18. *Samuelson P.* A note on the pure theory of consumer's behaviour // Ibid. 1938. Vol. 5, N 17. P. 61—71.
19. *Houthakker H. S.* Revealed preference and the utility function // Ibid. 1950. Vol. 17, N 66. P. 159—174.
20. *Kihlstrom R., Mas-Colell A., Sonnenschein H.* The demand theory of the weak axiom of revealed preference // Econometrica. 1976. Vol. 44, N 5. P. 971—978.
21. *Afriat S. N.* The construction of utility functions from expenditure data // Intern. Econ. Rev. 1967. Vol. 8, N 1. P. 67—77.
22. *Шананин А. А.* К равновесной теории агрегирования. М.: ВЦ АН СССР, 1986. 40 с.
23. *Рашевский П. К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 355 с.
24. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188 с.
25. *Шананин А. А.* Об агрегации функций спроса // Экономика и мат. методы. 1989. Т. 25, № 6.
26. *Шананин А. А.* Агрегированное описание групп отраслей при помощи функции приведения разных конечных продуктов к однородному продукту // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 106—147.
27. *Данилов В. И., Сотсков А. И.* Рациональный выбор и выпуклые предпочтения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 2. С. 14—23.
28. *Лотов А. В.* Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984. 392 с.
29. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: К теории производственных функций. 1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 2. С. 18—27.
30. *Houthakker H. S.* The Pareto distribution and the Cobb—Douglas production function in activity analysis // Rev. Econ. Stud. 1955/1956. Vol. 23 (1), N 60. P. 27—31.
31. *Johansen L.* Production functions. Amsterdam; L.: North-Holland, 1972. 274 p.
32. *Шананин А. А.* Исследование одного класса производственных функций, возникающих при макроописании экономических систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. № 12. С. 1799—1811.
33. *Hildenbrand W.* Short-run production functions based on microdata // Econometrica. 1981. Vol. 49, N 5. P. 1095—1125.
34. *Шананин А. А.* Исследование одного класса функций прибыли, возникающих при макроописании экономических систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25, № 1. С. 53—65.
35. *Оленев Н. Н., Петров А. А., Поспелов И. Г.* Модель процесса изменения мощности и производственная функция отрасли хозяйства // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 46—59.
36. *Шананин А. А.* Системный анализ развивающейся экономики: К вопросу об агрегировании производственных функций и функций прибыли // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1981. № 4. С. 36—43.
37. *Дюкалов А. Н.* Некоторые задачи прикладной математической экономики. М.: Наука, 1983. 119 с.
38. *Хенкин Г. М., Шананин А. А.* Теоремы Бернштейна и преобразование Радона: Прил. в теории произв. функций // Проблемы кибернетики. М., 1989.
39. *Кондратьев Н. Д.* Большие циклы экономической конъюнктуры // Кондратьев Н. Д., Опарин Д. И. Большие циклы конъюнктуры: Докл. и их обсуждение в Ин-те экономики. М., 1928.
40. *Поспелов И. Г.* Динамическая модель рынка с посредником // Модели и методы в прогнозировании научно-технического прогресса. М.: ВНИИСИ, 1984. Вып. 2. С 37—44.
41. *Поспелов И. Г.* Вариационный принцип в описании экономического поведения // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 148—163.

42. *Шананин А. А.* О стохастическом поведении цены в одной детерминированной модели ценообразования // ДАН СССР. 1986. Т. 288, № 1. С. 63—65.
43. *Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, № 3. С. 3—37.
44. *Меньшиков С. М.* Инфляция и кризис регулирования экономики. М.: Мысль, 1979. 367 с.

К 519.86

ДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ НА РЫНКЕ

И. Г. Поспелов

1. Введение

Проблема создания, внедрения и отладки нового хозяйственного механизма в нашей стране ставит новую для математического моделирования экономики задачу — выяснить, насколько глубоко взаимосвязаны между собой отдельные элементы существующих в разных странах экономических механизмов. Для решения этой задачи надо научиться строить модели более фундаментальные, чем существуют сейчас. Такие модели должны не просто экстраполировать экономические закономерности, но объяснять причины их возникновения и указывать условия, в которых эти закономерности реализуются. Чтобы построить такие модели, надо исходить не из феноменологических закономерностей поведения людей в той или иной сложившейся экономической системе, а из небольшого числа ясных принципов, выражающих необходимые условия устойчивости и согласованности этой системы.

Мы считаем, что одним из них должно быть следующее условие, которое мы называем эволюционным принципом: цели экономических агентов[1] согласованы с их функцией в экономике таким образом, что, когда агент достигает своей цели, он одновременно обеспечивает максимальную устойчивость своего положения в качестве исполнителя данной функции. Такое согласование функций и интересов возникает в процессе отбора поведения экономических агентов экономической системой, который навязывает, воспитывает у агента интересы, соответствующие его функции (объективные интересы).

[1] Экономическими агентами мы называем отдельных лиц, коллективы или организации, которые выполняют определенную функцию в экономике и принимают конкретные хозяйственные решения, связанные с этой функцией.

Особенно естественным представляется применение эволюционного принципа к описанию рыночных экономических механизмов, поскольку на рынке есть явный и обезличенный механизм отбора поведения — ненужные, неумелые или неудачливые агенты разоряются и тем самым выбывают из системы. Некоторые модели рыночного обмена, построенные на основе эволюционного принципа, описаны в [1—4]. Настоящая работа продолжает этот цикл исследований, поэтому сначала дадим краткий обзор полученных результатов.

В [1—3] рассматривалась динамическая стохастическая модель деятельности торговца-перекупщика на рынке, где некоторый однородный продукт обменивается на деньги. Предполагалось, что торговец закупает продукт у производителей, накапливает запас его Q, а затем продает потребителям. Предполагалось также, что покупки и продажи продукта происходят в дискретные случайные (пуассоновские) моменты времени, причем в каждый из этих моментов торговец имеет дело с одним случайно выбранным внешним контрагентом — производителем или потребителем. Торговец может купить у этого производителя (продать потребителю) любое количество продукта, заплатив (получив) количество денег, определяемое фиксированной для каждого производителя (потребителя) и известной торговцу функцией предложения (спроса). Предполагалось, что все доходы и расходы торговца учитываются на едином счете в некотором идеализированном (банке, причем в типичной ситуации остаток этого счета отрицателен, т. е. торговец должен банку. Процент на эту задолженность, исчисляемый по фиксированной ставке r, непрерывно добавляется к сумме долга. Если долг превысит некоторую заданную достаточно большую величину, то торговец считается разорившимся. Поведение (стратегия) торговца в описанной модели — это правило, по которому он определяет объемы покупок или продаж продукта у каждого из контрагентов в зависимости от текущих размеров запаса и задолженности.

В соответствии с рассмотренным выше эволюционным принципом объективным интересом торговца считается стремление избежать разорения. Это означает, что в качестве описания реального поведения торговца нужно рассматривать стратегию, минимизирующую вероятность его разорения. Оказывается что в рассматриваемой модели при достаточно малой величине нормы процента r указанная стратегия одновременно обеспечивает максимум ожидаемой дисконтированной прибыли торговца [2]. Таким образом эволюционный принцип позволяет объяснить стремление торговца к прибыли. Кроме того, оказывается, что оптимальное в указанном смысле поведение торговца приводит к установлению динамического равновесия на рынке, обладающего многими свойствами классического рыночного равновесия.

[2] Показателем дисконтирования служит норма процента r.

