исходит из существования единой цены. Такая цена, настолько, насколько она вообще существует в реальности, возникает в результате деятельности торговцев. Таким образом, классическая теория описывает формирование поведения внешних контрагентов при заданном поведении торговцев. Мы же, напротив, стремимся описать поведение торговцев, находящихся под угрозой разорения, но при этом вынуждены задаваться определенным поведением внешних контрагентов. На наш взгляд, одной классической теории недостаточно хотя бы потому, что монополизированные рынки XX века демонстрируют гораздо большую устойчивость, нежели конкурентные рынки XIX века.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору А. А. Петрову за постоянное внимание к работе и ценные обсуждения, а также канд. физ.-мат. наук А. А. Шананину за полезные консультации.

Abstract

Collective behaviour of dealers, striving to avoid ruin is considered. It is shown, that any Pareto-optimal behaviour of such a collective may be described approximately as the optimal behaviour of a single dealer also striving to avoid ruin. Stability of Pareto-optimal behaviour is also considered. It appears to be depending on the configuration of graph of possible exchanges between dealers and to be closely connected with the possibility for dealer to form his optimal behaviour on the base of aggregated description of other dealer's states.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поспелов И. Г.* Динамическая модель рынка // Экономика и мат. методы. 1988. Т. 24, № 3. С. 497—508.
2. *Поспелов И. Г.* Динамическая модель рынка с посредником // Модели и методы прогнозирования научно-технического прогресса. М.: ВНИИСИ, 1984. Вып. 2. С. 37—44.
3. *Поспелов И. Г.* Вариационный принцип в описании экономического поведения // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 46—59.
4. *Поспелов И. Г.* Парето-оптимальные стратегии поведения в динамической модели рынка // АиТ. 1989. № 1. С. 33—41.
5. *Интриллигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. 617 с.
6. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985. 198 с.
7. *Басакер Р., Саати Т.* Конечные сети и графы. М.: Наука, 1986.

УДК 519.86

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ПОЛИТИКИ ФИРМ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ РЫНОЧНОГО ТИПА

Н. Н. Оленев, И. Г. Поспелов

В настоящей работе изучается замкнутая многосекторная модель экономики рыночного типа, односекторный вариант которой рассмотрен в [1]. Основу модели составляет описание жизненного цикла экономической деятельности промышленной фирмы, начиная от ее возникновения и кончая ее ликвидацией. При исследовании модели особое внимание уделяется циклическим процессам в рыночной экономике, которые привлекали и продолжают привлекать внимание многих исследователей. Как правило, для моделирования этих процессов строятся специальные модели цикла, в которые в явном виде вводятся факторы, вызывающие колебания.

В неокейнсианских моделях постулируется наличие стремления капиталистов сравнять фактический капитал с некоторым его равновесным уровнем [2]. Определяющим фактором циклического развития в моделях неоклассиков является связь колебаний прибыли с ростом заработной платы при ограниченности предложения трудовых ресурсов. В третьей группе моделей цикла предполагается связь колебаний инвестиций с наличием заданных «горбов» в возрастном распределении капитала [3].

В рассматриваемой ниже модели никаких предположений о колебательном характере поведения экономических агентов нет, тем не менее благодаря последовательному микроописанию всего процесса расширенного воспроизводства она воспроизводит одновременно все отмеченные выше явления, связанные с циклом.

1. Описание модели

Будем рассматривать хозяйство, в котором производится N продуктов. Выпуск продуктов осуществляют отдельные производственные единицы. При выпуске i-го продукта используется живой труд, который мы предполагаем однородным, и, возможно, другие продукты в качестве сырья.

Для простоты предполагаем, что каждая из производственных единиц может выпускать только один продукт. Совокупность производственных единиц, выпускающих i-й продукт, называем отраслью или сектором. Считаем, что все производственные единицы каждой i-й отрасли используют одну и ту же технологию производства и различаются между собой величиной производственной мощности [1] и своим возрастом. Технология производства в i-й отрасли характеризуется нормами затрат труда (номинальной трудоемкостью) ν_i и j-го продукта a_{ji} на выпуск единицы i-го продукта, а также коэффициентами фондоемкости b_{ji}, которые показывают, сколько единиц j-го продукта надо затратить на создание единичной мощности в i-й отрасли.

Процесс старения производственных единиц описываем так же, как в [5, 1]. Предполагается, что число рабочих мест на производственной единице остается неизменным в течение всего срока ее службы, а мощность ее постепенно падает. Падение мощности вызвано тем, что старое оборудование чаще ломается и с течением времени все большая доля рабочего времени уходит на простои и ремонт сломавшегося оборудования. Случайный процесс поломок и ремонта оборудования с медленно нарастающей частотой поломок соответствует, как показал А. А. Шананин [4], падению мощности с постоянным темпом. Этот темп будем обозначать μ, называть темпом выбытия мощности и считать одинаковым для всех производственных единиц хозяйства.

Уменьшение мощности при постоянном числе рабочих мест приводит к росту фактической трудоемкости производства. В силу сделанных предположений на производственной единице возраста θ в i-й отрасли фактическая трудоемкость λ_i составляет (см. [1])

$$\lambda_i = \nu_i e^{\mu\theta}. \tag{1.1}$$

Что касается коэффициентов прямых затрат a_{ji}, то мы считаем их неизменными в течение всего срока использования мощности.

Предполагается, что старая производственная мощность может быть демонтирована, причем при демонтаже единицы мощности i-й отрасли возраста θ получается $B_{ji}(\theta)$ единиц j-го продукта. Функции $B_{ji}(\theta)$ — это тоже технологические характеристики i-й отрасли. Предполагается, что они не возрастают по θ и удовлетворяют неравенству

$$B_{ji}(\theta) < b_{ji}. \tag{1.2}$$

Продукты, получаемые при демонтаже производственных мощностей, ниже кратко называем остаточными продуктами i-й отрасли. При полном демонтаже мощности некоторой производственной единицы эта единица ликвидируется. Предполагается, что демонтаж, в отличие от выбытия, сопровождается соответствующим уменьшением числа рабочих мест, так что соотношение (1.1) остается в силе при любом темпе демонтажа.

Предполагается, что каждая производственная единица управляется самостоятельной фирмой. Эта фирма продает произведенный и остаточные продукты, а также закупает сырье по единым для всего хозяйства ценам продуктов p_k, нанимает рабочую силу

[1] Максимальным выпуском продукции при полной обеспеченности сырьем и рабочей силой (см. [4]).

по единой для каждой отрасли ставке заработной платы s_i и ведет свои финансовые операции с единой банковской системой.

Предполагается, что фирма образуется вместе с соответствующей производственной единицей и ликвидируется при полном демонтаже мощности, поэтому в дальнейшем мы отождествляем фирмы и производственные единицы; более того, фирмы, образующиеся одновременно, в модели неразличимы, поэтому считается, что в момент τ образуется одна фирма, а момент создания τ служит меткой, выделяющей эту фирму среди других. По этой причине будем говорить «фирма τ» вместо «фирма, образовавшаяся в момент τ». Модель предназначена для описания экономики с совершенной конкуренцией, т. е. экономики, в которой действует множество мелких фирм, поэтому формально будем считать фирмы «бесконечно малыми» и предполагать, что образуются они непрерывно, в каждый момент времени. Строгое описание такого процесса на языке теории меры дано в [5], а здесь мы ограничимся уровнем строгости, принятым в классической математической физике.

Образующаяся в i-й отрасли фирма τ берет в банке кредит $\Phi_i^I(\tau)\,d\tau$. На эти средства она закупает фондообразующие продукты $X_j^I(\tau)\,d\tau$ и создает производственную мощность $I_i(\tau)\,d\tau$

$$X_j^I(\tau) = \sum_{j=1}^{N} b_{ji} I_i(\tau), \quad I_i(\tau) = \Phi_i^I(\tau)\Big/\sum_{j=1}^{N} p_j b_{ji}. \tag{1.3}$$

В дальнейшем эта мощность выбывает и частично демонтируется [2]. Так что фирма τ располагает в момент $t \geqslant \tau$ мощностью $m_i(t, \tau)\,d\tau$, где

$$\frac{\partial m_i}{\partial t}(t, \tau) = -\mu m_i(t, \tau) - u_i(t, \tau)\, m_i(t, \tau), \; m_i(\tau, \tau) = I_i(\tau), \tag{1.4}$$

а $u_i \geqslant 0$ — темп демонтажа, который определяется решением фирмы. Демонтаж приносит фирме τ доход

$$z_i^U(t, \tau) = u_i(t, \tau) \sum_{j=1}^{N} B_{ji}(t-\tau)\, p_j(t)\, m_i(t, \tau). \tag{1.5}$$

Выпуск продукции в момент t фирмой τ i-й отрасли обозначим через $y_i(t, \tau)\,d\tau$, $0 \leqslant y_i(t, \tau) \leqslant m_i(t, \tau)$. Для того чтобы его осуществить, надо в силу (1.1) привлечь трудовые ресурсы в количестве $y_i \nu_i \exp[\mu(t-\tau)]\,d\tau$ и закупить $a_{ji} y_j d\tau$ единиц j-го продукта в качестве сырья. Поэтому выпуск продукта $y_i d\tau$ приносит фирме τ прибыль $z_i^L d\tau$:

$$z_i^L(t, \tau) = \Big\{p_i(t) - s_i(t)\,\nu_i e^{\mu(t-\tau)} - \sum_{j=1}^{N} a_{ji} p_j(t)\Big\}\, y_i(t, \tau). \tag{1.6}$$

[2] Восстановление изношенной мощности в модели не рассматривается. Предполагается, что восстановление эквивалентно созданию новой мощности и этим занимается новая фирма.

