mathrm{def}}{=} \{1, \ldots, e\}$ и $M \overset{\mathrm{def}}{=} \{1, \ldots, m\}$, так что $V = \{v_j\}_{j \in N}$, $R = \{\mathbf{r}_k\}_{k \in E}$ и $P = \{\mathbf{p}_i\}_{i \in M}$.

Для упрощения изложения предположим, что все ребра — неориентированные, и назовем прямым направление от вершины с меньшим номером к вершине с бо́льшим (графы предполагаются безпетельными). Каждое ребро $\mathbf{r}_k \in R$ физического графа сети будем представлять двумя ориентированными дугами с номерами k и $k+e$ для прямого и обратного направлений, соответственно. В случае ориентированного ребра физического графа будем полагать нулевым поток по дуге, направленной противоположно ориентации ребра. Для любой вершины $v \in V$ обозначим через $S(v)$ множество индексов выходящих из нее дуг,

$$S(v_j) \overset{\mathrm{def}}{=} \{k \mid \exists l > j: \ \mathbf{r}_k = (v_j, v_l) \in R\} \cup \{k+e \mid \exists l < j: \ \mathbf{r}_k = (v_l, v_j) \in R\},$$

а через $T(v)$ —множество индексов входящих:

$$T(v_j) \overset{\mathrm{def}}{=} \{k \mid \exists l < j: \ \mathbf{r}_k = (v_l, v_j) \in R\} \cup \{k+e \mid \exists l > j: \ \mathbf{r}_k = (v_j, v_l) \in R\}.$$

Для каждой i-й тяготеющей пары введем обозначение $\mathbf{p}_i \overset{\mathrm{def}}{=} (v_{s_i}, v_{t_i})$, где $s_i < t_i$ и вершина v_{s_i} называется источником, а v_{t_i} — стоком i-го вершины источник и сток определяются согласно ориентации.

Указанная структура МП-сети представляется также с помощью матрицы инциденций "дуги-вершины" физического графа сети: $A = \{a_{kj}\}$ размера $(2e \times n)$,

$$a_{kj} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } k \in S(v_j), \\ -1, & \text{если } k \in T(v_j), \\ 0 & \text{в остальных случаях, —} \end{cases}$$

и матрицы связей логического графа сети: $B = \{b_{ij}\}$ размера $(m \times n)$,

$$b_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } v_j = v_{s_i}, \\ -1, & \text{если } v_j = v_{t_i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Структура сети однозначно задает значения z_i потока между источником и стоком для каждой тяготеющей пары $\mathbf{p}_i \in P$ в зависимости от распределения f потоков по ребрам физического графа $\mathcal{G}$ следующим образом.

Введем матричную переменную $f \stackrel{\text{def}}{=} \{f_{ik}\}$ размера $(m \times 2e)$. Каждый элемент f_{ik} обозначает количество потока i-й тяготеющей пары (i-го вида продукта) по ребру $\mathbf{r}_k \in R$ в прямом направлении для $k \in E$ или по ребру $\mathbf{r}_{k-e} \in R$ в обратном направлении, если $k > e$. На все f_{ik} наложены ограничения неотрицательности. Для возможных значений переменной f должны выполняться условия неразрывности потока каждого вида продукта в транзитных для него узлах: $\forall v \in V$

$$\sum_{k \in S(v)} f_{ik} - \sum_{k \in T(v)} f_{ik} = \begin{cases} z_i, & \text{если } v = v_{s_i}, \\ -z_i, & \text{если } v = v_{t_i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{1.1}$$

где $z_i \geq 0$ равно величине входного потока, который пропускается по сети от источника к стоку i-й тяготеющей пары при распределении потоков f, $i \in M$. В матричной форме получаем для $z = z(f)$ систему уравнений

$$f_i A = z_i B_i, \quad i \in M,$$

здесь и далее нижний индекс у матрицы обозначает соответствующую вектор-строку. Таким образом, зависимость $z(f)$ линейна.

