Анализ устойчивости равновесной цены в модели ценообразования вальрасовского типа с запаздываниями.*

Обросова Н.К.

В экономической теории известна проблема моделирования возникновения экономических кризисов. Сценарий возникновения таких кризисов был предложен в середине 80-ых годов в ряде работ [1,2], посвященных динамическим моделям ценообразования в дискретном времени. Возникновение экономического кризиса обычно связывают с тем, что при превышении производственными мощностями некоторого критического значения равновесные цены теряют устойчивость. В результате возникает сложная динамика цен и экономические агенты не могут достоверно прогнозировать свою деятельность. Однако существенным недостатком дискретных моделей является то, что шаг по времени в них задается извне и никак не интерпретируется. Поэтому возникает необходимость построения модели в непрерывном времени, наследующей свойства дискретной модели. Прямой аналог дискретной модели ценообразования - простейшая модель вальрасовского типа - не подходит, т.к. при естественных предположениях о функциях предложения и спроса равновесная цена в этой модели всегда устойчива. Причиной же возникновения неустойчивости в дискретной модели является неявно присутствующая инерционность в реакции потребителя и производителя на изменение цены.

В непрерывных моделях существует два способа моделирования инерционности. В первом способе, предложенном Х.Лоренцом [5], инерционность моделируется следующим образом: предложение непосредственно от цены не зависит, а от цены зависят его произ-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00664)

водные. Таким образом, в этой модели процесс ценообразования описывается системой дифференциальных уравнений.

Второй способ моделирования инерционности, которым мы и будем пользоваться, - это введение запаздываний в модель вальрасовского типа. Рассмотрим рынок однородного товара и, следуя традиции, восходящей к Маршаллу и Вальрасу, будем считать выполненными следующие предположения:

1. в каждый момент времени товар продается по единой цене p;
2. поведение потребителей и производителей описывается соответственно функциями спроса $C(p)$ и предложения $g(p)$, причем характерное время изменения функций спроса и предложения много больше характерного времени изменения цены, т.е. эти функции не зависят явно от времени.

В этих предположениях модель вальрасовского типа с запаздываниями имеет вид:

$$\frac{dp}{dt} = \chi\Big[\frac{C(p(t-\tau_1)) - g(p(t-\tau_2))}{g(p(t-\tau_2))}\Big]p(t), \tag{1}$$

где коэффициент $\chi > 0$ имеет размерность $\frac{1}{\text{время}}$ и характеризует скорость реакции рынка на изменение цены, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$ - постоянные запаздывания, одновременно не равные 0.

Стационарным решением уравнения (1) является равновесная цена p^*, т.е. цена, при которой спрос равен предложению, если она существует. Для построения модели определим конкретный вид функций спроса и предложения. В работе [2] рассматривается модель функционирования отрасли, на основе которой построена следующая функция предложения:

$$g(p) = M\Big(1 - \Big(\frac{s\nu}{p}\Big)^{\alpha}\Big),$$

где M - производственная мощность. Коэффициент
$\alpha = 1 + \frac{\gamma}{\mu}$, где $\gamma \geq 0$ - темп роста, $\mu \geq 0$ - темп выбытия мощностей. Параметр $s\nu$ - характеристика отрасли, причем $p > s\nu$ (условие неубыточности наилучшей технологии производства).
В качестве функции спроса возьмем следующую модельную функцию [2]:

$$C(p) = C\Big(\frac{p}{s\nu}\Big)^{\beta - 1},$$

где постоянная C - характеристика спроса, β - степень необходимости товара. Всюду далее предполагается, что $\beta \leq 1$ и равновесная цена существует. Анализ устойчивости равновесной цены проводился относительно параметра $\Delta = \frac{M}{C(p^*)}$, пропорционального производственным мощностям. Исследование устойчивости проводилось при помощи теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [3].
Обсудим полученные результаты.