В момент образования фирмы τ у нее возникает задолженность (см. (1.3)) $\Phi_i^I(\tau)\,d\tau$, которая в дальнейшем растет за счет начисления процента по единой текущей ставке $r(t)$, а уменьшается за счет платежей погашения $h_i(t, \tau)$ (см. [1, 6]) и составляет в момент $t \geqslant \tau$ величину $l_i(t, \tau)\,d\tau$, такую, что

$$\partial l_i/\partial t = r(t)\, l_i(t, \tau) - h_i(t, \tau), \quad l_i(\tau, \tau) = \Phi_i^I(\tau). \tag{1.7}$$

Чистый доход фирмы τ

$$d_i d\tau = (z_i^L + z_i^U - h_i)\, d\tau \tag{1.8}$$

поступает собственникам этой фирмы. Предполагается, что весь этот доход собственники сберегают в виде вклада $q_i(t, \tau)\,d\tau$ в том же едином банке, где берут кредит фирмы. На этот вклад (депозит) банк постоянно начисляет процент по единой текущей ставке $\rho(t)$:

$$\partial q_i/\partial t\,(t, \tau) = d_i(t, \tau) + \rho(t)\, q_i(t, \tau), \quad q_i(\tau, \tau) = 0. \tag{1.9}$$

Депозит q_i сохраняется после ликвидации фирмы. Предполагается, что депозит q_i не может использоваться для погашения долга (т. е. фирма есть общество с ограниченной ответственностью):

$$z_i^U + z_i^L \geqslant h_i, \tag{1.10}$$

а ссудный счет l_i не может использоваться для накоплений:

$$l_i(t, \tau) \geqslant 0. \tag{1.11}$$

Предполагается также, что банк требует обеспечивать задолженность балансовой стоимостью фирмы k_i:

$$l_i(t, \tau) \leqslant k_i(t, \tau). \tag{1.12}$$

Балансовая стоимость фирмы τ $k_i(t, \tau)\,d\tau$ определяется как (см. [1, 6])

$$\frac{\partial k_i}{\partial t}(t, \tau) = -\beta k_i - u_i k_i, \quad k_i(\tau, \tau) = \Phi_i^I(\tau), \tag{1.13}$$

где β — единый для всего хозяйства коэффициент амортизации. Член $u_i k_i$ учитывает списание балансовой стоимости демонтированных мощностей. При нарушении неравенства (1.12) фирма объявляется банкротом. Ее мощность мгновенно демонтируется, выручка от продажи остаточного продукта идет в погашение долга и, если ее не хватает, остаток долга списывается (фактически раскладывается на всех собственников, см. ниже).

Выше были описаны условия деятельности фирм. Теперь опишем модель их поведения, которая аналогична предложенной в [1], но учитывает специфику многоотраслевого описания производства.

Мы изложим ее в два этапа. Сначала укажем некоторую идеализированную схему, вполне пригодную лишь в предположении

постоянства и сбалансированности цен, а затем опишем ее «сглаженный» вариант, который фактически применялся в приведенных ниже расчетах. Итак, начнем со схемы: фирма стремится максимизировать депозит собственников $q_i(\tau + T, \tau)$ в достаточно отдаленный момент $\tau + T$ при ограничении (1.12). В силу (1.5) — (1.8), (1.13) для выполнения неравенства (1.12) при $t = \tau + \Delta$, $\Delta \to 0$, необходимо, чтобы $\frac{\partial}{\partial t}(l_i - k_i)_{t=\tau} \leqslant 0$ или [3]

$$r(t) \leqslant r_i(t) = \frac{p_i(\tau) - \nu_i s_i(\tau) - \sum_{j=1}^{N} a_{ji} p_j(\tau)}{\sum_{j=1}^{N} b_{ji} p_j(\tau)} - \beta. \tag{1.14}$$

В [1] показано, что при достаточно большом $\beta > \mu$ и ограниченных ценах и проценте условие (1.14) гарантирует выполнение неравенства (1.12) при всех $t \geqslant \tau$. Поэтому можно считать, что условие $r_i \geqslant r$ есть условие образования фирмы. Условие максимальности $q_i(\tau + T, \tau)$ при достаточно большом T, выполнении условий (1.11), (1.12) и постоянных r, ρ и p_k требует, чтобы (см. [1]) мощность m_i была мгновенно демонтирована в момент $\theta(\tau)$, когда первый раз нарушается неравенство

$$\psi_i(\theta, \tau) \triangleq p_i - \nu_i e^{\mu(\theta-\tau)} s_i - \sum_{j=1}^{N} a_{ji} p_j + \sum_{j=1}^{N} B'_{ji}(\theta - \tau)\, p_j -$$
$$- \sum_{j=1}^{N} B_{ji}(\theta - \tau)\, p_j [\mu + \rho] - \frac{l_i(\theta, \tau)}{k_i(\theta, \tau)} [r - \rho] \geqslant 0, \tag{1.15}$$

т. е.

$$u_i = \delta(t - \theta(\tau)), \tag{1.16}$$

причем

$$y_i(t, \tau) = m_i(t, \tau) \{p_i - s_i \nu_i e^{\mu(\theta-\tau)} - \sum_{j=1}^{N} a_{ji} p_j\}_+,$$
$$h_i(t, \tau) = [z_i^L + z_i^U]\, 1(l_i(t, \tau)). \tag{1.17}$$

Здесь и ниже $\delta(\cdot)$ — функция Дирака, $1(\cdot)$ — функция Хэвисайда ($1(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $1(x) = 1$ при $x > 0$) и $\{x\}_+ = x\,1(x)$. При выполнении (1.14), (1.16) и (1.17) $\psi_i(\tau, \tau) \geqslant 0$, $\frac{\partial}{\partial t}\psi_i(t, \tau)|_{t=\tau} > 0$ и $q_i(\tau + T, \tau)$ тем больше, чем больше $\Phi_i^I(\tau)$. Поэтому спрос на кредит i-й отрасли имеет вид

$$\hat{\Phi}_i^I = \begin{cases} 0 & \text{при } r_i < r, \\ \text{любое число при } r_i = r, \\ +\infty, & \text{при } r_i > r. \end{cases} \tag{1.18}$$

[3] При вычислении производных в (1.13) полагаем $u_i(\tau, \tau) = 0$, т. е. предполагаем, что фирмы создаются для выпуска продукции, а не для спекуляции мощностями.

Так как предложение кредита Φ_i^I банком ограничено (см. ниже), то для равновесия на рынке капитала надо, чтобы (см. (1.14)) $r = \max_k r_k$ и кредит брали только те отрасли, у которых $r_i = \max_k r_k$. Распределение суммы кредита $\breve{\Phi}^I$ между этими отраслями в равновесии может быть любым.

Были проведены численные эксперименты, реализующие эту схему «в лоб»: весь кредит отдавался отрасли с максимальным r_i, фирма τ в i-й отрасли ликвидировалась, если до этого не случалось банкротства, в момент t, когда первый раз нарушалось неравенство (1.15), где в качестве p_j, s_j, r, ρ брались текущие значения $p_j(t)$, $s_j(t)$, $r(t)$, $\rho(t)$. Оказалось, что такое поведение фирм порождает неестественно резкие колебания цены и других показателей из-за слишком быстрой распродажи мощности и слишком резких перемещений потока инвестиций из отрасли в отрасль. Поэтому было принято «сглаженное» описание поведения.

Предполагается, что при нарушении неравенства (1.15) фирма продает свои мощности с достаточно высоким, но конечным темпом, до тех пор пока ее мощность не станет исчезающе малой. Что же касается объема кредитов, то будем считать, что доля χ_i^I-й отрасли в общей сумме кредитов $\left(\chi_i^I \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{N} \chi_j^I \equiv 1\right)$ обладает инерционностью, увеличиваясь, когда r_i в данной отрасли больше, чем в других, и падая в противном случае:

$$\frac{d\chi_i^I}{dt} = \frac{1}{\Delta^I} \sum_{j=1}^{N} (r_i - r_j), \tag{1.19}$$

где Δ^I — характерное время изменения структуры капиталовложений.

Кроме того, считаем, что процент устанавливается банком не на максимальном уровне $\max_k r_k$, а на уровне, усредненном в соответствии с долями χ_i^I отраслей в общей сумме кредитов:

$$r(t) = \sum_{i=1}^{N} r_i(t)\, \chi_i^I(t), \quad \Phi_i^I = \chi_i^I \breve{\Phi}^I. \tag{1.20}$$

Интересно заметить, что условие (1.20) в силу (1.3), (1.5)—(1.8), (1.13)—(1.14) означает, что (1.12) выполняется в среднем по отраслям

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{N} [l_i(t, \tau) - k_i(t, \tau)]_{t=\tau} = 0. \tag{1.21}$$

Отметим, что если выполнено (1.20) и не все r_i одинаковы, то по крайней мере для одной отрасли при небольших значениях $t - \tau$ нарушится соотношение (1.12). Поэтому при расчетах по «сглаженной» модели считалось, что банкротство фирмы наступает, если (1.12) нарушается при $t > \tau + \Delta$, где Δ — заданный небольшой интервал времени. Этого оказалось достаточно, чтобы исключить систематические банкротства фирм в модели. Описание поведения фирм завершено, и мы переходим к описанию остальных элементов процесса расширенного воспроизводства.

В хозяйстве i-й продукт появляется в результате производства его фирмами i-й отрасли, а также, возможно, как остаточный продукт при демонтаже мощностей других отраслей; i-й продукт будет выпускаться в количестве [4]

$$Y_i = \int d\tau\, y_i(t, \tau) + \sum_{j=1}^{N} \int d\tau\, u_j(t, \tau)\, m_j(t, \tau)\, B_{ij}(t - \tau). \tag{1.22}$$

Спрос на этот продукт предъявляют трудящиеся и инвесторы, организующие новые фирмы. Предполагается, что трудящиеся i-й отрасли тратят на покупку весь свой доход $s_i R_i^L$, где R_i^L — численность занятых в i-й отрасли:

$$R_i^L = \int d\tau\, \nu_i e^{\mu(t-\tau)}\, y_i(t, \tau). \tag{1.23}$$

Потребительские вкусы трудящихся можно задавать составом $c_1, \ldots, c_N$ их «потребительской корзины» (см. [7]). Тогда потребительские расходы i-й отрасли составят $\Phi_i^C = c_i p_i \sum_{j=1}^{N} s_j R_j^L \Big/ \sum_{j=1}^{N} c_j p_j$.

Для покупки i-го продукта

Инвесторы j-й отрасли расходуют средства $\Phi_{ij}^I = I_j b_{ji} p_j$, взятые в кредит в банковской системе.