Кроме структурных ограничений (1.1), на распределение потоков в сети имеются также количественные ограничения, определяемые пропускной способностью ребер ее физического графа. Формально, припишем каждому ребру $\mathbf{r}_k \in R$ МП-сети некоторое число $c_k \geq 0$, называемое пропускной способностью ребра $\mathbf{r}_k$ и измеряемое в условных число стандартных телефонных каналов или других каналов связи, или полос движения, или проходящих за час вагонов метро). Всюду в данной статье будем считать вектор $c = (c_1, \ldots, c_e)$ известным, фиксированным и строго положительным. Вектор c задает следующие ограничения-неравенства на распределение потоков в сети:

$$\sum_{i=1}^{m}(f_{ik} + f_{i(k+e)}) \le c_k \quad \forall k = 1, 2, \ldots, e. \tag{1.2}$$

Ограничения (1.2) линейны и вместе с ограничениями (1.1) определяют многогранник возможных распределений потоков

$$\mathcal{F}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \ge 0 |\ \exists z \ge 0 : \ \text{ выполнено } (1.1) \text{ и } (1.2)\},$$

а также множество достижимых векторов потоков (*мультипотоков*)

$$Z(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \ge 0 |\ \exists f \in \mathcal{F}(c) : \ z = z(f), \text{ т.е. выполнено } (1.1)\}.$$

Кроме того будем использовать обозначение x для вектора $(f_1, \ldots, f_m, z)$ и

$$X(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{x = (f_1, \ldots, f_m, z) \ge 0 |\ \text{выполнено } (1.1) \text{ и } (1.2)\}$$

для множества достижимости в пространстве векторов x распределений и значений потоков.

В традиционных моделях для МП-сети предполагается заданным вектор d требований или заявок тяготеющих пар на величины потоков между источником и стоком, т.е. всем ребрам $\mathbf{p}_i \in P$ логического графа приписаны числа $d_i \ge 0$, измеряемые в условных единицах потока, и которые требуется пропустить по данному логическому ребру МП-сети (называемому в сетях связи информационным направлением). Если вектор требований d известен, то ставится *задача о допустимости*: задача проверки допустимости сети для указанного вектора требований, т.е. проверки условия

$$d \in Z(c), \tag{1.3}$$

и — в случае допустимости — поиска *допустимого распределения*, т.е. такого распределения потоков $f \in \mathcal{F}(c)$, на котором достигается вектор требований,

$$d = z(f). \tag{1.4}$$

Последнее равенство формально понимается как: $d = z$, где $z = z(f)$, т.е. $(f_1, \ldots, f_m, z) \in X(c)$, или просто как $(f_1, \ldots, f_m, d) \in X(c)$. Соответствующее распределение потоков f, допустимое для вектора d, ственно.)

В более общей (и более адекватной) модели, рассматриваемой в данной работе, считается, что вектор d может быть известен неточно или вообще не известен. Соответствующим образом будем модифицировать и постановку (1.3) задачи о допустимости.

1.2. Формализация неопределенности. Обобщенные постановки задачи о допустимости. Предположим, что относительно вектора d известно лишь некоторое множество D его возможных значений, например,

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \{d \in \mathbf{R}^m_+ | \ \sum d_i = d_0\}. \tag{1.5}$$

В частном случае $D = \{d\}$. Иначе возникают две различные постановки обобщенной задачи о допустимости: *гарантированная* (рассчитывающая сразу на все возможные требования) и *слабая* (достижимости хотя бы одного вектора $d \in D$).

Гарантированная постановка — более соответствующая смыслу рассматриваемой задачи — означает проверку

$$D \subseteq Z(c) \tag{1.6}$$

допустимости сети для каждого вектора, который может оказаться вектором требований согласно имеющейся информации. При этом предполагается, что вектор d станет известен к моменту выбора распределения потоков (и можно будет найти допустимое $f = f[d]$ из решения задачи (1.4)). В случае неадекватности такого предположения приходим к более жесткой гарантированной постановке: найти $f \in \mathcal{F}(c)$, для которого

$$z(f) \geq d \quad \forall d \in D, \tag{1.7}$$

т.е. надо проверять более сильное, чем (1.6), условие

$$\exists z \in Z(c): \quad z \geq d \quad \forall d \in D. \tag{1.8}$$

Здесь и далее знаки "$\geq$" (и "$\leq$") для векторов понимаются в смысле покомпонентного $\geq$ (и $\leq$).

Существование f и z, удовлетворяющих (1.7),(1.8), не следует из (1.6), однако в силу специфики ограничений (1.1),(1.2) поиск таких f и z равносилен решению обычной задачи о допустимости (1.3),(1.4) для специально выбранного вектора

$$d^{max}: \quad d_i^{max} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{d \in D} d_i. \tag{1.9}$$

для некоторого $d' \in D$. Таким образом, для любого достижимого мультипотока z найдется вектор $d' \in D$, для которого не выполнено векторное неравенство $z \geq d'$, — пришли к противоречию с (1.8). Достаточность $d^{max} \in Z(c)$ для (1.8),(1.7) очевидна. Тем самым, задача (1.7),(1.8) — о *жестко гарантированной* допустимости МП-сети в условиях неопределенности вектора требований — оказалась эквивалентной исходной постановке задачи о допустимости, в которой для каждой тяготеющей пары требуется обеспечить максимальное из ее возможных требований.