1. В случае $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ равновесная цена асимптотически устойчива, если $\Delta < \Delta_{gr}(\alpha, \beta, \tau_1\chi, \tau_2\chi)$, где

$$\Delta_{gr}(\alpha, \beta, \tau_1\chi, \tau_2\chi) = 1 + \alpha^{\ \ 1}(\beta \quad 1) + (2\tau\chi\alpha)^{\ \ 1}\pi \qquad (2)$$

   и неустойчива, если $\Delta > \Delta_{gr}(\alpha, \beta, \tau_1\chi, \tau_2\chi)$. Таким образом по параметру Δ определена граница устойчивости $\Delta_{gr}(\alpha, \beta, \tau_1\chi, \tau_2\chi)$. Вид функции (2) позволяет сделать следующие выводы:

   - при увеличении параметра α, т.е. при увеличении темпа роста мощностей производства, запас устойчивости равновесной цены уменьшается. Это совпадает с представлением о том, что при увеличении темпа роста мощностей наступает кризис перепроизводства (ситуация перегретой экономики);
   - чем выше степень необходимости товара (чем больше β), тем больше запас устойчивости равновесной цены;
   - граница устойчивости в случае товара первой необходимости, т.е. при $\beta = 1$, имеет вид:

     $$\Delta_{gr_1} = 1 + (2\tau\chi\alpha)^{\ \ 1}\pi.$$

     Для сравнения приведем соответствующую границу, полученную в [2] при анализе дискретной модели:

     $$\Delta_{discr} = 1 + 2\alpha^{\ \ 1}.$$

     Очевидным преимуществом модели в непрерывном времени является то, что получена явная зависимость границы устойчивости от величины запаздывания, а именно при увеличении инерционности область устойчивости уменьшается.

2. Достоинством рассматриваемой модели является то, что существует возможность исследовать устойчивость при различных запаздываниях производителя и потребителя. Для крайних случаев, когда запаздывание есть только у потребителя или только у производителя получены явные выражения для границ устойчивости на плоскости параметров (u, v). Параметр $v = \Theta\alpha(\Delta \quad 1)$ пропорционален производственной мощности, а параметр $u = \Theta(1 \quad \beta)$ пропорционален степени необходимости товара. Оба параметра пропорциональны величине

$$\Theta = \begin{cases} \tau_1\chi & \text{при} \quad \tau_2 = 0 \\ \tau_2\chi & \text{при} \quad \tau_1 = 0. \end{cases}$$

На этой же плоскости параметров можно представить границу устойчивости для случая $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, полагая при этом $\Theta = \tau\chi$. В работе показано, что на плоскости (u, v):

- область устойчивости при $\tau_1 = 0, \tau_2 > 0$ располагается под кривой

$$\begin{cases} u_{gr_1} & = & \psi_1 \arccos[\quad (\psi_1{}^2 + 1) \quad ^{0.5}] \\ v_{gr_1} & = & (\psi_1^2 + 1)^{0.5} \arccos[\quad (\psi_1{}^2 + 1) \quad ^{0.5}]. \end{cases} \quad (3)$$

  где $\psi_1 > 0$ - параметр; на плоскости (u, v) система (3) задает кривую, расположенную в первой четверти, пересекающую ось v в точке $(0, \frac{\pi}{2})$ и имеющую асимптотой прямую $v = u$, причем $\frac{v_{gr_1}}{u_{gr_1}} > 1$;

- граница устойчивости при $\tau_1 > 0$, $\tau 2 = 0$ полностью симметрична границе устойчивости (3) относительно биссектрисы первого квадранта; область устойчивости в этом случае располагается над границей устойчивости;

- область устойчивости для случая $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ - треугольник, ограниченный отрезком прямой $v = \frac{\pi}{2} \quad u$, где $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ и осями координат.

Анализ этих областей устойчивости позволяет сделать следующие выводы:

(a) в случае $\tau_1 = 0$, $\tau_2 > 0$ запас устойчивости равновесной цены всегда больше, чем в случае равных ненулевых запаздываний;

(b) в случае $\tau_1 > 0$, $\tau_2 = 0$ возможны два варианта:

- если $u < \frac{\pi}{2}$, то равновесная цена устойчива при любых значениях v, т.е. при любых производственных мощностях;
- если $u > \frac{\pi}{2}$, т.е. при достаточно большой инерционности потребителя, возникает ограничение снизу на производственные мощности.