$b_{ij} p_j$

Как и в [1] (в отличие от [7]), мы здесь предполагаем, что рынки продуктов находятся в равновесии: (учет промежуточн. продукт)

$$p_i(t) = \Phi_i^C(t) \Big/ \left[Y_i(t) - \sum_{j=1}^{N} b_{ij} I_j(t)\right] - \sum_{j=1}^{N} a_{ij} Y_j(t) \tag{1.24}$$

Мы считаем ставки s_i заработной платы дифференцированными по отраслям, поскольку допускаем свой для каждой отрасли рынок трудовых ресурсов. Общее предложение трудовых ресурсов, которое считаем растущим с заданным постоянным темпом n, $\hat{R}^L(t) = \hat{R}_0^L e^{nt}$, в каждый момент времени t распределено между отраслями. Динамику этого распределения опишем так же, как в [7]. С каждой отдельной отраслью связано определенное количество ищущих в ней работу $\hat{R}_i^L$:

$$\hat{R}_i^L = \chi_i^L \hat{R}^L; \quad \sum_{i=1}^{N} \chi_i^L(t) \equiv 1, \quad \chi_i^L \geqslant 0. \tag{1.25}$$

Мотивом перехода безработных из отрасли в отрасль считается разница уровней занятости $R_i^L / \hat{R}_i^L$ в отраслях: чем выше этот

[4] Здесь и далее выражение $\int d\tau$ означает суммирование по всем фирмам [1, 5].

$$\cancel{\left[p_i(t) - \sum_{j=1}^{N} a_{ji} p_j(t)\right] Y_i(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^{N} b_{ij} I_j(t) = \Phi_i^C(t)} \quad \cancel{(1.24)}$$

уровень в отрасли, тем больше миграционный поток в нее:

$$\frac{d\chi_i^L}{dt} = \frac{1}{\Delta^L}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{R_i^L}{\hat{R}_i^L} - \frac{R_j^L}{\hat{R}_j^L}\right]. \tag{1.26}$$

Здесь Δ^L — характерное время миграции. Изменение заработной платы опишем как в [1, 7]:

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{s_i}{\Delta_i^s}\left[\frac{R_i^L(t) - \hat{R}_i^L(t)}{\hat{R}_i^L(t)}\right]_+, \tag{1.27}$$

где Δ_i^s — характерное время изменения заработной платы, R_i^L — численность занятых (см. (1.23)), а $\hat{R}_i^L$ — предложение трудовых ресурсов (см. (1.25)). Мы допускаем в модели, что в отраслях может возникать «перегрузка» трудовых ресурсов, т. е. выполняется неравенство $R_i^L > \hat{R}_i^L$. Содержательно эта ситуация может интерпретироваться как использование фирмами сверхурочных работ. Уравнение (1.27) выражает предположение о том, что отраслевая ставка заработной платы растет при перегрузке трудовых ресурсов и не изменяется в противном случае.

Подробное описание функционирования банковской системы приводится в [1]. Здесь приведем только сводку уравнений [5], которые определяют депозиты собственников фирм D

$$\frac{dD}{dt} = \rho D + \sum_{i=1}^{N}\int d\tau\, d_i(t,\tau) + E, \tag{1.28}$$

задолженность фирм L

$$\frac{dL}{dt} = \Phi^I + \Lambda, \quad \Lambda = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{m_i(t,\tau)>0} d\tau\, l_i(t,\tau), \tag{1.29}$$

резерв банковской системы

$$\frac{dR}{dt} = E, \quad R \geqslant \xi D, \quad E = \sum_{i=1}^{N}\pi_i Y_i, \tag{1.30}$$

предложение кредитов

$$\Phi^I = -\Lambda + \frac{1-\xi}{\xi} E \tag{1.31}$$

[5] В этих уравнениях слагаемое E — эмиссия платежных средств. В работе [1] в уравнениях, соответствующих (1.28), (1.29), допущена ошибка. Уравнения должны выглядеть так, как указано здесь (при $E = \pi Y$). Повторение численных экспериментов с односекторной моделью показало, что эта ошибка не сказывается на качественном характере результатов, за исключением того, что значение процента ρ фактически должно быть меньше, чем указано на графиках, приведенных в [1].

и норму процента по депозитам

$$\rho D + \sum_{i=1}^{N}\int d\tau\, d_i(t,\tau) = \Phi^I + \Lambda. \tag{1.32}$$

Здесь ξ — законодательно установленная норма обеспечения депозитов [6], Λ — прирост задолженности фирм за вычетом непогашенной задолженности банкротов. Уравнение (1.31) определяет спрос на кредит, а (1.32) показывает, что долги банкротов фактически погашаются за счет уменьшения доходов вкладчиков ρD. Если в (1.31) $\Phi^I < 0$, то это означает крах банковской системы [1]. Если в (1.20) $r < 0$, то полагаем $r = 0$, $\Phi^I = 0$. В этом случае $\xi D < R$. В остальных случаях $\xi D = R$ [1].

На этом описание многосекторной модели завершается. В следующем разделе рассмотрим результаты численных экспериментов с двухсекторной моделью. Заметим, что описанную схему нетрудно обобщить на случай, когда номинальные трудоемкости ν_i зависят от времени [1], а коэффициенты прямых затрат a_{ij} — от времени и возраста [8].

2. Численные эксперименты с двухсекторной моделью

Будем рассматривать двухсекторную модель, в которой первый сектор выпускает фондообразующий, а второй — потребительский продукт. В такой модели $a_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2$, $b_{21} = b_{22} = B_{21} = B_{22} = 0$, b_{11}, b_{12}, B_{11}, $B_{12} > 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Если заданы начальные распределения мощности $m_i(t_0, \tau)$, долга $l_i(t_0, \tau)$ и балансовой стоимости $k_i(t_0, \tau)$ по возрастам $t_0 - \tau > 0$ фирм, начальный размер депозитов $D(t_0)$ банковского резерва $R(t_0)$ и заработной платы $s_i(t_0)$, а также начальные распределения предложения трудовых ресурсов $\chi_i^L(t_0)$ и спроса на кредит $\chi_i^I(t_0)$, то при заданной динамике общего предложения трудовых ресурсов $\hat{R}^L(t)$, $t \geqslant t_0$, приведенные в разд. 1 соотношения однозначно определяют эволюцию модельной экономической системы при $t > t_0$. При расчетах дифференциальные уравнения заменялись разностными по схеме Эйлера с постоянным шагом, а непрерывные распределения по возрастам — дискретными с тем же шагом.

Прежде чем описывать результаты конкретных численных экспериментов над моделью, обрисуем общий характер наблюдавшихся в них траекторий. На начальной стадии развития при избытке трудовых ресурсов наблюдается переходный процесс, который заканчивается одним из следующих режимов: а) сбалансированный рост, на котором объемные показатели растут экспоненциально с одинаковым темпом, б) развал системы (полная потеря рентабельности, банкротство всех фирм либо крах банковской системы (см. [1])); в) незатухающие колебания около сбалансированного роста. Если темп сбалансированного роста (или средний темп роста в режиме колебаний) превышает темп

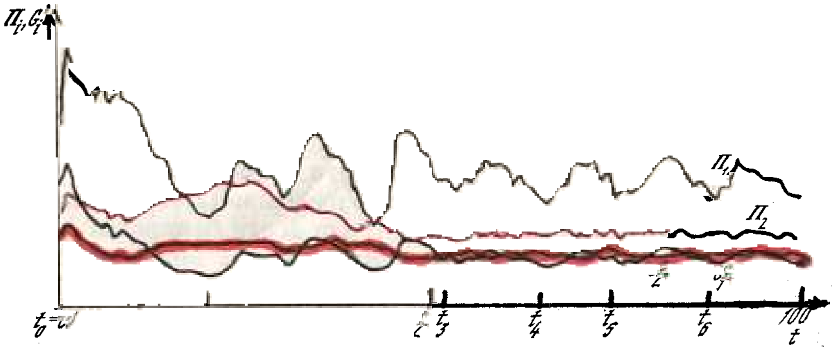

Рис. 1

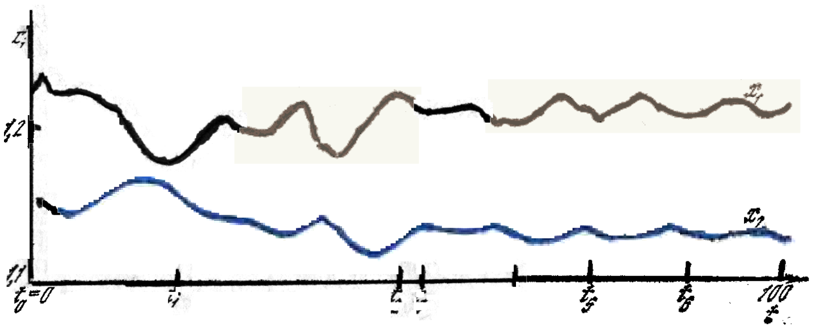

Рис. 2

роста предложения трудовых ресурсов, то развитие системы приводит к их исчерпанию и возникновению нового переходного процесса, в котором растут цены и ставки заработной платы. После этого процесса устанавливается один из следующих режимов: а) сбалансированный рост с темпом, не превышающим темп роста трудовых ресурсов, б) развал системы, в) колебания со средним темпом роста, меньшим темпа роста трудовых ресурсов, г) инфляционный режим, в котором происходят периодические переходы от недостатка трудовых ресурсов к их избытку и обратно в обеих отраслях.

