УДК 519.85

О.А. Воробейчикова, Н.М. Новикова

Векторный минимакс со связанными ограничениями.

(кафедра исследования операций факультета ВМиК)

В [1] рассмотрена задача поиска минимакса векторной функции с распадающимися ограничениями. В данной работе рассматривается задача поиска минимакса векторной функции со связанными ограничениями:

$$\operatorname*{Min}_{w\in W}\operatorname*{Max}_{z\in Z(w)}\Phi(z), \tag{1}$$

где $\Phi(z)=\{\phi_1(z),\phi_2(z),\dots,\phi_Q(z)\},\ \Phi(z)\geq 0$. (Здесь и далее "$\geq$" и "$\leq$" для векторов понимаем в смысле покомпонентного "$\geq$" и "$\leq$" соответственно.) Функции $\phi_i(z)$, $i=\overline{1,Q}$, будем предполагать непрерывными на компактах $Z(w)\subset\mathbf{R}^n$ $\forall w\in W$, отображение $Z(\cdot)$ — непрерывным по Хаусдорфу на компакте W (в евклидовом пространстве). Вектор $\Phi(z)$ называется вектором критериев или векторным критерием. Задачи такого типа возникают, в частности, при исследовании уязвимости многопродуктовых сетей [2].

Значением $\operatorname*{Max}\limits_{z\in Z(w)}\Phi(z)$ по определению является множество $\operatorname{Max}\bigcup\limits_{z\in Z(w)}\Phi(z)$, т.е. множество максимальных элементов множества $\bigcup\limits_{z\in Z(w)}\Phi(z)$, упорядоченного отношением "$\geq$, но не =" (или ">"). Это множество максимальных элементов называется множеством Эджворта-Парето (или Слейтера) [2, 1]. Таким образом, значение внутреннего максимума в (1) само по себе является множеством векторов.

Понятие решения задачи (1) может быть введено несколькими способами. Неоднозначность трактовки решения задачи (1) объясняется тем, что не ясно, как выбрать из различных множеств Эджворта-Парето (Слейтера) при разных $w \in W$ наихудшее, поскольку, если одно множество Парето не принадлежит Парето-оболочке другого, то они несравнимы. (Операция Min определена для множества, но не для набора множеств.)

В [3], следуя [1], рассматриваются две основные концепции: найти множество гарантированных значений критерия Φ, т. е. таких векторов ϕ^*, ни одну компоненту которых противник не может уменьшить; и найти множество защищаемых значений критерия Φ, т. е. таких векторов ϕ^*, которые не ухудшаемы сразу по всем компонентам. Здесь считается, что z является управлением и его выбор осуществляется оперирующей стороной, стремящейся максимизировать вектор критериев Φ, а параметр w выбирается условным противником, стремящимся минимизировать Φ (в качестве противника также может выступать неопределенный фактор). Кроме того хотелось бы найти w и $z(w)$, при которых найденные значения критерия Φ достигаются.

Введем обозначения $\underline{\Phi}$ и $\overline{\Phi}$ для множеств гарантированных и защищаемых значений критерия Φ соответственно:

$$\underline{\Phi} = \bigcap_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\phi \geq 0 |\ \Phi(z) \geq \phi\},$$

$$\overline{\Phi} = \bigcap_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\phi \geq 0 |\ \Phi(z) \not< \phi\}.$$

Утверждение 1. Справедливо равенство:

$$\overline{\Phi} = \bigcap_{w \in W} \bigcup_{i \in \overline{1,Q}} \{\phi \geq 0 |\ \phi_i \leq \max_{z \in Z(w)} \Phi_i(z)\}.$$

Концепции гарантированности соответствует в качестве значения (1) множество $\underline{\Phi}^*$ максимальных по отношению "$\geq$, но не $=$" (или "$>$") элементов множества $\underline{\Phi}$:

$$\underline{\Phi}^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcap_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\phi \geq 0 |\ \Phi(z) \geq \phi\}.$$

Концепции защищаемости соответствует в качестве значения (1) множество $\overline{\Phi}^*$ максимальных по отношению "$\geq$, но не $=$" (или "$>$") элементов множества $\overline{\Phi}$:

$$\overline{\Phi}^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcap_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\phi \geq 0 |\ \Phi(z) \not< \phi\}.$$

Можно построить в определенном смысле "промежуточные" между $\overline{\Phi}^*$ и $\underline{\Phi}^*$ множества значений (1), т.е. возможны и другие концепции решения этой задачи.

Ниже более подробно рассматривается концепция гарантированности значения (1) и исследуется множество $\underline{\Phi}^*$, которое далее будем обозначать $\Phi^* = \Phi^*[W]$.