3. Показано, что последний результат может быть в некотором смысле обобщен на случай произвольных запаздываний производителя и потребителя. А именно, если $\tau_1 \neq 0$ и $\beta < 1$, то при любых допустимых значениях τ_2 и α справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{\tau_1\chi \to \frac{\pi}{2(1\;\;\beta)}} \Delta_{gr}(\tau_1\chi, \tau_2\chi, \beta, \alpha) = 1.$$

Следовательно, при достаточно большой инерционности потребителя, независимо от запаздывания производителя и темпа роста мощностей, равновесная цена будет либо неустойчивой, либо возникает ограничение снизу на производственные мощности. Появление такого нижнего ограничения является новым эффектом, возникающим благодаря рассмотрению данной модели ценообразования.

Кроме анализа границ устойчивости, в работе получены некоторые результаты относительно сценария потери устойчивости для случая $\tau_1 = 0$. Моделирование процессов ценообразования в этом случае для $\beta = 0.25$ показало, что при переходе Δ через границу устойчивости в системе возникает устойчивый предельный цикл с периодом T, где $3\tau_2 \leq T \leq 4\tau_2$.

Для анализа типа бифуркации исходное уравнение (1) при $\tau_1 = 0$ интегрированием методом шагов [3] было преобразовано к следующим дискретным динамическим системам:

- при $\beta \neq 1$

$$y_{n+1}(t) = \;\; y^* + e^{\;\;kt}[y_n(\tau_2) + y^* + \int_0^t \frac{ke^{k\xi}}{\frac{M}{C}} \frac{1}{1 \;\; [y_n(\xi) + y^*]^{\;\;\frac{1}{k}}} d\xi], \quad t \in [0, \tau_2],$$

где $k = \frac{1\;\;\beta}{\alpha}$, $y_n = (\frac{p_n}{s\nu})^{1\;\;\beta}$, $y^* = (\frac{p_*}{s\nu})^{1\;\;\beta}$,

- при $\beta = 1$

$$x_{n+1}(t) = x_n(\tau_2) + \int_0^t [\frac{1}{\Delta \quad (\Delta \quad 1)exp(\quad x_n(\xi))} \quad 1]\, d\xi, \quad t \in [0, \tau_2],$$

где $x_n = ln((\frac{p_n}{s\nu})^{\alpha} \frac{\Delta \quad 1}{\Delta})$,

отображающим решение с отрезка $[0, \tau_2]$ на отрезок $[0, \tau_2]$. Тип бифуркации зависит от того, каким образом собственные значения операторов соответствующих линеаризованных систем покидают единичную окружность комплексной плоскости. В нашем случае единичную окружность покидает пара комплексно сопряженных собственных значений. Доказано, что при $\beta \neq 1$ собственные значения не выходят через точки $\pm i$. В этом случае к конечномерным динамическим системам любой размерности применима теорема Хопфа [4].

При $\beta = 1$ собственные значения покидают единичную окружность через точки $\pm i$. Поэтому в данном случае при потере устойчивости наблюдается явление сильного резонанса. Отметим, что такой характер бифуркации в настоящее время не изучен окончательно даже в случае конечномерных динамических систем.

Список литературы

[1] Grandmont J.-M. On endogenious competitive businnes cycles.// Econometrica. - 1985.- V. 53. N 5. - P. 995-1045.

[2] Шананин А.А. О стохастическом поведении цены в одной детерминированной модели установления цены. // ДАН СССР. - 1986. - Т. 288, N 1. - С. 63-65.

[3] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

[4] Whitley D. Discrete dynamical systems in dimensions one and two.// The Bulletin of the London Mathematical Sonety. - 1983. - V. 15. P. 3 N. 54 - P. 177-217.

[5] H.-W. Lorenz Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion Springer, 1995. - XV.