Наиболее характерен для двухсекторной модели колебательный режим развития. Он возникает даже, если система не испытывала никаких потрясений (начальные условия вблизи сбалансированного роста, не возникало недостатка трудовых ресурсов, не было банкротств фирм). По-видимому, в случае двухсекторной модели мы имеем дело с автоколебаниями. Затухание колебаний наблюдается редко, да и в этом случае выход на режим сбалансированного роста требует очень большого времени. Для сравнения отметим, что для односекторной модели характерны как раз затухающие колебания и при отсутствии перечисленных выше потрясений односекторная модель быстро выходит на сбаланси-

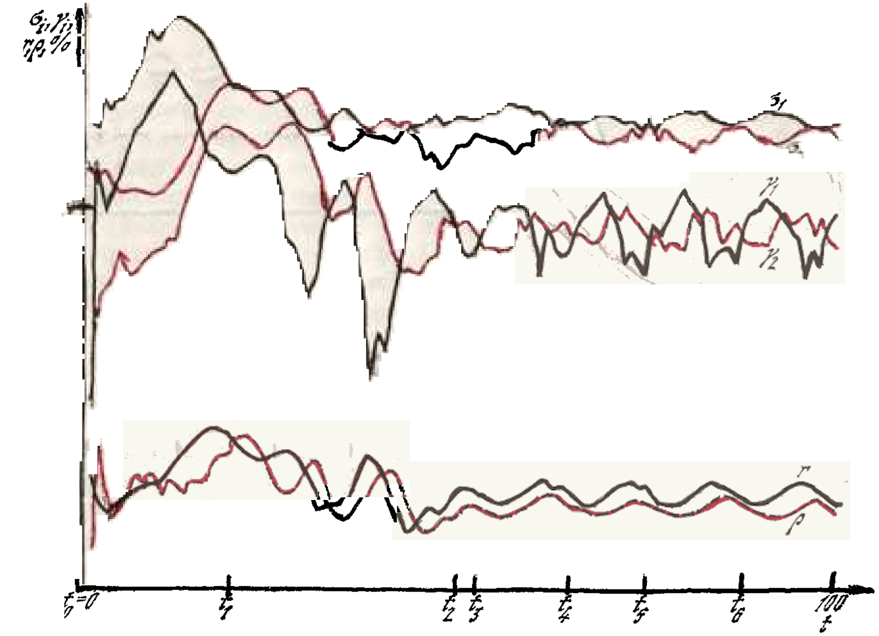

Рис. 3

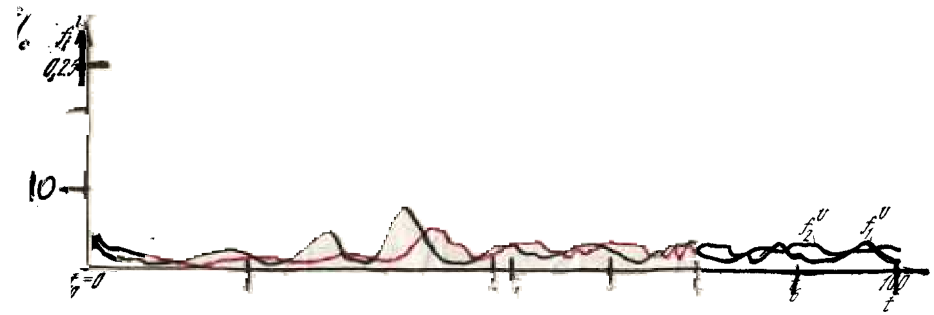

Рис. 4

рованный рост. На рис. 1—5 представлены типичные результаты численного эксперимента с двухсекторной моделью: переходный процесс при $t < t_1$, режим с недостатком (перегрузкой) трудовых ресурсов при $t \in [t_1, t_2]$, автоколебательный режим при $t > t_3$.

Рассмотрим сначала переходный процесс. Несмотря на колебательный характер траектории на этом отрезке, можно заметить, что в целом в обеих отраслях снижаются нормы прибыли $G_i = \int d\tau d_i(t, \tau)/[\int d\tau \beta k_i(t, \tau) + s_i R_i^L]$ и нормы прибавочной стоимости (в текущих ценах) $\Pi_i = \int d\tau d_i(t, \tau)/s_i R_i^L$ (рис. 1). Снижается средняя трудоемкость в первой отрасли $x_1 = R_1^L/\nu_1 Y_1$ (рис. 2). В целом увеличиваются темпы роста выпуска продукции $\gamma_i =$

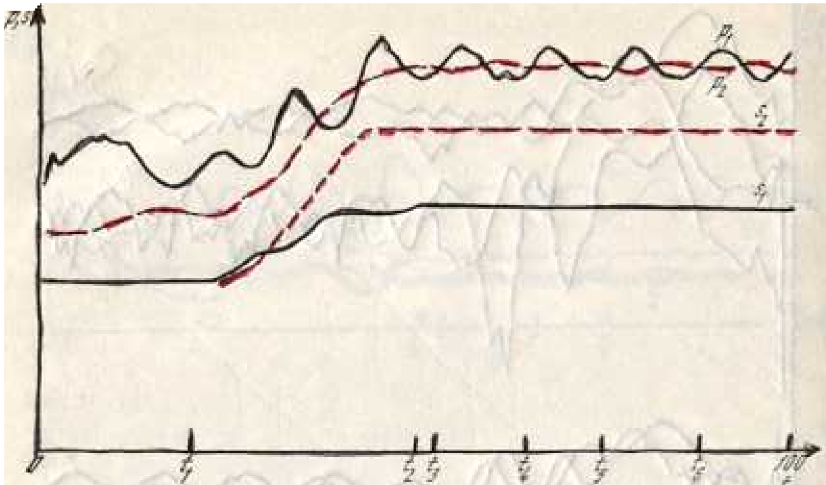

Рис. 5

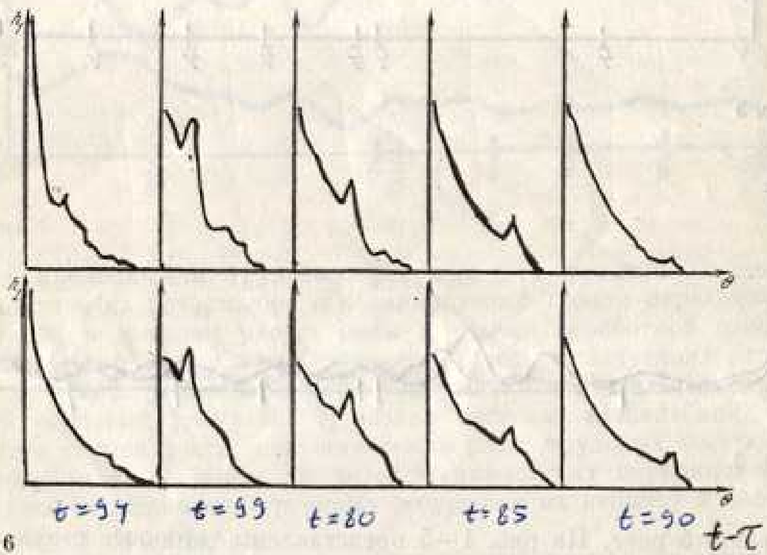

Рис. 6

$= (1/Y_I)\, dY_I/dt$ (рис. 3). Подобное явление отмечает в «Капитале» К. Маркс. «Так как масса применяемого живого труда постоянно уменьшается по сравнению с массой приводимого им в движение овеществленного труда, с массой производительно потребляемых средств производства, то отношение той части этого живого труда, которая не оплачена и овеществлена в прибавочной стоимости, к стоимостной величине всего вложенного капитала должно постоянно уменьшаться. Но это отношение массы прибавочной стоимости к стоимости всего вложенного капитала образует нор-

му прибыли, которая поэтому должна постоянно падать» (*Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд. Т. 25. Ч. I. С. 233).

Поскольку мы не учитываем научно-технический прогресс, рост средней производительности труда не имеет в модели систематического характера и тенденция понижения норм прибыли наблюдается лишь в переходном процессе.

В численных экспериментах наблюдался и переходный процесс иного типа, когда темпы роста выпусков и средняя производительность труда снижаются. Такой процесс, как правило, сопровождается развалом системы и возникает при низких начальных значениях средней производительности труда. Различие двух типов переходных режимов более ярко выражено в односекторной модели. Для нее удается даже получить грубую аналитическую оценку порогового значения средней производительности труда, при которой система «выживает» (см. разд. 3).

Недостаток трудовых ресурсов в эксперименте, представленном на рис. 1—5 при $t \in [t_2, t_3]$, носит временный характер и играет роль своеобразного внешнего возмущения, «запускающего» автоколебания в системе. Как уже говорилось выше, в системе возможны режимы, когда недостаток трудовых ресурсов возникает периодически (инфляционные режимы). Они требуют самостоятельного изучения. Здесь мы ограничимся рассмотрением автоколебаний при избытке трудовых ресурсов, подобных тем, которые видны на рис. 1—5 при $t > t_3$.

На рис. 1—5 показано четыре полных цикла колебаний $[t_3, t_4]$, $[t_4, t_5]$, . . ., каждый из которых длится 10—13 лет. Внутренний механизм этих колебаний нагляднее всего проявляется в динамике распределения производственных мощностей по возрастам. На рис. 6 изображены величины $h_i(t, \tau) = m_i(t, \tau)/\int d\tau m_i(t, \tau)$ как функции $\theta = t - \tau$ при t, соответствующем последовательным фазам колебания.

Видно, что в начале периода распределение острое, затем появляется «горбик» в распределении мощностей (доля вновь созданных мощностей $\sigma_i = I_i/M_i$ (рис. 3) уменьшилась). Далее, этот «горбик» становится еще более выраженным, средние трудоемкости x_i растут, затем доля вновь созданных мощностей увеличивается, «горбики» в распределении оформляются и по мере старения мощностей смещаются к концу распределения. Сначала демонстрируются мощности, образующие «горбик» в первом секторе, затем во втором. Сроки службы мощностей снижаются, усиленный демонтаж увеличивает предложение фондообразующего продукта и, как следствие, долю вновь созданных мощностей. Возникают острые распределения мощностей, средняя трудоемкость в первой отрасли падает и создаются предпосылки для возникновения нового «горбика» в распределении мощностей. В следующем периоде процесс повторяется.

«... Старый капитал достигает с течением времени момента, когда он обновляется с ног до головы, когда он меняет свою кожу и так же возрождается в технически усовершенствованном виде, при котором меньшей массы труда оказывается достаточно для того, чтобы привести в движение бо́льшую массу машин и сырья» (*Маркс К.*, *Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд. Т. 23. С. 642).