Важнейшую роль при анализе модели играет величина максимальной ожидаемой дисконтированной прибыли торговца $R(Q)$, рассматриваемая как функция от текущего запаса продукта Q (функция Беллмана). Эта вогнутая ограниченная неотрицательная функция выражает объективно складывающуюся на рынке денежную оценку товарных запасов торговца. Отдельные характеристики этой функции можно естественно истолковать как цену торговой фирмы, оборотные фонды, меновую стоимость товарных запасов и равновесную цену продукта. Функция R определяет и оптимальное поведение торговца. Если, например, торговец, имеющий запас Q, встречает потребителя с функцией спроса $V_i(v)$, то он должен продать ему партию товара

$$\hat{v}_i(Q) = \arg\max_{0\leqslant v\leqslant Q} [V_i(v) + R(Q-v) - R(Q)]. \tag{1.1}$$

В [4] изучается аналогичная модель, отличающаяся тем, что торговцев не один, а много. При этом исследуется вопрос о существовании и свойствах эффективных (парето-оптимальных) относительно ожидаемой дисконтированной прибыли стратегий торговцев. Эта модель очень похожа на рассматриваемую ниже, поэтому мы опишем основные результаты [4] параллельно с изложением нового материала, посвященного исследованию вопроса о реализуемости эффективных стратегий торговцев.

2. Описание модели рынка

Представим себе группу $\mathcal{S}$ собственников, располагающих запасами Q_i, $i \in \mathcal{S}$, некоторого однородного продукта. Время от времени собственники получают возможность обменять друг у друга часть своего запаса продукта на деньги. Как и в [1—4], предполагается, что моменты возможных сделок для каждой пары собственников (i, j), $i, j \in \mathcal{S}$ (сделок (i, j)), образуют пуассоновский поток с частотой λ_{ij}, причем для разных пар эти потоки независимы [3]. Если моменты всех сделок объединить в одну последовательность, то она тоже будет пуассоновским потоком с частотой $\Lambda = \sum_{i,j\in\mathcal{S}} \lambda_i$, причем если какая-то сделка произошла, то вероятность того, что это именно сделка (i, j) составляет $\alpha_{ij} = \lambda_{ij}/\Lambda$. Если $\lambda_{ij} + \lambda_{ji} = 0$, то это означает, что прямые обмены между i-м и j-м собственниками невозможны и они могут передавать продукт друг другу лишь косвенно, через посредничество других собственников.

Всюду ниже для описания сделок используются следующие обозначения: объем продукта, отданного k-м собственником в сделке (i, j), обозначается через w_{ij}^k, а сумма полученных им в этой

[3] Для удобства записи формул сделка (i, j) и сделка (j, i) считаются разными событиями, так что фактически средняя частота сделок между i-м и j-м собственниками составляет $\lambda_{ij} + \lambda_{ji}$.

сделке денег — через W_{ij}^{i}. Очевидно, что

$$w_{ij}^{i} = -w_{ij}^{j}; \quad w_{ij}^{k} = 0 \quad \text{при} \quad k \neq i, j; -Q_j \leqslant w_{ij}^{i} \leqslant Q_i; \tag{2.1}$$

$$W_{ij}^{i} = -W_{ij}^{j}; \quad W_{ij}^{k} = 0 \quad \text{при} \quad k \neq i, j. \tag{2.2}$$

Если W_{ij}^{i}, $w_{ij}^{i} < 0$, то это означает, что при обмене i-й собственник фактически получает продукт и платит деньги. Второе условие в (2.2) выражает предположение об отсутствии побочных платежей при сделках. В (2.1) Q_i, Q_j — запасы продукта у контрагентов непосредственно перед сделкой. В результате сделки (i, j) исходное распределение запасов $\mathbf{Q} \stackrel{\Delta}{=} \{Q_i, \; i \in \mathcal{S}\}$ превращается в новое

$$\mathbf{Q}' = \{Q_1, \ldots, Q_i - w_{ij}^{i}, \ldots, Q_j + w_{ij}^{i}, \ldots, Q_S\} = \mathbf{Q} - w_{ij}^{i}\mathbf{g}^{ij}, \tag{2.3}$$

где $S = | \mathcal{S} |$, а $\mathbf{g}^{ij}$ — вектор размерности S, у которого i-я компонента равна 1, j-я — -1, а все остальные 0.

Предполагается, что собственники разделяются на торговцев $\mathcal{N}$ и внешних контрагентов $\mathcal{T}$, $\mathcal{S} = \mathcal{N} + \mathcal{T}$. Поведение внешних контрагентов считается заданным и характеризуется функциями T^i денежной оценки своих запасов. Эти функции внешние контрагенты используют, чтобы соизмерять доходы и расходы от сделок с изменением запасов: i-й внешний контрагент согласен на обмен (W_{ij}^{i}, w_{ij}^{i}) тогда и только тогда, когда [1]

$$W_{ij}^{i} + T^i(\mathbf{Q} - w_{ij}^{i}\mathbf{g}^{ij}) - T^i(\mathbf{Q}) \geqslant 0. \tag{2.4}$$

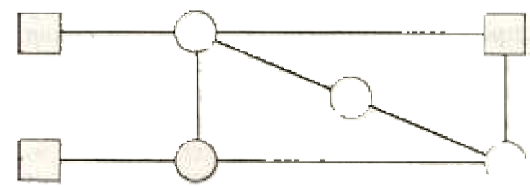
Кроме того, предполагается, что прямые сделки между внешними контрагентами невозможны ($\lambda_{ij} = 0$ при i, $j \in \mathcal{T}$), и их запасы изменяются только в результате сделок с торговцами. В этих сделках внешние контрагенты выполняют пассивную роль — принимают любое предложение о сделке, сделанное торговцем, если оно удовлетворяет (2.4).

Соотношение (2.4) показывает, что функцию $V_i^{(j,\mathbf{Q})}(w) \stackrel{\Delta}{=} T^i(\mathbf{Q} - w\mathbf{g}^{ij}) - T^i(\mathbf{Q})$, $i \in \mathcal{T}$, $j \in \mathcal{N}$, можно рассматривать как функцию спроса (при $w < 0$) или предложения (при $w > 0$) продукта i-м внешним контрагентом в сделках с j-м торговцем, зависящую от текущего распределения запасов $\mathbf{Q}$ как от параметра. Зависимость функций спроса и предложения от запасов и номера торговца — это единственное отличие описываемой модели от модели, рассматривавшейся в [4], где функции спроса и аналогичные функции предложения задаются как в (1.1). Фактически эти две модели соответствуют двум противоположным предельным случаям динамики запаса внешних контрагентов: независимость функций спроса и предложения от запаса в [4] отвечает предположению, что в промежутке между сделками купленный внешними

[1] В общем случае мы допускаем, что T^i зависит не только от Q_i, но и от запасов других собственников.

контрагентами продукт полностью потребляется и исчезает из системы, а проданный — полностью воспроизводится. Принятые здесь предположения, напротив, означают, что внешние контрагенты в промежутках между сделками сохраняют весь купленный продукт и не восполняют проданный. Функции T^i в (2.4) подобны функции R в (1.1), поэтому, как мы увидим ниже, торговцы и внешние контрагенты в модели получают единообразное описание. Следует, впрочем, отметить, что это единообразие достигается

Рис. 1



дорогой ценой — в рассматриваемой модели суммарный запас продукта в системе остается неизменным и лишь перераспределяется между собственниками. Таким образом, мы имеем здесь дело не с открытой, как в [1—4], а с гораздо менее реалистичной замкнутой системой обменов, аналогичной классической модели «чистого обмена» [5]. Причины предпринятой здесь модификации модели обсудим в конце разд. 3, а сейчас займемся описанием поведения главных действующих лиц — торговцев.

Торговцы могут обменивать на деньги продукт как у внешних контрагентов, так и у других торговцев. Наглядно систему возможных обменов можно представить в виде графа, пример которого изображен на рис. 1. Кружки изображают торговцев, квадратики — внешних контрагентов, а дуги графа соединяют собственников, для которых $\lambda_{ij} + \lambda_{ji} > 0$. Торговцы заинтересованы в деньгах и продукт приобретают только для последующей продажи.

