соответствующей точному решению уравнения (8.1).

Анализ (8.4)—(8.6) показывает, что в заданной области $G = X \times T$ использование даже незначительного количества дополнительных априорных данных (см. табл. 2) позволяет вдвое уменьшить объем семейства о.и.к., практически не ухудшив результирующую точность интегрирования уравнения (8.1).

Заключение

Развитый в статье подход позволяет с наиболее общих позиций подойти к построению обобщенных интерполяционных структур, приближающих с заданной точностью искомые решения интегрируемых дифференциальных уравнений. Он является естественным обобщением известных методов о.и.к. [1] и о.и.п. [2] на случай, когда помимо основной априорной информации о выборочных значениях семейства опорных частных решений имеется или может быть получена дополнительная информация о значениях производных от этих решений по независимым аргументам, начальным и граничным условиям, а также вспомогательным параметрам.

Введенные в зависимости от полноты априорной информации основные классы приближенных аналитических решений задаются таблицами чисел, которые в виде массивов данных могут храниться в памяти ЭВМ. Это указывает на то, что развитый подход к интегрированию дифференциальных уравнений хорошо согласуется с возможностями существующей вычислительной техники.

Основными направлениями дальнейшего совершенствования предложенного подхода следует считать разработку и применение новых обобщенных интерполяционных структур для многомерных задач, формирование эффективных в вычислительном плане алгоритмов получения дополнительной априорной информации об о.и.к. и о.и.п. и нахождение удобных расчетных формул для обоснования выбора узлов интерполяции и оценки результирующих погрешностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булычев Ю. Г.* Метод опорных интегральных кривых решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 10. С. 1482—1490.
2. *Булычев Ю. Г.* Методы численно-аналитического интегрирования дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 9. С. 1305—1319.
3. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
4. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. М.: Наука, 1966. Т. 1.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
6. *Тихонов А. Н., Васильева А. В., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 27.11.91

Том 34, 1994 № 4

УДК 519.85

© 1994 г. Н. Н. МОИСЕЕВ

(Москва)

БИОТА КАК РЕГУЛЯТОР И ПРОБЛЕМА SUSTAINABILITY

Обсуждается проблема устойчивости в применении к биотическим процессам. На примерах модели взаимозависимости объема фитомассы от концентрации углекислоты в атмосфере, энерго-балансовой модели климата Будыко и др. развивается понятие стабильности нестационарного квазиравновесного решения изучаемых систем. Обсуждается принцип Ле-Шателье и механизмы обратных связей для обеспечения стабильности биосферы.

§ 1. Предварительные замечания

1. Биота является удивительным регулятором, способным поддерживать состояние биосферы или ее отдельных составляющих, содержащих элементы биотической природы, в относительно жестких пределах несмотря на то, что разнообразные внешние воздействия (космического, вулканического, антропогенного или иного происхождения) могут достигать катастрофических масштабов. Регуляторные свойства природы, как и сами механизмы регуляции, весьма разнообразны. Но все они так или иначе реализуют отрицательные обратные связи, поддерживающие состояние системы. Особенность развития биосферы и ее фрагментов состоит еще и в том, что наряду с механизмами, поддерживающими ее состояние в определенных пределах, существуют механизмы и типа положительной обратной связи. Именно последним биосфера обязана своим постоянным развитием — ростом биотического разнообразия и сложностью организации вещества.

Особое значение имеет изучение свойств биосферы как единого целого, функционирование которого сочетает оба типа механизмов. Однако такое изучение неотделимо от исследования свойств отдельных фрагментов биосферы и тех локальных механизмов, которые определяют ее функционирование как единой системы. Особое место в подобной программе занимает построение и рассмотрение соответствующих математических моделей, которые становятся практической основой такого исследования.

2. Изучение общих свойств биотических систем математическими методами затруднено по ряду причин. Прежде всего даже выделение того или иного объекта исследования не является тривиальным, поскольку он всегда представляет собой некоторый элемент системы более высокого уровня и мы должны быть уверены в том, что ее реакция на поведение изучаемого объекта будет пренебрежимо мало сказываться на его состоянии и поведении.

В отличие от физических или технических систем, понятие *состояние биотической системы* определяется далеко не единственным образом и существенно зависит от цели исследования, т. е. от постановки задачи исследователем.

В теории динамических систем и теории управления важное место занимают понятия *невозмущенная траектория*, *цель управления* или *цель регулирования*, т. е. то состояние объекта, которого желательно достичь в процессе регулирования. В природных системах оно чаще всего не задается априори, а является результатом процесса синергетической природы, т. е. результатом процесса самоорганизации.