Естественно попытаться сопоставить наблюдаемые в модели колебания с периодическими кризисами перепроизводства, которые раз в 7—13 лет поражали капиталистическую экономику XIX и начала XX веков. «Ясно во всяком случае следующее: этим охватывающим ряд лет циклом взаимно связанных между собой оборотов, в течение которых капитал закреплен своей основной составной частью, дана материальная основа периодических кризисов, причем в ходе цикла деловая жизнь последовательно переживает периоды ослабления, среднего оживления, стремительного подъема, кризиса. Хотя периоды, когда вкладывается капитал, весьма различны и далеко не совпадают друг с другом, тем не менее кризис всегда образует исходный пункт для крупных новых вложений капитала. Следовательно, если рассматривать общество в целом, то кризис в большей или меньшей степени создает новую материальную основу для следующего цикла оборотов» (*Маркс К.*, *Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд. Т. 24. С. 208).

Посмотрим, как соотносится описанная выше динамика возрастного распределения мощностей (рис. 4) с динамикой макроэкономических показателей, изображенной на рис. 1—5. В начале периода при $t = t_4$ мощности $f_i^U = Y_i^U / \int m_i d\tau$ усиленно демонтируются (рис. 4), средняя трудоемкость x_i в первом секторе минимальна (рис. 3), нормы прибыли G_i и прибавочной стоимости Π_i (рис. 1), а также цена p_1 (рис. 5) тоже минимальны — *застой*. Затем демонтаж в первом секторе ослабевает, средняя производительность труда в первом секторе несколько снижается, нормы прибыли и прибавочной стоимости возрастают (рис. 1), цена фондообразующего продукта p_1 достигает максимума (рис. 5), а цена потребительского продукта p_2 начинает медленно подниматься (рис. 5) — *рост*. Затем демонтаж мощностей во втором секторе (f_2^U) снижается (рис. 4), а в первом (f_1^U) возрастает (рис. 4), нормы прибыли и прибавочной стоимости в обоих секторах достигают максимума (рис. 1), цена фондообразующего продукта p_1 снижается (рис. 5), а цена потребительского продукта p_2 достигает максимума (рис. 5) — *бурный рост*.

В конце периода демонтаж мощностей возрастает (рис. 4), нормы прибыли и прибавочной стоимости снижаются (рис. 1), цена потребительского продукта падает, а фондообразующего — начинает подниматься (рис. 5), средняя трудоемкость x_1 в первом секторе резко падает (рис. 3) — *кризис*.

Таким образом, модель качественно верно отражает смену фаз цикла деловой активности. Заметим, что на всем промежутке колебаний $t \in [t_3, 100]$ нормы прибыли секторов G_i (рис. 1) близки друг к другу, в то время как нормы прибавочной стоимости резко различаются. «...Конкуренция капиталов в различных отраслях производства создает цену производства, которая выравнивает нормы прибыли разных отраслей» (*Маркс К.*, *Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд. Т. 25. Ч. I. С. 197).

Отметим еще, что, хотя эволюция распределений в секторах происходит синхронно (рис. 6), макроэкономические показатели секторов колеблются с отчетливым сдвигом по фазе (рис. 1—5).

При сопоставлении результатов моделирования с реальностью надо помнить, что в модели рынки продуктов постоянно находятся в равновесии, так что собственно перепроизводства (накопления запасов готовой продукции) модель не описывает — кризис выражается в относительном избытке мощности. Кроме того, мы пренебрегаем техническим прогрессом, поэтому средний темп роста производства в установившемся режиме оказывается ниже темпа роста предложения трудовых ресурсов и ставки заработной платы не растут в периоды бурного роста производства.

В односекторной модели динамика возрастного распределения мощностей качественно такая же, как на рис. 6, но горбики со временем заметно расплываются и сглаживаются. Однако, подбирая специальным образом параметры (см. разд. 3), время затухания можно увеличить. Это позволяет надеяться, что результаты, полученные при аналитическом исследовании односекторной модели, которые мы приводим в следующем разделе, дают правильное представление и о процессах, протекающих в двухсекторной модели.

3. Некоторые результаты аналитического исследования односекторной модели

Мы дадим здесь оценку порогового значения производительности труда, обеспечивающего «выживание» системы, и оценку периода колебаний. При аналитическом исследовании мы используем «идеализированную схему» описания поведения фирм (1.15), (1.16) [6]. Мы также будем предполагать, что банкротств фирм не происходит, процент за кредит всегда положителен $r(t) > 0$, норма выхода остаточного продукта не зависит от возраста $B(\theta) = B = \text{const}$ и имеется избыток трудовых ресурсов.

Если банкротства не происходит, то в жизненном цикле фирмы τ выделяются два события (моменты переключения управлений):

а) момент демонтажа и распродажи мощности:

$$\tau^u(t) = \inf_{\theta \geq 0} \{\theta \mid \psi(t, \theta) < 0\}; \quad \tau + \tau^u(t) = \inf_{\theta > 0} \{\tau + \theta \mid \psi(\tau + \theta, \tau) < 0\}, \tag{3.1}$$

где ψ определено в (1.15),

б) момент расплаты с задолженностью:

$$h(t, \tau) = \mathbf{1}(\tau - \tau^l(t))(z^L + z^U); \quad d(t, \tau) = z^L + z^U - h,$$
$$\tau^l(t) = \min\{\tau^u(t), \sup_{\theta \geq 0} \{\theta \mid l(t, \theta) > 0\}\}. \tag{3.2}$$

[6] Для односекторной модели «сглаженное» и «идеализированное» описания процесса формирования спроса на кредит совпадают.

$h(t,\tau) = [1 - \mathbf{1}(t - \tau - \tau^l(t))](z^L + z^U); \quad d(t,\tau) = z^L + z^U - h,$

Величина τ^u задает срок существования фирмы при $r > 0$. Из (1.15) следует, что $y = m$ при $t - \tau < \tau^u$, т. е. в идеализированной схеме, в отличие от сглаженной, мощности всегда загружены полностью. В дальнейшем будем рассматривать только траектории, на которых фирмы расплачиваются с задолженностью за счет выручки от продажи произведенного живым трудом продукта. Численные эксперименты показывают, что выполнения условия $\tau^l < \tau^u$ можно добиться при всех режимах, описанных в разд. 2.

Интегрируя уравнение (1.4) с учетом (1.16) и подставляя в (1.22), получаем

$$Y^L(t) = \int_{t-\tau^u(t)}^{t} d\tau I(\tau) e^{-\mu(t-\tau)}, \tag{3.3}$$

$$Y^U(t) = BI(t - \tau^u(t)) e^{-\mu\tau^u(t)}, \tag{3.4}$$

причем из (1.23)

$$R^L(t) = \nu \int_{t-\tau^u(t)}^{t} d\tau I(\tau). \tag{3.5}$$

Совокупная прибыль фирм составляет

$$Z(t) = p(Y^L + Y^U) - sR^L,$$

а совокупные платежи погашения H в силу (1.17) и условия $\tau^l < \tau^u$

$$H(t) = p(t) \int_{t-\tau^l(t)} d\tau (p(t) - \nu s e^{\mu(t-\tau)}) I(\tau) e^{-\mu(t-\tau)}.$$

Из условия равновесия на рынке продукта

$$p[Y^L + Y^U] = sR^L + pbI \tag{3.6}$$

и (1.8) получаем, что

$$pbI = Z. \tag{3.7}$$

Интегрируя (1.7), получаем из (3.2) и условия $\tau^l < \tau^u$ уравнение для τ^l:

$$0 = bp(t) - \int_{t-\tau^l}^{t} dt' (p(t') - s\nu e^{\mu(t'-\tau^l(t))}) e^{-\mu(t'-t+\tau^e) - \int_{t-\tau^e}^{t'} d\eta r(\eta)} \tag{3.8}$$

у которого τ^l является минимальным положительным решением. Для $L = \int d\tau l(t, \tau)$ из (1.7) получаем уравнение $dL/dt = p(t)bI(t) + r(t)L(t) - H(t)$, но при $r > 0$ выполнено условие $L = [(1 - \xi)/\xi]R$ (см. [1]), и, учитывая, что

$$dR/dt = \pi Y, \tag{3.9}$$

$$0 = bp(t-\tau^e) - \int_{t-\tau^e}^{t} dt' \left(p(t') - s\nu e^{\mu(t'-t+\tau^e)}\right) e^{-\mu(t'-t+\tau^e) - \int_{t-\tau^e}^{t'} d\eta r(\eta)},$$

получаем

$$pbI = \frac{1-\xi}{\xi}[\pi(Y^L + Y^U) - rR] + H. \tag{3.10}$$

Из (1.28) имеем $dD/dt = \rho D + Z - H + \pi(Y^L + Y^U)$. Но при $r > 0$ депозиты $D = (1/\xi)R$, поэтому из (3.10), (3.7)

$$\rho = r(1 - \xi).$$

Из (3.1), (1.15) и выражений для m и l определяем ($l = 0$ при $\tau^e < \tau^u$)

$$\tau^u = \frac{1}{\mu} \ln \frac{p - (\mu + r(1-\xi))B\rho}{\nu s}. \tag{3.11}$$

Наконец, из (1.14) получаем выражение для r:

$$r = 1/b - \beta \mp \nu s/pb. \tag{3.12}$$

Соотношения (3.3)—(3.12) — это уравнения односекторной модели в интегральной форме. Некоторое аналитическое исследование этих нелинейных и сильно связанных между собой уравнений удается провести лишь в некоторых предельных случаях.