Введем следующие определения:

$$\Phi_{\leq} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\Phi}, \quad \Phi^*_{\leq} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi^*,$$

$$\Phi_{=} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \Phi(z), \quad \Phi^*_{=} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max} \Phi_{=} = \operatorname{Max} \bigcap_{w \in W} \bigcup_{z \in Z(w)} \Phi(z),$$

$$\forall\, W' \subseteq W \quad \Phi[W'] \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{w \in W'} \bigcup_{z \in Z(w)} \Phi(z),$$

$$\forall\, W' \subseteq W \quad \Phi_{\leq}[W'] \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{w \in W'} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\phi \geq 0 |\ \Phi(z) \geq \phi\}.$$

Из этих определений следует, что $\Phi^* = \operatorname{Max} \Phi_{\leq}[W]$. Естественно, представляет интерес найти более узкое множество $W' \subset W$, для которого $\Phi^* = \operatorname{Max} \Phi_{\leq}[W']$, т.е. множество наихудших для оперирующей стороны стратегий противника. Такое множество соответствует реализации Min в (1). Как правило, нельзя выбрать одно $w' \in W$ так, чтобы $\Phi^* = \operatorname{Max} \Phi_{\leq}[\{w'\}]$, поэтому имеет смысл говорить о минимальном по включении таком множестве W'. Однако в общем случае поиск требуемого множества является самостоятельной сложной задачей, так что далее будут построены несколько более широкие множества и указан случай, когда эти множества — минимальные.

Для описания (и аппроксимации) множества максимумов векторного критерия традиционно используют его параметризацию с помощью свертки частных критериев в виде суммы (линейная свертка) для выпуклого случая или минимума (логическая свертка) с весами [2, 1]. Исследуем аналогичную возможность для рассматриваемой задачи.

Обозначим

$M \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu \geq 0 | \sum_{i=1}^{Q} \mu_i = 1\}$ – стандартный Q–мерный симплекс;

$$\widehat{W} = \{\widehat{w} = \arg\min_{w \in W}\{\max_{z \in Z(w)} \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i \phi_i(z) | \ \lambda \in M\};$$

$$I(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \{i = \overline{1,Q} | \ \mu_i \neq 0\},$$

$$W^* = \{w^* = \arg\min_{w \in W}\{\max_{z \in Z(w)} \min_{i \in I(\mu)} \mu^{-1} \phi_i(z)\} | \ \mu \in M\}. \qquad (2)$$

Утверждение 2. Если $\forall w \in W$ множество $\Phi_{\leq}[\{w\}]$ выпукло, то $\Phi^* = \operatorname{Max} \Phi_{\leq}[\widehat{W}]$, т.е. $\Phi^*[W] = \Phi^*[\widehat{W}]$.

В общем (не обязательно выпуклом) случае множество наихудших стратегий противника может быть параметризовано с помощью (2), где использована обратная логическая свертка [4].

Утверждение 3. Справедливо равенство

$$\Phi^* = \operatorname{Max} \Phi_{\leq}[W^*], \quad \text{или} \quad \Phi^*[W] = \Phi^*[W^*].$$

Утверждение 4. Если множества $\Phi[\cdot]$ таковы, что $\Phi^*_{\leq} = \Phi^*_{=}$, то $\Phi^* = \operatorname{Max} \Phi[W^*] = \Phi^*[W^*]$ и $\Phi^* = \operatorname{Max} \Phi[\widehat{W}] = \Phi^*[\widehat{W}]$.

Для выполнения условия $\Phi^*_\leq = \Phi^*_=$ достаточно, чтобы $\Phi_\leq = \Phi_=$, в частности, чтобы $\forall w \in W$, $\forall z \in Z(w)$, $\forall \phi \leq \Phi(z)$ $(\phi \geq 0)$ $\exists z' \in Z(w)$: $\phi = \Phi(z')$, как например, в задаче анализа уязвимости сетей связи [3] (если в качестве вектора частных критериев выбран мультипоток). В последней задаче, кроме того, множества $\{\Phi(z) |\ z \in Z(w)\}$ $\forall w \in W$ являются выпуклыми многогранниками (задаются линейными ограничениями), в таком случае множество W^* оказывается конечным и в общем положении минимальным по включению множеством, удовлетворяющим свойству $\Phi^*[W] = \Phi^*[W^*]$. А именно, справедливо

Утверждение 5. Пусть

1) $\phi_i(z) = z_i$, $1 \leq i \leq Q$ $(Q = n)$;

2) $\forall w \in W$ $Z(w)$ образовано линейными ограничениями-неравенствами "$\leq$" с неотрицательными коэффициентами и ограничением $z \geq 0$, причем в любой точке

$$z \in \bigcap_{w \in W} Z(w)$$

активными являются не более n ограничений;

3) $\bigcap\limits_{w \in W} Z(w)$ — n-мерный многогранник;

тогда, если Max в (1) понимается в смысле "$>$", то $\forall w^* \in W^*$ $\Phi^* \neq \operatorname{Max} \Phi[W^* \setminus \{w^*\}]$.