Мы рассуждаем следующим образом. Предположим, как и в [1—3], что торговцы покупают продукт в кредит. Возникающая в связи с этим возможность разорения и соответствующий процесс отбора поведения вырабатывает у торговцев цель избежать разорения. Трактуя несколько расширительно результаты, полученные в [1—3], будем считать, что адекватное выражение этой цели — стремление максимизировать ожидаемую дисконтированную прибыль:

$$m^i(t) = \mathbf{M} \sum_{t_n > t} e^{-r(t-t_n)} W^i(t_n). \tag{2.5}$$

Здесь $\mathbf{M}$ — знак математического ожидания, r — норма процента, t — текущий момент времени, t_n — моменты будущих сделок, W^i — случайные величины доходов от этих сделок:

$$W^i(t_n) = W_{ij}^{i}(t_n) \text{ с вероятностью } \alpha_{ij}. \tag{2.6}$$

Доходы $W_{ij}^i(t_n)$ от сделки (i, j), произошедшей в момент t_n, определяются соглашениями собственников. Соотношения (2.1), (2.4) показывают, что возможности сделок ограничены только наличными запасами продукта, поэтому естественно считать распределение этих запасов $\mathbf{Q}$ полным описанием состояния системы и описывать поведение собственников функциями $W_{ij}^i(\mathbf{Q})$, $w_{ij}^i(\mathbf{Q})$, удовлетворяющими (2.1), (2.2), (2.4). Содержательно такие функции выражают условные соглашения между собственниками произвести обмен $(W_{ij}^i(\mathbf{Q}), w_{ij}^i(\mathbf{Q}))$, если к моменту сделки (i, j) сложится распределение запасов $\mathbf{Q}$. Такие соглашения подразумевают возможность получить в любой момент полную информацию о состоянии системы. Вопрос, насколько необходима фактически такая информация,— один из центральных в настоящей работе, он будет подробно обсуждаться ниже.

Итак, будем считать допустимыми стратегиями торговцев наборы $\Omega = \{W_{ij}^i(\cdot), w_{ij}^i(\cdot)\}$ ограниченных борелевских функций от $\mathbf{Q}$, определенных на положительном ортанте $\mathbf{R}_+^S$ S-мерного линейного пространства и удовлетворяющих условиям (2.1), (2.2), (2.4). Если задана некоторая допустимая стратегия Ω, то, как легко показать (см. [3]), последовательность состояний системы перед сделками $\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}(t_n - 0)$ образует дискретный марковский процесс (см. (2.3))

$$\mathbf{Q}_{n+1} = \mathbf{Q}_n - w_{ij}^i(\mathbf{Q}_n)\,\mathbf{g}^{ij} \text{ с вероятностью } \alpha_{i}, \tag{2.7}$$

который с вероятностью 1 будет продолжаться неограниченно долго. Ряд (2.5), (2.6) для этого процесса определен и сходится с вероятностью 1. В силу свойств пуассоновского процесса сумма этого ряда m^i не будет зависеть явно от времени: $m^i(t) = m_\Omega^i(\mathbf{Q}(t))$, причем функция $m_\Omega^i(\cdot)$ ограничена и удовлетворяет уравнению (см. [4]):

$$m_\Omega^i(\mathbf{Q}) = (\hat{T}_\Omega m_\Omega^i)(\mathbf{Q}) \triangleq$$
$$\triangleq \frac{1}{1+\rho}\left\{\sum_{k\in\mathcal{N}}\sum_{j\in\mathcal{S}}\alpha_{kj}\left[m_\Omega^i(\mathbf{Q} - \mathbf{g}^{kj}w_{kj}^i(\mathbf{Q})) + W_{kj}^i(\mathbf{Q})\right]\right\}, \tag{2.8}$$

где $\rho = r/\Lambda$. Внешнее суммирование в правой части не распространяется на внешних контрагентов, поскольку мы исключили прямые обмены между ними. Оператор $\hat{T}_\Omega$ в правой части (2.8) обладает следующими двумя легко доказываемыми свойствами.

Лемма 2.1. *Оператор $\hat{T}_\Omega$ сжимает полное пространство $\mathbf{B}$ ограниченных борелевских функций над $\mathbf{R}_+^S$. Если Ω_1, Ω_2 — две допустимые стратегии, а функции $b_1, b_2 \in \mathbf{B}$, такие, что*

$$b_1 = \hat{T}_{\Omega_1}b_1; \quad b_2 = \hat{T}_{\Omega_2}b_2; \quad (\forall\mathbf{Q}\in\mathbf{R}_+^S)\ \ \hat{T}_{\Omega_1}b_1 \gtrless \hat{T}_{\Omega_2}b_1, \tag{2.9}$$

го

$$(\forall\mathbf{Q}\in\mathbf{R}_+^S)\ \ b_1(\mathbf{Q}) \gtrless b_2(\mathbf{Q}). \tag{2.10}$$

Из леммы 2.1 вытекает, что уравнение (2.8) имеет единственное решение в $\mathbf{B}$, которое и задает ожидаемую дисконтированную прибыль i-го торговца при стратегии Ω.

Итак, каждый торговец стремится увеличить свою дисконтированную прибыль, но решения о сделках с другим торговцем он вынужден принимать совместно с ним, поскольку в сделке, рассматриваемой как единая операция (нерасчлененная на последовательность предложений и контрпредложений, из которых складывается торг), невозможно выделить индивидуальные управления контрагентов. В теории игр такие ситуации называются кооперативными играми, и опыт их исследования (см., например, [6]) показывает, что в этих играх нет объективно выделенного «наилучшего» решения, подобного, скажем, седловой точке антагонистической игры. С нашей точки зрения это означает, что в ситуациях типа торга существенную роль играет индивидуальность участников. Поэтому, если мы хотим извлекать из моделей поведения объективные, не зависящие от индивидуальности экономические закономерности, то следует рассматривать целые классы разумных решений и не нужно стремиться получить однозначный прогноз поведения. Иными словами, экономические законы должны указывать в первую очередь, чего не может быть в обществе, допуская любые возможности в рамках этих «запретов».

Для рассматриваемой модели подходящим классом решений представляется класс $\mathcal{P}$ эффективных стратегий. Допустимую стратегию $\hat{\Omega}$ будем называть *эффективной* (парето-оптимальной), если для любой другой допустимой стратегии Ω найдется торговец i и состояние $\mathbf{Q}$, такие, что $m_\Omega^i(\mathbf{Q}) < m_{\hat{\Omega}}^i(\mathbf{Q})$.

В рассматриваемой модели при естественных ограничениях эффективные стратегии — это стратегии $\hat{\Omega}$, максимизирующие суммарную дисконтированную прибыль торговцев $m_\Omega^{\mathcal{N}} \triangleq \sum_{i\in\mathcal{N}} m_\Omega^i$:

$$m_{\hat{\Omega}}^{\mathcal{N}}(\mathbf{Q}) = R(\mathbf{Q}) \triangleq \sup_\Omega m_\Omega^{\mathcal{N}}(\mathbf{Q}). \tag{2.11}$$

Теорема 2.2. *Пусть функции T^i, $i\in\mathcal{T}$ (см. (2.4)), вогнуты и ограничены на $\mathbf{R}_+^S$, а граф допустимых обменов между торговцами гамильтонов*[5], *тогда:*

I. *Максимальная величина суммарной дисконтированной прибыли $R(\mathbf{Q})$ — вогнутая ограниченная функция на $\mathbf{R}_+^S$, которая*

[5] Это означает, что торговцев можно занумеровать так, чтобы $\lambda_{i,i+1} > 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, |\mathcal{N}| - 1$ (см. [7, с. 7—17]). При выполнении этого условия все пары собственников оказываются связанными цепочками возможных обменов.