Постановка (1.6) естественно появляется на практике за счет разницы моментов времени решения задач (1.3) и (1.4): проверки допустимости сети (обычно на этапе ее проектирования) и выбора конкретных путей соединения тяготеющих пар (в процессе эксплуатации сети). Зачастую, значительные изменения вектора d, например, сезонные или по времени суток, могут быть отслежены, и выбор $f[d]$ (т.е. создание вторичной сети связи на базе имеющейся первичной — физического графа МП-сети) может быть адаптирован к изменению требований пользователей. При этом мелкие, незначительные изменения или изменения в процессе постепенного перехода с одного режима использования сети на другой (с одного вектора d на другой) следует учитывать с определенным запасом: типа (1.9) в постановке (1.7),(1.8).

Пример 1. Для примера рассмотрим рис.1 (случай двух тяготеющих пар). Предположим, что множество D — это отрезок, соединяющий точки d^1 и d^2. Тогда, если мы хотим выбором распределения потоков гарантировать все эти требования (в частности, d^1 и d^2), то должно выполняться $Z(c) \ni d^{max}$. Если же мы можем переключаться с распределения потоков, гарантирующего требования от d^1 до d^3, на распределение потоков, гарантирующее требования от d^3 до d^2, то достаточно, чтобы $Z(c) \supseteq \{d', d''\}$.

Рис.1

рому обязательно проходят пути соединения обеих тяготеющих пар (например, мост через реку, разделяющую источники и стоки), пропускной способности c_k, меньшей пропускной способности остальных ребер. Тогда множество $Z(c)$ будет соответствовать изображенному на рис.1 треугольнику $c_k 0 c_k$. При уменьшении значения c_k включение $d^{max} \in Z(c)$ перестает выполняться, хотя d', d'' еще остаются допустимыми. Если $d_1^{max} = d_2^{max}$, то включение $D \subseteq Z(c)$ выполнено, пока $D \cap Z(c) \neq \emptyset$ (см. ниже слабую постановку), т.е. пока $c_k \geq d_1^1 + d_1^2$ $(= d_2^1 + d_2^2)$. Чем ближе значение c_k к $d_1^1 + d_1^2$, тем точнее надо отслеживать изменение вектора d и чаще производить переключение с одного распределения потоков $f[d]$ на другое, чтобы удовлетворить требования пользователей сети (см. ступенчатую линию на рис.1).

Слабая постановка задачи о допустимости может возникнуть на практике в тех случаях, когда в принципе осуществима переброска пользователей сети от одних узлов входа/выхода (источников и стоков) к другим, т.е. передача части потоковых требований одних тяготеющих пар другим — выполнение их заявок в другом месте. Например, пассажиры метро, которые добираются до него издалека, могут выбирать станцию входа и, зачастую, линию в зависимости от ее загрузки в это время, аналогично можно звонить из телефона-автомата, к которому меньше очередь, — это выбор источника. Другой пример: пользователь Internet, желающий найти библиографическую ссылку, будет искать ее через сервер библиотеки Конгресса США или Империал-Колледжа в Лондоне в зависимости от того, где существует (или лучше) связь, — это выбор стока. В таком случае достаточно, чтобы сеть могла обеспечить (в смысле возможности одновременной передачи потоков всех тяготеющих пар с заданным уровнем качества) хотя бы один вектор требований $d \in D$ в расчете, что пользователи сами перераспределятся — перераспределят свои требования — соответственно этому вектору. Формально, приходим в качестве слабой постановки задачи о допустимости к проверке

$$Z(c) \cap D \neq \emptyset \tag{1.10}$$

и поиску $f[d^c]$, удовлетворяющего (1.4) для вектора $d^c \in Z(c) \cap D$, в случае выполнения (1.10) — слабой допустимости сети.

1.3. Конкурентное распределение потоков. Существует много методов решения задачи о допустимости (1.3),(1.4): от специальных (сетевых) вариантов симплекс-метода и метода Кармаркара до метода последовательного проектирования (см. [10, 11, 12, 13, 14, 15]).

мого распределения потоков $f[d]$ — решения (1.4) — или некоторого приемлемого f, если сеть не является допустимой. В качестве такого приемлемого распределения потоков рядом авторов ([16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]) предлагается выбирать *конкурентное распределение потоков* $\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}^0(d) = \mathbf{f}^0(c, d)$ — решение оптимизационной задачи

$$\max_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} \min_{i\in M} \frac{z_i}{d_i}. \tag{1.11}$$

Здесь и далее $\mathbf{f}$ служит для обозначения вектора $(f_1, \dots, f_m)$ распределения потоков.