Параметризация (2) для множества W^* позволяет получить следующее представление для значения задачи (1) —

множества Φ^*. Это также дает возможность использовать для аппроксимации множества Φ^* методы, предложенные в [4].

Утверждение 6. Пусть $\nexists \phi^1, \phi^2 \in \Phi^*$, таких чтобы $\phi_i^1 < \phi_i^2$ $\forall i \in \{i = \overline{1,Q}| \ \phi_i^1 + \phi_i^2 > 0\}$. Тогда, если Max в (1) понимается в смысле "$>$", то

$$\Phi^* = \bigcup_{\mu \in M} (\min_{w \in W} \max_{z \in Z(w)} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \phi_i(z))\mu.$$

Замечание. В случае выпуклости Φ^* условие выполнения утверждения 6 можно заменить следующим условием:

$$\min_{i=\overline{1,Q}} \max_{\phi \in \Phi^*} \phi_i > 0.$$

Если же этот минимакс равен нулю, то можно перейти в пространство критериев меньшей размерности, в котором уже применять результат утверждения 6.

Работа поддержана проектом РФФИ N.95-01-00232а

Список литературы

[1] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.

[2] Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М., 1971.

[3] Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Потоковые задачи анализа уязвимости многопродуктовых сетей. М., 1989.

[4] Смирнов М.М. Методы аппроксимации граней множества Парето в линейной многокритериальной задаче // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн., 1996. N 3. С.37–43.

Поступила в редакцию
06.12.95

$$\operatorname*{Min}_{w\in W}\operatorname*{Max}_{z\in Z(w)}\Phi(z), \tag{1}$$

$\phi_i(z),\, i=\overline{1,Q}$

$\operatorname*{Max}_{z\in Z(w)}\Phi(z)$

$\mathrm{Max}\bigcup\limits_{z\in Z(w)}\Phi(z)$

$$\underline{\Phi}=\bigcap_{w\in W}\bigcup_{z\in Z(w)}\{\phi\geq 0|\ \Phi(z)\geq\phi\},$$

$$\overline{\Phi}=\bigcap_{w\in W}\bigcup_{z\in Z(w)}\{\phi\geq 0|\ \Phi(z)\not<\phi\}.$$

$$\overline{\Phi}=\bigcap_{w\in W}\bigcup_{i\in\overline{1,Q}}\{\phi\geq 0|\ \phi_i\leq\max_{z\in Z(w)}\Phi_i(z)\}.$$

$$\underline{\Phi}^*\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Max}\bigcap_{w\in W}\bigcup_{z\in Z(w)}\{\phi\geq 0|\ \Phi(z)\geq\phi\}.$$

$$\overline{\Phi}^*\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Max}\bigcap_{w\in W}\bigcup_{z\in Z(w)}\{\phi\geq 0|\ \Phi(z)\not<\phi\}.$$

$$\Phi_{\leq}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\underline{\Phi},\quad \Phi^*_{\leq}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\Phi^*,$$

$$\Phi_{=}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\bigcap_{w\in W}\bigcup_{z\in Z(w)}\Phi(z),\ \ \Phi^*_{=}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathrm{Max}\,\Phi_{=}=\mathrm{Max}\bigcap_{w\in W}\bigcup_{z\in Z(w)}\Phi(z),$$

$$\forall\, W'\subseteq W\quad \Phi[W']\stackrel{\mathrm{def}}{=}\bigcap_{w\in W'}\bigcup_{z\in Z(w)}\Phi(z),$$

$$\forall\ W' \subseteq W \quad \Phi_{\leq}[W'] \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{w\in W'} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\phi \geq 0 |\ \Phi(z) \geq \phi\}.$$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu \geq 0 |\ \sum_{i=1}^{Q} \mu_i = 1\} - \ \text{стандартный}\, Q\text{−мерный симплекс};$$

$$\widehat{W} = \{\widehat{w} = \arg\min_{w\in W} \{ \max_{z\in Z(w)} \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i \phi_i(z) |\ \lambda \in M\};$$

$$I(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \{i = \overline{1,Q} |\ \mu_i \neq 0\},$$

$$W^* = \{w^* = \arg\min_{w\in W} \{ \max_{z\in Z(w)} \min_{i\in I(\mu)} \mu^{-1} \phi_i(z)\} |\ \mu \in M\}. \tag{2}$$

$$z \in \bigcap_{w\in W} Z(w)$$

$\not\exists \phi^1, \phi^2 \in \Phi^*$, таких чтобы $\phi_i^1 < \phi_i^2\ \forall i \in \{i = \overline{1,Q} |\ \phi_i^1 + \phi_i^2 > 0\}$.

$$\Phi^* = \bigcup_{\mu\in M} (\min_{w\in W} \max_{z\in Z(w)} \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1} \phi_i(z))\mu.$$

$$\min_{i=\overline{1,Q}} \max_{\phi\in\Phi^*} \phi_i > 0.$$