Понятие устойчивости, широко используемое в математической физике и теории управления, плохо (точнее, недостаточно) приспособлено для анализа биотических процессов, поскольку последние практически всегда неустойчивы. Кроме того, природные системы являются развивающимися и влияние внешних возмущений на характер развития представляет для исследователя особый интерес. Здесь уже бывает трудно выделить объект, именуемый невозмущенной траекторией, и использовать традиционное понятие устойчивости. Благодаря этому возник его аналог — понятие *sustainability*. Однако оно не является формальным и в каждом конкретном случае требует собственной интерпретации, раскрывающей те или иные особенности изучаемых процессов.

3. В основе любых процессов регулирования лежит представление о механизме обратной связи. Широкий класс таких механизмов реализует принцип Ле-Шателье. Этот класс механизмов является следствием законов сохранения и других законов физики и химии, которые для данной конкретной системы способны обеспечить тот или иной режим поддерживаемого равновесия в том случае, когда внешние возмущения лежат в некоторых ограниченных пределах. Во многих природных системах, обладающих подобными механизмами, свойства sustainability допускают достаточно простую интерпретацию и для их исследования может быть использован известный математический аппарат теории устойчивости и теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Но такие механизмы не исчерпывают многообразия этих методов.

4. Однако в природных (прежде всего биотических) системах могут возникнуть петли обратной связи, которые, не противореча законам физики или химии, в то же время и не являются их непосредственным следствием. Оказываясь чисто системным свойством, такие механизмы, такие системы порождаются неизбежно присутствующей стохастикой (флуктуациями, мутациями, неточностями редупликации и т. д.). В этих случаях даже сама интерпретация поддерживаемого равновесия становится достаточно сложной. Сказанное будет проиллюстрировано двумя группами примеров, представляющих самостоятельный интерес при изучении биосферы.

§ 2. Биота как регулятор биосферных процессов

1. Рассмотрим простейшую модель взаимозависимости объема фитомассы биоты G от концентрации углекислоты p в атмосфере. Обозначая через P количество углекислоты, поступающей в атмосферу в единицу времени, можно записать следующее балансовое соотношение:

$$dp/dt = cP - b_p p - \Phi(G). \tag{1}$$

Здесь c — некоторая постоянная, $b_p p$ определяет поглощение углекислоты океаном, коэффициент b_p положителен при температурах, меньших некоторого критического значения T_1, $\Phi(G)$ описывает поглощение углекислоты биотой (растениями); $\Phi(G)$ — вогнутая функция, которая может быть аппроксимирована степенной зависимостью вида G^s, где $s < 1$.

Изменение фитомассы можно описать обычным демографическим уравнением:

$$dG/dt = F(p)\,G - fG. \tag{2}$$

Коэффициент рождаемости $F(p)$ — монотонно возрастающая функция концентрации p. Коэффициент смертности условимся считать постоянным.

При сделанных предположениях система уравнений (1), (2) имеет единственное стационарное решение

$$cP = b_p\overline{p} + \Phi(\overline{G}), \qquad F(\overline{p}) = f. \tag{3}$$

Решения уравнений (3) обладают асимптотической устойчивостью. Для того чтобы в этом убедиться, положим

$$p = \overline{p} + y, \qquad G = \overline{G} + z. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1) и (2) и сохраняя линейные члены, получаем

$$dy/dt = -b_p y - b_g z, \qquad dz/dt = ey,$$

$$b_g = (d\Phi/dG)_{G=\overline{G}}, \qquad e = (dF/dp)_{p=\overline{p}},$$

причем обе величины положительны. Таким образом,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{b_p}{e}\,\frac{dz}{dt} + b_g z = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) описывает колебание маятника с трением, откуда следует, что стационарное решение $\overline{p}$, $\overline{G}$ асимптотически устойчиво. Рассмотренный пример показывает, что в тех моделях, где существуют стационарные решения, в качестве интерпретации понятия sustainability может быть использовано понятие устойчивости, которое несет важную практически информацию о свойствах этого решения.

В системе фитомасса — углекислота атмосферы принцип Ле-Шателье реализован в своей классической форме, и он, как мы видели, является следствием законов сохранения, записываемых в форме (1) и (2).

2. Предположим теперь, что величина P вследствие антропогенных выбросов углекислоты будет медленно возрастающей функцией времени:

$$P = P(\varepsilon t),$$

где ε — некоторый малый параметр.