Рассмотрим режим, в котором $I(t)$ растет достаточно быстро, а τ^u, τ^l достаточно велики и меняются медленно:

$$I(t) \gg I(t - \tau^u), \quad I(t) \gg I(t - \tau^l), \quad \dot{\tau}^l, \dot{\tau}^u \sim 1. \tag{3.13}$$

Тогда, в силу (3.3)—(3.4), $Y^U \ll Y^L$ и $Y \approx Y^L$. Дифференцируя (3.3) и отбрасывая малые члены, получаем

$$dY/dt = I(t) - \mu Y. \tag{3.14}$$

Аналогично из (3.5)

$$dR^L/dt = \nu I, \tag{3.15}$$

а из (1.17), (3.7)

$$pbI = Z \approx H \approx pY - sR^L. \tag{3.16}$$

Чтобы найти цену p в рассматриваемом приближении, используем соотношения (3.12) для процента r и (3.9) для резерва R. Предположим, что рост I начался задолго до рассматриваемого момента времени t с малых значений I, Y, R, R^L. В силу (3.14), (3.9) это соответствует выбору начальных условий в (3.14), (3.9), таких, что

$$Y(t) = e^{-\mu t} \int_{-\infty} e^{\mu\tau} I(\tau) d\tau, \quad R = \pi \int_{-\infty} d\eta Y(\eta).$$

Подставляя первое выражение во второе после интегрирования по частям, получаем $R = \frac{-\pi}{\mu} Y \pm \frac{\pi}{\mu} \int_{-\infty}^{t} d\tau I(\tau)$. В силу (3.15), в принятом приближении последний член равен R^L/ν, так что

$$R \approx (\pi/\mu)[Y \pm R^L/\nu]. \tag{3.17}$$

Из (3.16) имеем, в силу (3.7) в принятом приближении $rR = \mu Y$ или в соответствии с (3.17),

$$r = \frac{\mu}{R^L/\nu Y - 1}\,. \tag{3.18}$$

Таким образом, в принятом приближении (3.13) система (3.3) — (3.12) заменяется следующими уравнениями:

$$dY/dt = -\mu Y + I, \tag{3.19}$$

$$dR^L/dt = \nu I, \tag{3.20}$$

$$bI = Y - sR^L/p, \tag{3.21}$$

$$\frac{1}{b} - \beta - \frac{\nu s}{bp} = \frac{\mu}{R/\nu Y - 1}\,. \tag{3.22}$$

Исключая из (3.19)—(3.22) p и I, получим

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \frac{1}{b} - \mu - \left(\frac{1}{b} - \beta\right)x(t) + \frac{\mu x(t)}{x(t) - 1}\,, \tag{3.23}$$

$$\frac{1}{R^L}\frac{dR^L}{dt} = \left[\frac{1}{b} - \left(\frac{1}{b} - \beta\right)x(t) + \frac{\mu x(t)}{x(t) - 1}\right] \Big/ x(t), \tag{3.24}$$

где

$$x = R^L/\nu Y \tag{3.25}$$

— безразмерная величина средней трудоемкости производства.

Можно указать некоторые априорные границы изменения переменной x, вне которых решение системы (3.23), (3.24) заведомо непохоже на решение исходной системы. Условие $r > 0$ в силу (3.18) сводится к неравенству

$$x > 1, \tag{3.26}$$

которое просто означает, что средняя трудоемкость R^L/Y должна быть больше номинальной ν. Условие положительности цены в силу (3.22) выражается в виде

$$x > 1 + b\mu/(1 - b\beta), \tag{3.27}$$

причем $p \to +\infty$ при $x \to 1 + b\mu/(1 - b\beta)$. Таким образом, экономически осмысленное решение (p, $r > 0$), удовлетворяющее (3.23), возможно только, если

$$1 - \beta b > 0. \tag{3.28}$$

Естественное требование положительности инвестиций, в силу (3.21), (3.22), выражается в виде

$$(1 - b\beta)\,x^2 - [2 - b\,(\beta - \mu)]\,x + 1 < 0.$$

Из этого неравенства и (3.27) получаем, наконец, искомые границы [7].

$$1 + \frac{\mu b}{1 - b\beta} < x < \frac{2 - b\,(\beta - \mu) + \sqrt{b^2(\beta - \mu)^2 + 4\mu b}}{2\,(1 - b\beta)}\,. \tag{3.29}$$

[7] Численные эксперименты с моделью показывают, что фактические границы применимости данного приближения у́же: x должно быть близким к $1/(1 - b\beta)$.

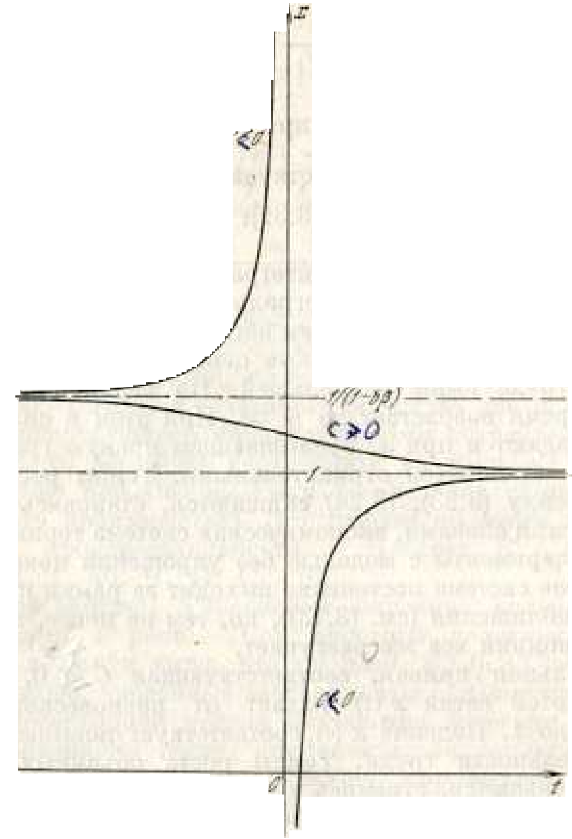

Рис. 7

Напомним, что к левой границе x стремится при $p \to +\infty$, а правая граница соответствует нулевым инвестициям.

Сбалансированный рост характеризуется одинаковыми темпами роста объемных величин. Приравнивая темпы роста Y и R^L из (3.23), (3.24), получим значение x на сбалансированном росте:

$$x = \hat{x} = 1/(1 - b\beta). \tag{3.30}$$

При естественном условии $\beta \geqslant \mu$ (см. [1]) значение $\hat{x}$ лежит в интервале (3.29).

Из (3.23)—(3.25) легко получить уравнение изменения x:

$$dx/dt = (1/b)\,(x - 1)\,[(1 - b\beta)\,x - 1]. \tag{3.31}$$

Точка равновесия $x = 1$ лежит левее допустимого интервала (3.29), она соответствует отрицательным ценам и инвестициям. Вторая точка равновесия — это $\hat{x}$. Общее решение (3.31) имеет вид

$$x(t) = 1 + \frac{b\beta}{(1 - b\beta)[1 + Ce^{\beta t}]}. \tag{3.32}$$

При $C > 0$ $x(t) \to \frac{1}{1 - b\beta} - 0$ при $t \to -\infty$, а при $C < 0$ $x(t) \to \frac{1}{1 - b\beta} + 0$ при $t \to -\infty$, откуда заключаем, что точка $\hat{x}$ — точка равновесия уравнения (3.31), она же — точка сбалансированного роста,— неустойчива.

На рис. 7 показан вид интегральных кривых при $C = 0$, $C = C_1 > 0$, $C = C_2 < 0$. Интегральная кривая, соответствующая $C < 0$, имеет две ветви. Нижняя ветвь при $x < 1$ не имеет экономического смысла: отрицательные цены, инвестиции, производительность труда выше наибольшей. На верхней ветви $x(t)$ за конечное время возрастает до $+\infty$. При этом в силу (3.21) инвестиции падают и при x, превышающем правую границу интервала (3.29), становятся отрицательными. Темпы роста объемных величин в силу (3.23), (3.24) снижаются, становясь отрицательными. Другими словами, экономическая система терпит крах. Численные эксперименты с моделью без упрощений показывают, что в этом случае система постепенно выходит за рамки применимости данного приближения (см. (3.13)), но, тем не менее, как правило, развал экономики все же наступает.

Интегральная кривая, соответствующая $C < 0$, имеет одну ветвь. На этой ветви $x(t)$ падает от равновесного значения $1/(1 - b\beta)$ до 1. Падение $x(t)$ соответствует повышению средней производительности труда. Темпы роста объемных величин Y и R^L увеличиваются, стремясь к $+\infty$ при $x \to 1$. При приближении x к $1 + b\mu/(1 - b\beta)$ в соответствии с (3.29) цена стремится к $+\infty$, и при дальнейшем движении по интегральной кривой мы попадаем в область отрицательных цен (выходим за границы интервала (3.29)). Численные эксперименты с моделью показывают, что по мере повышения цены фирмы расплачиваются с задолженностью все быстрее и при конечном значении цены нарушается условие (3.13) применимости рассматриваемого приближения.

Описанная выше динамика величины x соответствует двум упомянутым в разд. 2 типам переходных процессов в модели. Соотношение (3.32) позволяет найти условие, отделяющее начальные данные, при которых система разваливается, от начальных данных, при которых она выживает. Условие $C > 0$ при $x > 1$ в силу (3.32) означает, что $x(t) < 1/(1 - b\beta)$ или, в силу (3.25), что

$$Y/R^L > (1 - b\beta)/\nu. \tag{3.33}$$

На основании приведенного выше анализа и численных экспериментов с моделью можно утверждать, что если средняя производительность труда Y/R^L больше $(1 - b\beta)/\nu$, то система, как правило, выживает, а если меньше, то погибает. Таким образом, для «живучести» экономической системы капиталистического рыноч-

ного типа требуется достаточный уровень развития производительной силы общественного труда.

Из (3.21) можно получить выражение для доли вновь созданных мощностей

$$\sigma = \frac{I}{Y} \approx \frac{1}{b}\left[1 - (1 - b\beta)x + \frac{b\mu x}{x - 1}\right]. \tag{3.34}$$

Из (3.34), (3.31) при $1 < x < 1/(1 - b\beta)$ вытекает, что

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{b}\left[-(1 - b\beta) - \frac{b\mu}{(x - 1)^2}\right]\frac{dx}{dt} < 0 \quad \text{при} \quad \frac{dx}{dt} > 0.$$

Это соотношение показывает, что для выживания системы нужен преимущественный рост производства средств производства. «Для этого требуется, чтобы общество могло ждать; чтобы значительную часть уже созданного богатства оно могло изымать как из непосредственного индивидуального потребления,— с тем чтобы эту часть богатства употреблять на труд, *не являющийся непосредственно производительным* (в пределах самого процесса материального производства). Это требует высокого уровня уже достигнутой производительности...» (*Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд. Т. 46. Ч. II. С. 216).