Значение (1.11) будем называть величиной *максиминной обеспеченности требований* тяготеющих пар в МП-сети и обозначать $\theta_0 = \theta_0(d) = \theta_0(c, d)$. Если $\theta_0 \geq 1$, то сеть допустима и конкурентное распределение потоков $\mathbf{f}^0(d)$ дает решение $f[d]$ задачи (1.4), а если $\theta_0 < 1$, то сеть не допустима. Отличие θ_0 от 1 дает количественную меру недопустимости МП-сети. Вдобавок к этому, значение $1/\theta_0$ является точной нижней оценкой того, во сколько раз надо увеличить пропускную способность ребер физического графа МП-сети, чтобы последняя стала допустимой,

$$1/\theta_0 = \min_{\mathbf{f},z,\nu}\{\nu|\ (\mathbf{f}, z) \in X(\nu c),\quad z \geq d\} = \nu_0 \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y:\ Z(y)\ni d}\ \max_{k\in E} \frac{y_k}{c_k}. \tag{1.12}$$

(Равенство вытекает из линейности $X(c)$. Действительно, если $\theta_0 d \in Z(c)$, то $d \in Z(c/\theta_0)$, т.е. $\nu_0 \leq 1/\theta_0$. Аналогично, если $d \in Z(\nu_0 c)$, то $d/\nu_0 \in Z(c)$, т.е. $1/\nu_0 \leq \theta_0$.)

Основной недостаток концепции конкурентного распределения потоков состоит в том, что множество конкурентных распределений является слишком широким и содержит "уравнительные" распределения потоков, при которых всем тяготеющим парам обеспечивается $1/\nu_0$-я часть их требований, тогда как многие могли быть обеспечены целиком. Пропускная способность ребер для таких распределений также недоиспользуется. К сожалению, известные численные методы находят одно произвольное (и обычно, нелучшее) решение. Вопрос о том, какие распределения потоков из всего множества конкурентных распределений считать наиболее приемлемыми в случае недопустимости МП-сети, требует отдельного рассмотрения (см. [5]).

Другими возможными вариантами для приемлемого распределения потоков являются решения задач:

$$\max_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} \sum_{i\in M} d_i z_i\ -$$

шения задачи о допустимости (1.3),(1.4), и

$$\min_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} \sum_{i\in M} \min\{0, d_i - z_i\} -$$

минимизации невязки вектора требований, имеющей также смысл штрафа за недовыполненные требования пользователей (подобная задача рассмотрена в [3]).

Потоковые (комбинаторные) методы поиска конкурентного распределения потоков даны в [18, 19, 20, 22, 24, 25]. Кроме того, задача (1.11) сводится к задаче линейного программирования (ЛП)

$$\theta_0 = \max_{\mathbf{f},z,\theta}\{\theta|\ (\mathbf{f},z)\in X(c),\ \theta d_i \le z_i\ \forall i\in M\} \tag{1.13}$$

и к ней могут быть применены эффективные методы ЛП (обзор результатов счета см., например, в [25]).

1.4. Решение обобщенной задачи о допустимости в слабой постановке. Предположим, что в задачах (1.6),(1.10) множество D возможных векторов требований задается линейными ограничениями, например, вида (1.5) или более сложными

$$D = \{d\in \mathbf{R}^m_+|\ d^1\le d\le d^2,\ \ \sum_{i\in M} d_i = d_0\}, \tag{1.5$'$}$$

которые в общей форме запишем как

$$D = \{d\in \mathbf{R}^m_+|\ Cd\le b\}. \tag{1.14}$$

Тогда задача (1.10) эквивалентна проверке существования решения линейной системы

$$\{(\mathbf{f},z)\in X(c),\ Cd\le b,\ z\ge d\}\ \text{ или }\ \{(\mathbf{f},d)\in X(c),\ Cd\le b\}. \tag{1.15}$$

И если существует решение $(\mathbf{f}^c, z^c, d^c)$ системы (1.15), то МП-сеть слабо допустима, d^c — решение (1.10), а $\mathbf{f}^c$ соответствует $f[d^c]$ — решению (1.4) для d^c, так что оптимальное распределение потоков в задаче о слабой допустимости может быть получено и как конкурентное при требованиях d^c. В случае несовместности системы (1.15) МП-сеть не допустима ни для какого вектора требований $d\in D$.