Теперь понятие устойчивости использовать довольно сложно, поскольку даже выбор невозмущенного решения представляет определенную трудность, не говоря уже о методах исследования устойчивости нестационарных движений. Но в этом случае может быть использована техника анализа теории сингулярных возмущений, основанная на теореме Тихонова из [1], поскольку исследователя интересует прежде всего поведение системы на некотором конечном интервале времени.

Сделаем стандартную замену независимого переменного:

$$\tau = \varepsilon t.$$

Тогда уравнения (1) и (2) перепишутся в следующем виде:

$$\varepsilon\frac{dp}{d\tau} = P(\tau) - b_p - \Phi(G), \qquad \varepsilon\frac{dG}{d\tau} = F(p)\,G - fG. \tag{7}$$

Решение задачи Коши

$$p(0) = p_0, \qquad G(0) = G_0$$

для системы (7), согласно теореме Тихонова, на временно́м интервале порядка $t = O(\varepsilon^{-1})$ может быть представлено в виде суммы:

$$p = p^* + y + O(\varepsilon), \qquad G = G^* + z + O(\varepsilon),$$

если y и z — асимптотически устойчивые решения системы (5), а p^* и G^* — изолированное решение системы уравнений

$$P(\tau) - b_p p - \Phi(G) = 0, \qquad F(p) - fG = 0$$

при условии, что значения $y(0)$ и $z(0)$ достаточно мало отличаются от величин $p(0) - p^*(0)$ и $G(0) - G^*(0)$.

В нашем случае эти условия выполнены. Функции p^* и G^* будут монотонно возрастающими функциями времени, если этим свойством обладает внешнее возмущение $P(\tau)$. Качественная картина поведения решений исходной системы представлена на фиг. 1.

Функции e и z в этом случае называются функциями пограничного слоя.

Итак, если природная система описывается уравнениями вида

(8) $\qquad dx/dt = X(x, \tau t),$

а уравнение

$$X(x, \varepsilon t) = 0$$

имеет изолированное решение $x = x^*(\varepsilon t)$, то оно может быть принято в качестве базового, или невозмущенного, а sustainability системы (8) может быть описано функциями пограничного слоя, причем функция x^* и будет описывать sustainable development системы (8).

3. Можно предложить целый ряд обобщений предлагаемой схемы анализа sustainability. Существует множество практически важных проблем, для решения которых предлагаемая трактовка этого понятия вполне соответствует целям исследования. Остановимся лишь на одном показывающем возможности предлагаемого подхода примере, который имеет и самостоятельный интерес для исследования процессов биосферного масштаба.

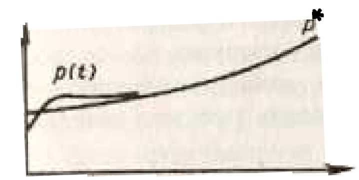
Все рассуждения о роли биоты в регулировании концентрации углекислоты основывались на предположении о неизменности средней температуры биосферы. В действительности она меняется под воздействием ряда факторов. Прежде всего — парниковый эффект, вызываемый увеличением концентрации углекислоты, изменение среднего альбедо, изменение структуры растительного покрова и многие другие факторы. Поэтому для более подробного анализа необходимо привлечь еще и модель климата.

Простейшей моделью такого рода является нульмерная модель М. И. Будыко. Она имеет следующий вид:

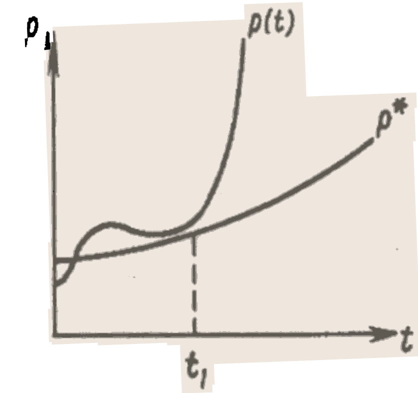
[redacted] $$\frac{dT}{dt} = \frac{S}{4}(1 - \alpha) - A - BT.$$

Здесь T — средняя температура атмосферы, S — средний поток солнечной энергии, α — среднее альбедо, A и B — некоторые эмпирические коэффициенты, впервые определенные Будыко в 1962 г.

Величина $A + BT$ определяет тепловое излучение планеты. Коэффициенты A



Фиг.



Фиг. 2

и B зависят от концентрации углекислоты (и других парниковых газов, в том числе метана и паров воды) в составе атмосферы и являются монотонно убывающими функциями концентрации $p(t)$.