Теперь рассмотрим упрощенное описание колебаний около сбалансированного роста. Для простоты полагаем, что $B = \text{const} = b$ и, как и выше, что $s = \text{const}$, $r > 0$, $\tau^u > \tau^l$. Как уже говорилось выше, численные эксперименты показывают, что колебания в односекторной модели постепенно затухают и сходятся к сбалансированному росту, приблизительно сохраняя свой период, причем специальным подбором параметров характерное время затухания этих колебаний можно сделать неопределенно большим. На основании этих наблюдений мы делаем предположение, что динамика интенсивных переменных (p, r, Y/R^L, I/Y, R/Y и т. п.) системы (3.3)—(3.12) сходна с динамикой обычного линейного маятника с трением. Типичными явлениями такого маятника являются затухающие колебания, но при специальном подборе параметров, когда трение обращается в нуль, возникают периодические движения с произвольной амплитудой и не зависящим от нее периодом. Поскольку такая аналогия верна, условия возникновения незатухающих колебаний в односекторной модели и их период можно найти, изучая систему, получающуюся из (3.3)—(3.12) линеаризацией около сбалансированного роста. Чтобы найти линеаризованную систему, положим

$$\begin{aligned}
&p(t) = p_0[1 + \varepsilon p_1(t) + O(\varepsilon)], \qquad \tau^u(t) = \tau_0^u[1 + \varepsilon\tau_1^u(t) + O(\varepsilon)],\\
&\tau^l(t) = \tau_0^l[1 + \varepsilon\tau_1(t) + O(\varepsilon)], \qquad I(t) = I_0 e^{\nu t}[1 + \varepsilon I_1(t) + O(\varepsilon)],\\
&Y^U(t) = Y_0^U e^{\nu t}[1 + \varepsilon Y_1^U(t) + O(\varepsilon)],\\
&Y^L(t) = Y_0^L e^{\nu t}[1 + \varepsilon Y_1^L(t) + O(\varepsilon)],\\
&R^L(t) = R_0^L e^{\nu t}[1 + \varepsilon R_1^L(t) + O(\varepsilon)],
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$Y^Z(t) = Y_0^Z e^{\gamma t}[1 + \varepsilon Y_1^Z(t) + O(\varepsilon)],$$
$$R^Z(t) = R_0^Z e^{\gamma t}[1 + \varepsilon R_1^Z(t) + O(\varepsilon)],$$
$$R(t) = R_0 e^{\gamma t}[1 + \varepsilon R_1(t) + O(\varepsilon)],$$

где γ — неизвестный заранее, определяемый параметрами модели темп сбалансированного роста, $Y^Z(t) = \int\limits_{t-\tau^u(t)}^{t-\tau^l(t)} d\tau\, y(t,\tau)$ — выпуск фирм, расплатившихся с задолженностью, а R^Z — число занятых на этих фирмах. Величины с индексом 0 в правой части — положительные постоянные, характеризующие сбалансированный рост, а величины с индексом 1 — переменные относительные отклонения от него. Эти отклонения мы считаем малыми ($\varepsilon \to 0$). Подставляя (3.35) в (3.3)—(3.12) и приравнивая члены нулевого и первого порядка по ε, после довольно утомительных выкладок приходим к системе, определяющей параметры сбалансированного роста (нулевое приближение по ε):

$$Y_0^L = \frac{I_0}{\mu}[1 - e^{-(\gamma+\mu)\tau_0^u}], \quad R_0^L = \frac{\nu I_0}{\gamma}[1 - e^{-\gamma\tau_0^u}],$$
$$Y_0^Z = \frac{\ldots}{\gamma + \mu}[e^{-(\gamma+\mu)\tau_0^l} - e^{-(\gamma+\mu)\tau_0^u}], \quad R_0^Z = \frac{\nu I_0}{\gamma}\left(e^{-\gamma(\tau_0^l)} - e^{-\gamma\tau_0^u}\right)$$
$$R_0 = \frac{\pi I_0}{\gamma(\gamma+\mu)}[1 - (1 - (\gamma+\mu)b)e^{-(\gamma+\mu)\tau_0^u}], \quad Y_0^U = bI_0 e^{-(\gamma+\mu)\tau_0^u}. \tag{3.36}$$

$$\frac{p_0}{s\nu} - \frac{(\gamma+\mu \ldots \quad {}^{-\gamma\tau_0^u}]}{\gamma[1-(\gamma+\mu)b][1 \ldots} \ldots - \frac{\nu s}{p_0 b},$$
$$p_0(Y_0^U + Y_0^Z) - sR_0^Z = -(1 \ldots \quad \gamma$$
$$b = \frac{[1 - e^{-(\gamma+\mu)\tau_0^l}]}{\gamma + \mu} - \frac{s\nu}{p_0} \ldots$$
$$\tau_0^u = \frac{1}{\mu}\ln\left\{\frac{p_0}{s\nu}[1 - b\mu - \ldots - \xi)\right\},$$

и системе, описывающей малые отклонения от сбалансированного роста (первое приближение по ε), которая согласно нашей гипотезе должна иметь периодические решения:

$$Y_1^U = I_1 - \frac{a_0}{\mu}[(\gamma+\mu)p_1 + \dot p_1],$$
$$\ldots \frac{1}{\gamma+\mu}\left[-(\sigma_0 - \gamma - \mu)\left[(\gamma+\mu)\frac{a_0}{\mu}p_1 + \frac{a_0}{\mu}\dot p_1\right]\right]$$
$$\frac{1}{b}Y_1^L + \left(\frac{1}{b} - \gamma - \mu\right)(p_1 - R_1^L),$$
$$\dot Y_1^L \ldots \frac{1}{b} - \gamma - \mu\Big)(Y_1^L \ldots p_1 - R_1^L), \tau_0^u\tau_1^u \ldots \frac{a_0}{\mu}p_1,$$

$$- \frac{\gamma}{b(\gamma+\mu)}(R_1^L - Y_1^L) + \gamma\left[-\frac{a_0}{\mu}\left(\frac{\sigma_0}{x_0} - \sigma_0 + \mu\right) + \right.$$
$$\left. - \frac{1}{b(\gamma+\mu)} - 1\right]p_1 + \frac{a_0\sigma_0}{\mu}\left[\frac{1}{x_0} - \frac{\gamma}{\gamma+\mu}\right]\dot p_1,$$
$$\dot Y_1^Z = -(\gamma+\mu)Y_1^Z + \left[\frac{\sigma_0 - \gamma - \mu}{z_0} + \gamma + \mu\right][I_1(t - \tau_0^l)$$
$$+ \mu)\tau_0^l\tau_1^l - \tau_0^l\dot\tau_1^l] - \frac{\sigma_0 - \gamma - \mu}{z_0}Y_1^U,$$
$$\dot R_1^Z = \gamma R_1^Z + \left[\frac{x_0}{y_0 z_0}\left(\frac{\sigma_0}{x_0} - \gamma\right) + \gamma\right][I_1(t - \tau_0^l) - \gamma\tau_0^l\tau_1^l$$
$$- \tau_0^l\dot\tau_1^l] - \frac{x_0}{y_0 z_0}\left(\frac{\sigma_0}{x_0} - \gamma\right)(Y_1^U + a_0 p_1),$$
$$\dot R_1 = -\gamma R_1 + \frac{\gamma}{(1/b + \sigma_0 - \gamma - \mu)}\left[\frac{1}{b}Y_1^L + (\sigma_0 - \gamma - \mu)Y_1^U\right],$$
$$\frac{z_0}{b} + \sigma_0 - \gamma - \mu + \frac{(1-\xi)\pi}{\xi p_0}\left(\frac{1}{b} + \sigma_0 - \gamma - \mu\right)\left(\frac{1}{b} - \beta - r_0\right) \times$$
$$\times \frac{1}{\gamma}\Big\}p_1 + (\ldots \sigma_0 - \gamma \ldots \mu)\left[1 \ldots \frac{(1-\xi)\pi}{\xi p_0}\right]Y_1^U =$$
$$= \frac{(1-\xi)\pi}{\xi p_0}\left[\frac{1}{b}Y_1^L - \frac{r_0}{\gamma}R_1\left(\frac{1}{b} + \sigma_0 \ldots \mu\right)\right]\Big\} -$$
$$- \frac{z_0}{b}Y_1^Z + \left(\frac{1}{b} - \beta - r_0\right)y_0 z_0 R_1^Z, \tag{3.37}$$
$$c_0\tau_0^l\{\dddot\tau_1^l + (2r_0 + \mu)\ddot\tau_1^l + r_0(r_0 + \mu)\dot\tau_1^l\} = b\ddot p_1(t - \tau_0^l) -$$
$$- \ddot p_1 e^{-(r_0+\mu)\tau_0^l} - b(r_0 + \mu - \beta)\ddot p_1(t - \tau_0^l) + [r_0 e^{-(r_0+\mu)\tau_0^l}$$
$$+ \left(\frac{1}{b} - \beta - r_0\right)c_0\Big]\dot p_1 - \left[b\mu\left(\frac{1}{b} - \beta - r_0\right)^2 \times\right.$$
$$\times \frac{(1 - e^{-r_0\tau_0^l})}{r_0} + r_0 b(\beta - \mu) + \left(\frac{1}{b} - \beta - r_0\right)c_0\Big]\dot p_1(t - \tau_0^l)$$
$$+ \left(\frac{1}{b} - \beta - r_0\right)\left[\left(\frac{1}{b} - \beta - r_0\right)b\mu e^{r_0\tau_0^l} - \right.$$
$$\left. - r_0 c_0\right][p_1 - p_1(t - \tau_0^l)].$$

Здесь использованы обозначения

$$\sigma_0 = I_0/Y_0^L, \; a_0 = 1 - (1 - \xi)e^{-\mu\tau_0^u}, \; x_0 = R_0^L/\nu Y_0^L,$$
$$y_0 = R_0^Z/\nu Y_0^Z,$$
$$z_0 = Y_0^Z/Y_0^L, \; \cancel{r_0 = 1/b - \beta - s\nu/bp_0} \quad c_0 = [e^{-\mu\tau_0^l} - s\nu/p_0]e^{-r\tau_0^l}.$$

Система (3.37) — это система линейных уравнений девятого порядка с отклоняющимся аргументом. Ее общее решение зависит от девяти произвольных функций, так что набор ее частных решений необозримо обширен [8]. Поэтому, чтобы получить какие-то конструктивные выводы, надо ограничиться каким-то разумным классом частных решений. Вспомним (см. разд. 2), что колебания в модели связаны с периодическим возникновением «горбика» в распределении мощностей по возрастам $m(t, \tau) = I(\tau)\,e^{-\mu(t-\tau)}$ и что новый «горбик» возникает при демонтаже предыдущего. Это наблюдение подсказывает, что искомое периодическое решение (3.37) должно иметь период τ_0^u — срок жизни фирмы при сбалансированном росте. Узкий и высокий «горбик» в распределении идеализированно можно описать как сингулярную компоненту (δ-функцию), входящую в состав этого распределения. Иначе говоря, мы будем искать обобщенное решение (3.37), для которого

$$I_1 = \tilde{I}_1(t) + i_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\tau_0^u), \tag{3.38}$$

где $\tilde{I}_1$ — непрерывная функция, а $i_0 > 0$ — относительная интенсивность возникающего в моменты $k\tau_0^u$ горбика [8], которую можно выбрать произвольно, так как система (3.37) линейна.