может быть найдена методом итераций из уравнения Беллмана:

$$R(\mathrm{Q}) = \frac{1}{1+\rho} \sum_{k \in \mathcal{N}} \Big\{ \sum_{j \in \mathcal{N}} \alpha_{kj} \max_{-Q_j \leqslant w \leqslant Q_k} R(\mathrm{Q} - w\mathrm{g}^{kj}) +$$

$$+ \sum_{j \in \mathcal{T}} \alpha_{kj} \max_{-Q_j \leqslant w \leqslant Q_k} [R(\mathrm{Q} - w\mathrm{g}^{kj}) + T^j(\mathrm{Q} - w\mathrm{g}^{kj}) - T^j(\mathrm{Q})]. \tag{2.12}$$

II. *Допустимые стратегии* $\widehat{\Omega} = \{\widehat{W}^i_{ij}, \ \widehat{w}^i_{ij}\}$, *удовлетворяющие* (2.11), *существуют и имеют вид*

$$\widehat{w}^i_{ij}(\mathrm{Q}) = \arg\max_{-Q_j \leqslant w \leqslant Q_i} [R(\mathrm{Q} - w\mathrm{g}^{ij}) + T^j(\mathrm{Q} - w\mathrm{g}^{ij})], \quad j \in \mathcal{T}, \tag{2.13}$$

$$\widehat{w}^i_{ij}(\mathrm{Q}) = \arg\max_{-Q_j \leqslant \alpha \leqslant Q_i} R(\mathrm{Q} - w\mathrm{g}^{ij}), \quad j \in \mathcal{N}, \tag{2.14}$$

$$\widehat{W}^i_{ij}(\mathrm{Q}) = T^j(\mathrm{Q} - \widehat{w}^i_{ij}(\mathrm{Q})\,\mathrm{g}^{ij}) - T^j(\mathrm{Q}), \tag{2.15}$$

$\widehat{W}^i_{ij}(\cdot)$ — *любые функции из* **B**, *удовлетворяющие* (2.2), $j \in \mathcal{N}$.

III. *Эффективны стратегии вида* (2.14)—(2.16) *и только они.*

IV. *Для любого набора функций* $\{f_i, \ i \in \mathcal{N}\}$, *таких, что* $\sum\limits_{i \in \mathcal{N}} f_i \equiv R(\mathrm{Q})$, *найдется стратегия* $\widehat{\Omega} \in \mathcal{P}$, *такая, что* $f_i \equiv m^i_{\widehat{\Omega}}$.

Ниже будем считать условия теоремы 2.2 выполненными, а доказывается она так же, как аналогичная теорема в [4]. Из (2.14)—(2.16) видно, что эффективные стратегии отличаются друг от друга только взаимными платежами торговцев — потоки продукта определяются однозначно. Функция R (Q) играет ту же роль, что и функция R (Q) в модели с одним торговцем (см. (1.1)), но не имеет столь простого экономического смысла. В [4], однако, показано, что в случае, когда функции спроса и предложения внешних контрагентов не зависят от Q, а процент достаточно мал (в (2.12) $\rho \ll 1$), в (2.14)—(2.16) функцию R (Q) можно приближенно заменить функцией $R_0\big(\sum\limits_{i \in \mathcal{N}} Q_i\big)$, которая удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению Беллмана в модели с одним торговцем. Таким образом, оказывается, что в первом приближении все эффективные стратегии регулируют проходящий через систему торговцев поток продуктов так же, как стратегия одного торговца, стремящегося избежать разорения. Это очень интересный результат, который оправдывает модель с одним торговцем, дает пример агрегирования целого класса поведений и показывает, как проявляются экономические категории при укрупнении описания экономической системы. В свете этого результата эффективные стратегии представляются естественным с экономической точки зрения описанием коллективного поведения торговца на рынке. Однако возникает вопрос, могут ли самостоятельные независимые торговцы найти и поддерживать коллективное эффективное поведение? Изучение этого вопроса составляет предмет настоящей работы.

3. Реализуемость эффективных стратегий: автономные стратегии

Вряд ли можно дать общее формальное определение реализуемости коллективной стратегии поведения. Однако, как бы мы ни подходили к вопросу о реализуемости, важную роль в его решении играет свойство устойчивости стратегии [6]. В рассматриваемой модели стратегия — это, по существу, договор между всеми торговцами, который реализуется не совместными действиями, а парными сделками. Такой договор будет устойчивым, если он не противоречит личным интересам участников сделки.

Второй важный аспект реализуемости — информационная сложность стратегии. Устойчивая и эффективная стратегия может оказаться нереализуемой просто потому, что требует слишком детальной информации о состоянии всей системы, а такую информацию отдельный агент просто не в силах собрать и обработать. К этому вопросу вернемся позже, а сейчас займемся устойчивостью и прежде всего проанализируем с этой точки зрения сделки торговца с внешним контрагентом.

Пусть стратегия Ω обеспечивает торговцу $i \in \mathcal{N}$ ожидаемую дисконтированную прибыль m^i_Ω (Q) и в сделке с внешним контрагентом $j \in \mathcal{T}$ диктует торговцу обмены (W^i_{ij} (Q), w^i_{ij} (Q)). Предположим, что торговец нарушит это требование и сменит функции W^i_{ij} (Q), w^i_{ij} (Q) на другие $\widetilde{W}^i_{ij}$ (Q), $\widetilde{w}^i_{ij}$ (Q). Если все остальные сделки будут заключаться в соответствии со стратегией Ω и окажется, что для всех Q

$$m^L_\Omega(\mathrm{Q} - \widetilde{w}^i_{ij}(\mathrm{Q})\,\mathrm{g}^{ij}) + \widetilde{W}^i_{ij}(\mathrm{Q}) \geqslant m^i_\Omega(\mathrm{Q} - w^i_{ij}(\mathrm{Q})\,\mathrm{g}^{ij}) + W^j_{ij}(\mathrm{Q}),$$

то в силу (2.8) и леммы 2.1 ожидаемая дисконтированная прибыль торговца возрастет при нарушении договора Ω. В силу (2.4), (2.2) максимально возможное значение W^i_{ij} составляет T^j (Q — — $w^i_{ij}g^{ij}$) — T^j (Q), поэтому стратегия Ω будет устойчивой относительно сделки (i, j), $j \in \mathcal{T}$, если

$$\Delta^{ij}_\Omega m^i_\Omega + \Delta^{ij}_\Omega T^j = \max_{-Q_j \leqslant w \leqslant Q_i} (\Delta^{ij}_w m^i_\Omega + \Delta^{ij}_w T^j), \qquad j \in \mathcal{T}, \tag{3.1}$$

$$W^i_{ij} = \Delta^{ij}_\Omega T^j, \qquad i \in \mathcal{N}, \ j \in \mathcal{T}. \tag{3.2}$$

Здесь и ниже для функции $F \in \mathbf{B}$

$$\Delta^{ij}_w F \triangleq F(\mathrm{Q} - w\mathrm{g}^{ij}) - F(\mathrm{Q}); \ \Delta^{ij}_\Omega F \triangleq F(\mathrm{Q} - w^i_{ij}(\mathrm{Q})\,\mathrm{g}^{ij}) - F(\mathrm{Q}).$$

Теперь обратимся к сделке (i, j) между торговцами i, $j \in \mathcal{N}$. Исходя из (2.8) и леммы 2.1, нетрудно показать, что если все остальные сделки заключаются в соответствии со стратегией Ω, то обмены $\widetilde{W}^i_{ij}$ (Q), $\widetilde{w}^i_{ij}$ (Q), удовлетворяющие условию

$$m^i_\Omega(\mathrm{Q} - \widetilde{w}^i_{ij}(\mathrm{Q})\,\mathrm{g}^{ij}) + m^j_\Omega(\mathrm{Q} - \widetilde{w}^i_{ij}(\mathrm{Q})\,\mathrm{g}^{ij}) >$$
$$> m^i_\Omega(\mathrm{Q} - w^i_{ij}(\mathrm{Q})\,\mathrm{g}^{ij}) + m^j_\Omega(\mathrm{Q} - w^i_{ij}(\mathrm{Q})\,\mathrm{g}^{ij}),$$