Если считать величину P медленно изменяющейся функцией времени и применить использованный выше формализм, то можно принять

(10) $\qquad T = T^*(\varepsilon t) + x + O(\varepsilon), \quad p = p^*(\varepsilon t) + y + O(\varepsilon),$

$$G = G^*(\varepsilon t) + z + O(\varepsilon),$$

где T^*, p^*, G^* описывают квазиравновесное состояние биосферы, а x, y и z — функции пограничного слоя. Заметим, что, согласно (9), T^* — возрастающая функция времени, поскольку этим свойством будет обладать и p^*; поэтому величины A и B суть убывающие функции p^*, а следовательно, и времени. Но с увеличением средней температуры коэффициент поглощения углекислоты океаном b_p будет убывать, и при некотором значении $T(t) = T_1(t_1)$ он обратится в нуль, а затем изменит знак. Представление (10) потеряет свою силу, а система атмосфера — океан — биота потеряет свойство sustainability, т. е. свое sustainable development. Структура решений качественно изменится и будет иметь вид, изображенный на фиг. 2. Представление (10) будет иметь место при $t < t_1$, а при $t = t_1$ система потеряет свойство sustainability.

4. Рассмотренные примеры показывают, что представление системы в качестве сингулярно возмущенной значительно легче использовать при изучении свойств нестационарных решений, нежели традиционное понятие об устойчивости. Более того, оно и более полно отражает свойства системы, интересующие исследователя, в том числе и временной интервал, на котором обеспечивается стабильность нестационарного, квазиравновесного решения.

Однако и такое более широкое представление о стабильности (о sustainability) не является универсальным и далеко не всегда может быть использовано, даже если система хорошо формализована. Примером тому могут быть исследования взаимодействия биоты и климатических факторов, когда использование примитивных (так называемых нульмерных) моделей климата не несет достаточной информации и приходится работать с уравнениями гидротермодинамики атмосферы и океана [3]. Для того чтобы на их основе построить компьютерную модель, необходимо тем или иным способом получить их ...

модель), либо конечно-разностные аппроксимации по пространственным координатам. В любом случае можно свести задачу к исследованию многомерной системы вида

$$dx/dt = X(x, P(\varepsilon t)),$$

где x — вектор, описывающий состояние системы (либо коэффициенты фурье-разложения в спектральной модели, либо значения гидротермодинамических величин в узлах сетки), P — вектор антропогенной нагрузки (в частности, количество выбрасываемой углекислоты). Для того чтобы использовать технику сингулярных возмущений, необходимо уметь находить решение системы

$$X(x, p) = 0.$$

Но система эта, как правило, не имеет решений вида

$$x = f(P),$$

поскольку уравнения динамики атмосферы вообще не имеют стационарных решений при $P = \text{const}$.

Замечание. Более точно: уравнения, которые в рамках теории Навье — Стокса описывают движение шарового слоя гравитирующей жидкости на вращающемся шаре, допускают единственное стационарное решение — квазитвердое вращение. Но оно неустойчиво.

Таким образом, теория сингулярных возмущений, а следовательно, и описанная интерпретация понятия sustainability в данной ситуации не могут быть использованы. Однако это понятие сохраняет смысл (и представляет интерес для исследователя) и в данном случае, если мы будем иметь в своем распоряжении систему уравнений, усредненную по времени. Ниже используется нульмерная климатическая модель Будыко, в которой рассматриваются параметры, усредненные по пространству. К сожалению, построить модель эволюции климатических характеристик, усредненную по времени для достаточно общих (трехмерных или даже двумерных) уравнений гидротермодинамики, пока мы не умеем.

5. В заключение этого параграфа обратим внимание на два обстоятельства. Во-первых поддерживаемое равновесие (sustainabilite) системы атмосфера — океан — биота обеспечивается, по-видимому, очень тонким согласованием множества факторов. Эта особенность проявляется, в частности, в том, что включение в систему новых звеньев (новых факторов) может качественно менять свойства равновесия.

Так, например, состояние равновесия в нульмерной модели Будыко всегда асимптотически устойчиво. Однако учет (в линейном приближении) образования ледникового покрова делает равновесие неустойчивым. Включение нелинейных членов и конвективного переноса тепла (замена нульмерной модели Будыко одномерной моделью Селлерса [4]) показывает существование устойчивых режимов лишь при достаточно низких температурах. Это значит, что, начиная с некоторого момента t_1, система уже не будет обладать поддерживаемым равновесием.

Во-вторых, включение биотических звеньев возвращает стабильность системе, описываемой уравнениями нульмерной модели, и при более низких температурах, а использование трехмерных моделей динамики атмосферы, океана и биоты вообще исключает существование стационарных режимов и позволяет говорить лишь о дрейфе почти периодических режимов, для прямого изучения которых эффективных методов пока не разработано.