От задачи (1.10) можно по аналогии с заменой (1.3) на (1.11),(1.13) перейти к поиску

$$\theta_0^c \stackrel{\text{def}}{=} \max_{d\in D}\theta_0(d) = \max_{\mathbf{f},z,d,\theta}\{\theta|\ (\mathbf{f},z)\in X(c),\ \theta d\le z,\ d\in D\}. \tag{1.16}$$

$(\mathbf{f}^c, z^c, d^c)$ выполнены все свойства решения (1.15). Однако задача (1.16) уже не является задачей ЛП. Она билинейна по (θ, d), выпукла (множество ограничений выпукло, так как функция θd выпукла на неотрицательном ортанте, и становится афинным при фиксации конкретного значения θ.) Поэтому в случае слабой допустимости сети удобно напрямую решать линейную систему (1.15). В противном случае, т.е. при недопустимости МП-сети в смысле (1.10), поиск приемлемого $\mathbf{f}^c$ и величины θ_0^c слабой максиминной обеспеченности требований тяготеющих пар можно осуществлять путем многократного решения систем линейных неравенств (задач ЛП)

$$\{(\mathbf{f}, z) \in X(c),\ Cd \leq b,\ z \geq \theta d\}, \tag{1.17}$$

меняя параметр θ, начиная с $\theta = 1$, например, методом деления пополам [26] (отрезка, содержащего θ_0^c). Можно также искать $\theta_0^c < 1$ с помощью методов продолжения по θ (например, по возрастанию с $\theta = 0$) для параметрического семейства задач (1.17). Методы выпуклого программирования [27] в применении к задаче (1.16) следует использовать для более общего случая — выпуклости множества D (когда часть ограничений на d задается нелинейными неравенствами). При этом оказывается полезным представление (1.12) для θ_0, позволяющее выразить θ_0^c через решение выпуклой задачи минимизации ν_0, а именно

$$\theta_0^c \stackrel{\text{def}}{=} \max_{d \in D}\{1/\nu_0(d)\} = 1/\min_{d \in D} \nu_0(d) \stackrel{\text{def}}{=} 1/\nu_0^c$$

(доказательство выпуклости $\nu_0(\cdot)$ по d см. в [28]).

Заметим, что нередко возникает задача поиска довольно грубого приближения к решению (1.16), например, когда значение $\theta_0^c < 1$ вычисляется с целью оценки затрат на развитие сети, а поиск приемлемого распределения потоков, и следовательно, d^c не представляет интереса. В такой ситуации указанные приближенные методы вполне работоспособны. (Хотя для решения общей задачи развития МП-сети — см. в [5], поскольку речь идет о динамических задачах, следует использовать более сложные методы, разрабатываемые, например, на основе рассматриваемых в [29].)

В качестве эффективного алгоритма приближенного решения (1.17) (а значит, и (1.16) — см. выше) для D типа $(1.5')$ можно рекомендовать комбинаторный алгоритм [30], основанный на методе экспоненциального потенциала [31]. Для сведения исследуемой задачи к рассмотренной в [30] перепишем систему (1.17) с учетом $(1.5')$ в форме

$$\{(\mathbf{f}, z/\theta) \in X(c),\ \theta d_i^1 \leq z_i \leq \theta d_i^2\ \ \forall i \in M,\ \ \sum_{i \in M} z_i \geq d_0 \theta\}$$

$$\sum_{i\in M}(d_i^2 - z_i/\theta) \le \sum_{i\in M} d_i^2 - d_0,$$

тогда после соответствующей нормировки получим формулу (1.1) из [30]. Согласно этой работе ε-приближенное решение (1.17),(1.5$'$), т.е. такое, где с точностью до ε выполнено условие $d \in D$, может быть найдено за время порядка MNE/ε с точностью до логарифмических множителей. Приближенное решение (1.16),(1.5$'$) методом дихотомии по θ может быть найдено в результате решения логарифмического числа подобных задач, что не изменит данной оценки.

1.5. Решение задачи о гарантированной допустимости. Рассмотрим теперь задачу о гарантированной допустимости МП-сети для полиэдрального множества D возможной неопределенности требований пользователей — задачу (1.6),(1.14). Если множество D имеет достаточно простую структуру, например, симплекс (1.5), и нетрудно найти все его угловые точки, то можно проверить допустимость сети для каждой из них — в силу линейности $Z(c)$ допустимость для всех крайних точек равносильна допустимости для всего D, т.е. гарантированной допустимости МП-сети. В общем случае, эффективных численных методов проверки гарантированной допустимости МП-сети авторам не известно.