обеспечивают торговцам i и j бо́льшую сумму ожидаемых дисконтированных прибылей, чем стратегия Ω. Дополнительную суммарную прибыль торговцы могут разделить между собой любым способом, выбирая подходящее правило взаимных платежей [6] $W_{ij}^i = -W_{ji}^j$. Поэтому для устойчивости стратегии Ω в сделке (i, j) необходимо, чтобы

$$\Delta_\Omega^{ij} m_\Omega^i + \Delta_\Omega^{ij} m_\Omega^j = \max_{-Q_j \leqslant w \leqslant Q_i} [\Delta_w^{ij} m_\Omega^i + \Delta_w^{ij} m_\Omega^j], \quad i, j \in \mathcal{N}. \tag{3.3}$$

Однако этим условия устойчивости не исчерпываются. Один торговец не может навязать другому условия сделки, но он всегда может от сделки отказаться. Это означает, что i-й торговец может заменить обмен $(W_{ij}^i(\mathbf{Q}), w_{ij}^i(\mathbf{Q}))$ на обмен $(0, 0)$ при любых j и $\mathbf{Q}$. Опять-таки из (2.8) и леммы 2.1 заключаем, что отказ от обмена $(W_{ij}^i(\mathbf{Q}), w_{ij}^i(\mathbf{Q}))$ торговцу невыгоден, если $m_\Omega^i(\mathbf{Q} - w_{ij}^i(\mathbf{Q})\, g^{ij}) + W_{ij}^i(\mathbf{Q}) > m_\Omega^i(Q)$. Записывая симметричное условие для $W_{ij}^j(\mathbf{Q}) = -W_{ij}^i(\mathbf{Q})$, приходим к соотношению

$$W_{ij}^i = -\varkappa_{ij}^j \Delta_\Omega^{ij} m_\Omega^i + \varkappa_{ij}^i \Delta_\Omega^{ij} m_\Omega^j, \quad i, j \in \mathcal{N}, \tag{3.4}$$

где $\varkappa_{ij}^i(\cdot)$, $\varkappa_{ij}^j(\cdot)$ — произвольные функции из $\mathbf{B}$, такие, что

$$\varkappa_{ij}^j(\mathbf{Q}), \quad \varkappa_{ij}^i(\mathbf{Q}) \in [0, 1], \quad \varkappa_{ij}^i(\mathbf{Q}) + \varkappa_{ij}^j(\mathbf{Q}) \equiv 1. \tag{3.5}$$

Будем называть *устойчивыми* допустимые стратегии, удовлетворяющие (3.1)—(3.5). На языке теории игр условия (3.3), (3.4) означают, что обмены $(W_{ij}^i(\mathbf{Q}), w_{ij}^i(\mathbf{Q}))$ при устойчивости стратегии Ω должны при каждом $\mathbf{Q}$ попадать в так называемое «переговорное» множество [6] игры торговцев i и j с функциями полезности $U^i(w) = \Delta_w^{ij} m_\Omega^i$, $U^j(w) = \Delta_w^{ij} m_\Omega^j$, зависящими от состояния $\mathbf{Q}$ как от параметра. Иными словами, условие устойчивости эквивалентно тому, что торговец оценивает свой запас продукта суммой денег m_Ω^i, так же как оценивает свой запас суммой денег T^i внешний контрагент. Таким образом, при изучении устойчивых стратегий мы имеем для торговца и внешнего контрагента однородное описание.

Подставляя (3.1)—(3.5) в (2.8), после несложных преобразований получаем следующие условия, которым должны удовлетворять функции m_Ω^i при устойчивой стратегии:

$$\begin{aligned} \rho m_\Omega^i = {} & \sum_{j \in \mathcal{N}} \alpha_i \varkappa_{ij}^i \max_{-Q_j \leqslant w \leqslant Q_i} (\Delta_w^{ij} m_\Omega^i + \Delta_w^{ij} m_\Omega^j) + {} \\ & + \sum_{j \in \mathcal{N}} \alpha_{ji} \varkappa_{ji}^i \max_{-Q_i \leqslant w \leqslant Q_j} (\Delta_w^{ji} m_\Omega^i + \Delta_w^{ji} m_\Omega^j) + {} \\ & + \sum_{j \in \mathcal{T}} \alpha_{ij} \max_{-Q_j \leqslant w \leqslant Q_i} (\Delta_w^{ij} m_\Omega^i + \Delta_w^{ij} T^j) + \sum_{k \in \mathcal{S}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{N} \\ k, j \neq i}} \alpha_{kj} \Delta_\Omega^{kj} m_\Omega^i. \end{aligned} \tag{3.6}$$

[6] Этот факт доказывается так же, как утверждение IV теоремы 2.1.

Вопрос о существовании устойчивых стратегий в общем случае остается открытым. Мы сосредоточим свое внимание на одном специальном классе стратегий, для которого условия эффективности и устойчивости оказываются тесно связанными между собой [7]. Назовем допустимую стратегию *автономной*, если ожидаемая дисконтированная прибыль торговца не зависит от обменов, в которых этот торговец не участвует:

$$\Delta_w^{ij} m_\Omega^k = 0 \quad \text{при всех} \quad \mathbf{Q} \in \mathbf{R}_+^{\mathcal{S}}, \quad w \in [-Q_j, Q_i],$$
$$\text{для } i, j \in \mathcal{S}, k \in \mathcal{N}, \text{ таких, что } i, j \neq k \text{ и } \alpha_{ij} > 0. \tag{3.7}$$

Теорема 3.1. I. *Если стратегия Ω автономна и устойчива, то она эффективна.*

II. *Если стратегия Ω автономна и эффективна, то выполнены условия устойчивости* (3.1)—(3.3).

Доказательство. Если выполнено (3.7), то последняя сумма в (3.6) исчезает, а для суммарной прибыли $m_\Omega^{\mathcal{N}}$ имеем

$$\Delta_w^{ij} m_\Omega^{\mathcal{N}} = \Delta_w^{ij} m_\Omega^i + \Delta_w^{ij} m_\Omega^i. \tag{3.8}$$

В силу этого суммирование уравнений (3.6) по $i \in \mathcal{N}$ с учетом (3.5) дает для $m_\Omega^{\mathcal{N}}$ уравнение, эквивалентное (2.12). По теореме 2.2 отсюда следует I. Если стратегия автономна и эффективна, то из (2.11), (2.14), (3.8) следует (3.3), из (2.11), (2.12), (3.8) — (3.1), а из (2.15) — (3.2).

Заметим теперь, что если m_Ω^i не зависит от результатов сделки (j, k) в смысле (3.7), то $m_\Omega^i(Q_1, \ldots, Q_j, \ldots, Q_k, \ldots, Q_S) \equiv m_\Omega^i(Q_1, \ldots, Q_j + Q_k, \ldots, 0, \ldots, Q_S)$, т. е. функция m_Ω^i (а с ней, в силу (3.3), при устойчивой стратегии Ω и функции w_{ij}^i) зависит не от переменных Q_j, Q_k по отдельности, а лишь от их суммы. Таким образом, автономная устойчивая стратегия для своей реализации требует лишь агрегированной информации о состоянии системы Q.

Итак, автономные устойчивые стратегии (если они есть) образуют подмножество эффективных стратегий, удовлетворяющих обоим условиям реализуемости, указанным в начале раздела, поэтому представляется интересным выяснить, существуют ли такие стратегии? Исследование с этой точки зрения модели, предложенной в [4], показывает, что в ней устойчивых автономных стратегий нет, причем нарушается (хотя и в некотором смысле слабо) аналог требования (3.1) устойчивости стратегии относительно сделок с внешним контрагентом. Именно поэтому здесь по сравнению с [4] изменено описание поведения внешних контрагентов.

Из (3.7) видно, что ответ на вопрос о существовании автономных устойчивых стратегий в рассматриваемой модели зависит от конфигурации графа возможных обменов между торговцами — чем

[7] Такая связь a priori неожиданна. Как правило, в игровых ситуациях требования устойчивости и эффективности противоречат друг другу [6].

