2. Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М., Изд-во Моск. ун-та, 1974.
3. Федоров В. В. О методе штрафных функций в задаче определения максимина.— ЖВМ и МФ, 1972, 12, 2, 321—333.

Н. С. Кукушкин

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМУМА

Пусть X — компакт, $C(X)$ — пространство непрерывных (вещественнозначных) функций на X. Каждому непустому замкнутому подмножеству $E\subseteq X$ отвечает функционал φ на $C(X)$, определенный следующим образом:

$$\varphi(f)=\max_{x\in E} f(x). \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что любой такой функционал обладает следующими свойствами:

(a) $\varphi(\bar{\alpha})=\alpha$ $(\alpha\in R,\ \bar{\alpha}\in C(X):\bar{\alpha}(x)\equiv\alpha)$,
(b) $\varphi(f+\bar{\alpha})=\varphi(f)+\alpha$,
(c) $\varphi(nf)=n\varphi(f)$ (n — натуральное число),
(d) $\varphi(\max[f_1, f_2])=\max[\varphi(f_1), \varphi(f_2)]$.

Любопытно, что эти свойства вполне характеризуют данное семейство функционалов.

Теорема.

Пусть $\varphi: C(X)\to R$ удовлетворяет условиям (b), (c), (d); тогда существует замкнутое подмножество $E\subseteq X$, для которого справедливо (1).

Во-первых, покажем, что функционал φ удовлетворяет также условию (a). Для этого достаточно рассмотреть $\varphi(\bar{\alpha})$ как функцию на прямой. Из (b) вытекает, что $\varphi(\bar{\alpha})=\alpha+C_\varphi$, а из (c) — что $\varphi(2\bar{\alpha})=2\alpha+2C_\varphi=2\alpha+C_\varphi$, откуда $C_\varphi=0$. Из (d) вытекает монотонность φ, т. е. $f_1\leqslant f_2\Rightarrow\varphi(f_1)\leqslant\varphi(f_2)$, а отсюда и из (a) следует

$$\min_{x\in X} f(x)\leqslant\varphi(f)\leqslant\max_{x\in X} f(x). \tag{2}$$

Построим требуемое подмножество $E\subseteq X$. Для каждой функции $f\in C(X)$ обозначим $E_f=\{x\in X\,|\,f(x)\leqslant\varphi(f)\}$ и положим $E=\bigcap_{f\in C(X)} E_f$. Очевидно, что E замкнуто; покажем $E\neq\varnothing$.

Предположим противное; тогда множества $U_f=\{x\in X\,|\,f(x)>\varphi(f)\}$ для всех $f\in C(X)$ образуют открытое покрытие X. Пусть $U_{f_1},\ldots,U_{f_n}$ — конечное подпокрытие; в силу (b) можно считать, что $\varphi(f_1)=\varphi(f_2)=\ldots=\varphi(f_n)=0$. Положим $f^*(x)=\max[f_1(x), \ldots, f_n(x)]$; тогда по (d) имеем $\varphi(f^*)=0$, но, с другой стороны, $f^*(x)>0$ для любого $x\in X$. Это противоречит неравенствам (2).

По определению множества E для любой фу
$\in C(X)$ выполняется неравенство $\varphi(f) \geqslant \max_{x \in E} f(x)$. Пре
$E = X$, то из (2) следует требуемое равенство (1). Пре
жим, что $E \neq X$ и существует функция $f^{**} \in C(X)$, для
рой $\varphi(f^{**}) = v^0 > \max_{x \in E} f^{**}(x)$; тогда существуют окр
U множества E и $\varepsilon > 0$, для которых $v^0 \geqslant \max_{x \in \bar{U}} f^{**}($

Множество $X \setminus E$, и тем более множество $X \setminus U$, по
ся введенными выше множествами U_f; рассуждая в
как и выше, получим функцию $f^* \in C(X)$, для котор
всех $x \in X \setminus U$ справедливо $f^*(x) > \varphi(f^*) = v^0$. Умень
ли потребуется, величину ε, можно считать, что
$\geqslant v^0 + \varepsilon$ для $x \in X \setminus U$.

Теперь сдвинем наши функции f^*, f^{**}, поло
$f_0 = f^{**} - \max_{x \in \bar{U}} f^{**}(x)$, $f_1 = \max[f^*, \bar{v}^0] - \bar{v}^0$. В силу усл
имеем $\varphi(f_0) \geqslant \varepsilon > 0$, $\varphi(f_1) = 0$, при этом $\max_{x \in E} f_0($
$\min_{x \in X/U} f_1(x) \geqslant \varepsilon$, $\min_{x \in X} f_1(x) \geqslant 0$. Выберем натуральное
$n > \max_{x \in X} f_0(x)\, \varepsilon^{-1}$; в силу (c) справедливы нераве

$$\varphi(nf_1) = n\varphi(f_1) = 0 < \varepsilon \leqslant \varphi(f_0).$$

Покажем теперь, что $nf_1 \geqslant f_0$; тогда полученное пр
завершит доказательство теоремы. При $x \in \bar{U}$ имеем nf_1
$0 \geqslant f_0(x)$, а при $x \in X \setminus U$ имеем $nf_1(x) \geqslant n\varepsilon \geqslant \max_{x \in X} f_0(x) \geqslant$

Теорема доказана.

Замечания. 1. Взятие максимума по всему мно
X может быть охарактеризовано, очевидно, как макси
ный функционал, удовлетворяющий условиям (a)—(d

2. Если X — нормальное пространство, содержащ
лее одной точки, то условия (b), (c), (d) независимы
ствительно, $\varphi_1(f) = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$ удовлетворяет
и (c) (а также (a)), но не удовлетворяет
$\varphi_2(f) = \max[f(x_1), f(x_2) - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ удовлетворяет
(d) (а также (a)), но не удовлетворяет (c); $\varphi_3(f) = \max$
$\alpha^{\operatorname{sign}(f(x_2))} \times f(x_2)]$ $(0 < \alpha < 1)$. удовлетворяет (c), (
также (a)), но не удовлетворяет (b).