Если сеть не является гарантированно допустимой, то для определения гарантированного уровня $\theta_0^г$ максиминной обеспеченности требований тяготеющих пар, а также гарантированной оценки $\nu_0^г$ соответствующего коэффициента увеличения пропускной способности ее ребер можно поставить аналогичную (1.11) и (1.16) задачу поиска

$$\theta_0^г \stackrel{\text{def}}{=} \min_{d\in D}\theta_0(d) = \min_{d\in D}\max_{\mathbf{f},z,\theta}\{\theta|\ (\mathbf{f},z)\in X(c),\ \theta d\le z\} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{d\in D}\frac{1}{\nu_0(d)} = 1/\nu_0^г,$$

$$\nu_0^г \stackrel{\text{def}}{=} \max_{d\in D}\nu_0(d) = \max_{d\in \mathrm{corn}D}\nu_0(d) = 1/\min_{d\in \mathrm{corn}D}\{1/\nu_0(d)\},$$

где $\mathrm{corn}D$ — множество угловых точек D. Таким образом,

$$\theta_0^г = \min_{d\in \mathrm{corn}D}\theta_0(d) = \min_{d\in \mathrm{corn}D}\max_{\mathbf{f},z,\theta}\{\theta|\ (\mathbf{f},z)\in X(c),\ \theta d\le z\} = \tag{1.18}$$

$$= \max_{\theta,\{\mathbf{f}(d),z(d)\}_{d\in\mathrm{corn}D}}\{\theta|\ (\mathbf{f}(d),z(d))\in X(c),\ \theta d\le z(d)\ \ \forall d\in \mathrm{corn}D\}.$$

Переход от D к $\mathrm{corn}D$ осуществлен на основании выпуклости по d функции $\nu_0(\cdot)$, доказанной в [28] (см. также в статье 3 утв.6), и не мог быть получен для $\theta_0^г$ напрямую ввиду отсутствия вогнутости $\theta_0(\cdot)$.

симина и минимакса в играх с полной информированностью [1, 32] и в результате замены внутреннего минимума по d условием $\forall d$, аналогичной замене минимума в (1.11), приведшей к (1.13). С учетом того, что вместе с любой своей точкой множество $Z(c)$ содержит и все (неотрицательные) покомпонентно небо́льшие, вместо $\mathrm{corn} D$ можно рассматривать лишь эффективные угловые точки $\mathrm{Max}\{\mathrm{corn} D\}$ [33], где Max обозначает множество максимальных элементов в смысле отношения "$\leq$" среди векторов (см. в [1, 7]).

Итак получили задачу типа (1.13), но в несколько раз большей размерности — в зависимости от числа угловых точек D. Если их много и трудно вычислять, то можно построить нижнюю оценку величины $\theta_0^{г}$ как значение $\theta_0(d^{max})$ (см. (1.9)) максиминной обеспеченности требований в жестко гарантированной постановке, соответствующей задаче (1.7),(1.8):

$$\theta_0^{жс} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} \min_{i\in M} \min_{d\in D} \frac{z_i}{d_i} =$$

$$= \max\{\theta |\ \exists z \in Z(c): \quad \theta d \leq z \quad \forall d \in D\} = \theta_0(d^{max}).$$

Соотношение $\theta_0^{жс} \leq \theta_0^{г}$ следует из того, что максимин не превышает минимакса. К сожалению, в общем случае оценка $\theta_0^{жс}$ оказывается довольно грубой (пессимистической), поскольку жестко гарантированная постановка использует меньше информации о задаче — не учитывает информированности о d к моменту выбора распределения потоков.

Напомним, что приемлемое распределение потоков $\mathbf{f}(d)$ для рассматриваемой гарантированной постановки задачи о допустимости не обязательно вычислять в процессе поиска $\theta_0^{г}$ — оно определяется как конкурентное для данного $d \in D$, а гарантированная оценка величины максиминной обеспеченности требований производится до того, как значение d стало известно. Величина $\nu_0^{г} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\limits_{d\in D} \nu_0(d)$, или $1/\theta_0^{г}$ является априорной характеристикой недопустимости сети по отношению к цели обеспечения любого из заданного множества требований и может служить верхней оценкой того, во сколько раз следует увеличить суммарную пропускную способность ребер сети, чтобы достичь цели ее гарантированной допустимости. Поэтому решение, пусть приближенное, задачи (1.18) представляется достаточно важным в случае неточно известных требований пользователей, несмотря на возможную трудоемкость процесса решения. (Необходимость вычисления $\theta_0^{г}$ возникает и при анализе МП-сетей со случайными требованиями.)