Отыскивая решение вида (3.38), мы предполагаем, что макроэкономические переменные, такие, как p_1, k_1, Y_1, и не содержат сингулярности, и являются кусочно-непрерывными функциями, а τ_1^l даже кусочно гладкой. Кроме I_1, сингулярную составляющую имеет только поток остаточного продукта Y_1^U. Наглядно процесс воспроизводства при наличии сингулярности («горбика») можно описать следующим образом. На интервале $((k-1)\tau_0^u, k\tau_0^u)$ «горбик» стареет и уменьшается вследствие выбытия. Он вносит конечный и непрерывно изменяющийся вклад в интегральные величины типа R, Y, R^L, R и т. д. Воспроизводство происходит непрерывно за счет создания мощностей $I_0 e^{\gamma t}(1 + \varepsilon\tilde{I}_1(t))d\tau$ и ликвидации мощностей $I_0 e^{\gamma(t-\tau_0^u)}(1 + \varepsilon\tilde{I}_1(t - \tau_0^u))d\tau$. При ликвидации «горбика» поток остаточного продукта Y^U резко (формально до бесконечности) возрастает, цена и срок службы τ^u вследствие этого скачком падают, поэтому вместе с «горбиком» мгновенно демонтируется и конечная часть непрерывного распределения мощностей. Возникшего остаточного продукта как раз хватает на воспроизводство нового «горбика» интенсивностью $\varepsilon I_0 i_0 e^{\gamma k\tau_0^u}$, так что в условии равновесия (3.6) после линеаризации по ε сингулярности I и Y^U точно компенсируют друг друга и сингулярности цены не возникает. Если подставить (3.38) в (3.37) и применить преобразование Фурье периодических обобщенных функций $\hat{f}(\nu)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f(\tau)\,e^{-i\nu 2\pi\tau/\tau_0^u}$, то из (3.37) получится алгебраическая система для фурье-образов неизвестных функций. Разлагая эти образы по обратным степеням целочисленного параметра преобразования ν, получаем ряд последовательно усложняющихся

[8] Абсолютная интенсивность, в силу (3.35), составляет $\varepsilon I_0 i_0 e^{\gamma k\tau_0^u}$.

линейных алгебраических систем для коэффициентов разложения [9]. Первая из этих систем разрешима всегда, а вторая только при условии

$$p_0 = (1 - \xi)\pi/\xi, \tag{3.39}$$

где p_0 находится из (3.36)

Это и есть искомое необходимое условие периодичности решений односекторной модели. Численные эксперименты подтверждают, что при выполнении (3.39) колебания затухают очень слабо. Из (3.39), (3.36) получается выражение для периода этих незатухающих колебаний через параметры модели

$$T = \tau_0^u = \frac{1}{\mu} \ln \left\{ \frac{(1-\xi)\pi}{\xi s\nu} [1 - b\mu - (1 - \xi)(1 - b\beta)] + (1 - \xi) \right\}.$$

Что же касается двухсекторной модели, то в ней, как показывают эксперименты, жесткого условия существования, видимо, нет. Возможность изменения межотраслевых пропорций дает дополнительную степень свободы, за счет которой незатухающие колебания с определенной амплитудой (автоколебания) возникают в широком диапазоне значений параметров модели.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность профессору А. А. Петрову за постоянное внимание к работе.

Abstract

The closed multisector model of the market economy is considered. It is based upon the description of the long-term planning procedure used by firms. Numerical experiments show that the model gives qualitative description of the business activity cycle phases. Results of the investigation of one-sector version of the model are also presented. They include conditions of appearence and explisit expression of the period of weakly damping oscillations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Оленев Н. Н., Поспелов И. Г.* Модель инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 163—173.
2. *Столерю Л.* Равновесие и экономический рост. М.: Статистика, 1974. 472 с.
3. *Аукуционек С. П.* Современные буржуазные теории и модели цикла: Критич. анализ. М.: Наука, 1984.
4. *Данишевский М. Г., Федоров С. А., Шананин А. А.* Агрегирование и понятие производственной мощности. М.: ВЦ АН СССР, 1988. 40 с.

[9] В силу крайней громоздкости мы эти системы не приводим. Как известно, асимптотика преобразования Фурье при $\nu \to +\infty$ определяется степенью гладкости прообразов, поэтому указанные системы фактически есть условия согласованности сингулярных компонент, скачков и скачков производных разных порядков у искомого решения системы (3.37)

5. Оленев Н. Н., Петров А. А., Поспелов И. Г. Модель процесса изменения мощности и производственная функция отрасли хозяйства // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 46—60.
6. Крутов А. П., Романко А. В. Влияние государственных расходов на характер развития рыночной экономики // Там же, С. 19—45.
7. Краснощеков П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ, 1983. 264 с.
8. Кришталь В. В. Производственная функция капиталоемкой отрасли хозяйства // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 60—77.

УДК 519.86

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИКИ: МОДЕЛЬ ОБЩЕСТВЕННОГО ВОСПРОИЗВОДСТВА В ПЛАНОВОЙ ЭКОНОМИКЕ

А. П. Крутов, А. А. Петров, И. Г. Поспелов

Название «системный анализ экономики» обозначает направление исследований, начатых в 1975 г. в Вычислительном центре АН СССР. Оно возникло как попытка подойти к решению некоторых проблем математической теории экономических систем.

Традиционно математическую экономику разделяют на микроэкономику и макроэкономику. В микроэкономике изучают поведение отдельных экономических агентов — производителей и потребителей — при заданных внешних условиях. В макроэкономике изучаются две классические задачи — экономического равновесия и экономического роста. Предметом теории экономического равновесия являются качественные свойства состояний экономики, в которой экономические агенты связаны товарно-денежными отношениями. Производственные возможности производителей и предпочтения потребителей считаются заданными. Из явного рассмотрения выпадает процесс изменения производственных мощностей и воздействие на него отношений экономических агентов. Теория экономического роста исследует процесс изменения производственных мощностей в постановке задачи об оптимальном росте. В модель включается явное описание технологических связей между экономическими агентами, но не описываются явным образом отношения агентов.

Задача об оптимальном росте формулируется как задача оптимального управления, множество допустимых значений функционала которой стеснено уравнениями, описывающими технологические связи. Неявно предполагается: отношения агентов таковы, что из всех возможных связей реализуются необходимые для оптимального роста. В неоклассической теории это оформлено в виде гипотезы: оптимальный рост проходит через последовательность локальных состояний равновесия. Гипотезу оправдывает экономическая интерпретация соотношений принципа максимума Понтрягина. Но опять-таки остаются явным образом не описанными отношения экономических агентов в процессе расширения производства.

К тому же заметим, что и в теории равновесия, и в теории роста результаты получают чаще всего при предположении, что товарно-денежные отношения суть чисто рыночные отношения. Неоклассическая интерпретация оптимального экономического роста справедлива только в случае совершенного рынка. Классические результаты микроэкономики относятся к экономическим системам в условиях совершенного рынка.

Оказывается, что ни теория экономического равновесия, ни теория экономического роста, ни обе они вместе не дают удовлетворительного описания процесса общественного воспроизводства. Системный анализ экономики возник как требование изучать процесс общественного воспроизводства в единстве, чтобы нащупать подходы к решению проблемы. Основан он на общих идеях политической экономии Маркса. Характер общественного воспроизводства определяется взаимодействием производительных сил и производственных отношений, свойственных изучаемой экономике. Следовательно, в математическом описании надо явным образом выделить основных экономических агентов и описать не только технологические связи, но и экономические механизмы регулирования процессов производства, обращения и потребления, так как в них воплощаются совокупные действия многочисленных экономических агентов. Таким образом можно получить замкнутое описание процесса воспроизводства. Надо стараться строить описания на возможно меньшем числе независимых гипотез. Для этого, во-первых, надо явно описывать особенности производственных процессов и технологических связей между ними, структуру собственности, кредитно-финансовой системы, системы обменов и распределения, регулирующих производство и обращение, а также процессы воспроизводства трудовых ресурсов. Во-вторых, надо стараться выводить макросоотношения из исходных микроописаний процессов и отношений в экономике. Результаты исследования моделей обязательно надо сравнивать с качественными особенностями наблюдавшейся эволюции моделируемой системы.

Таковы основные декларации системного анализа экономики. Не все пока удается воплотить в конкретных исследованиях. Представление о состоянии системного анализа экономики [1] можно получить из [1, с. 7—196]. Отметим только, что в основном до сих пор изучалась рыночная экономика при предположении, что рынки совершенно конкурентны. В этой статье мы представим первые результаты исследования противоположной системы — предельно централизованной плановой экономики.

[1] Кстати, надо отметить, что системный подход к описанию экономики содержится в работе [2].