Вот почему любые категоричные утверждения

сферы и характере ее эволюции под действием антропогенных факторов следует делать крайне осторожно, и поэтому программа изучения проблемы sustainable development биосферы и ее составляющих, обсуждаемая Международным институтом системного анализа в Вене (JJASA), представляется очень важной.

Ранее рассматривались лишь те регулирующие возможности биоты, которые следуют из законов сохранения. При этом в качестве критериев равновесности использовалось представление о близости процесса развития (в том или ином смысле) к некоторому избранному.

Но биота обладает и качественно иными способами стабилизации и своего развития, и изменения окружающей среды, которые связаны с сохранением целостности системы или ее частей. Они способны самым существенным образом изменить все представления о содержании проблемы обеспечения sustainible development систем биотической природы и уже не имеют никакого отношения к принципу Ле-Шателье.

§ 3. Неточности воспроизведения как один из механизмов обеспечения sustainability

1. Выше было показано, что в рамках используемых моделей системы атмосфера — климат — биота возникающие обратные связи являются прямыми следствиями законов сохранения и, следовательно, можно говорить о том, что в рассмотренных системах реализуется принцип Ле-Шателье.

Цель данного параграфа — показать на простом примере, как под действием факторов чисто стохастической природы возникают механизмы обратной связи, обеспечивающие стабильность (но совсем в ином смысле) системы, способной к воспроизведению (т. е. к редупликации). В качестве стохастических факторов будут рассматриваться неточности редупликации, возникающие вследствие флуктуаций, неизбежно присутствующих в процессах самовоспроизведения. Частным примером таких неточностей являются мутации в системах биотической природы.

Ниже будет показано, что неточность редупликации не только формирует механизм обратной связи, но и способна превратить совокупность отдельных элементов в некоторую систему взаимосвязанных элементов, когда изменение одного из них может влиять на судьбу остальных. Указанные свойства самовоспроизводящихся систем будут сначала продемонстрированы на простом примере системы с дискретным числом состояний. Затем будет изложена обобщающая этот пример континуальная модель.

Оказывается, что механизмы, возникающие вследствие действия стохастических факторов, способны поддерживать целостность системы и быть источником роста разнообразия, а следовательно, и сложности изучаемой системы.

2. Обозначим через $x_s(t)$ состояние элемента (например, его биомассу) некоторой совокупности $\{x_s(t),\ s = 1, 2, \ldots, N\}$. Ее элементы $\{x_s(t)\}$ неотрицательны и не тождественны между собой. Их индивидуальная (генетическая) особенность отмечена индексом s. Она порождает некоторое свойство n_s, определяющее характер взаимодействия элемента с внешней средой. Предполагается, что элементам $x_s(t)$ свойственно самовоспроизведение, неточность которого превращает рассматриваемую совокупность элементов в систему.

Предположим, что редупликация происходит в дискретные моменты времени, разделенные интервалами длительностью τ. Рассмотрим один цикл редупликации. Закон сохранения (балансовое соотношение) будем писать в следующей форме:

$$x_s(t_0 + \tau) = x_s(t_0) - f_s(\|\xi - n_s\|,\ x_s(t_0)) + F_s(x_1(t_0), \ldots, x_N(t_0)), \qquad (11)$$

неотрицательны. Если какая-либо из величин $x_s(t + \tau)$ в (11) окажется отри-
тельной, то положим ее равной нулю.

Соотношение (11) — специальный случай демографического уравнения, в ко-
ром слагаемое f_s описывает уменьшение биомассы элемента x_s (его смертность,
бытие, банкротство) вследствие воздействия внешней среды, особенности ко-
рой описываются вектором ξ. Будучи положительным, это слагаемое тем
льше, чем больше норма $\|\xi - n_s\|$, характеризующая несоответствие особенностей
емента x_s условиям внешней среды. В простейшем случае

$$f_s = a_s \|\xi - n_s\| x_s,$$

a_s — некоторая константа.

Вследствие неизбежных флуктуаций редупликация не может быть абсолютно
ной. Поэтому каждый элемент системы x_s порождает элементы не только
адающие свойством n_s, но и другие, со свойствами, отличными от n_s. Поскольку
окупность $\{x_s(t)\}$ дискретна, то в результате неточности самовоспроизведения
ут возникать лишь элементы, принадлежащие той же самой совокупности.
т факт и отражает последнее слагаемое в (11). В простейшем случае имеем
ейные зависимости

$$F_s\,[x_1(t_0), \ldots, x_N(t_0)] = \sum_k b_{sk} x_k(t_0).$$

ффициенты b_{sk} при $s \neq k$ естественно назвать *мерой неточности редупликации*.