больше связей (т. е. пар (i, j), для которых $\alpha_{ij} > 0$), тем больше ограничений на m^i_Ω налагает условие (3.7). Поэтому мы начнем с исследования линейной цепочки обменов — гамильтонова графа с минимальным числом дуг.

4. Автономные стратегии на монопольном рынке

Рассмотрим рынок (рис. 2), на котором два внешних контрагента ($\mathcal{T} = \{0, N+1\}$) связаны цепочкой торговцев $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$:

$$\alpha_{k,k+1} = \nu_k > 0 \text{ при } k = 0, 1, \ldots, N, \qquad (4.1)$$

$$\alpha_{ij} = 0 \text{ при } j \neq i + 1.$$

Такой рынок естественно назвать монопольным, так как на нем каждый торговец полностью контролирует поток продуктов между внешними контрагентами. При некоторых естественных ограничениях на вид функций T^0, T^{N+1}, описывающих поведение внешних контрагентов, автономные устойчивые стратегии на монопольном

Рис. 2

рынке существуют. Доказательство этого факта распадается на несколько этапов. Окончательный результат приведен в конце раздела. Хочется обратить внимание читателя на своеобразные математические задачи, возникающие в процессе доказательства.

Мы используем обозначения:

$$\sigma_k^j \triangleq \sum_{i=k}^{j} Q_i, \quad \sigma_k^j = 0 \quad \text{при} \quad j < k, \sigma_k^j + \sigma_{j+1}^m \equiv \sigma_k^m, \qquad (4.2)$$

$$\hat{\theta}^k F \triangleq \max_{-Q_j \leq w \leq Q_i} F(\mathbf{Q} - w\mathbf{g}^{k,k+1}) \text{ для } F \in \mathbf{B} \qquad (4.3)$$

и следующий легко доказываемый факт:

Лемма 4.1. *Функция m^k_Ω удовлетворяет условию автономности (3.7) для монопольного рынка (4.1) тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$m^k_\Omega(\mathbf{Q}) = \psi(\sigma_0^{k-1}, Q_k, \sigma_{k+1}^{N+1}). \qquad (4.4)$$

Как мы уже отмечали выше, при отыскании устойчивых стратегий мы имеем единообразное описание интересов торговца и внешнего контрагента. Естественно сохранить это единообразие и при отыскании автономных стратегий, т. е. считать, что зависимость функций T^0, T^{N+1} от $\mathbf{Q}$ подобна (4.4). По этой причине всюду ниже мы полагаем, что

$$T^0 = T^0(Q_0, \sigma_1^{N+1}), \quad T^{N+1} = T^{N+1}(\sigma_0^N, Q_{N+1}). \qquad (4.5)$$

Если устойчивая автономная стратегия Ω_a существует, то по Лемме 4.1 функция

$$G \triangleq \sum_{i=1}^{N} m^i_{\Omega_a} + T^0 + T^{N+1} \qquad (4.6)$$

должна иметь вид

$$G = \sum_{k=1}^{N} \psi_k(\sigma_0^{k-1}, Q_k, \sigma_{k+1}^{N+1}). \qquad (4.7)$$

С другой стороны, по теоремам 2.2, 3.1 функция $R = G - T^0 - T^{N+1}$ должна удовлетворять уравнению (2.12). Из этого уравнения с учетом (4.1), (4.3) получаем уравнение для G

$$G = \hat{A}G \triangleq \frac{1}{1+\rho}\left[\sum_{k=1}^{N} \nu_k \hat{\theta}^k G + \rho(T^0 + T^{N+1})\right]. \qquad (4.8)$$

Оказывается, что требование совместности (4.7) и (4.8) еще более упрощает возможный вид функции G и приводит к необходимым и достаточным условиям существования автономных устойчивых стратегий.

Теорема 4.2. I. *Если функция вида* (4.7) *удовлетворяет уравнению* (4.8), *то*

$$G(\mathbf{Q}) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(\sigma_0^k, \sigma_{k+1}^{N+1}). \qquad (4.9)$$

II. *Если решение уравнения* (4.8) *представимо в виде* (4.9) *через непрерывные ограниченные на* $\mathbf{R}_+^{N+2}$ *функции* φ_k, *то существует устойчивая автономная стратегия* Ω_a *и функции* $m^i_{\Omega_a}$ *непрерывны.*

Доказательство этой теоремы довольно сложно, и за недостатком места мы вынуждены ограничиться лишь изложением его краткой схемы. Для доказательства I надо подставить в (4.8) последовательно $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{(k)} \triangleq (0, \ldots, 0, x, \underset{k}{y}, z, 0, \ldots, 0)$, в левых частях представить G в виде (4.9) и учесть, что $(\hat{\theta}^{k-1}G)(\mathbf{Q}^{(k)}) = f^{(k)}(x + y, z)$, $(\hat{\theta}^k G)(\mathbf{Q}^{(k)}) = g^{(k)}(x, y + z)$. Тогда для функций ψ^k получатся соотношения, из которых следует, что каждая из этих функций имеет вид (4.9). Для доказательства II надо найти функции $m^i_{\Omega_a}$, удовлетворяющие (2.8), (3.1)—(3.5), (3.7). Функции $m^i_{\Omega_a}$ ищем в виде [8]

$$m^i_{\Omega_a} = \varphi^{i-1} + \xi^i(\sigma_0^i, \sigma_{i+1}^{N+1}) - \xi^{i-1}(\sigma_0^{i-1}, \sigma_i^{N+1}), \qquad (4.10)$$

где $\xi^0 = T^0$, $\xi^N = T^{N+1}$, а остальные $\xi^i(\cdot, \cdot)$ — пока неизвестные непрерывные функции. При любых ξ^i функции (4.10) при условии

[8] Опираясь на приводимую ниже лемму 4.3, можно показать, что формула (4.10) задает общий вид распределения ожидаемой дисконтированной прибыли между торговцами при автономной устойчивости стратегии.

(4.1) удовлетворяют (3.7). По $m^i_{\Omega_a}$ из (3.1), (3.3) определяются значения w^i_{ij}, затем из (2.8) W^i_{ij} и, наконец, из (3.4) $\varkappa^i_{ij}$. При этом автоматически выполняется (3.2) и второе условие в (3.5). Самое трудное — доказать, исходя из (4.7), что выбором ξ^i можно удовлетворить первое условие в (3.5).

Теорема 4.2 сводит вопрос о существовании автономных устойчивых стратегий на монопольном рынке к вопросу о возможности представить решение уравнения (4.8) в виде (4.9). Оказывается, что функция $\Phi\colon \mathbf{R}_+^{N+2} \to \mathbf{R}^1$ разлагается в сумму вида (4.9) тогда и только тогда, когда она определенным образом выражается через свои значения на границе $\mathbf{R}_+^{N+2}$. Например, при $N = 1$

$$\Phi(Q_0, Q_1, Q_2) \equiv \Phi(Q_0, Q_1 + Q_2, 0) + \Phi(0, Q_0 + Q_1, Q_2) - \Phi(Q_0 + Q_1 + Q_2, 0, 0) - \Phi(0, Q_0 + Q_1 + Q_2, 0).$$

Л е м м а 4.3. I. *Функция* $\Phi\colon \mathbf{R}_+^{N+2} \to \mathbf{R}^1$ *представима в виде*

$$\Phi(\mathbf{Q}) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(\sigma_0^k, \sigma_{k+1}^{N+1}) \tag{4.11}$$

тогда и только тогда, когда

$$\Phi \equiv \hat{\Gamma}\Phi \triangleq \sum_{k=0}^{N} \Phi(\sigma_0^k \mathbf{e}^k + \sigma_{k+1}^{N+1}\mathbf{e}^{k+1}) - \sum_{k=0}^{N} \Phi(\sigma_0^{N+1}\mathbf{e}^k), \tag{4.12}$$

где $\mathbf{e}^k$ *— единичные векторы пространства* $\mathbf{R}^{N+2}$.