решению задачи (1.11): множество D содержит вектор d^{max}, определенный (1.9). В таком случае (например, при наличии интервальных оценок для d_i) задача (1.6) эквивалентна жестко гарантированной постановке (1.7),(1.8) и может решаться как обычная задача о допустимости, а $\theta_0^{\text{г}} = \theta_0(d^{max})$. Действительно, пусть $D \ni d^{max}$, тогда $\exists z^0(d^{max}) : \quad z^0(d^{max}) \geq \theta_0(d^{max})d^{max} \geq \theta_0(d^{max})d \quad \forall d \in D$ (из (1.9)). Значит, $\theta_0(d^{max})$ удовлетворяет ограничениям в (1.13) $\forall d \in D$ и по определению $\theta_0(d)$ как максимума (1.13) получаем, что $\theta_0(d) \geq \theta_0(d^{max}) \quad \forall d \in D$, т.е. $\theta_0^{\text{г}} \geq \theta_0(d^{max})$. Обратное неравенство вытекает из определения $\theta_0^{\text{г}} = \min_D \theta_0(d) \leq \theta_0(d^{max})$. Аналогично и для θ_0^c: если D содержит d^{min}, где $d_i^{min} \stackrel{\text{def}}{=} \min_D d_i$, то $\theta_0^c = \theta_0(d^{min})$. Действительно, тогда $\theta_0^c \geq \theta_0(d^{min})$ и $\exists d' \in D : \quad \theta_0^c \geq \theta_0(d')$, т.е. $\exists z^0(d') \geq \theta_0^c d' \geq \theta_0^c d^{min}$, так что $\theta_0^c \leq \max\{\theta |\ \exists z \geq \theta d^{min},\ z \in Z(c)\} = \theta_0(d^{min})$.

Таким образом, если $D = \{d^1 \leq d \leq d^2\}$, то найти и $\theta_0^{\text{г}}$, и θ_0^c не трудней, чем решить задачу с известными требованиями. Если к интервальным ограничениям добавляется неравенство для суммы компонент d (типа (1.5$'$) при замене знака "=" на $\leq$ или $\geq$), то данным способом вычисляется одна из оценок θ_0^c или $\theta_0^{\text{г}}$. Однако им уже не удается воспользоваться в случае ограничений (1.5), (1.5$'$). Тем не менее, из доказанного выше следует, что для любых вариантов задания множества D, значения $\theta_0(d^{min})$ и $\theta_0(d^{max})$ дают, хотя и необязательно точные, верхнюю и нижнюю оценки величины θ_0 максиминной обеспеченности требований тяготеющих пар в МП-сети:

$$\theta_0(d^{max}) \leq \theta_0^{\text{г}} \leq \theta_0(d) \leq \theta_0^c \leq \theta_0(d^{min}). \tag{1.19}$$

1.7. О смешанных постановках обобщенной задачи о допустимости. В принципе, в реальных задачах с неточно известными требованиями должны возникать смешанные постановки обобщенной задачи о допустимости: разные по различным группам требований. В частности, кроме уже упоминавшейся в п.1.2 смеси гарантированной и жестко гарантированной постановок (см. рис.1), возможна аналогичная смесь гарантированной и слабой постановок. Так, множество неопределенности требований D может быть задано как объединение (или совокупность) непересекающихся множеств $D^j,\ j \in J$, а обобщенная задача о допустимости МП-сети ставится следующим образом: надо обеспечить (выяснить) достижимость хотя бы одного вектора d^j из каждого множества D^j. Например, индекс j соответствует сезонным или суточным изменениям структуры потоковых требований тяготеющих гического графа сети), которые должны компенсироваться системой путем изменения маршрутов прохождения потоков. А множества D^j соответствуют тем небольшим колебаниям значений вектора требований в рамках данных структурных изменений, к которым пользователи могут адаптироваться самостоятельно (путем изменения своих требований в сторону d^j).

Формально, указанная постановка сводится к проверке

$$D^j \cap Z(c) \neq \emptyset \quad \forall j \in J$$

и поиску $f[d^j]$, удовлетворяющих (1.4) для $d^j \in D^j \cap Z(c), \quad \forall j \in J$. В случае D^j, задаваемых линейными ограничениями — типа (1.14) —

$$D^j = \{d^j |\ C(j)d^j \leq b(j)\},$$

приходим к проверке существования решения $\{\mathbf{f}^j, z^j, d^j\}_{j \in J}$ линейной системы

$$\{(\mathbf{f}^j, z^j) \in X(c), \quad z^j \geq d^j, \quad C(j)d^j \leq b(j) \quad \forall j \in J\},$$

т.е. к проверке совместности $|J|$ линейных систем $\{(\mathbf{f}^j, z^j) \in X(c), C(j)z^j \leq b(j)\}$ для $j \in J$ (решению $|J|$ задач о слабой допустимости). Другие варианты смешанных постановок могут быть рассмотрены аналогичным образом.