Итак, в простейшем случае процесс редупликации может быть описан сле-
щим конечно-разностным уравнением:

$$x_s(t_0 + \tau) = x_s(t_0) - a_s \|\xi - n_s\| x_s(t_0) + \sum_k b_{sk} x_s(t_0),$$

$$k, \ s = 1, 2, \ldots, N.$$

равнения (11) и (12) превращают исходную совокупность $\{x_s\}$ в систему
мосвязанных элементов. Заметим, что, в силу условия неотрицательности,
икающие связи нелинейны даже в том случае, когда соотношения (12)
йны.

. Система уравнений (12), так же как и уравнения (11), при известных
виях реализует отрицательную обратную связь, поддерживающую целостность
витие (sustainability) изучаемой системы $\{x_s(t)\}$ при изменении характеристик
ней среды (в нашем случае — вектора ξ). Для того чтобы в этом убедиться,
мотрим ситуацию, когда $x_k(t_0) = 0$ для всех k, отличных от s. Тогда система
нений (12) примет вид

$$x_s(t_0 + \tau) = x_s(t_0) - a_s \|\xi - n_s\| x_s(t_0) + b_{ss} x_s(t_0),$$

$$x_k(t_0) = b_{ks} x_s(t_0),$$

трицательны.

редположим, что в момент $t = t_0$ состояние внешней среды (например, тем-
ура) изменилось, причем так, что норма $\|\xi - n_s\|$ сделалась настолько
ой, что величина $x(t_0 + \tau)$, вычисленная по формуле (13), оказалась
ательной. Согласно условию неотрицательности, тогда нужно принять

$$x_s(t_0 + \tau) = 0.$$

о это не означает, что в системе $\{x_k(t)\}$ уже не бу

свойством n_s. В самом деле, в силу неточности редупликации он снова появится
уже в следующем ее цикле:

$$x_s(t_0 + 2\tau) = \sum_k b_{sk} x_k(t_0 + \tau) = \sum_k b_{sk} x_s(t_0).$$

Кроме того, в момент времени $t_0 + \tau$ суммарная биомасса системы S

$$S(t_0 + \tau) = \sum_k x_k(t_0 + \tau) = \sum_k b_{ks} x_s(t_0)$$

может стать большей, чем $S(t_0) = x_s(t_0)$.

Таким образом, рассматриваемая система обладает механизмом отрицательной обратной связи, которая при изменении внешних условий сохраняет элементы системы и ее целостность. Одновременно она способна обеспечивать и рост некоторых функционалов. Другими словами, она обладает свойствами, которые охватываются понятием sustainability по отношению к указанным свойствам системы.

Заметим, что обратная связь в данном примере реализовалась за счет перестройки самой структуры системы, т. е. за счет изменения пропорций элементов, обладающих теми или иными свойствами.

При увеличении меры неточности редупликации растет и область допустимых изменений характеристик внешней среды, при которых система может быть сохранена. В то же время «эффективность» системы, если ее понимать, например, в терминах производства биомассы, будет уменьшаться с увеличением меры неточности редупликации при стационарных внешних условиях.

4. Дискретные модели (11) и (12) получаются путем конечно-разностной аппроксимации модели, описываемой дифференциальными уравнениями

$$dx_s/dt = -f_s(\|\xi - n_s\|)\,x_s + F\{x_1, \ldots, x_N\}, \qquad s = 1, 2, \ldots, N,$$

или в линейном случае

(12′) $$dx_s/dt = -a_s \|\xi - n_s\| x_s + \sum_k b_{sk} x_k.$$

В случае системы (12′) отождествление свойства sustainability с классическим понятием устойчивости или понятием пограничного слоя теории сингулярных возмущений в общем случае неправомочно, поскольку уравнение

(14) $$\|\xi - n_s\| x = \sum_k b_{sk} x_k$$

в общем случае не имеет нетривиальных решений. Они возникают лишь тогда, когда одно из чисел

$$\mu = \|\xi - n_s\|, \qquad s = \ 2, \ \ , N,$$

окажется равным собственному значению λ_n матрицы уравнения (14). Для анализа возникающей здесь ситуации уже недостаточно линейной аппроксимации и следует использовать нелинейную систему (12′) и изучать характер ее ветвлений в окрестности значений

(15) $$\mu_s = \lambda_n.$$

В окрестности значений μ_s, удовлетворяющих условию (15), говорить о свойстве sustainability уже нельзя в принципе: организация системы в окрестности значения

$\mu_s = \lambda_n$ претерпевает качественное изменение и возникают структуры, которые могут быть отделены друг от друга непреодолимыми барьерами.