II. *Функции* φ_k *из* (4.11) *выражаются через* Φ *в виде*

$$\varphi_k(u, v) = \Phi(u\mathbf{e}^k + v\mathbf{e}^{k+1}) - \Phi((u + v)\mathbf{e}^k) + c_k(u + v), \tag{4.13}$$

где c_k *— произвольные функции, удовлетворяющие условию*

$$\sum_{k=0}^{N} c_k(x) = \Phi(x, 0, \ldots, 0). \tag{4.14}$$

III. *Если* Φ *непрерывна, то* φ_k *можно выбрать непрерывными.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4.12) очевидно следует (4.11). С другой стороны, при $Q = u\mathbf{e}^k + v\mathbf{e}^{k+1}$ из (4.11) получаем

$$\varphi_k(u, v) = \Phi(u\mathbf{e}^k + v\mathbf{e}^{k+1}) - \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_i(0, u + v) - \sum_{i=k+1}^{N} \varphi_i(u + v, 0). \tag{4.15}$$

Полагая в этом тождестве сначала $u = 0$, $v = x$, а потом $u = x$, $v = 0$ и вычитая получившиеся равенства, находим, что $\varphi_k(0, x) = \varphi_k(x, 0) + \Phi(x\mathbf{e}^{k+1}) - \Phi(x\mathbf{e}^{u})$. Подставляя эти выражения в (4.15), получаем

$$\varphi_k(u, v) = \Phi(u\mathbf{e}^k + v\mathbf{e}^{k+1}) + \varphi_k(u + v, 0) + \Phi((u + v)\mathbf{e}^0) - \Phi((u + v)\mathbf{e}^k) - \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(u + v, 0). \tag{4.16}$$

Кроме того, из (4.11) при $\mathbf{Q} = u\mathbf{e}^0$ получаем

$$\Phi(x\mathbf{e}^0) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x, 0). \tag{4.17}$$

Подставляя (4.16) в (4.11) и учитывая (4.17), получим (4.12). Тем самым I доказано. Докажем II. Из (4.16), (4.17) следует, что φ_k имеют вид (4.13), (4.14). С другой стороны, если подставить (4.13) в (4.11) и учесть (4.14), (4.17), то получится тождество. III получается из (4.13), (4.14), если взять

$$c_0(x) = \Phi(x\mathbf{e}^0),\quad c_1 = \ldots = c_N = 0.$$

Вернемся к уравнению (4.8). По теореме 2.2 его можно решать итерациями, поэтому его решение имеет вид (4.9), если оператор, стоящий в правой части этого уравнения, сохраняет представление (4.9) для некоторого класса функций. Неожиданно таким классом оказываются функции, унимодальные на симплексах.

Л е м м а 4.4. *Пусть* $\varphi\colon R^{N+2} \to \mathbf{R}^1$ *имеет вид* $\varphi = f(\sigma_0^k, \sigma_{k+1}^{N+1})$ *и функция* $h(a) \triangleq f(a, x - a)$ *унимодальна при всех* $x \geqslant 0$ *в том смысле, что все ее локальные максимумы по* a *на отрезке* $[0, x]$ *одинаковы по величине. Тогда*

$$\hat{\Gamma}\hat{\theta}^k\varphi \equiv \hat{\theta}^k\varphi. \tag{4.18}$$

Операторы $\hat{\Gamma}$, $\hat{\theta}^k$ *определены в* (4.12), (4.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства удобно обозначить

$$\|A, B\| \triangleq \max_{A \leqslant a \leqslant B} h(a). \tag{4.19}$$

В частности, заменяя переменную максимизации в (4.3), получаем

$$\hat{\theta}^k\varphi = \|\sigma_0^{k-1}, \sigma_0^{k+1}\|. \tag{4.20}$$

Поэтому из (4.12) имеем (δ_{ij} — символ Кронекера):

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}\hat{\theta}^k\varphi = {} & \sum_{j=0}^{N} \Big\| \sum_{i=0}^{k-1} (\delta_{ij}\sigma_0^j + \delta_{i,j+1}\sigma_0^{N+1}),\ \sum_{i=0}^{k+1} (\delta_{ij}\sigma_0^j + \delta_{i,j+1}\sigma_0^{N+1}) \Big\| - \\
& - \sum_{j=0}^{N} \Big\| \sum_{i=0}^{k-1} \delta_{ij}\sigma_0^{N+1},\ \sum_{i=0}^{k+1} \delta_{ij}\sigma_0^{N+1} \Big\| = \\
& = \sum_{j=0}^{k-2} \|\sigma_0^j + \sigma_{j+1}^{N+1},\ \sigma_0^j + \sigma_{j+1}^{N+1}\| + \|\sigma_0^{k-1},\ \sigma_0^{k-1} + \sigma_k^{N+1}\| + \\
& + \|0,\ \sigma_0^k + \sigma_{k+1}^{N+1}\| + \|0,\ \sigma_0^{k+1}\| + \sum_{j=k+2}^{N} \|0,\ 0\| - \\
& - \sum_{j=1}^{k-1} \|\sigma_0^{N+1},\ \sigma_0^{N+1}\| - \|0,\ \sigma_0^{N+1}\| - \|0,\ \sigma_0^{N+1}\| - \\
& - \sum_{j=k+2}^{N} \|0,\ 0\| = \|\sigma_0^{k-1},\ \sigma_0^{N+1}\| + \|0,\ \sigma_0^{k+1}\| - \\
& - \|0,\ \sigma_0^{N+1}\|.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Если теперь положить $m_1 = \| 0, \ \sigma_0^{k-1} \|$, $m_2 = \| \sigma_0^{k-1}, \ \sigma_0^{k+1} \|$, $m_3 = \| \sigma_0^{k+1}, \sigma_1^{N+1} \|$, то из (4.19), (4.20), (4.21), в силу очевидного неравенства $0 \leqslant \sigma_0^{k-1} \leqslant \sigma_0^{k-1} \leqslant \sigma_0^{N+1}$, получится, что тождество (4.18) эквивалентно тождеству

$$m_2 + \max\{m_1, m_2, m_3\} = \max\{m_2, m_3\} + \max\{m_1, m_2\}. \quad (4.22)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что (4.22) выполнено при всех возможных между тремя действительными числами m_1, m_2, m_3 соотношениях порядка, за исключением двух случаев: $m_2 < m_3 \leqslant m_1$, $m_2 < m_1 \leqslant m_2$, но именно эти случаи исключаются условием унимодальности h.

Теперь можно сформулировать окончательный результат.

Теорема 4.5. *Если функции T^0, T^{N+1}, описывающие поведение внешних контрагентов,— строго вогнутые ограниченные функции вида* (4.5), *то на монопольном рынке существуют устойчивые автономные стратегии.*

Доказательство. Покажем, что для строго вогнутой функции Φ и оператора $\hat{A}$ в (4.8)

$$\hat{\Gamma}\hat{A}\Phi = \hat{A}\Phi, \quad \text{если } \hat{\Gamma}\Phi = \Phi. \quad (4.23)$$

Из (4.8) и леммы 4.3 получаем, что

$$\hat{A}\Phi = \frac{1}{1+\rho}\left[\sum_{k=1} \nu_k \left(\hat{\theta}^k \varphi_k + \sum_{j \neq k}^{N} \varphi_j\right) + \rho T^0 + T^{N+1}\right] \quad (4.24)$$