Заключение. Описаны основные способы учета неопределенности в задаче о допустимости МП-сети с неполной информацией о векторе требований. Выявлены принципиальные различия в возможных подходах к формализации задачи. Указаны процедуры численного решения для ряда возникающих оптимизационных постановок.

1. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

2. *Карманов В.Г., Федоров В.В.* Моделирование в исследовании операций. М.: Твема, 1996.

3. *Коробский Д.Ю., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М., Сокол В.А., Строгая Г.В.* Потоковая модель производства, доставки и распределения топлива и энергии. М.: ВЦ РАН, 1994.

4. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.

5. *Малашенко Ю.Е.* Математические модели анализа потоковых сетевых систем. М.: ВЦ АН СССР, 1993.

6. *Давидсон М.Р., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. и др.* Математические постановки задач восстановления и обеспечения живучести для многопродуктовых сетей. М.: ВЦ РАН, 1993.

7. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

8. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Потоковые задачи анализа уязвимости многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1989.

9. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Параметризация значения векторного минимакса со связанными ограничениями // Ж ВМ и МФ, 1997. Т.37. N.11.

10. *Hu T.C.* On the feasibility of simultaneous flows in network // Oper. Res., 1964. V.12.

11. *Assad A.A.* Multicommodity network flows: A survey // Networks, 1978. V.8. N.1.

12. *Kennington J.L.* A survey of linear cost multicommodity network flows // Oper. Res., 1978. V.26. N.2.

13. *Kamath A., Palmon O.* Improved interior-point algorithms for exact and approximate solutions of multicommodity flow problems // Proceeding of the 6th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 1995.

товой задачи с целочисленными потоками // Ж ВМ и МФ, 1982. Т.22. N.3.

15. *Давидсон М.Р.* Условия устойчивости множества крайних точек полиэдра и их применение для исследования многопродуктовых сетевых моделей: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: ВЦ РАН, 1995.

16. *Onaga K.* A multicommodity flow theorem // Electronics Commun. Japan, 1970. V.53. N.7.

17. *Iri M.* On the extension of the maximum-flow minimum-cut theorem to multicommodity flows // J. Oper. Res. Soc. Japan, 1971. V.13.

18. *Matula D.W.* Concurrent flow and concurrent connectivity in graphs // Graph Theory and Its Appl. to Algorithms and Comput. Sci. N.-Y.: Wiley-Intersci., 1985.

19. *Biswas J., Matula D.W.* Two flow routing algorithms for the maximum concurrent flow problem // Fall Joint Comput. Conf., Dallas, Tex., Nov.2-6, 1986. Proc. Washington, D.C., 1986.

20. *Thompson B.J., Matula D.W.* A Flow Rerouting Algorithm for Maximum Concurrent Flow Problem with Variable Capacities and Demands, and its Application to Cluster Analysis, Tech. Report 86-CSE-12, Computer Science Dept., Southern Methodist University, March, 1986.

21. *Малашенко Ю.Е.* Нормативный подход к анализу многопродуктовых сетей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1988. N.3.

22. *Shahrokhi F., Matula D.W.* The maximum concurrent flow problem // J. Assoc. Comput. Math., 1990, 37. N.2.

23. *Klein P., Plotkin S., Stein C., Tardos E.* Faster approximation algorithms for the unit capacity concurrent flow problem with applications to routing and finding sparse cuts // SIAM J. Comput. 1994. V.23, N.3.

24. *Leighton T., Makedon F., Plotkin S., Stein C., Tardos E., Tragoudas S.* Fast approximation algorithms for multicommodity flow problems // J. Computer and Syst. Sci., 1995. V.50. N.1.

multicommodity flow algorithm. DIMACS Working paper, 1992.

26. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

27. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

28. *Смирнов М.М.* Методы аппроксимации граней множества Парето в линейной многокритериальной задаче // Вестн. МГУ. Вычисл. матем. и кибернетика, 1996. N.3.

29. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод Эллипсоидов. М.: Наука, 1988.

30. *Grigoriadis M.D., Khachiyan L.G.* Approximate minimum-cost multicommodity flows in $\tilde{O}(\varepsilon^{-2}KNM$ time. Tech. Rep. LCSR-TR-245, Department of Computer Science, Rutgers University, New Brunswick, NJ, May 1995.

31. *Grigoriadis M.D., Khachiyan L.G.* Fast approximation schemes for convex programs with many blocks and coupling constraints // SIAM J. Optimization, 1994. V.4.

32. *Гермейер Ю.Б., Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В.* Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986.

33. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Обобщенная задача анализа многопродуктовой сети // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1989. N.4.

Рис.1