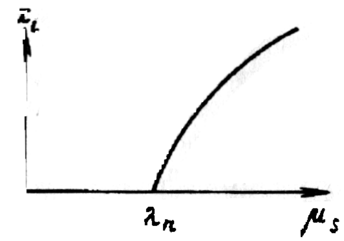
Для отыскания стационарных решений $x_k(\mu_s)$ можно использовать стандартные методы малого параметра, согласно которым решения разыскиваются в виде рядов:

$$x_i = x_{i0} + \varepsilon x_{i1} + \varepsilon^2 x_{i2} + \ldots, \qquad \varepsilon = \mu_s - \lambda_n.$$

В нулевом приближении получаем систему (14). Если кратность собственного значения равна единице, то решения имеют вид

$$x_{i0} = C\bar{x}_{i0},$$

где C — произвольная постоянная, определяемая из условия разрешимости уравнений следующего приближения. Характер ветвлений стационарных решений показан на фиг. 3. Аналогично строятся стационарные решения и в случае кратных собственных значений.



Фиг. 3

Если все величины μ_k меньше минимального собственного значения, то система (12) имеет лишь нулевое стационарное решение. Оно может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Тем не менее на некотором отрезке времени оно обладает свойством sustainability, понимаемым как свойство сохранения целостности. Если тривиальное решение устойчиво, то биотический регулятор, поддерживая целостность системы, не может противостоять ее «целостному уничтожению», например вымиранию. Если тривиальное решение уравнения (12) неустойчиво, то система будет развиваться и однажды, может быть, выйдет на стационарный режим уравнения (11), если оно его допускает. В окрестности собственного значения могут существовать уже несколько стационарных решений, среди которых будут как устойчивые, так и неустойчивые. Все сказанное остается справедливым и для них.

Итак, сохранение целостности системы и ее устойчивости суть очень разные понятия, характеризующие различные особенности саморазвивающихся систем. В совокупности они позволяют нарисовать картину саморазвития представленной системы: стационарные состояния образуют как бы ветвящееся дерево — «аттракторный скелет» развития. Состояние системы приближается к той или иной ветви этого скелета. Однако, в силу вероятностного характера редупликации, система будет сохранять свою целостность, т. е., не распадаясь, подстроит структуру под внешние условия.

5. Рассмотрим теперь континуальную модель, частным случаем которой является дискретная модель, описанная выше. Обозначим через $x(t, s)$ плотность вещества, имеющего свойство n_s, а закон сохранения условимся писать в виде

∂x

Здесь ω — некоторое допустимое множество в пространстве «генетических» параметров s; функция $\varphi(t, n_s, n_k)$ характеризует интенсивность индуцирования (производства) элементов, обладающих свойством n_s, элементами со свойствами n_k; функция f_s описывает интенсивность выбытия (если $f_s < 0$) или развития (если $f_s > 0$); ξ — вектор внешних воздействий. Его должен задавать некий сценарий

$$\xi = \xi(t),$$

который может быть и случайным процессом.

В число характеристик системы можно включить и возраст τ элементов (организмов, надорганизменных структур, организаций и т. д.). Так как $d\tau/dt = 1$, то в уравнение (16) надо внести некоторые изменения. Теперь оно будет выглядеть следующим образом:

$$(17) \qquad \partial x/\partial t + \partial x/\partial\tau = -f_s(x_s(t, s, \tau), \xi).$$

К этому уравнению должны быть добавлены «условия рождаемости», представляющие собой необходимое граничное условие

$$(18) \qquad x(t, s, 0) = \int_0^{T^*}\int_\omega F_\omega(x(t, c, \tau),\ \varphi(s, c, \tau), \xi)\, dc\, d\tau,$$

где T^* — предельный срок существования элемента $x(t, c, \tau)$.

Нетрудно убедиться, что модели (16) и (17), (18) обладают теми же свойствами sustainability, которые были обнаружены на примере системы (11).

6. Способность усваивать внешнюю энергию и материю, т. е. реализовывать процесс метаболизма и самовоспроизведения (редупликации), считалась долгое время прерогативой только живого вещества. Однако Эйген в конце 60-х годов показал, что такой способностью могут обладать и биологические макромолекулы. Для этого явно косного вещества в работе [5] построены модели метаболизма и редупликации. В то же время свойство сохранения гомеостазиса, которым обладает любое живое вещество, не является непосредственным следствием законов сохранения, хотя, разумеется, им и не противоречит. Структура возможных механизмов, приводящих к появлению обратных связей, оставалась неясной.