где функции φ_k выражаются через Φ в виде (4.10). Это выражение показывает, что если Φ строго вогнута, то φ_k тоже строго вогнуты, и, следовательно, функции $h_k(a) \triangleq \varphi_k(a, \ x - a)$ унимодальны по a на $[0, x]$ при любом $x \geqslant 0$. По лемме 4.4 следует, что

$$\hat{\Gamma}\hat{\theta}^k\varphi_k = \hat{\theta}^k\varphi_k. \quad (4.25)$$

Из леммы 4.4, (3.7), (4.10) также следует, что

$$\hat{\Gamma}\varphi_k = \varphi_k, \quad \hat{\Gamma}T^i = T^i, \quad i = 1, N+1. \quad (4.26)$$

В силу линейности оператора $\hat{\Gamma}$ из (4.24)—(4.26) следует (4.23). Оператор $\hat{A}$ сжимает пространство ограниченных непрерывных функций над $\mathbf{R}_+^{N+2}$ и при строго вогнутых T^i сохраняет строгую вогнутость (см. [3, 4]). Поэтому для любой вогнутой ограниченной функции Φ вида (4.9)

$$G = \lim_{n \to +\infty} \hat{A}^n\Phi, \quad \hat{\Gamma}\hat{A}^n\Phi = \hat{A}^n\Phi. \quad (4.27)$$

Поскольку оператор $\hat{\Gamma}$ очевидно непрерывен, из (4.27) следует, что $\hat{\Gamma}G \equiv G$. Отсюда по лемме 4.3 и теореме 4.2 вытекает существование устойчивых автономных стратегий в рассматриваемой модели.

5. Обсуждение результатов: автономные стратегии

Итак, на монопольном рынке возможно устойчивое, эффективное коллективное поведение торговцев. Из (4.7), (2.12) легко заключить, что для реализации этого поведения каждый из торговцев должен знать лишь величину своего запаса и агрегированные показатели σ_0^k, σ_{k+1}^{N+1} (суммарные запасы, см. (4.2)) состояния остальных собственников. Таким образом, это поведение фактически не зависит от числа собственников на рынке. Этот результат пред-

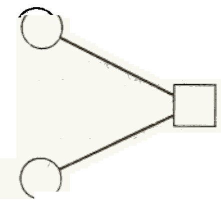


Рис. 3

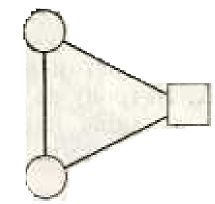


Рис. 4

ставляется интересным потому, что систему, которую мы назвали монопольным рынком, можно рассматривать как простейший пример группы предприятий, связанных в технологическую цепочку. Вопрос о гибком управлении такой цепочкой предприятий — это один из наиболее трудных и острых в проблеме совершенствования социалистического хозяйственного механизма. В свете полученных выше результатов можно наметить следующий путь решения этого вопроса. Планирующий орган должен создать систему стимулов, при которой у предприятий, составляющих цепочку, существует автономная устойчивая стратегия, и помочь найти эту стратегию. Свойства этой стратегии позволяют рассчитывать на устойчивую, эффективную, согласованную и добровольную реакцию всей технологической цепочки на изменяющийся внешний спрос.

Кроме монопольного рынка, характеризующегося единственным путем движения продукта от одного собственника к другому, мы рассматривали еще два примера «конкурентных» рынков. Соответствующие графы возможных обменов приведены на рис. 3, 4, причем функция T^1, описывающая поведение единственного внешнего контрагента, имеет вид (3.7). В обоих случаях автономных устойчивых стратегий нет. За недостатком места мы не приводим доказательства. Отметим лишь, что для рынка, изображенного на рис. 3, оно опирается на следующий любопытный факт.

Лемма 5.1. *Если три непрерывные функции f_1, f_2, f_3: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$ удовлетворяют на $\mathbf{R}_+^3$ условию $f_1(x, y+z) + f_2(x+y, z) + f_3(x+z, \ y) \equiv 0$, то $f_i(u, \ v) = g_i(u+v)$, $i = 1, 2, 3$.*

Полученные результаты кажутся противоречащими классической теории рынка, которая утверждает, что при совершенной конкуренции эффективное равновесие есть, а при монополии его существование, по меньшей мере, сомнительно [5]. Надо, однако, учесть принципиальную разницу моделей. Классическая теория исходит из существования единой цены. Такая цена, настолько, насколько она вообще существует в реальности, возникает в результате деятельности торговцев. Таким образом, классическая теория описывает формирование поведения внешних контрагентов при заданном поведении торговцев. Мы же, напротив, стремимся описать поведение торговцев, находящихся под угрозой разорения, но при этом вынуждены задаваться определенным поведением внешних контрагентов. На наш взгляд, одной классической теории недостаточно хотя бы потому, что монополизированные рынки XX века демонстрируют гораздо большую устойчивость, нежели конкурентные рынки XIX века.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору А. А. Петрову за постоянное внимание к работе и ценные обсуждения, а также канд. физ.-мат. наук А. А. Шананину за полезные консультации.

Abstract

Collective behaviour of dealers, striving to avoid ruin is considered. It is shown, that any Pareto-optimal behaviour of such a collective may be described approximately as the optimal behaviour of a single dealer also striving to avoid ruin. Stability of Pareto-optimal behaviour is also considered. It appears to be depending on the configuration of graph of possible exchanges between dealers and to be closely connected with the possibility for dealer to form his optimal behaviour on the base of aggregated description of other dealer's states.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поспелов И. Г.* Динамическая модель рынка // Экономика и мат. методы. 1988. Т. 24, № 3. С. 497—508.
2. *Поспелов И. Г.* Динамическая модель рынка с посредником // Модели и методы прогнозирования научно-технического прогресса. М.: ВНИИСИ, 1984. Вып. 2. С. 37—44.
3. *Поспелов И. Г.* Вариационный принцип в описании экономического поведения // Математическое моделирование: Процессы в слож. экон. и экол. системах. М.: Наука, 1986. С. 46—59.
4. *Поспелов И. Г.* Парето-оптимальные стратегии поведения в динамической модели рынка // АиТ. 1989. № 1. С. 33—41.
5. *Интриллигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. 617 с.
6. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985. 198 с.
7. *Басакер Р., Саати Т.* Конечные сети и графы. М.: Наука, 1986.

УДК 519.86

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ПОЛИТИКИ ФИРМ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ РЫНОЧНОГО ТИПА

Н. Н. Оленев, И. Г. Поспелов

В настоящей работе изучается замкнутая многосекторная модель экономики рыночного типа, односекторный вариант которой рассмотрен в [1]. Основу модели составляет описание жизненного цикла экономической деятельности промышленной фирмы, начиная от ее возникновения и кончая ее ликвидацией. При исследовании модели особое внимание уделяется циклическим процессам в рыночной экономике, которые привлекали и продолжают привлекать внимание многих исследователей. Как правило, для моделирования этих процессов строятся специальные модели цикла, в которые в явном виде вводятся факторы, вызывающие колебания.

В неокейнсианских моделях постулируется наличие стремления капиталистов сравнять фактический капитал с некоторым его равновесным уровнем [2]. Определяющим фактором циклического развития в моделях неоклассиков является связь колебаний прибыли с ростом заработной платы при ограниченности предложения трудовых ресурсов. В третьей группе моделей цикла предполагается связь колебаний инвестиций с наличием заданных «горбов» в возрастном распределении капитала [3].

В рассматриваемой ниже модели никаких предположений о колебательном характере поведения экономических агентов нет, тем не менее благодаря последовательному микроописанию всего процесса расширенного воспроизводства она воспроизводит одновременно все отмеченные выше явления, связанные с циклом.

1. Описание модели

Будем рассматривать хозяйство, в котором производится N продуктов. Выпуск продуктов осуществляют отдельные производственные единицы. При выпуске i-го продукта используется живой труд, который мы предполагаем однородным, и, возможно, другие продукты в качестве сырья.

Для простоты предполагаем, что каждая из производственных единиц может выпускать только один продукт. Совокупность производственных единиц, выпускающих i-й продукт, называем отраслью или сектором. Считаем, что все производственные единицы каждой i-й отрасли используют одну и ту же технологию производства и различаются между собой величиной производственной