Приведенный пример показывает, что для возникновения механизма обратной связи в системах, обладающих свойством самовоспроизведения, которое поддерживает ее функционирование при изменении внешних условий, достаточно существования ошибки редупликации. Для обеспечения стабильности развития в зависимости от степени изменения внешних условий ошибка редупликации должна превосходить тот или иной порог.

Поскольку самовоспроизведение, как показал Эйген, свойственно и некоторым формам организации косной материи, то и возникновение отрицательных обратных связей, поддерживающих гомеостазис (свойство sustainability в частности), по-видимому, не является исключительной прерогативой живого вещества.

7. Изложенная схема рассуждений и рассмотренный пример позволяют думать, что появление и других, более сложно организованных систем обратных связей может найти свою интерпретацию в рамках той совокупности эмпирических обобщений, которые составляют основу схемы *универсального эволюционизма*

типичным проявлением «алгоритмов сборки», т. е. превращения совокупности элементов в систему. В самом деле, свойство sustainability не следует из свойств элементов, составляющих систему. Причины превращения совокупности элементов в систему определяются теми связями, которые существуют или возникают между элементами в результате действия системообразующих факторов. В данном случае таким фактором является стохастика, благодаря которой сборки реализуются с помощью неточной редупликации.

Никакие другие связи между элементами не рассматривались, и связи эти возникали только в результате присутствия одного стохастического фактора — неточности самовоспроизведения.

Количество элементов, обладающих различными генетическими свойствами s в исходном множестве, было фиксированным (число N). Поэтому в воспроизводимом множестве в результате редупликации возникали лишь элементы, тождественные тем, которые были в исходной совокупности. Если же число различных генетических свойств заранее не фиксировано, то в процессе редупликации будут возникать элементы, обладающие все новыми и новыми свойствами. Таким образом, описанный механизм обладает еще одним важным свойством: он содействует росту разнообразия элементов, а следовательно, и росту сложности системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Матем. сб. 1952. № 3. С. 575—586.
2. *Будыко М. И.* Тепловой баланс земного шара. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
3. *Моисеев Н. Н., Александров В. В., Тарко А. М.* Человек и биосфера. М.: Наука, 1985.
4. *Sellers W. D.* A two dimensional global climatic model // Month. Weath. Rev. 1976. V. 104. № 3. P. 233—284.
5. *Eigen M.* Selforganization of matter and the evolution of biological macromolecules. N. Y., 1971.
6. *Моисеев Н. Н.* Алгоритмы развития. М.: Наука, 1987.
7. *Моисеев Н. Н.* Универсальный эволюционизм // Вопр. философии. 1991. № 3. С. 3—29.

Поступила в редакцию 27.09.93

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 34, 1994

УДК 519.853.3

© 1994 г. А. Б. ПИУНОВСКИЙ

(*Москва*)

ЗАДАЧА ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрена задача выпуклого программирования в абстрактном линейном пространстве, и доказана ее принципиальная алгоритмическая разрешимость при некоторых дополнительных ограничениях. Показано, что предложенные методы могут быть полезными для решения задач стохастического оптимального управления.

§ 1. Вспомогательные результаты и постановка задачи

Пусть X — линейное пространство, B — его выпуклое подмножество. Рассмотрим задачу математического программирования

$$F(x) \to \min, \quad x \in B, \tag{1.1}$$

$$H_n(x) \le 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \tag{1.2}$$

где F, H_n — выпуклые функционалы со значениями на $\mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$.

Услсвие 1. Существует такая точка $\hat{x} \in B$, что $H_n(\hat{x}) < 0$, $n = 1, 2, \dots, N$ (условие Слейтера).

В дальнейшем условие 1 считается выполненным; нам будет удобно считать, что оно выполнено, также в случае $N = 0$, $B \ne \varnothing$.

Необходимые и достаточные условия оптимальности точки $x^* \in B$ дает известная теорема Куна — Таккера [1], [2].

Теорема 1. *Для оптимальности точки $x^* \in B$, удовлетворяющей неравенствам* (1.2), *необходимо и достаточно существования покомпонентно неотрицательного вектора $y^* \in \mathbb{R}_+^N$, для которого выполнено одно из следующих двух эквивалентных утверждений:*

1) *пара (x^*, y^*) является седловой точкой функции Лагранжа*

$$L(x, y) = F(x) + \sum_{n=1}^{N} y_n H_n(x): \quad L(x^*, y) \le L(x^*, y^*) \le L(x, y^*);$$